I) Objectif

Fonction dérivée de la fonction carré et de la fonction inverse

II) Dérivée de la fonction carrée

Posons $f(x) = x^2$.

Calculons son taux d'accroissement.

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h}$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{2xh + h^2}{h} = \frac{h(2x+h)}{h} = 2x + h$$

Or $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} (2x+h) = 2x$

Pour tout x réel, la limite du taux d'accroissement est finie est vaut $2x$.

La fonction carrée est donc dérivable en x et a pour dérivée $2x$.

$$\boxed{\left[x^2\right]' = 2x}$$

III) Dérivée de la fonction inverse

Posons $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Calculons son taux d'accroissement.

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\dfrac{1}{x+h} - \dfrac{1}{x}}{h} = \frac{\dfrac{x}{x(x+h)} - \dfrac{x+h}{x(x+h)}}{h}$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\dfrac{x-(x+h)}{x(x+h)}}{h} = \frac{\dfrac{x-x-h}{x(x+h)}}{h}$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\dfrac{-h}{x(x+h)}}{h} = -\frac{h}{x(x+h)} \times \frac{1}{h} = -\frac{1}{x(x+h)}$$

Or $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} -\dfrac{1}{x(x+h)} = -\dfrac{1}{x^2}$

Pour tout x réel non nul, la limite du taux d'accroissement est finie est vaut $-\dfrac{1}{x^2}$.

La fonction inverse est donc dérivable en x non nul et a pour dérivée $-\dfrac{1}{x^2}$.

$$\boxed{\left[\frac{1}{x}\right]' = -\frac{1}{x^2}}$$