I) Objectif

Résoudre une équation du type : $ax^2 + bx + c = 0$.

II) Des essais

Soit l'équation $3x^2 - 6x + 5 = 0$.

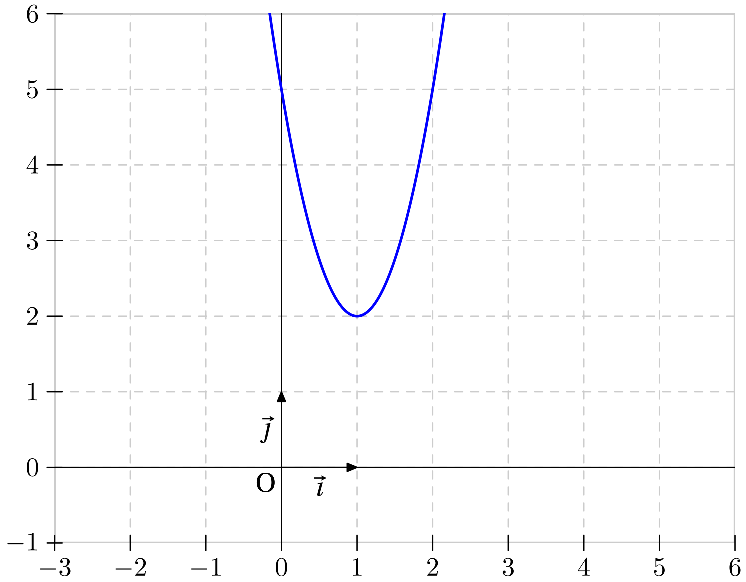
Posons $f(x) = 3x^2 - 6x + 5$.

Si $(\mathcal{C}_f)$ coupe l'axe des abscisses, il y aura des solutions. Cherchons alors sa forme canonique.
$f(x) = 3x^2 - 6x + 5$

$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$

- $a = 3$
- $\alpha = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{6}{6} = 1$
- $\beta = f(\alpha) = 3 \times 1^2 - 6 \times 1 + 5 = 2$

D'où, $f(x) = 3\left(x - 1\right)^2 + 2$.



Dans notre cas, $f(x)$ admet un minimum positif. $(\mathcal{C}_f)$ est au dessus de l'axe des abscisses. L'équation $3x^2 - 6x + 5 = 0$ n'admet pas de solution.

Essayons de factoriser à partir de cette forme canonique.

$f(x) = 3\left(x - 1\right)^2 + 2$

$f(x) = 3\left[\left(x - 1\right)^2 + \dfrac{2}{3}\right]$

Dans les crochets, on ne retrouve pas une différence de deux carrés. On ne peut factoriser davantage.

Soit l'équation $3x^2 - 6x - 6 = 0$.

Posons $f(x) = 3x^2 - 6x - 6$.

Si $(\mathcal{C}_f)$ coupe l'axe des abscisses, il y aura des solutions. Cherchons alors sa forme canonique.
$f(x) = 3x^2 - 6x - 6$

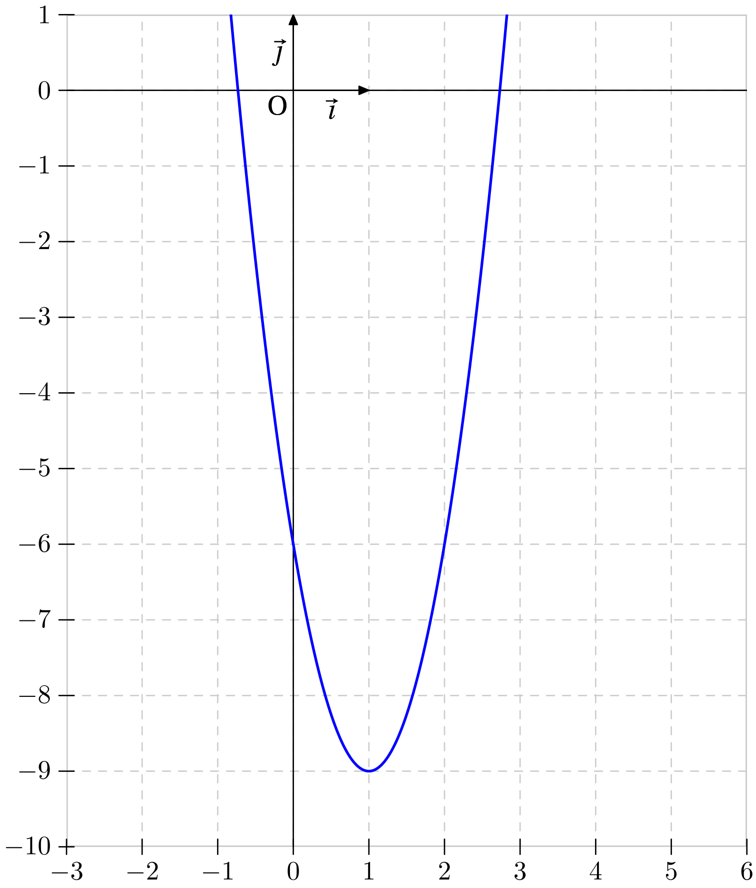
$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$

- $a = 3$

- $\alpha = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{6}{6} = 1$

- $\beta = f(\alpha) = 3 \times 1^2 - 6 \times 1 - 6 = -9$

D'où, $f(x) = 3\left(x-1\right)^2 - 9$.



Dans notre cas, $f(x)$ admet un minimum négatif. $(\mathcal{C}_f)$ coupe l'axe des abscisses. L'équation $3x^2 - 6x + 5 = 0$ admet deux solutions.

Factorisons à partir de cette forme canonique.

$f(x) = 3\left(x-1\right)^2 - 9$

$f(x) = 3\left[\left(x-1\right)^2 - 3\right]$

$f(x) = 3\left[\left(x-1\right)^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2\right]$

On retrouve une différence de deux carrés.

$f(x) = 3\left(x - 1 - \sqrt{3}\right)\left(x - 1 + \sqrt{3}\right)$

D'où les solutions de l'équation $f(x) = 0$:

$\mathcal{S} = \{1-\sqrt{3}\ ;\ 1+\sqrt{3}\}$

III) Avec des programmes Python

```
"""
Ce programme renvoie la ou les solutions éventuelles de
l'équation ax^2+bx+c=0.
"""

import math

#---------------- les coefficients à rentrer
a = 3
b = -6
c = -6

#---------------- le discriminant
delta = b**2-4*a*c

#---------------- les trois cas
if (delta>0) :
    x1 = (-b-math.sqrt(delta))/(2*a)
    x2 = (-b+math.sqrt(delta))/(2*a)
    print(f"Il y a deux solutions : x1 = {x1} et x2 = {x2}")
elif (delta==0) :
    x0 = (-b)/(2*a)
    print(f"Il y a une solution : x0 = {x0}")
else :
    print(f"Il n'y a pas de solution.")

```

```
Il y a deux solutions : x1 = -0.7320508075688773 et x2 = 2.732050807568877
```

IV) Démonstration

On veut résoudre l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

Posons $P(x) = ax^2 + bx + c$

Recherchons sa forme canonique :

$P(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$

- $\alpha = \dfrac{-b}{2a}$

- $\beta = f(\alpha) = a \times \left(\dfrac{-b}{2a}\right) + b \times \left(\dfrac{-b}{2a}\right) + c = \dfrac{b^2}{4a} - \dfrac{2b^2}{4a} + \dfrac{4ac}{4a} = \dfrac{-b^2+4ac}{4a}$

D'où, $P(x) = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 + \dfrac{-b^2 + 4ac}{4a}$.

$P(x) = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$

$P(x) = a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$

Dans les crochets, on retrouvera une différence de deux carrés si $b^2 - 4ac \geqslant 0$.

Posons $\Delta = b^2 - 4ac$, le discriminant de $P(x)$.

$P(x) = a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right]$

<u>Premier cas : $\Delta < 0$</u>

On ne peut pas factoriser.

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'admet pas de solution.

$\mathcal{S} = \emptyset$

<u>Deuxième cas : $\Delta > 0$</u>

$P(x) = a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \left(\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right]$

$P(x) = a\left(x + \dfrac{b}{2a} - \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \dfrac{b}{2a} + \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux solutions $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

$\mathcal{S} = \{x_1 \ ; \ x_2\}$

<u>Troisième cas : $\Delta = 0$</u>

$P(x) = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet une solution $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$.

$\mathcal{S} = \{x_0\}$