Exercice 1

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g' = g$ et $g(0) = 2$.
On pose pour tout réel x, $f(x) = \frac{1}{2}g(x)$.

1) Calculer $f(0)$.

$f(0) = \frac{1}{2}g(0) = \frac{1}{2} \times 2 = 1$

2) Montrer que pour tout réel x, $f'(x) = f(x)$.

$f'(x) = \frac{1}{2}g'(x) = \frac{1}{2}g(x) = f(x)$

3) En déduire que pour tout réel x, $g(x) = 2\ exp(x)$.

On a $f' = f$ avec $f(0) = 1$. Alors $f(x) = e^x$.

Or, $f(x) = \frac{1}{2}g(x)$, d'où $g(x) = 2\ e^x$.

Exercice 2

QCM

Une expression de la dérivée de $f : x \longmapsto -5\ e^{-2x+3}$ est :

1) $(10x-3)\ e^{-2x+3}$

2) $-5+(-2)\times e^{-2x+3}$

3) $\boxed{10\ e^{-2x+3}}$

4) $-7\ e^{-2x+3}$

Exercice 3

On considère les fonctions $f : x \longmapsto e^{2x-5}$ et $g : x \longmapsto e^{-2x+3}$ définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.

1) **a)** Déterminer une expression de la dérivée de f et de la dérivée de g.

$f(x) = e^{2x-5}$ alors $f'(x) = 2\ e^{2x-5}$
$g(x) = e^{-2x+3}$ alors $g'(x) = -2\ e^{-2x+3}$

b) Étudier de chacune de ces dérivées sur $\mathbb{R}$.

Pour tout x, $f'(x) > 0$.

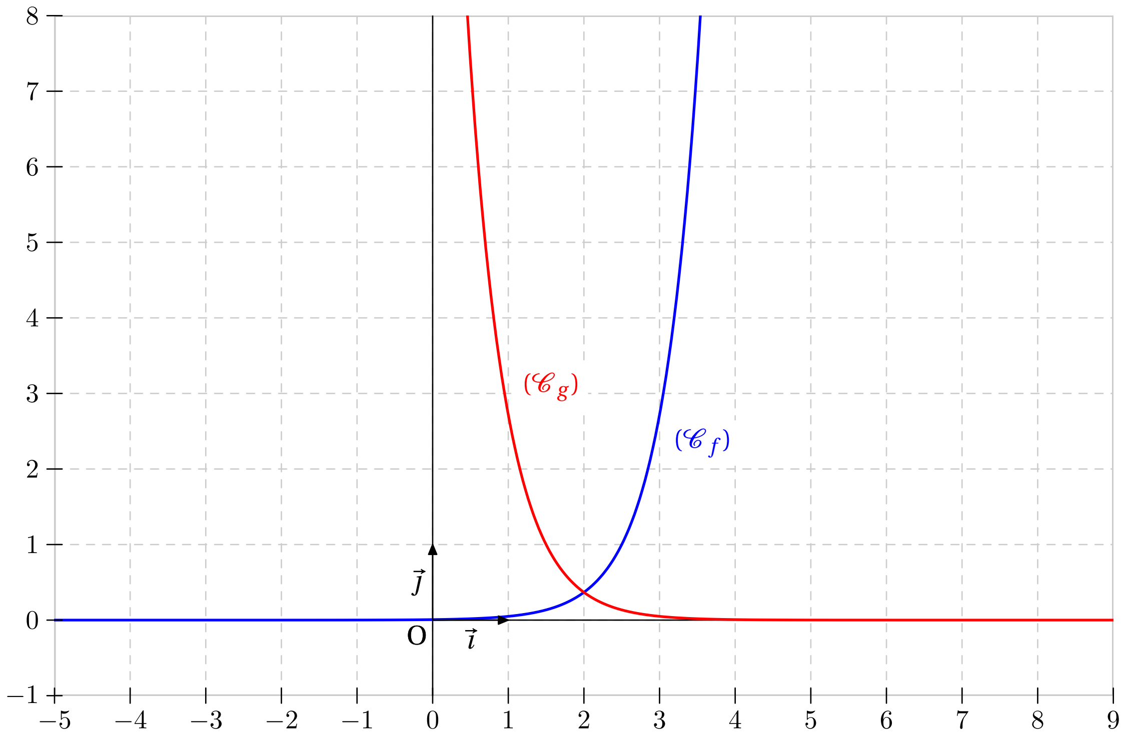
Pour tout x, $g'(x) < 0$.

c) En déduire les variations de f et celui de g sur $\mathbb{R}$.

f est croissante sur $\mathbb{R}$.

g est décroissante sur $\mathbb{R}$.

2) **a)** Tracer les courbes représentatives de f et de g sur un outil numérique.



b) Conjecturer la valeur de l'éventuelle solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $f(x) = g(x)$.

Il semble que $f(x) = g(x)$ pour $x = 2$.

c) Valider ou corriger la conjecture émise à la question b en résolvant une équation.

Résolvons l'équation : $f(x) = g(x)$.

$e^{2x-5} = e^{-2x+3}$

$2x - 5 = -2x + 3$

$4x = 8$

$x = 2$

La conjecture est vraie.

d) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $g(x) > f(x)$.

$g(x) > f(x)$

$e^{-2x+3} > e^{2x-5}$

La fonction exponentielle étant croissante,

$-2x + 3 > 2x - 5$

$-4x > -8$

$x < 2$

$\mathcal{S} = \left]-\infty\ ;\ 2\right[$

Exercice 4

1) On considère la fonction $g : x \longmapsto (x-2)\ e^{-2x+6} + 3$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

a) Déterminer une expression de la dérivée de g.

$g(x) = (x-2)\ e^{-2x+6} + 3$

$g'(x) = [(x-2)\ e^{-2x+6}]'$

$[uv]' = u'v + uv'$ avec $\begin{array}{ll} u = x-2 & v = e^{-2x+6} \\ u' = 1 & v' = -2\ e^{-2x+6} \end{array}$

$g'(x) = e^{-2x+6} + (x-2)(-2\ e^{-2x+6})$

$g'(x) = (1 - 2x + 4)\ e^{-2x+6}$

$g'(x) = (-2x+5)\ e^{-2x+6}$

b) Donner le tableau de signes de cette dérivée de g.

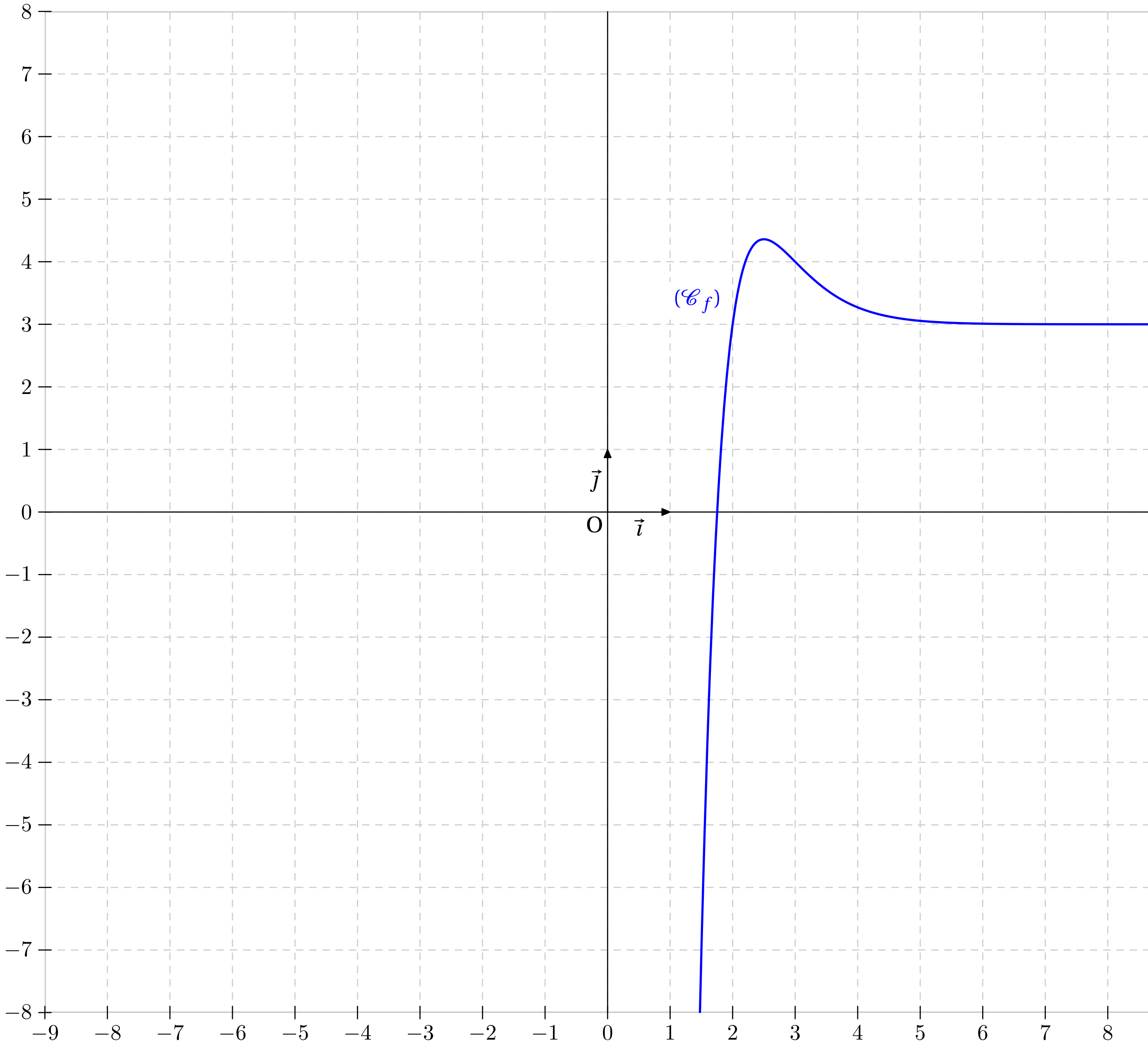
x	$-\infty$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
Signe de $-2x+5$		$+$	0	$-$	
Signe de e^{-2x+6}		$+$	|	$+$	
Signe de $g'(x)$		$+$	0	$-$	

c) En déduire le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
Signe de $g'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de g	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{e+6}{2}$	$\searrow$	3

2) Le bénéfice (en millions d'euros) d'une grande entreprise en fonction de la quantité x (en tonnes) de métal vendue est donnée par la fonction g.

a) Quelle quantité minimale doit vendre l'entreprise pour réaliser un bénéfice ?



Il faut produire environ $1,8$ tonne.

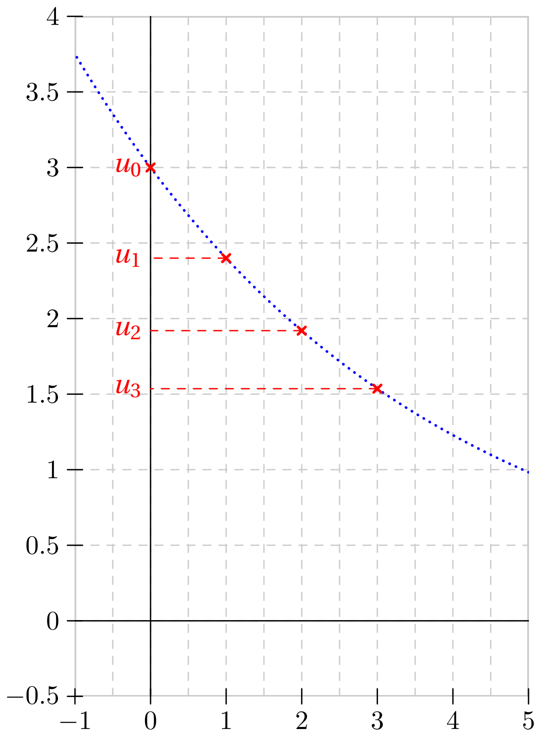
b) Quel est le bénéfice maximal ? Pour quelle quantité de métal vendu ?

Pour environ $2,4$ tonnes, on a un bénéfice d'environ $4,4$ millions d'euros

Exercice 5

On considère la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 3 \times 0,8^n$.

1) Représenter les quatre premiers termes de la suite.



2) Le nuage de points obtenu se situe sur la représentation graphique d'une fonction de la forme $f : t \longmapsto a \times e^{kt}$.
Déterminer la valeur du nombre réel a et une valeur approchée du nombre réel k à 10^{-2} près.

$f(t) = a \times e^{kt}$

$f(0) = 3$ donc $a = 3$.

$f(1) = 3 \times 0,8 = 2,4$

donc $3\ e^k = 2,4$

$e^k = 0,8$

$k \approx -0,22$

Exercice 6

Coûts de production minimum

Une entreprise fabrique chaque jour x tonnes d'un produit. Le coût total mensuel, en milliers d'euros, pour produire x tonnes du produit est modélisé par la fonction C définie sur $[0\ ;\ 10]$ par $C(x) = (2x - 9)\ e^{1-0,5x}$.

1) Le coût marginal, qui correspond au supplément de coût total pour la production d'une tonne supplémentaire, est égal à la dérivée du coût total.

a) Montrer que le coût marginal peut s'écrire $C_m(x) = (6,5 - x)\ e^{1-0,5x}$.

$C(x) = (2x - 9)\ e^{1-0,5x}$

$[uv]' = u'v + uv'$ avec $\begin{array}{ll} u = 2x - 9 & v = e^{1-0,5x} \\ u' = 2 & v' = -0,5\ e^{1-0,5x} \end{array}$

$C_m(x) = C'(x) = 2\ e^{1-0,5x} + (2x - 9)(-0,5\ e^{1-0,5x})$

$C_m(x) = (2 - x + 4,5)\ e^{1-0,5x})$

$C_m(x) = (6,5 - x)\ e^{1-0,5x}$

b) Donner le tableau de signes de $C_m(x)$ sur $[0\ ;\ 10]$ et en déduire le tableau de variations de C sur $[0\ ;\ 10]$.

Sur $[0\ ;\ 6,5]$, $C_m(x) \geqslant 0$.

Sur $[6,5\ ;\ 10]$, $C_m(x) \leqslant 0$.

x	0		6.5		10
Signe de $C'(x)$		+	0	−	
Variations de C	$-9e$	↗	0.421596898247	↘	$\frac{11}{e^4}$

c) Pour combien de tonnes produites quotidiennement le coût total mensuel est-il maximum ?

Le coût total mensuel est maximum pour $6,5$ tonnes.

2) Le coût moyen de production est donné par la formule $f(x) = \dfrac{C(x)}{x}$.
Avec un logiciel de calcul formel, on a obtenu la dérivée de ce coût moyen.

$f(x) = (2x - 9) \cdot \dfrac{e^{1-0.5x}}{x}$

$g(x) = \text{Dérivée}(f)$

$-\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{9x\,e^{-\frac{1}{2}x+1} - 2x^2\,e^{-\frac{1}{2}x+1} + 18\,e^{-\frac{1}{2}x+1}}{x^2}$

a) Après avoir cherché les racines de $-2x^2 + 9x + 18 = 0$, donner le tableau de signes de la fonction g, puis le tableau de variations de f sur $[0\ ;\ 10]$.

Posons $P(x) = -2x^2 + 9x + 18$.
Calculons son discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = (9)^2 - 4(-2)(18) = 225$

$\sqrt{\Delta} = 15$
Comme $\Delta > 0$, $P(x)$ admet deux racines x_1 et x_2 :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-9-15}{-4} = 6$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-9+15}{-4} = -1,5$$

$$g(x) = f'(x) = \frac{1}{2}\frac{(-2x^2+9x+18)\ e^{1-0,5x}}{x^2}$$

$$g(x) = -\frac{(x-6)(x+1,5)\ e^{1-0,5x}}{x^2}$$

x	0		6		10
Signe de -1		$-$		$-$	
Signe de $x-6$		$-$	0	$+$	
Signe de $x+1.5$		$+$		$+$	
Signe de $e^{1-0.5x}$		$+$		$+$	
Signe de x^2	0	$+$		$+$	
Signe de $g(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

x	0		6.000000000000		10
Signe de $f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
Variations de f	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	0.0676676416183	$\searrow$	$\frac{11}{10e^4}$

b) <u>En déduire le coût moyen maximum de production.</u>

Le coût moyen maximum est obtenu pour 6 tonnes de production. Il vaut environ $0,068$ milliers d'euros, soit 68 euros.