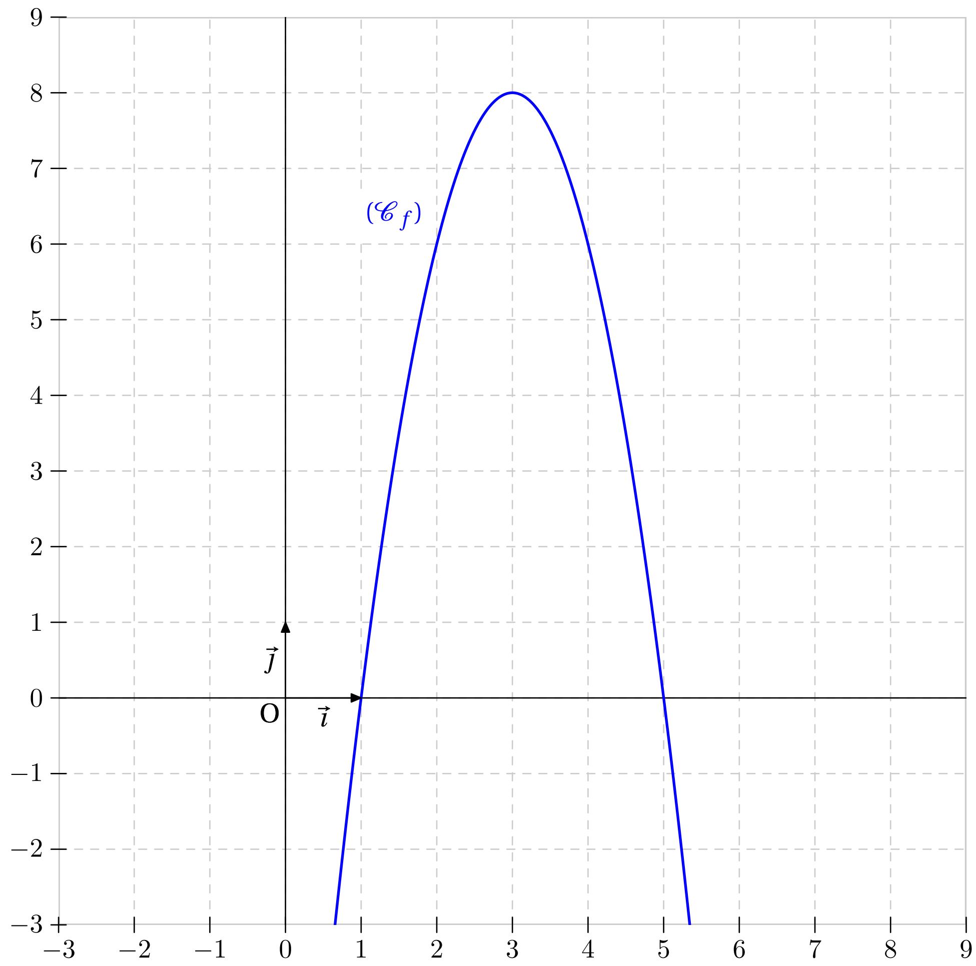
Exercice 1



La courbe $(\mathcal{C}_f)$ ci-dessus est une parabole représentation la fonction f définie par $f(x) = ax^2 + bx + c = a(x-\alpha)^2 + \beta$.

1) Quel est le signe de a ?

$(\mathcal{C}_f)$ est tournée vers le bas. Alors, $a < 0$.

2) Que vaut le signe du discriminant Δ (sans calculs).

$(\mathcal{C}_f)$ coupe deux fois l'axe des abscisses. Alors, $\Delta > 0$.

3) Que vaut α ?

Le sommet a pour abscisse $\alpha = 3$.

4) Que vaut β ?

Le sommet a pour ordonnée $\beta = 8$.

5) Retrouver la forme développée.

$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$

$f(x) = a(x-3)^2 + 8$

de plus $f(5)=0$, donc $a(5-3)^2+8=0$.
$4a+8=0$ et $a=-2$.

D'où la forme canonique :$f(x)=-2(x-3)^2+8$

$f(x)=-2(x-3)^2+8$
$f(x)=-2(x^2-6x+9)+8$
$f(x)=-2x^2+12x-18+8$

$f(x)=-2x^2+12x-10$

6) Calculer Δ.

$\Delta=b^2-4ac=(12)^2-4(-2)(-10)=64$

7) Résoudre $f(x)=0$. Interpréter graphiquement.

$\sqrt{\Delta}=8$
Comme $\Delta>0$, l'équation $f(x)=0$ admet deux solutions x_1 et x_2 :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-12-8}{-4}=5$$

$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-12+8}{2}=1$$

$\mathcal{S}=\{1\ ;\ 5\}$

Interprétation graphique : $(\mathcal{C}_f)$ coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses 1 et 5.

Exercice 2

Résoudre l'équation $2x^2 + 5x - 3 = 0$.

Posons $P(x) = 2x^2 + 5x - 3$.
Calculons son discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = (5)^2 - 4(2)(-3) = 49$
$\sqrt{\Delta} = 7$
Comme $\Delta > 0$, l'équation $P(x) = 0$ admet deux solutions x_1 et x_2 :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 - 7}{4} = -3$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 + 7}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\mathcal{S} = \left\{ -3 \ ; \ \frac{1}{2} \right\}$$

Exercice 3

Donner le tableau de signes de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -5(2x-3)(-x+4)$.

---

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		4		$+\infty$
Signe de -5		$-$	|	$-$	|	$-$	
Signe de $2x-3$		$-$	0	$+$	|	$+$	
Signe de $-x+4$		$+$	|	$+$	0	$-$	
Signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Exercice 4

Résoudre l'inéquation $-2x^2 - 12x - 10 \leqslant 0$.

$-2x^2 - 12x - 10 \leqslant 0$
$x^2 + 6x + 5 \geqslant 0$
$(x+1)(x+5) \geqslant 0$

Posons $P(x) = (x+1)(x+5)$.
On a le tableau de signes :

x	$-\infty$		-5		-1		$+\infty$
Signe de $x+1$		$-$	|	$-$	0	$+$	
Signe de $x+5$		$-$	0	$+$	|	$+$	
Signe de P(x)		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\mathcal{S} =]-\infty\ ;\ -5] \cup [-1\ ;\ +\infty[$

Exercice 5

1) Soient u et v deux réels.

a) Développer le produit $(x-u)(x-v)$.

$(x-u)(x-v) = x^2 - xu - xv + uv$

$(x-u)(x-v) = x^2 - (u+v)x + uv$

b) En déduire que les réels u et v sont les racines du polynôme $x^2 - Sx + p$, où $S = u + v$ et $P = u\ v$.

$(x-u)(x-v) = x^2 - (u+v)x + uv$

Donc $(x-u)(x-v) = x^2 - Sx + P$

u et v sont les racines du polynôme $x^2 - Sx + p$, où $S = u + v$ et $P = u\ v$.

2) Existe-t-il deux nombres réels u et v :

a) dont le produit est 6 et la somme 4 ?

$x^2 - 4x + 6 = 0$

Posons $P(x) = x^2 - 4x + 6$.
Calculons son discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = (4)^2 - 4(1)(6) = -12$

Comme $\Delta > 0$, $P(x)$ n'admet pas de racine.

u et v n'existent pas dans ce cas.

b) dont le produit est 6 et la somme 8 ?

$x^2 - 8x + 6 = 0$

Posons $P(x) = x^2 - 57x + 540$.
Calculons son discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = (8)^2 - 4(1)(6) = 24$

Comme $\Delta > 0$, $P(x)$ admet deux racines x_1 et x_2 :

u et v existent dans ce cas.

3) Écrire en langage Python un algorithme qui permet de déterminer deux réels dont la somme et le produit sont deux entiers fixés et entrés par l'utilisateur.

```python
import math

S = int(input("S = "))
P = int(input("P = "))

d=S**2-4*P

if (d>0) :
    x1 = (S-math.sqrt(d))/2
    x2 = (S+math.sqrt(d))/2
    print(f"x_1 = {x1}")
    print(f"x_2 = {x2}")
elif (d==0) :
    x0 = S/2
    print(f"x_0 = {x0}")
else :
    print("Pas de solution.")

```

Exercice 6

Équations bicarrées

On veut résoudre l'équation (E) suivante, appelée équation bicarrée :

$$x^4 - 9x^2 + 14 = 0.$$

1) On pose $X = x^2$.
Écrire l'équation (E) en fonction de X.

$x^4 - 9x^2 + 14 = 0$
On pose $X = x^2$.

$X^2 - 9X + 14 = 0$

2) Résoudre l'équation en X.

Posons $P(X) = X^2 - 9X + 14$.
Calculons son discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = (-9)^2 - 4(1)(14) = 25$
$\sqrt{\Delta} = 25$
Comme $\Delta > 0$, $P(X)$ admet deux racines X_1 et X_2 :

$X_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{9-5}{2} = 2$

$X_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{9+5}{2} = 7$

D'où les solutions de l'équation $X^2 - 9X + 14 = 0$.

$\mathcal{S} = \{2\ ;\ 7\}$

3) En déduire les solutions de (E).

$X = 2$
$x^2 = 2$
$x = \pm\sqrt{2}$

$X = 7$
$x^2 = 7$
$x = \pm\sqrt{7}$

D'où les solutions de l'équation $x^4 - 9x^2 + 14 = 0$.

$\mathcal{S} = \left\{-\sqrt{7}\ ;\ -\sqrt{2}\ ;\ \sqrt{2}\ ;\ \sqrt{7}\right\}$

4) Appliquer cette méthode pour résoudre les équations bicarrées suivantes :

a) $-2x^4 + 7x^2 - 5 = 0$

$-2x^4 + 7x^2 - 5 = 0$
Posons $X = x^2$.
$-2X^2 + 7x - 5 = 0$

Posons $P(X) = -2X^2 + 7X - 5$.
Calculons son discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = (7)^2 - 4(-2)(-5) = 9$
$\sqrt{\Delta} = 3$
Comme $\Delta > 0$, $P(X)$ admet deux racines X_1 et X_2 :

$X_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-7-3}{-4} = \dfrac{5}{2}$

$X_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-7+3}{-4} = 1$

D'où les solutions de l'équation $-2X^2 + 7X - 5 = 0$.

$\mathcal{S} = \left\{1 \ ; \ \dfrac{5}{2}\right\}$

$X = 1$
$x^2 = 1$
$x = \pm 1$

$X = \dfrac{5}{2}$
$x^2 = \dfrac{5}{2}$
$x = \pm\sqrt{\dfrac{5}{2}}$ donc $x = \pm\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

D'où les solutions de l'équation $-2x^4 + 7x^2 - 5 = 0$.

$\mathcal{S} = \left\{-\dfrac{\sqrt{10}}{2} \ ; \ -1 \ ; \ 1 \ ; \ \dfrac{\sqrt{10}}{2}\right\}$

b) $x^4 + x^2 - 20 = 0$

$x^4 + x^2 - 20 = 0$
On pose $X = x^2$.

$X^2 + X - 20 = 0$

c) Résoudre l'équation en X.

Posons $P(X) = X^2 + X - 20$.
Calculons son discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4(1)(20) = 81$
$\sqrt{\Delta} = 9$
Comme $\Delta > 0$, $P(X)$ admet deux racines X_1 et X_2 :

$X_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1-9}{2} = -5$

$X_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-1+9}{2} = 4$

D'où les solutions de l'équation $X^2 + X - 20 = 0$.

$\mathcal{S} = \{-5 \ ; \ 4\}$

$X = -5$
$x^2 = -5$
Pas de solution
$X = 4$
$x^2 = 4$ $x = \pm 2$

D'où les solutions de l'équation $x^4 + x^2 - 20 = 0$.

$\mathcal{S} = \{-2 \ ; \ 2\}$