Exercice 1

Soient $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ deux vecteurs tels que $AB = 4$, $AC = 5$ et $\widehat{BAC} = \dfrac{\pi}{3}$.

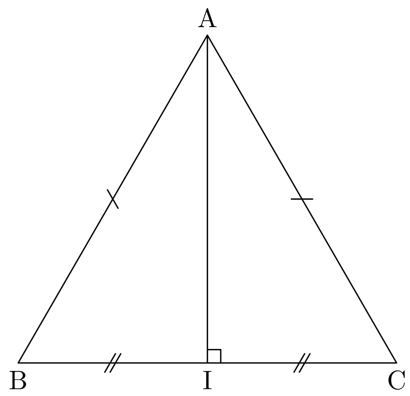
Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right)$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 \times 5 \times \dfrac{1}{2} = 10$

Exercice 2



ABC est un triangle équilatéral de côté $5\ cm$. I est le milieu de $[BC]$.

Calculer les produits scalaires suivants :

1) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$;

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = BA \times BC \times \cos\left(\widehat{ABC}\right)$$

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 5 \times 5 \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{25}{2}$$

Autre méthode :

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BI} = BC \times BI = 5 \times \frac{5}{2} = \frac{25}{2}$$

2) $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CI}$;

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CI} = \overrightarrow{CA} \cdot \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$$

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$$

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CI} = \frac{25}{4}$$

Autre méthode :

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CI} = \overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{CI} = CI^2 = \frac{25}{4}$$

3) $(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AI}$.

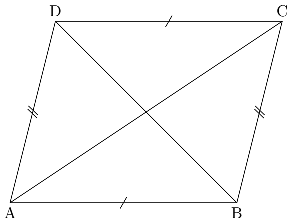
$$(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AI} = (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{AI}$$

$$(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AI}$$

Or, $(CB) \perp (AI)$.

$$(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AI} = 0$$

Exercice 3



$ABCD$ est un parallélogramme avec $AB = 4$, $AD = 5$ et $AC = 7$.

1) Développer $\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right)^2$.

$\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right)^2 = AB^2 + AD^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$

2) Trouver une relation entre $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.

$ABCD$ est un parallélogramme, alors

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

3) En déduire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$.

$\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right)^2 = AB^2 + AD^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$

$7^2 = 4^2 + 5^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$

$2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 49 - 16 - 25$

$2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 8$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 4$

4) Développer $\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}\right)^2$.

$\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}\right)^2 = BA^2 + AD^2 + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AD}$

5) En déduire BD.

$\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}\right)^2 = BA^2 + AD^2 + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AD}$

$BD^2 = BA^2 + AD^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$
$BD^2 = 4^2 + 5^2 - 2 \times 4$

$BD^2 = 16 + 25 - 8$

$BD^2 = 33$

$BD = \sqrt{33}$

Exercice 4

Dans une base orthonormée, on considère les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

$\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}$.

Montrer que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux.

$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = 1\times 6 + (-3)\times 2 = 6-6 = 0$

$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux.

Exercice 5

Dans un repère orthonormé $(O\ ;\ \overrightarrow{i}\ ,\ \overrightarrow{j}\ )$, on donne les points $A(1\ ;\ 1)$, $B\left(\frac{14}{5}\ ;\ \frac{17}{5}\right)$ et $C(5\ ;\ 1)$.

1) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} \frac{14}{5} - 1 \\ \frac{17}{5} - 1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} \frac{9}{5} \\ \frac{12}{5} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 5 - 1 \\ 1 - 1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} x_C - x_B \\ y_C - y_B \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 5 - \frac{14}{5} \\ 1 - \frac{17}{5} \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} \frac{11}{5} \\ -\frac{12}{5} \end{pmatrix}$$

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} \frac{9}{5} \\ \frac{12}{5} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{9}{5} \times 4 + \frac{12}{5} \times 0 = \frac{36}{5}$

b) $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$.

$\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -\frac{11}{5} \\ \frac{12}{5} \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = -4 \times \left(-\frac{11}{5}\right) + 0 \times \frac{12}{5} = \frac{44}{5}$

c) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.

$\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix} -\frac{9}{5} \\ -\frac{12}{5} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} \frac{11}{5} \\ -\frac{12}{5} \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \left(-\frac{9}{5}\right) \times \left(\frac{11}{5}\right) + \left(-\frac{12}{5}\right) \times \left(-\frac{12}{5}\right) = \frac{45}{25} = \frac{9}{5}$

2) Le triangle ABC est-il rectangle ?

Aucun des produits scalaires n'est nul : le triangle ABC n'est pas rectangle.