Exercice 1

On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$.

1) Démontrer que f est une fonction impaire.

$f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

$f(-x) = \dfrac{-x}{(-x)^2+1} = -\dfrac{x}{x^2+1}$

Pour tout x, $f(-x) = -f(x)$.

f est une fonction impaire.

2) Calculer la dérivée f' de f.

$f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

$\left[\dfrac{u}{v}\right]' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $u = x \quad v = x^2+1$, $u' = 1 \quad v' = 2x$

$f'(x) = \dfrac{1(x^2+1) - x(2x)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$

3) Quel est le signe du dénominateur de $f'(x)$?

$f'(x) = \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = \dfrac{(1-x)(1-x)}{(x^2+1)^2}$

Posons $P(x) = (1-x)(1+x)$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
Signe de $1-x$		$+$	|	$+$	0	$-$	
Signe de $1+x$		$-$	0	$+$	|	$+$	
Signe de $P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

4) Résoudre l'inéquation $f'(x) \geqslant 0$.

$f'(x) = \dfrac{P(x)}{(x^2+1)^2}$

Le dénominateur étant positif, $f'(x)$ est du signe de $P(x)$.

D'où les solutions de l'inéquation $f'(x) \geqslant 0$:

$\mathcal{S} = [-1\ ;\ 1]$

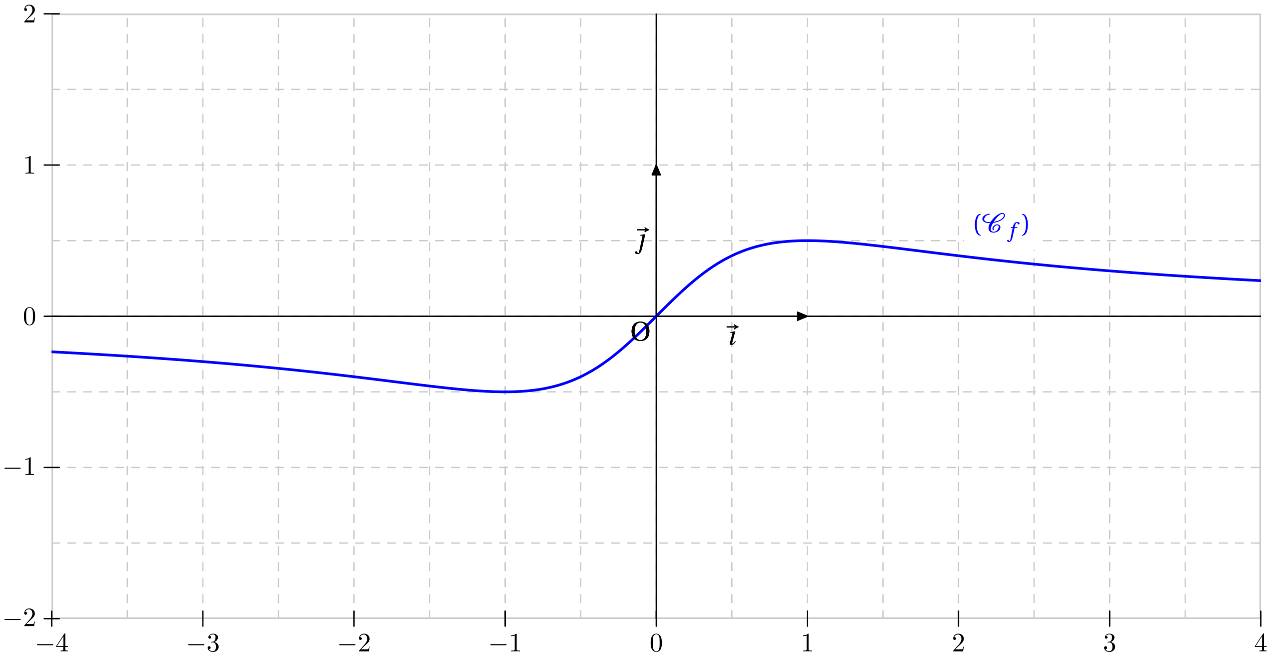
5) Dresser le tableau de variations de la fonction f en précisant la valeur M de son maximum et la valeur m de son minimum.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variations de f	0	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

$m = f(-1) = -\dfrac{1}{2}$

$M = f(1) = \dfrac{1}{2}$

6) Tracer soigneusement la représentation graphique de la fonction f sur l'intervalle $[-4\ ;\ 4]$.



Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$.

1) Calculer la dérivée f' de f.

$f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$

$f'(x) = 3x^2 - 8x + 4$

2) Etudier le signe de la dérivée f'.

$f'(x) = 3x^2 - 8x + 4$

Calculons son discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4(3)(4) = 16$
$\sqrt{\Delta} = 4$
Comme $\Delta > 0$, $f'(x)$ admet deux racines x_1 et x_2 :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{8-4}{6} = \frac{2}{3}$$

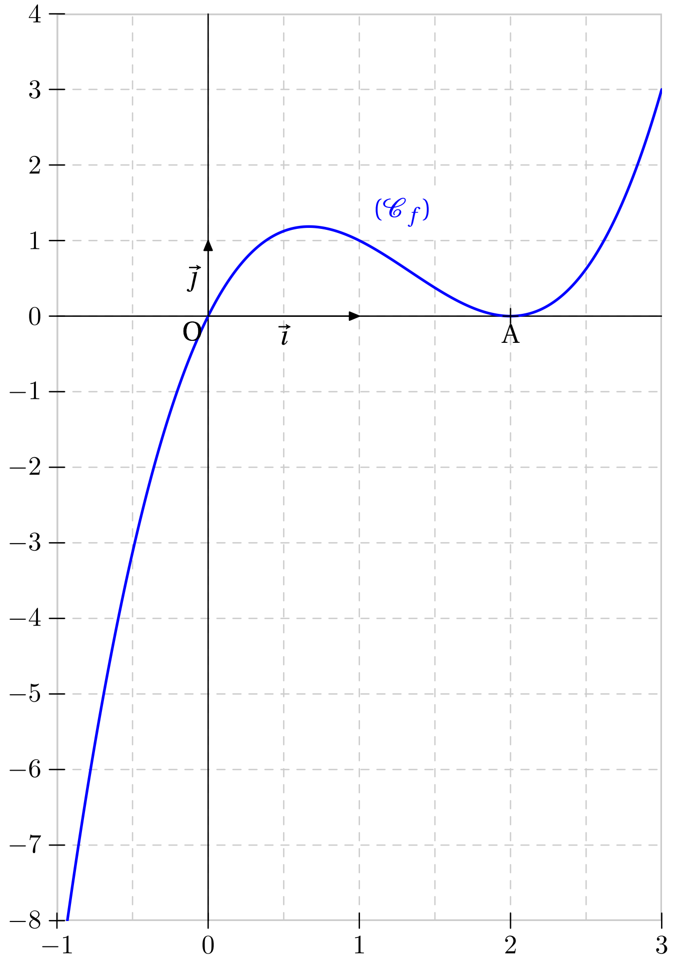
$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{8+4}{6} = 2$$

Comme $a > 0$, entre les racines, $f'(x) < 0$, et sinon, il est positif.

3) En déduire le tableau de variations de la fonction f. On précisera les éventuels extremums.

x	-1		$\frac{2}{3}$		2		3
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f	-9	$\nearrow$	$\frac{32}{27}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	3

4) Tracer soigneusement la représentation graphique de la fonction f sur l'intervalle $[-1\ ;\ 3]$.



5) Déterminer par le calcul les coordonnées des points d'intersection de $(\mathcal{C}_f)$ avec l'axe des abscisses.

Résolvons l'équation $f(x) = 0$.

$x^3 - 4x^2 + 4x = 0$

$x(x^2 - 4x + 4) = 0$

$x(x-2)^2 = 0$

$\mathcal{S} = \{0\ ;\ 2\}$

Les points d'intersection sont $O(0\ ;\ 0)$ et $A(2\ ;\ 0)$.

Exercice 3

1) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 60x^2 + 450x$.

a) Etudier les variations de f sur l'intervalle $[0\ ;\ 20]$. Dresser le tableau de variations de f.

Calculer sa dérivée.

$f(x) = 2x^3 - 60x^2 + 450x$

$f'(x) = 2(3x^2) - 60(2x) + 450 = 6x^2 - 12x + 450 = 6(x^2 - 20x + 75)$

En factorisant, on a $f'(x) = 6(x - 50)(x - 15)$.

D'où le tableau de variation sur $[0\ ;\ 20]$:

x	0		5		15		20
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f	0	↗	1000	↘	0	↗	1000

b) Déterminer une équation de la tangente (Δ) à la courbe représentative $(\mathcal{C}_f)$ de f au point d'abscisse 0.

L'équation réduite de (Δ) est de la forme : $(T_O) : y = f'(x_O)(x - x_O) + f(x_O)$
avec $x_O = 0$
$f(x_O) = 0$
$f'(x_O) = 450$
D'où $(T_O) : y = 450x$

c) Déterminer, par le calcul, les coordonnées des points d'intersection de $(\mathcal{C}_f)$ avec l'axe des abscisses.

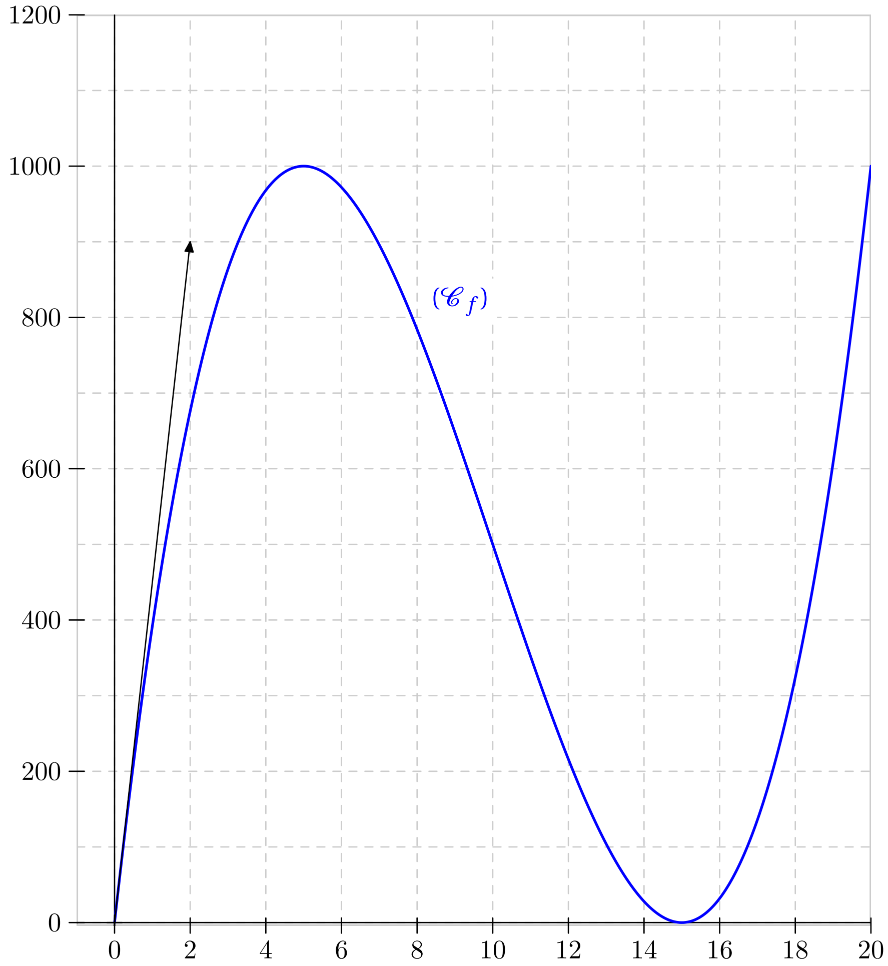
Factorisons $f(x)$:

$f(x) = 2x^3 - 60x^2 + 450x$

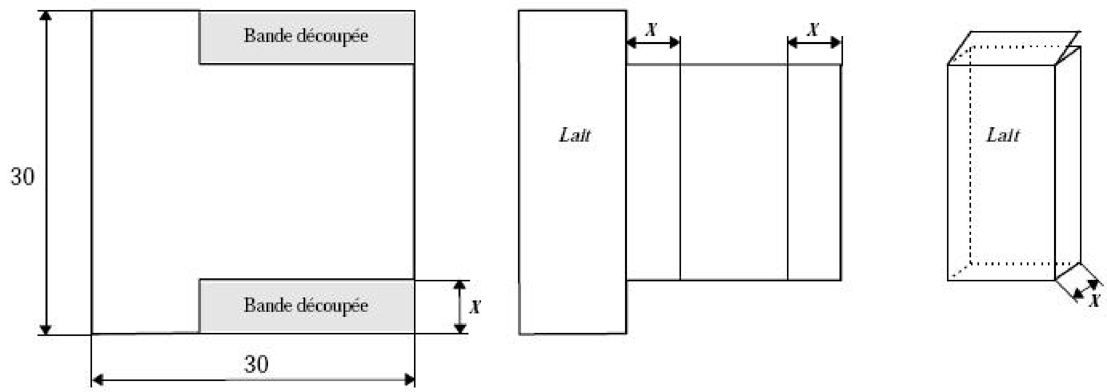
$f(x) = 2x(x^2 - 30x + 225) = 2x(x - 15)^2$

$f(x)$ s'annule en 0 et 15, ce qui correspond bien au tableau de variations.

d) Tracer (Δ) et $(\mathcal{C}_f)$ pour $x \in [0\ ;\ 20]$.



2) Un fabriquant envisage la production de briques de lait en carton obtenues en découpant deux bandes de même largeur dans une feuille carrée.



Le côté de la feuille mesure $30\ cm$ et on désigne par x la mesure (en centimètres) de la largeur des bandes découpées. On suppose que $0 < x < 15$.

a) Démontrer que le volume (en cm^3) de la boîte est $V(x) = 2x^3 - 60x^2 + 450x$.

D'après le patron, les trois dimensions de cette boîte sont x, $(15 - x)$ et $(30 - 2x)$.

D'où, $V(x) = x(15 - x)(30 - 2x) = 2x(15 - x)(15 - x) = 2x(15 - x)^2 = 2x(x - 15)^2$.

D'après les questions précédentes, on a bien : $V(x) = 2x^3 - 60x^2 + 450x$.

b) Pour quelle valeur de x le volume $V(x)$ est-il maximal ? Préciser la valeur de ce volume maximal en litres.

D'après le tableau de variations, sur $]0\ ;\ 15[$, le volume est maximal en 5 et vaut $1\,000\ cm^3$.

Le volume maximal vaut donc 1 litre.

Exercice 4

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ par $f(x) = x + 2 + \dfrac{4}{x-3}$.

1) Calculer $f'(x)$.

$[x+2]' = 1$

$\left[\dfrac{1}{u}\right]' = -\dfrac{u'}{u^2}$ avec $\begin{array}{l} u = x-3 \\ u' = 1 \end{array}$

$\left[\dfrac{1}{x-3}\right]' = -\dfrac{1}{(x-3)^2}$

Or $f(x) = (x+2) + 4\left(\dfrac{1}{x-3}\right)$

$f'(x) = 1 - \dfrac{4}{(x-3)^2}$

2) Etudier son signe.

Commençons par factoriser $f'(x)$.

$f'(x) = \dfrac{(x-3)^2 - 4}{(x-3)^2} = \dfrac{[(x-3)-2][(x-3)+2]}{(x-3)^2}$

$f'(x) = \dfrac{(x-5)(x-1)}{(x-3)^2}$

Utilisons le tableau de signes suivants :

x	$-\infty$		1		3		5		$+\infty$
Signe de $x-5$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
Signe de $x-1$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
Signe de $(x-3)^2$		$+$	|	$+$	0	$+$	|	$+$	
Signe de $Q(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	

3) Déterminer les deux tangentes à la courbe parallèles à la droite d'équation $y = -3x + 4$.

On cherche à résoudre l'équation $f'(x) = 3$.

$1 - \dfrac{4}{(x-3)^2} = -3$

$\dfrac{4}{(x-3)^2} = 4$

$(x-3)^2 = 1$
$([(x-3)-1)][(x-3)+1] = 0$
$(x-4)(x-2) = 0$

$x = 2$ ou $x = 4$

L'équation réduite de (T_A) est de la forme : $(T_A) : y = f'(x_A)(x - x_A) + f(x_A)$

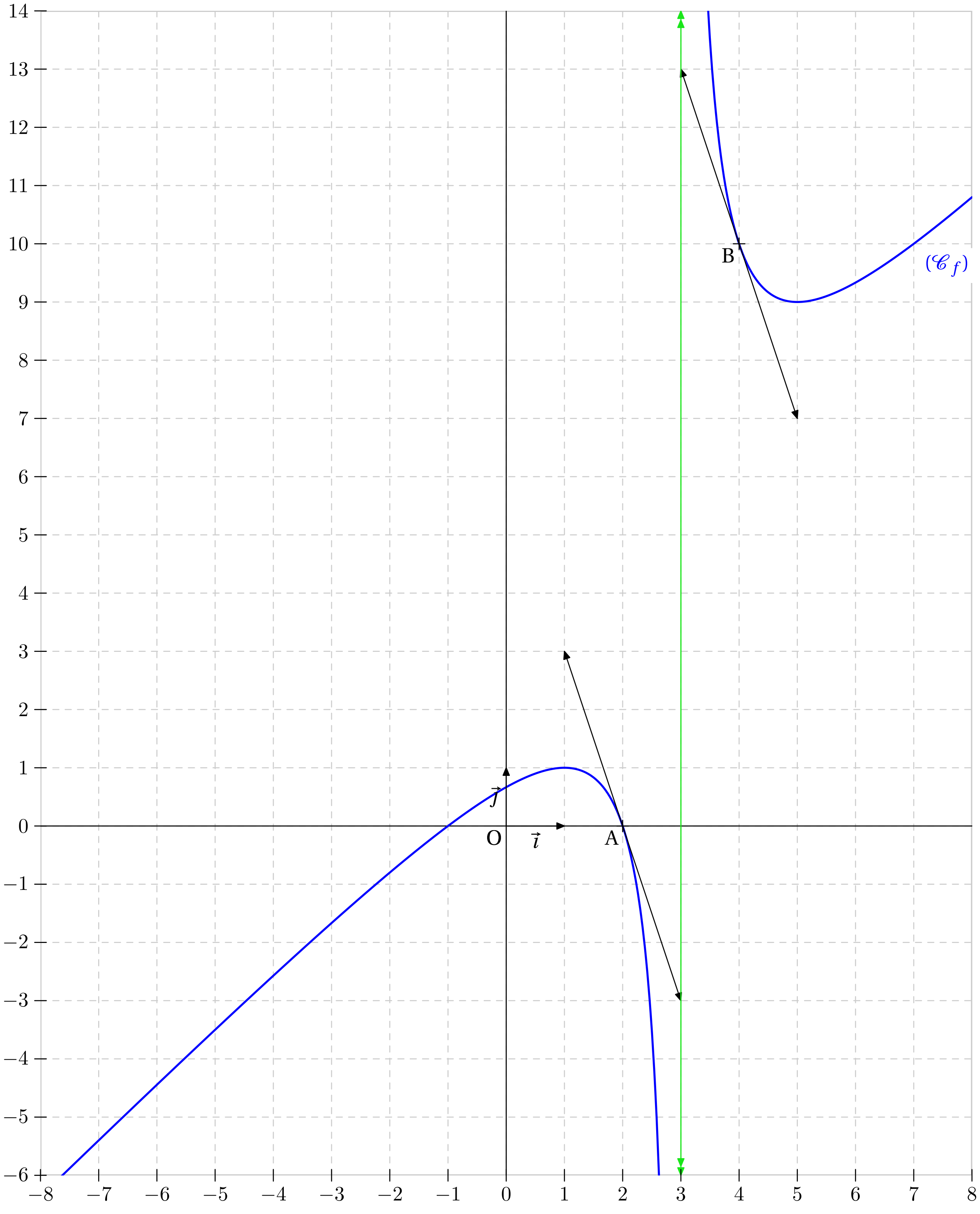
avec $x_A = 2$
$f(x_A) = 0$
$f'(x_A) = -3$

D'où $(T_A) : y = -3(x-2)+0$

$(T_A) : y = -3x+6$

L'équation réduite de (T_B) est de la forme : $(T_B) : y = f'(x_B)(x-x_B)+f(x_B)$
avec $x_B = 4$
$f(x_B) = 10$
$f'(x_B) = -3$
D'où $(T_B) : y = -3(x-4)+10$

$(T_B) : y = -3x+22$



14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−5
−6
−8
−7
−6
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
B
$(\mathscr{C}_f)$
A
O
$\vec{\imath}$
$\vec{\jmath}$

Exercice 5

Le coût total de production de x objets pour une certaine entreprise est en milliers d'euros :

$$C(x) = 180 + 12x - 0,01x^2.$$

1) Calculer la valeur exacte du coût marginal : $C_M(x) = C(x+1) - C(x)$.

$C_M(x) = C(x+1) - C(x)$
$C_M(x) = 180 + 12(x+1) - 0,01(x+1)^2 - 180 - 12x + 0,01x^2$
$C_M(x) = 180 + 12x + 12 - 0,01x^2 - 0,02x - 0,01 - 180 - 12x + 0,01x^2$
$C_M(x) = 11,99 - 0,02x$

2) Calculer $C'(x)$.

$C'(x) = 12 - 0,02x$

3) Quelle est l'erreur commise lorsqu'on prend $C'(x)$ comme valeur approchée du coût marginal ?

$C'(x) - C_M(x) = 0,01$