Exercice 1

Résoudre sur $[0\ ;\ 2\pi[$ les équations suivantes :

1) $\sin^2 x = \dfrac{3}{4}$.

$$\sin^2 x = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x = \frac{4\pi}{3} \quad \text{ou} \quad x = \frac{5\pi}{3}$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{3} \quad \text{ou} \quad x = \frac{2\pi}{3}$$

$$\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{3}\ ;\ \frac{2\pi}{3}\ ;\ \frac{4\pi}{3}\ ;\ \frac{5\pi}{3}\right\}$$

---

2) $\cos^2 x = \dfrac{1}{2}$.

$$\cos^2 x = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x = \frac{3\pi}{4} \quad \text{ou} \quad x = \frac{5\pi}{4}$$

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{4} \quad \text{ou} \quad x = \frac{7\pi}{4}$$

$$\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{4}\ ;\ \frac{3\pi}{4}\ ;\ \frac{5\pi}{4}\ ;\ \frac{7\pi}{4}\right\}$$

Exercice 2

1) θ est un angle situé dans l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi[$ dont on sait que $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{1}{2}$.

Que vaut θ en radians ? $\theta = \frac{\pi}{6}$

2) θ est un angle situé dans l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2}\ ;\ \pi\right]$ tel que $\sin\theta = \frac{4}{5}$.
Calculer $\cos\theta$.

$$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$$

Comme $\theta \in \left[\frac{\pi}{2}\ ;\ \pi\right]$, $\cos\theta \leqslant 0$.

$$\cos\theta = -\frac{3}{5}$$

3) θ est un angle situé dans l'intervalle $]-\pi\ ;\ 0]$ tel que $\cos\theta = \frac{2}{3}$.
Calculer $\sin\theta$.

$$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

Comme $\theta \in]-\pi\ ;\ 0]$, alors $\sin\theta \leqslant 0$.

$$\sin\theta = -\frac{\sqrt{5}}{3}$$

Exercice 3

Dans cet exercice, on donne :

$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}.$$

Calculer la valeur exacte de $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$

Or, $\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right) = 1$

Avec $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2 = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{16} = \frac{3+\sqrt{5}}{8}$

$\frac{3+\sqrt{5}}{8} + \sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right) = 1$

$3+\sqrt{5}+8\sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right) = 8$

$8\sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right) = 5-\sqrt{5}$

$\sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{5-\sqrt{5}}{8}$

$\sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{10-2\sqrt{5}}{16}$

Comme $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) > 0$, alors $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$

Exercice 4

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$.
On pourra poser $X = \cos x$.

$2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$

Posons $X = \cos x$.

$2X^2 + X - 1 = 0$

$(2X - 1)(X + 1) = 0$ (facorisation évidente)

$X = -\frac{1}{2}$
$\cos x = -\frac{1}{2}$
$x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$

$X = -1$
$\cos x = -1$

$x = -\pi + 2k\pi$

Exercice 5

Sans utiliser une calculatrice, donner la valeur exacte des nombres suivants.

1) $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

2) $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

$$\frac{5\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6}$$

$$\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

3) $\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)$

$$\frac{7\pi}{4} = \frac{8\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 2\pi - \frac{\pi}{4}$$

$$\sin\left(\frac{8\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

4) $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

$$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

5) $\cos\left(\frac{19\pi}{3}\right)$

$$\frac{19\pi}{3} = \frac{18\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = 6\pi + \frac{\pi}{3}$$

$$\cos\left(\frac{19\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

6) $\sin\left(\frac{25\pi}{6}\right)$

$$\frac{25\pi}{6} = \frac{24\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = 4\pi + \frac{\pi}{6}$$

$$\sin\left(\frac{25\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$