Exercice 1

On se place dans un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\ )$.
Examiner si les équations suivantes sont des équations de cercle et, le cas échéant, préciser le centre et le rayon du cercle.

1) $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 5 = 0$.

$x^2 + y^2 - 2x - 6y + 5 = 0$
$(x^2 - 2x + 1) - 1 + (y^2 - 6y + 9) - 9 + 5 = 0$
$(x - 1)^2 + -1 + (y - 3)^2 - 9 + 5 = 0$
$(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 5$

Il s'agit de l'équation d'un cercle de centre $A(1\ ;\ 3)$ et de rayon $R = \sqrt{5}$.

2) $x^2 + y^2 - x - 3y + 3 = 0$.

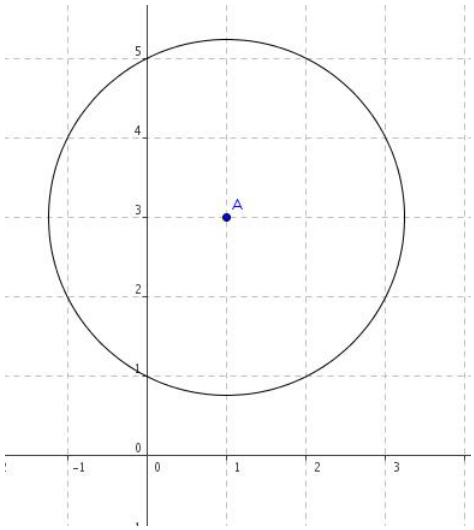
$x^2 + y^2 - x - 3y + 3 = 0$

$$\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4} + \left(y^2 - 3y + \frac{9}{4}\right) - \frac{9}{4} + 3 = 0$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 3 = 0$$

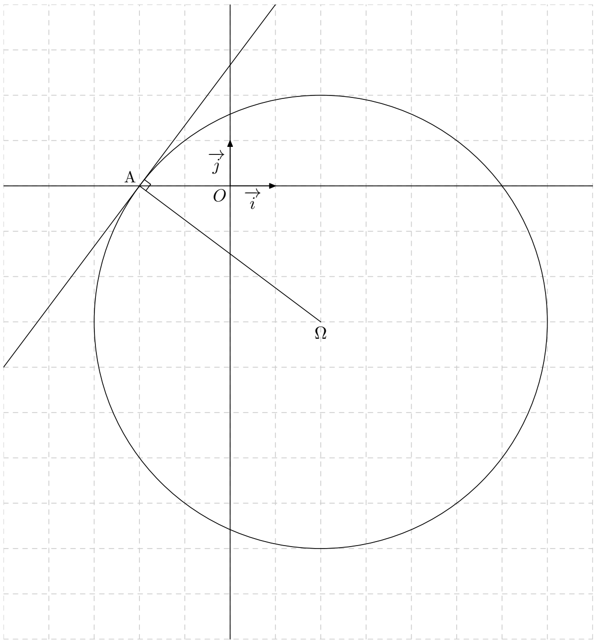
$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = -\frac{1}{2}$$

Ce n'est pas l'équation d'un cercle. Aucun couple de valeurs $(x\ ;\ y)$ ne satisfait cette relation.



Exercice 2

Dans un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j})$, on donne un point $\Omega(2\ ;\ -3)$.



1) Déterminer l'équation du cercle $(\mathcal{C})$ de centre Ω et de rayon $R = 5$.

$(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = R^2$

$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 5^2$

Une équation de $(\mathcal{C})$ est : $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 25$.

2) Démontrer que le point $A(-2\ ;\ 0)$ est un point du cercle $(\mathcal{C})$.

$(x_A - 2)^2 + (y_A + 3)^2 = (-4)^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$

Les coordonnées de A vérifient bien l'équation du cercle : A est sur ce cercle.

3) Déterminer une équation cartésienne de la tangente en A au cercle $(\mathcal{C})$.

Soit $M(x\ ;\ y)$ un point de la tangente. Alors $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{A\Omega} = 0$.

$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x_M - x_A \\ y_M - y_A \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x+2 \\ y \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{A\Omega}\begin{pmatrix} x_\Omega - x_A \\ y_\Omega - y_A \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{A\Omega}\begin{pmatrix} 2+2 \\ -3+0 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{A\Omega}\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{A\Omega} = 0$
$4(x+2) - 3y = 0$
$4x + 8 - 3y = 0$

Une équation de la tangente est : $4x - 3y = -8$.

Exercice 3

Dans un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points suivants : $A(2\ ;\ 1)$, $B(7\ ;\ 2)$ et $C(3\ ;\ 4)$.

Toutes les questions suivantes sont indépendantes et sans rapport.

1) Calculer les coordonnées du centre de gravité du triangle ABC.

$x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} = \dfrac{2+7+3}{3} = 4$

$y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} = \dfrac{1+2+4}{3} = \dfrac{7}{3}$

$G\left(4\ ;\ \dfrac{7}{3}\right)$

2) Déterminer une équation cartésienne de la médiatrice de $[BC]$.

Soit I le milieu de $[BC]$.

$x_I = \dfrac{x_B + x_C}{2} = \dfrac{7+3}{2} = \dfrac{10}{2} = 5$

$y_I = \dfrac{y_B + y_C}{2} = \dfrac{2+4}{2} = \dfrac{6}{2} = 3$

D'où les coordonnées de $I(5\ ;\ 3)$.

$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} x_C - x_B \\ y_C - y_B \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 3-7 \\ 4-2 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$

Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal de la médiatrice.

Soit $M(x\ ;\ y)$ un point de la médiatrice.

$\overrightarrow{IM}\begin{pmatrix} x_M - x_I \\ y_M - y_I \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{IM}\begin{pmatrix} x-5 \\ y-3 \end{pmatrix}$

les vecteurs $\overrightarrow{IM}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux.

$2(x-5) - (y-3) = 0$
$2x - 10 - y + 3 = 0$

D'où une équation de la médiatrice de $[BC]$: $2x - y = 7$.

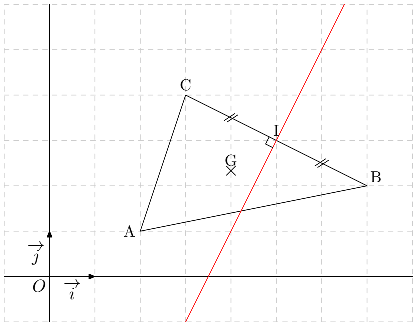
3) Calculer $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA}$. L'angle $\widehat{C}$ est-il droit ?

$\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix} x_B - x_C \\ y_B - y_C \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix} 7-3 \\ 2-4 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix} x_A - x_C \\ y_A - y_C \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix} 2-3 \\ 1-4 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$

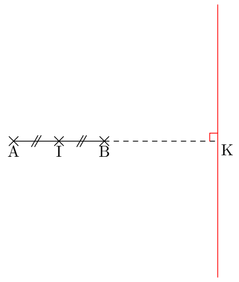
$\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = (4)(-1) + (-2)(-3) = -4 + 6 = 2$

$\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} \neq 0$, donc l'angle $\widehat{C}$ n'est pas droit.


C
I
G
B
A
$\vec{j}$
O
$\vec{i}$

Exercice 4

$[AB]$ est un segment de milieu I et $AB = 2\ cm$.



1) Montrer que pour tout point M du plan : $MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB}$.

$MA^2 - MB^2 = \overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2$

$MA^2 - MB^2 = \left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right)$

$MA^2 - MB^2 = \left(\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MA}\right) \cdot \left(2\overrightarrow{MI}\right)$

$MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{MI}$

$MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{BA}$

$MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB}$

2) Trouver et représenter l'ensemble des points M du plan tels que : $MA^2 - MB^2 = 14$.

$MA^2 - MB^2 = 14$

$2\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = 14$

$\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = 7$

Soit K le point de la droite $[AB)$ tel que $\overrightarrow{IK} \cdot \overrightarrow{AB} = 7$

On a $IK = \frac{7}{2}$.

$\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = 7$

$\left(\overrightarrow{IK} + \overrightarrow{KM}\right) \cdot \overrightarrow{AB} = 7$

$\overrightarrow{IK} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{KM} \cdot \overrightarrow{AB} = 7$

$\overrightarrow{KM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

L'ensemble des points M est la droite perpendiculaire à (AB) passant par K.