Exercice 1

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = (n+1)^2 - n^2$.

1) Calculer u_0, u_1 et u_2.

$u_n = (n+1)^2 - n^2$

$u_0 = (0+1)^2 - 0^2 = 1$

$u_1 = (1+1)^2 - 1^2 = 4 - 1 = 3$

$u_2 = (2+1)^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5$

2) La suite (u_n) est-elle arithmétique ? Si oui, préciser la raison.

$u_{n+1} = (n+1+1)^2 - (n+1)^2 = (n+2)^2 - (n+1)^2 = (n^2+4n+4) - (n^2+2n+1) = 2n+3$

$u_n = (n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n+1$

$u_{n+1} - u_n = (2n+3) - (2n-1) = 2$

(u_n) est arithmétique de raison $r = 2$ et de premier terme $u_0 = 1$.

3) Que vaut u_{99} ? Calculer la somme $S = 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + 195 + 197 + 199$.

$u_n = 2n + 1$

$u_{99} = 2 \times 99 + 1 = 199$

$S = 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + 195 + 197 + 199$

$S = u_0 + \cdots + u_{99}$

$S = \dfrac{100(u_0 + u_{99})}{2} = 50(1 + 199) = 10\,000$

Exercice 2

On considère une suite géométrique (u_n) de premier terme $u_1 = 1$ et de raison $q = -2$.

1) Calculer u_2, u_3 et u_4.

$u_2 = u_1 \times q = 1 \times (-2) = -2$
$u_3 = u_2 \times q = -2 \times (-2) = 4$
$u_4 = u_3 \times q = 4 \times (-2) = -8$

2) Calculer u_{20}.

$u_n = u_p \times q^{n-p}$
$u_{20} = u_1 \times (-2)^{19}$
$u_{20} = -2^{19} = -524\,288$

3) Calculer la somme $S = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{20}$.

S est la somme de 20 termes consécutifs de la suite géométrique, le premier étant u_1 et la raison $q = -2$.

$$S = u_1 \times \frac{1 - q^{20}}{1 - q}$$

$$S = \frac{1 - (-2)^{20}}{1 - (-2)} = \frac{1 - 2^{20}}{3} = -349\,525$$

Exercice 3

Un étudiant loue une chambre pour 3 ans. On lui propose deux type de bail :

- 1er contrat : un loyer de 200 € pour le premier mois puis une augmentation de 5 € par mois jusqu'à la fin du bail.
- 2ème contrat : un loyer de 200 € pour le premier mois puis une augmentation de 2 % par mois jusqu'à la fin du bail.

1) Calculer, pour chacun des deux contrats, le loyer du deuxième mois puis celui du troisième mois.

Désignons par u_n le loyer du n-ième mois avec le premier contrat.
La suite (u_n) est arithmétique de raison $r = 5$ et de premier terme $u_1 = 200$.

$u_1 = 200$
$u_2 = 205$
$u_3 = 210$

Désignons par v_n le loyer du n-ième mois avec le deuxième contrat.
La suite (v_n) est géométrique de raison $q = 1,02$ et de premier terme $v_1 = 200$.

$v_1 = 200$
$v_2 = 200 \times 1,02 = 204$
$v_2 = 200 \times 1,02^2 = 208,08$

2) Calculer, pour chacun des deux contrats, le loyer du dernier mois, c'est-à-dire du 36ème mois.

$u_{36} = u_1 + 35r$
$u_{36} = 200 + 35 \times 5$
$u_{36} = 375$

$v_{36} = v_1 \times q^{35}$
$v_{36} = v_1 \times 1,02^{35}$
$v_{36} = 399,98$

3) Quel est le contrat globalement le plus avantageux pour un bail de 3 ans ? Justifier à l'aide de calculs.

Posons $S_1 = u_1 + u_2 + \cdots + u_{36}$.
S_1 est la somme des 36 premiers termes de la suite arithmétique (u_n) :

$S_1 = \dfrac{36(u_1 + u_{36})}{2} = 18(200 + 375)$
$S_1 = 10\,350$

Posons $S_2 = v_1 + v_2 + \cdots + v_{36}$.
S_2 est la somme des 36 premiers termes de la suite géométrique (v_n) :

$S_2 = v_1 \times \dfrac{q^{36} - 1}{q - 1} = 200 \times \dfrac{1,02^{36} - 1}{1,02 - 1}$
$S_2 = 10\,000 \times (1,02^{36} - 1)$
$S_2 \approx 10\,398,87$

$S_1 < S_2$. Le premier contrat est plus avantageux.

Exercice 4

```python

n=0
u=0

while (n<=5):
    n=n+1
    u=2*u+1

print(f"u_{n} = {u}")

```

Le programme ci-dessus permet de calculer un terme particulier d'une suite (u_n).

1) Quel est le premier terme de cette suite ?

Le premier terme est $u_0 = 0$.

2) Quelle est la relation de récurrence ?

$u_{n+1} = 2u_n + 1$

3) Recopier et compléter le tableau suivant, en y mettant le bon nombre de colonnes :

$n \leqslant 5$	xxx	V	V	V	V	V	V	F
n	0	1	2	3	4	5	6	6
u	0	1	3	7	15	31	63	63

4) Qu'affiche ce programme ?

$u_6 = 63$