Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}.$$

1) Etudier la parité de f.

$f(-x) = \dfrac{\sin(-x)}{1+\cos^2(-x)}$

Or, pour tout x, on a $\sin(-x) = -\sin(x)$ et $\cos(-x) = \cos(x)$.

D'où, $f(-x) = \dfrac{-\sin(x)}{1+\cos^2(x)}$

Pour tout x, $f(-x) = -f(x)$.

La fonction f est impaire.

2) Démontrer que f est 2π-périodique.

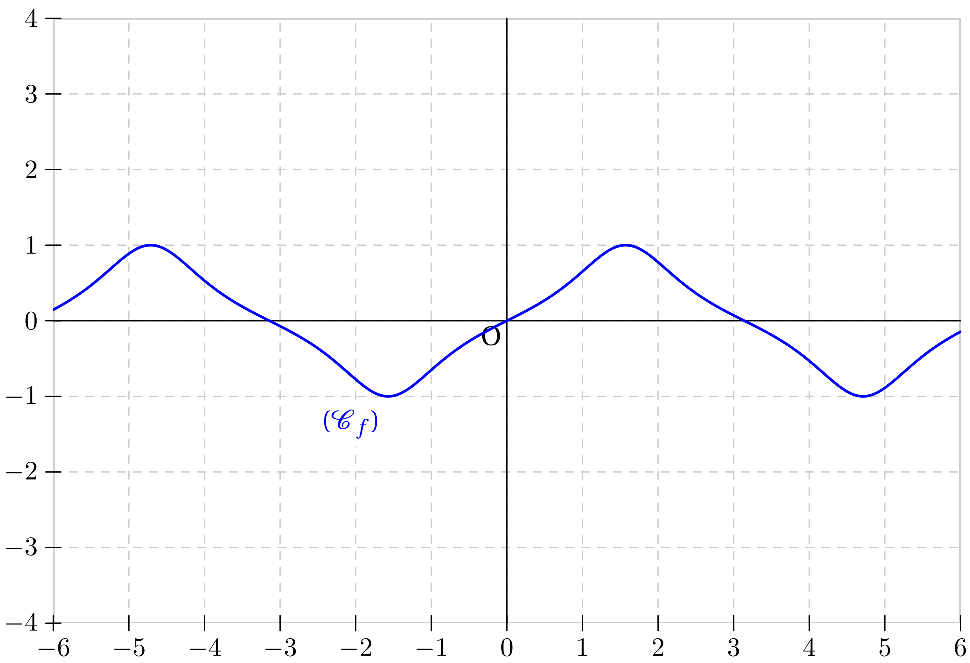
$f(x+2\pi) = \dfrac{\sin(x+2\pi)}{1+\cos^2(x+2\pi)}$

Les fonctions $\sin$ et $\cos$ étant 2π-périodique,

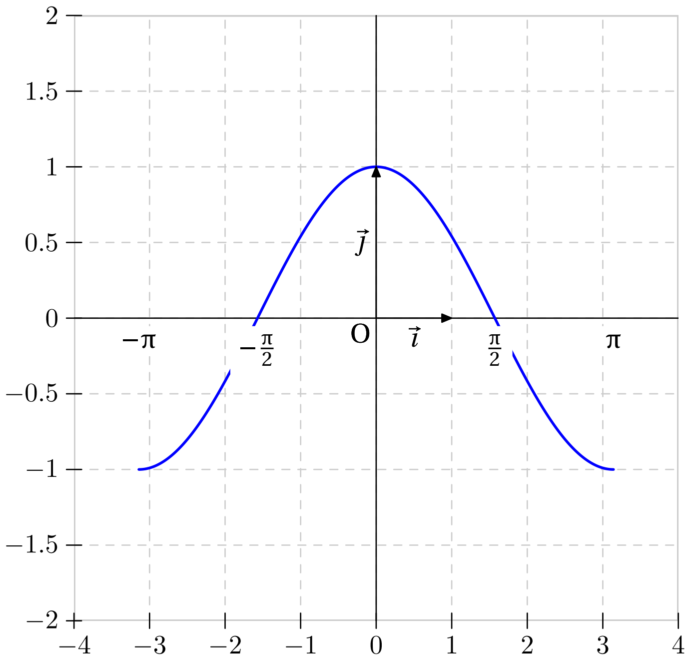
$f(x+2\pi) = \dfrac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}$

Pour tout x, $f(x+2\pi) = f(x)$.

La fonction f est périodique, de période 2π.



Exercice 2



1) À l'aide de la fonction cosinus tracée ci-dessus, résoudre graphiquement les inéquations suivantes dans l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi[$.

a) $\cos(x) \geqslant 0$

$$\mathcal{S} = \left[-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$$

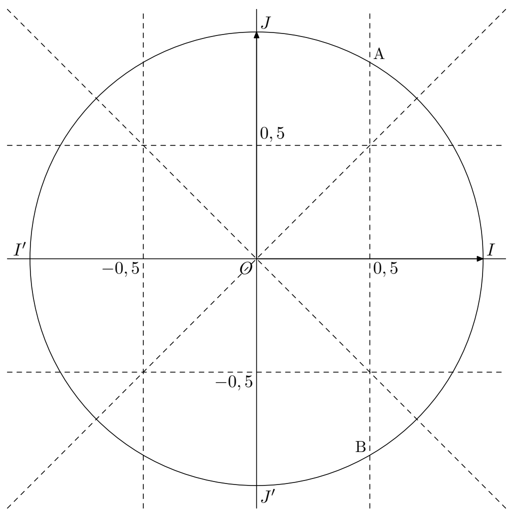
b) $\cos(x) < 0,5$

$$\mathcal{S} = \left]-\pi\ ;\ \frac{-\pi}{3}\right] \cup \left]\frac{\pi}{3}\ ;\ \pi\right[$$

c) $\cos(x) \leqslant 1$

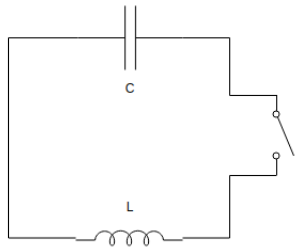
$$\mathcal{S} =]\pi\ ;\ \pi[$$

2) Retrouver les résultats précédents à l'aide du cercle trigonométriques.



Exercice 3

Charge d'un condensateur



On considère le circuit électrique ci-dessus comprenant :

— un condensateur dont la capacité, exprimée en farad, a pour valeur C ;

— une bobine dont l'inductance, exprimée en henry, a pour valeur L ;

— un interrupteur.

Le temps est exprimé en secondes.
À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur et le condensateur se décharge dans le circuit.
On appelle $q(t)$ la valeur de la charge, exprimée en coulomb, du condensateur à l'instant t.
On admet que la fonction q est définie pour tout réel $t \geqslant 0$ par :

$$q(t) = \frac{1}{200}\sin\left(200t + \frac{\pi}{4}\right).$$

1) Calculer $q\left(t + \frac{\pi}{100}\right)$. En déduire que la fonction q est périodique.

$q(t) = \frac{1}{200}\sin\left(200t + \frac{\pi}{4}\right)$

$q\left(t + \frac{\pi}{100}\right) = \frac{1}{200}\sin\left(200\left(t + \frac{\pi}{100}\right) + \frac{\pi}{4}\right)$

$q\left(t + \frac{\pi}{100}\right) = \frac{1}{200}\sin\left(200t + 2\pi + \frac{\pi}{4}\right)$

$q\left(t + \frac{\pi}{100}\right) = \frac{1}{200}\sin\left(200t + \frac{\pi}{4}\right)$

$q\left(t + \frac{\pi}{100}\right) = q(t)$

q est périodique de période $\frac{\pi}{100}$.

2) Montrer que la fonction q n'est ni paire, ni impaire.

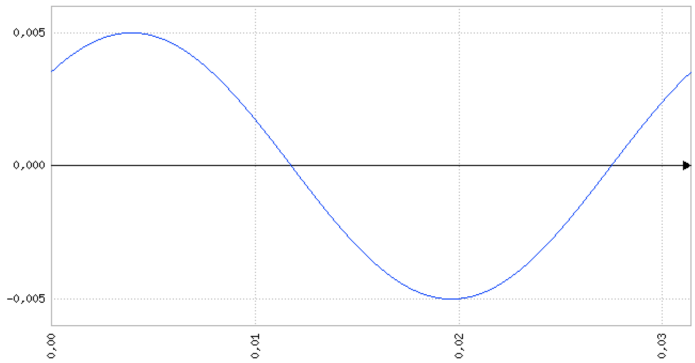
$q(t) = \frac{1}{200}\sin\left(200t + \frac{\pi}{4}\right)$

$q(-t) = \frac{1}{200}\sin\left(-200t + \frac{\pi}{4}\right)$

$q(-t) \neq q(t)$ et $q(-t) \neq -q(t)$.

q n'est ni paire ni impaire.

3) On a tracé la courbe représentative de la fonction q sur l'intervalle $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{100}\right]$.



Conjecturer les variations de la fonction q sur cet intervalle. Interpréter ce résultat.

IL semble que q soit croissante sur $[0\ ;\ 0,004$, décroissante sur $[0,004\ ;\ 0,02]$, puis croissante sur $[0,02\ ;\ \frac{\pi}{100}]$.

4) Quelle était la charge du condensateur à l'instant $t = 0$?

$$q(0) = \frac{1}{200}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$q(0) = \frac{1}{200} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$q(0) = \frac{\sqrt{2}}{400}$$

$$q(0) \approx 0,0035$$