**Exercice 1**

On considère les expériences aléatoires suivantes.
**Expérience A**
On lance un dé cubique équilibré et on gagne lorsqu'on obtient le $6$.

**Expérience B**
On lance une pièce équilibrée et on recommence tant qu'on n'a pas obtenu Face.

**Expérience C**
On tire une main de $5$ cartes avec remise dans un jeu de $32$ cartes et on compte le nombre de figures obtenues dans cette main.

Pour chacune de ces expériences aléatoires, définir une variable aléatoire et préciser sa loi.

**Exercice 2**

Soit $X$ une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre $p = 0,25$.

**1)** Quelles sont les valeurs prises par $X$ ?

**2)** Calculer les probabilités $p(X = 1)$, $p(X = 2)$, puis $p(X = 3)$.

**3)** Plus généralement, exprimer $p(X = k)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$. Donner l'espérance de $X$.

**4)** Décrire une expérience aléatoire mettant en jeu la variable aléatoire $X$.

**Exercice 3**

**1)** Rappeler les trois conditions pour qu'une fonction $f$ soit une fonction densité de probabilité sur un intervalle d'une variable aléatoire $X$.

**2)** On considère la fonction $f$ définie sur $[-2\ ;\ 4]$ par $f(x) = \dfrac{1}{24}x^2$.

**a)** Vérifier que $f$ est une densité de probabilité sur l'intervalle $[-2\ ;\ 4]$.

**b)** Exprimer à l'aide d'une intégrale puis calculer :
$p(-1 \leqslant X \leqslant 2)$ ; $p(X \leqslant 3)$ et $p(X \geqslant 0)$.

**c)** Quelle est la valeur de $p(X = -1)$ ?

**Exercice 4**

Soit $Y$ une variable aléatoire de loi uniforme sur l'intervalle $[-2\ ;\ 6]$.

**1)** Préciser la densité de probabilité de $Y$.

**2)** Calculer les probabilités suivantes :
$p(-1 \leqslant Y \leqslant 3)$ ; $p(Y \leqslant 4)$ et $p(Y \geqslant -1)$.

**3)** Calculer l'espérance mathématique de $Y$.

**Exercice 5**

On modélise la durée de vie, en heure, d'un transistor par une variable aléatoire $T$ de loi exponentielle de paramètre $\lambda = 2,5 \times 10^{-5}$.

**1)** Préciser la densité $f$ de probabilité de $T$. Préciser la valeur de $f(0)$ puis l'espérance de $T$. Interpréter.

**2)** Calculer $p(T \leqslant 15\,000)$, $p(T > 50\,000)$ et $p(10\,000 \leqslant T \leqslant 30\,000)$. Interpréter.

## Exercice 6

**Vrai ou faux ?**

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.

**1)** On considère une variable aléatoire $X$ de loi géométrique de paramètre $p = 0,9$.

- **a)** $p(X = 0) = 0,9^0$
- **b)** $p(X = 1) = 0,9^1$
- **c)** $p(X = 2) = 0,9 \times 0,1$
- **d)** $p(X = 3) = 0,9^2 \times 0,1$

**2)** On répète plusieurs épreuves de Bernoulli indépendantes dont la probabilité du Succès est $0,3$.
Le nombre $0,3^3 \times 0,7$ est :

- **a)** la probabilité d'obtenir exactement $3$ Succès en répétant $4$ fois cette épreuve de Bernoulli ;
- **b)** la probabilité d'obtenir $3$ Succès puis $1$ Échec ;
- **c)** la probabilité d'obtenir $3$ Échecs puis $1$ Succès ;
- **d)** la probabilité où $X$ suit une loi géométrique de paramètre $0,3$.

## Exercice 7

**Absence de mémoire et loi géométrique**

On considère une variable aléatoire $X$ de loi géométrique de paramètre $p \in ]0\ ;\ 1[$. On note $q = 1 - p$.

**1)** Rappeler, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'expression de $p(X = k)$.

**2)** **a)** En exploitant la somme de termes d'une suite géométrique, justifier que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ : $p(X \leqslant n) = 1 - q^n$.

**b)** En déduire l'expression de $p(X > n)$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

**c)** Justifier alors que, pour tous entiers naturels $m$ et $n$ non nuls, $p_{(X>m)}(X > m + n) = p(X > n)$.

## Exercice 8

Marie joue avec des pièces d'un euro, provenant de la collection de son grand-père, réunies dans une grande boîte opaque. Parmi ses $100$ pièces, le grand-père a réuni $16$ pièces ne provenant pas de France, mais de $16$ pays différents de la zone euro. Les pièces sont indiscernables au toucher.

Marie choisit une pièce dans la boîte au hasard et avec remise.

**1)** Quelle est la probabilité que Marie tire une pièce avec une face étrangère au premier tirage ?

**2)** On note $X$ la variable aléatoire qui, à l'issue des tirages successifs de Marie, associe le rang d'obtention de la première pièce ayant une face étrangère.

- **a)** Quelle loi suit la variable aléatoire $X$ ?
- **b)** Quelle est la probabilité que Marie obtienne sa première pièce ayant une face étrangère au 3e tirage ?
- **c)** Calculer $p(X \leqslant 2)$. Interpréter ce résultat.
- **d)** Déterminer puis interpréter $p_{(X>3)}(X > 5)$.

## Exercice 9

D'après la Foutaise des Jeux, $15\ \%$ des tickets de jeu Gratte-Gratte sont gagnants. À chaque fois que Corinne se rend chez son buraliste, elle achète un ticket Gratte-Gratte. Elle continue de racheter un nouveau ticket tant qu'elle n'obtient pas un ticket gagnant.

**1)** On note $Y$ la variable aléatoire donnant le nombre total de tickets achetés par Corinne. Quelle est la loi de probabilité de $Y$ ?

**2)** Déterminer la probabilité $p(Y = 4)$. Interpréter.

**3)** Quel est le nombre moyen de tickets achetés par Corinne chez son buraliste ?

**Exercice 10**

On lance une pièce truquée jusqu'à obtenir Pile. La probabilité d'obtenir Pile est égale à $0,3$.

On note la variable aléatoire donnant le rang d'obtention du premier Pile.

Déterminer les entiers tels que : $p(X = k) \leqslant 0,01$.

## Exercice 11

**QCM**

**1)** Parmi les fonctions suivantes, déterminer celle(s) qui définit(ssent) une densité de probabilité sur l'intervalle $[1\ ;\ 4]$.

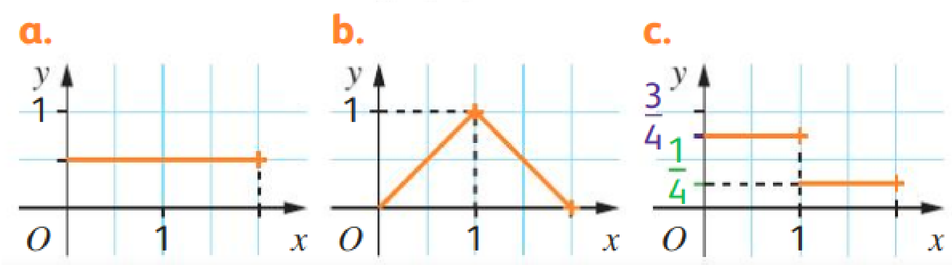
**a)** $f(x) = \dfrac{2}{15}x$

**b)** $g(x) = \dfrac{1}{21}x^2$

**c)** $h(x) = 2x - 5$

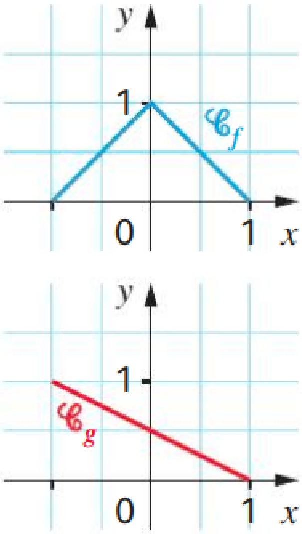
**d)** $i(x) = 4x^3$

**2)** Parmi les fonctions représentées ci-dessous, déterminer celle(s) qui définit(ssent) une densité de probabilité sur l'intervalle $[0\ ;\ 2]$.



**Exercice 12**

On a représenté ci-dessous deux fonctions $f$ et $g$ définies sur l'intervalle $[-1\ ;\ 1]$.




**1)** Par des considérations géométriques, justifier que $f$ et $g$ sont des fonctions de densité.

**2)** On note $X$ la variable aléatoire suivant la loi de probabilité de densité $f$.
Calculer les probabilités suivantes.

- **a)** $p(-1 \leqslant X \leqslant 0)$
- **b)** $p(0 \leqslant X \leqslant 0,5)$
- **c)** $p(X \geqslant 0)$
- **d)** $p(-0,5 \leqslant X \leqslant 0,5)$

**3)** Reprendre la question **2)** lorsque $X$ suit la loi de probabilité de densité $g$.

**Exercice 13**

Un boulanger reçoit tous les matins des livraisons entre 5 h et 7 h. On admet que la variable aléatoire $X$ donnant l'heure d'arrivée de l'un des camions de livraison a pour fonction de densité la fonction $f$ définie sur $[5\ ;\ 7]$ par
$$f(x) = \begin{cases} x-5 & \text{si } x \leqslant 6 \\ 7-x & \text{sinon.} \end{cases}$$

**1)** **a)** Représenter graphiquement la fonction $f$ sur $[5\ ;\ 7]$.

**b)** Par des considérations graphiques, montrer que $f$ est une fonction densité de probabilité sur $[5\ ;\ 7]$.

**2)** Calculer $p(X \leqslant 6)$. Interpréter le résultat obtenu.

**3)** Calculer la probabilité des événements suivants :

**a)** A : « le camion de livraison arrive avant 5 h 30 » ;

**b)** B : « le camion de livraison arrive après 6 h 15 ».

**4)** Un matin, le boulanger n'est toujours pas livré à 6 h. Quelle est la probabilité qu'il le soit avant 6 h 30 ?

## Exercice 14

Dans chacun des cas suivants, déterminer le réel $k$ pour que la fonction $f$ soit une fonction de densité sur l'intervalle $I$ donné.

**1)** $f(x) = k$ sur $I = [0\ ;\ 10]$.

**2)** $f(x) = kx$ sur $I = [0\ ;\ 4]$.

**3)** $f(x) = kx^2$ sur $I = [0\ ;\ 2]$.

**4)** $f(x) = \dfrac{k}{x}$ sur $I = [1\ ;\ e^2]$.

**Exercice 15**

On considère une variable aléatoire $X$ dont la fonction de densité $f$ est définie sur $[1\ ;\ 5]$ par une relation de la forme $f(x) = \dfrac{k}{x^2}$.

**1)** Déterminer la valeur du réel $k$.

**2)** Calculer la probabilité des événements suivants.

- **a)** $(X \leqslant 3)$
- **b)** $(X \geqslant 2)$
- **c)** $(2 < X \leqslant 4)$

**3)** On rappelle que l'espérance mathématique de $X$ est le réel $E(X)$ défini par $E(X) = \displaystyle\int_1^5 xf(x)dx$.
Calculer l'espérance de X.

**Exercice 16**

Hakim se rend au guichet de sa banque. On modélise son temps d'attente, en minute, par une variable aléatoire $X$ dont la fonction de densité est définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = ke^{-0,5x}$, où $k$ est une constante positive. Pour tout réel $a > 0$, on note :
$F(a) = \int_0^a f(x)dx$.

**1)** Justifier que, pour tout réel $a > 0$, on a $F(a) = k(2 - 2e^{-0,5a})$.
Exprimer $\lim\limits_{a \to +\infty} F(a)$ en fonction de $k$ puis en déduire la valeur de $k$.

**2)** Déterminer la probabilité des événements suivants.

- **a)** A : « Hakim attend moins de 2 minutes ».
- **b)** B : « Hakim attend entre 3 et 4 minutes ».
- **c)** C : « Hakim attend plus de 10 minutes ».

## Exercice 17

**Vrai ou faux ?**

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

**1)** Si $X$ est une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0\ ;\ 1]$, alors $p(X \in [0,1\ ;\ 0,6]) = 0,6$.

**2)** Si la variable aléatoire $X$ suit la loi uniforme sur $[0\ ;\ 100]$, alors $p(X < 75) = p(X > 25)$.

**3)** Si la variable aléatoire $X$ suit la loi uniforme sur $[20\ ;\ 80]$, alors $E(X) = 50$.

**Exercice 18**

On choisit un nombre réel au hasard entre $-1$ et $5$.

**1)** Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre strictement inférieur à $2$ ?

**2)** Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre supérieur ou égal à $3$ ?

**3)** Quelle est la probabilité que le nombre choisi soit strictement inférieur à $2$, sachant qu'il est strictement positif ?

## Exercice 19

**QCM**

**1)** $Y$ est une variable aléatoire de loi uniforme sur l'intervalle $[10\ ;\ 20]$. Sa densité $f$ s'écrit

- **a)** $f(x) = \dfrac{1}{10+20}$
- **b)** $f(x) = \dfrac{10}{20}$
- **c)** $f(x) = \dfrac{1}{10}$
- **d)** $f(x) = \dfrac{1}{20}$

**2)** Une variable aléatoire $T$ suit la loi uniforme sur un intervalle $[2\ ;\ x]$, où $x$ est un réel strictement supérieur à 2. Si $p(2 \leqslant T \leqslant 3) = 0,25$, alors $x$ vaut :

- **a)** $2,25$
- **b)** $6$
- **c)** $8$
- **d)** $10$

**3)** La durée d'attente à un guichet, exprimée en heure, suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$. La probabilité que la durée d'attente d'une personne prise au hasard soit comprise entre 15 min et 20 min est :

- **a)** $\dfrac{1}{3}$
- **b)** $\dfrac{1}{5}$
- **c)** $\dfrac{1}{12}$
- **d)** $\dfrac{1}{4}$

**4)** Dans une station de ski, le temps d'attente à un télésiège, exprimé en minute, peut être modélisé par une variable aléatoire $X$ qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0\ ;\ 5]$. On a :

- **a)** $E(X) = \dfrac{2}{5}$
- **b)** $p(X > 2) = \dfrac{3}{5}$
- **c)** $p(X \leqslant 2) = \dfrac{3}{5}$
- **d)** $p(X \leqslant 5) = 0$

**5)** Deux collègues communiquent régulièrement par vidéoconférence. On suppose que la durée d'une communication entre ces deux personnes, exprimée en minute, suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0\ ;\ 120]$. Sachant que la communication dure depuis $30$ minutes, la probabilité que la durée de la communication ne dépasse pas $90$ minutes est égale à :

- **a)** $\dfrac{1}{3}$
- **b)** $\dfrac{1}{2}$
- **c)** $\dfrac{2}{3}$
- **d)** $\dfrac{3}{4}$

**Exercice 20**

On casse au hasard un spaghetti de longueur $25\ cm$ en deux morceaux. On note $D$ la variable aléatoire égale à la longueur du morceau de gauche.

**1)** Quelle est la loi de la variable aléatoire $D$ ?

**2)** Donner la fonction densité définissant la loi de $D$.

**3)** Quelle est la probabilité que la longueur du morceau de spaghetti obtenu mesure moins de $8\ cm$ ?

**4)** On sait que la longueur du morceau de spaghetti obtenu mesure plus de $12\ cm$. Quelle est la probabilité qu'il mesure moins de $20\ cm$ ?

## Exercice 21

**Espérance et variance de la loi uniforme**

On considère deux réels $a$ et $b$ tels que $a < b$ et une variable aléatoire $X$ de loi uniforme sur un intervalle $[a\ ;\ b]$.

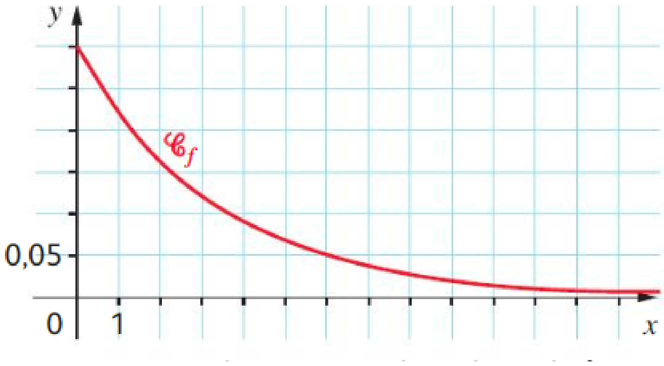
**1)** Rappeler la densité de probabilité $f$ associée à $X$.

**2)** On rappelle que l'espérance mathématique de $X$ est définie par $E(X) = \displaystyle\int_a^b xf(x)dx$.
Calculer la valeur de $E(X)$ en fonction de $a$ et $b$.

**3)** La variance de $X$ est définie par $V(X) = \displaystyle\int_a^b x^2 f(x)dx - (E(X))^2$.
Justifier alors que $V(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$.

**Exercice 22**

On a représenté ci-dessous la courbe $(\mathcal{C}_f)$ d'une densité de probabilité $f$ d'une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.




**1)** Déterminer graphiquement la valeur de $\lambda$.

**2)** En déduire l'expression de $f(x)$ pour tout réel $x$ positif.

Dans la suite de l'exercice, on note $X$ une variable aléatoire qui suit la loi de probabilité de densité $f$.

**3)** Préciser la valeur de l'aire du domaine du plan compris entre la courbe $(\mathcal{C}_f)$, l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.
Interpréter cette valeur par une probabilité sur $X$.

**4)** **a)** Reproduire le graphique ci-dessus et hachurer le domaine du plan correspondant à $p(4 \leqslant X \leqslant 10)$.

**b)** Hachurer le domaine du plan correspondant à $p(X \leqslant 2)$.

**5)** Calculer la valeur exacte des probabilités :
$p(4 \leqslant X \leqslant 10)$ et $p(X \leqslant 2)$.

## Exercice 23

**Vrai ou faux ?**

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

La durée d'attente, en seconde, à la caisse d'un supermarché est une variable aléatoire $Y$ qui suit la loi exponentielle de paramètre $0,01$.

**1)** La densité de probabilité de $Y$ est la fonction $f$ définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(t) = e^{-0,01t}$.

**2)** Pour tout réel $t$ positif, $p(Y \geqslant t) = 1 - e^{-0,01t}$.

**3)** La probabilité d'attendre moins de $3$ minutes à cette caisse est, à $0,01$ près, égale à $0,16$.

**4)** Il y a plus d'une chance sur deux que l'attente à cette caisse soit supérieure à une minute.

## Exercice 24

**QCM**

Pour chacune des questions, choisir la réponse correcte.

On s'intéresse à la durée de vie $D$, exprimée en année, d'un appareil ménager avant la première panne.
On peut modéliser cette situation par une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

**1)** Pour tout réel $t > 0$, la valeur exacte de $p(D \geqslant t)$ est :

- **a)** $1 - e^{-\lambda t}$
- **b)** $e^{-\lambda t}$
- **c)** $1 + e^{-\lambda t}$

**2)** La valeur de $t$ pour laquelle on a $p(D \leqslant t) = p(D \geqslant t)$ est égale à :

- **a)** $\ln(2\lambda)$
- **b)** $\lambda \ln(2)$
- **c)** $\dfrac{\ln(2)}{\lambda}$

**3)** D'après une étude statistique, la probabilité que l'appareil tombe en panne avant la fin de la première année est $0,18$.
La valeur exacte de $\lambda$ est alors :

- **a)** $\ln\left(\dfrac{50}{41}\right)$
- **b)** $\ln\left(\dfrac{41}{50}\right)$
- **c)** $\dfrac{\ln(82)}{\ln(100)}$

**4)** Sachant que cet appareil n'a connu aucune panne au cours des deux premières années après sa mise en service, la probabilité qu'il ne connaisse aucune panne l'année suivante est :

- **a)** $p(D \geqslant 1)$
- **b)** $p_{(D>2)}(D \geqslant 3)$
- **c)** $p(2 \leqslant D \leqslant 3)$

**5)** Dans cette question, on admet que $\lambda = 0,2$.
La probabilité que l'appareil n'ait pas eu de panne au cours des trois premières années, arrondie à $10^{-4}$ près, est :

- **a)** $0,5523$
- **b)** $0,5488$
- **c)** $0,4512$

**Exercice 25**

Dans le grenier de sa grand-mère, Lise retrouve un jeu de « petits chevaux ». Ce jeu consiste à déplacer des pions en forme de cheval sur un plateau. Pour sortir un pion de l'écurie, le joueur doit obtenir un six en lançant un dé cubique équilibré.

On note $X$ la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires pour qu'un joueur réussisse à faire sortir un cheval de l'écurie.

**1)** Quelle est la loi de probabilité de $X$ ? Justifier.

**2)** Quelle est la probabilité de réussir à faire sortir son cheval de l'écurie au premier lancer de dé ? au second ? au cinquième lancer de dé ?

**3)** Quel est le nombre de lancers moyens nécessaires pour faire sortir un cheval de l'écurie ?

**4)** Déterminer la probabilité de réussir à faire sortir son cheval en moins de $5$ lancers.

## Exercice 26

**Probabilités cumulées et loi géométrique**
Soit une variable aléatoire $X$ de loi géométrique de paramètre $p$ avec $p \in ]0\ ;\ 1[$, on note $q = 1 - p$.

**1)** **a)** Exprimer, en fonction de l'entier naturel $n \geqslant 1$ et du réel $q$, la somme : $1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}$.

**b)** En déduire que, pour tout entier naturel $n$ non nul, on a $p(X \leqslant n) = 1 - q^n$.

**c)** Montrer alors que : $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} p(X = k) = 1$.
Ce résultat est-il étonnant ?

**2)** **Application.**
Un entraîneur d'une équipe de football amateur demande à son gardien de but de s'entraîner à une série d'arrêts de tirs au but. Ses statistiques montrent qu'il arrête $10\ \%$ des tirs. L'entraîneur lui demande de s'entraîner tant qu'il n'a pas arrêté un tir. On note $X$ le rang du premier tir arrêté.

**a)** Quelle est la loi de la variable aléatoire $X$ ?

**b)** Déterminer la probabilité que le goal ait à arrêter au plus $10$ tirs ?

**c)** Déterminer le plus petit entier naturel $n \geqslant 1$ tel que $p(X \leqslant n) > 0,9$. Interpréter concrètement le résultat obtenu.

## Exercice 27

**Démonstration**
**Loi discrète sans mémoire**

L'objectif de cet exercice est de démontrer que si une variable aléatoire discrète $X$ à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ vérifie la propriété $(\mathcal{P})$ d'absence de mémoire :
$(\mathcal{P})$ : pour tous $m, n \in \mathbb{N}^*$, $p_{(X>m)}(X > m+n) = p(X > n)$ alors elle suit une loi géométrique.

**1)** On suppose que $X$ suit la propriété $(\mathcal{P})$.
Montrer alors que, pour tous $m, n \in \mathbb{N}^*$, on a :
$p(X > m+n) = p(X > n) \times p(X > m)$.

**2)** On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = p(X > n)$ . On note également $u_1 = q$ et $p = 1 - q$.

**a)** En utilisant la question **1)**, montrer que $(u_n)$ est une suite géométrique de raison $q$.

**b)** En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_n = q^n$.

**c)** Vérifier que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :
$p(X = n) = u_{n-1} - u_n$.
En déduire que $p(X = n) = pq^{n-1}$. Conclure.

## Exercice 28

**Le problème du collectionneur (Acte 1)**
Fabien collectionne les figurines présentes dans ses paquets de céréales favorites. Chaque paquet contient une figurine de la saga Star Mars.
Parmi ces figurines, il convoite celle du sinistre Darth Terror, présente dans $5\ \%$ des boîtes de céréales. On suppose que les vingt figurines différentes sont équitablement réparties dans l'ensemble des paquets.

**1)** Déterminer la probabilité d'obtenir la figurine Darth Terror à l'issue de quatre achats.

**2)** Déterminer la probabilité que les parents de Fabien doivent acheter au moins 5 paquets pour obtenir la figurine tant convoitée.

**3)** Sachant qu'après l'achat de $10$ paquets Fabien n'a toujours pas eu sa figurine Darth Terror, déterminer la probabilité qu'il faille acheter moins de $15$ paquets de céréales pour y parvenir.

**4)** En moyenne, combien de paquets est-il nécessaire d'acheter pour obtenir cette figurine ?

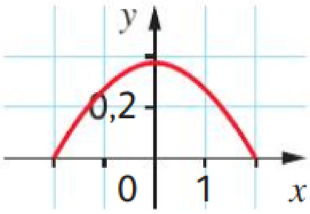
**Exercice 29**

Deux jeux A et B consistent à répondre à une série de questions indépendantes. Dans le jeu A (resp. jeu B), il y a trois (resp. quatre) réponses par question dont une seule est exacte. Dès que le joueur a trouvé une bonne réponse, le jeu s'arrête. Un joueur répond au hasard à toutes les questions.

**1)** Calculer la probabilité que le jeu s'arrête à la première question avec le jeu A, puis avec le jeu B. Quelle est la situation la plus probable ?

**2)** On appelle $X$ (resp. $Y$) la variable aléatoire égale au n° de la question où le jeu A (resp. B) s'arrête. Déterminer les valeurs de $k \in \mathbb{N}^*$ pour lesquelles $p(X = k) \leqslant p(Y = k)$. Interpréter ce résultat.

**Exercice 30**




On a représenté ci-dessus la fonction $f$ définie sur l'intervalle $[-2\ ;\ 2]$ par $f(x) = a(1-x^2)$ avec $a > 0$.

**1)** Déterminer la valeur de $a$ de sorte que $f$ soit une densité de probabilité sur $[-2\ ;\ 2]$.

**2)** **a)** Montrer que $f$ est une fonction paire. Que peut-on en déduire quant à sa courbe représentative ?

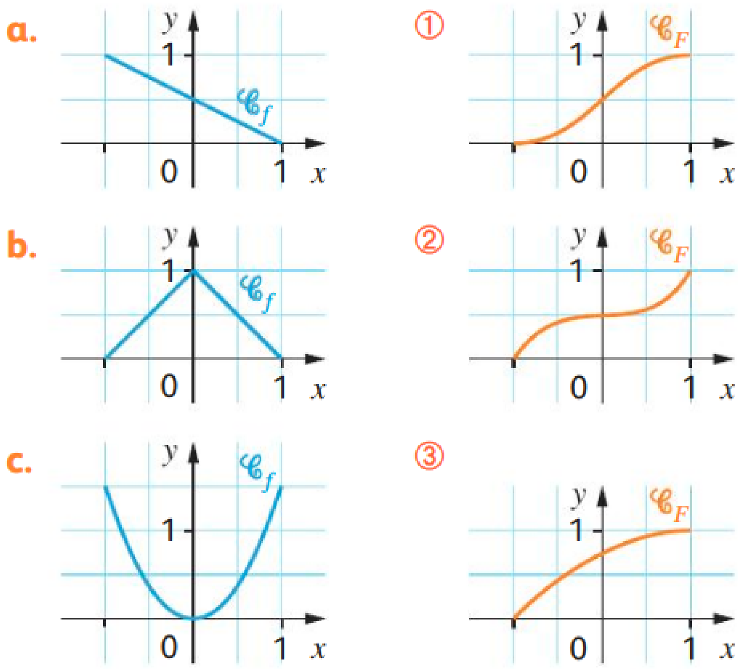
**b)** Soit $Y$ une variable aléatoire de densité $f$. Justifier par des arguments géométriques que pour tout $t \in [0\ ;\ 2]$, on a :

- $p(Y \leqslant -t) = p(Y \geqslant t) = \dfrac{1}{2} - p(0 \leqslant Y \leqslant t)$
- $p(-t \leqslant Y \leqslant t) = 1 - 2p(Y \geqslant t)$

**Exercice 31**

**1)** Soit $X$ une variable aléatoire continue à valeurs dans l'intervalle $I = [-1\ ;\ 1]$ et de densité $f$.
On note $F$ sa fonction de répartition définie sur $I$ par $F(t) = p(X \leqslant t)$ pour tout réel $t \in I$.
Exprimer $F(t)$ à l'aide d'une intégrale et en donner une interprétation graphique.

**2)** Associer alors à chacune des fonctions densités $f$ (représentées à gauche) définies sur l'intervalle $I$ sa fonction de répartition $F$ (représentée à droite). Justifier.



**Exercice 32**

Soient $m$ un nombre réel et $f$ la fonction définie sur $[1\ ;\ e]$ par $f(x) = \dfrac{m}{x}$.

**1)** Déterminer le réel $m$ de sorte que $f$ soit une densité de probabilité.

**2)** Représenter $f$ dans un repère orthonormé.

**3)** Soit $X$ la variable aléatoire de densité de probabilité $f$. On note $F$ sa fonction de répartition sur $[1\ ;\ e]$.

 **a)** Exprimer $F(t)$ en fonction de $t$.

 **b)** Déterminer la valeur des probabilités :

 - $p(X \leqslant 2)$
 - $p(1,5 \leqslant X \leqslant 2)$
 - $p(X > 1,5)$

## Exercice 33

Le petit chaperon rouge doit se rendre chez sa mère-grand. Elle arrive au hasard entre 10 h et 11 h 30. Son heure d'arrivée est modélisée par la variable aléatoire $X$ suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[10\ ;\ 11,5]$.

Déterminer la probabilité que la fillette :

**1)** arrive entre 10 h 30 et 10 h 45 ;

**2)** arrive avant 11 h ;

**3)** arrive après 10 h 30 ;

**4)** n'arrive pas entre 10 h 30 et 11 h ;

**5)** arrive après 11 h sachant qu'à 10 h 30 elle n'est toujours pas arrivée.

## Exercice 34

Une puce électronique contrôle la couleur diffusée par un spot en choisissant aléatoirement une longueur d'onde comprise entre $380$ et $780$ $nm$.

Le tableau suivant donne les couleurs associées à la longueur d'onde de la lumière diffusée.

| Longueur d'onde (nm) | Couleur |
|---|---|
| 478-483 | Bleu |
| 510-541 | Vert |
| 575-579 | Jaune |
| 605-622 | Rouge |

**1)** Modéliser le choix d'une longueur d'onde par une loi de probabilité à préciser.

**2)** Déterminer la probabilité des événements :

- A : « la lampe diffuse une lumière verte » ;
- B : « la lampe diffuse une lumière jaune ou rouge » ;
- C : « la lampe ne diffuse pas une lumière bleue ».

## Exercice 35

Chaque matin, Thomas donne rendez-vous à un ami pour se rendre au lycée. Statistiquement, il se rend compte que son temps d'attente dure, aléatoirement, entre $0$ et $15$ minutes. On note $X$ la variable aléatoire donnant ce temps d'attente.

**1)** Préciser la loi de probabilité de $X$.

**2)** Déterminer la probabilité des événements :

- A : « Thomas attend moins de $3$ minutes » ;
- B : « Thomas attend au moins $10$ minutes ».

**3)** Un matin donné, Thomas a déjà attendu $5$ minutes. Quelle est la probabilité qu'il n'attende pas plus de $5$ minutes supplémentaires ?

**4)** Déterminer le réel $t$ tel que $p(X \leqslant t) = 0,95$.
Interpréter le résultat obtenu.

**Exercice 36**

$X$ est une variable aléatoire de loi uniforme sur $[100\ ;\ b]$.

Dans chaque cas, déterminer $b$ tel que :

**1)** $E(X) = 210$

**2)** $p(X \leqslant 240) = 0,2$

**3)** $p(225 \leqslant X \leqslant 250) = 0,125$

**4)** $p(X > 150) = 0,5$

**Exercice 37**

Un magasin vend des moteurs électriques tous identiques.Une étude a permis d'établir que la probabilité qu'un moteur tombe en panne pendant la première année d'utilisation est égale à $0,12$.
On admet que la durée de vie sans panne, exprimée en année, de chaque moteur est une variable aléatoire $Y$ qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda$, où $\lambda$ est un réel strictement positif.
Tous les résultats seront arrondis à $10^{-3}$ près.

**1)** Exprimer $p(Y \leqslant 1)$ en fonction de $\lambda$. En déduire la valeur exacte de $\lambda$.

Pour la suite de l'exercice, on prendra $\lambda = 0,128$.

**2)** Quelle est la probabilité qu'un moteur dure plus de $3$ ans sans panne ?

**3)** Quelle est la probabilité qu'un moteur fonctionne plus de $4$ ans sans panne sachant qu'il a duré plus d'un an ?

**Exercice 38**

Une usine fabrique des batteries lithium-ion. La probabilité qu'une telle batterie cesse de fonctionner avant $4$ années après sa mise en service est égale à $0,565$.
On admet que la variable aléatoire $T$ qui, à une batterie lithium-ion prélevée au hasard dans le stock de l'usine, associe sa durée de vie, exprimée en année, suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda$.

Dans cet exercice, on arrondira les résultats à $10^{-3}$ près.

**1)** Déterminer la valeur exacte de $\lambda$.

**2)** Pour la suite, on prendra $\lambda = 0,208$.

- **a)** Déterminer la probabilité qu'une batterie lithium-ion soit encore en état de fonctionnement au bout de $8$ ans sachant qu'elle fonctionne encore quatre années après sa mise en service.
- **b)** Déterminer la durée de vie moyenne d'une batterie.
- **c)** Déterminer le réel $t_0$ tel que $p(T > t_0) = 0,75$. On donnera la valeur exacte et la valeur arrondie à l'unité. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

## Exercice 39

Une grande entreprise dispose d'un vaste réseau informatique. On observe le temps de fonctionnement normal séparant deux pannes informatiques. Ce temps sera appelé « temps de fonctionnement ».
Soit $X$ la variable aléatoire égale au temps de fonctionnement, exprimé en heure.
On admet que $X$ suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda$, où $\lambda > 0$.

**1)** On sait que le temps de fonctionnement moyen est égal à $7$ heures et $30$ minutes.
Déterminer la valeur exacte de $\lambda$.

Dans les questions suivantes, les résultats seront donnés à $10^{-3}$ près.

**2)** Montrer que la probabilité que le temps de fonctionnement soit supérieur à $5$ heures est environ égale à $0,513$.

**3)** Calculer la probabilité que le temps de fonctionnement soit supérieur à $9$ heures sachant qu'il n'y a pas eu de panne au cours des quatre premières heures.

**4)** Calculer la probabilité que le temps de fonctionnement soit compris entre $6$ et $10$ heures.

**5)** On relève aléatoirement huit temps de fonctionnement, qu'on suppose indépendants. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de relevés correspondant à des temps de fonctionnement supérieurs ou égaux à $5$ heures.

- **a)** Quelle est la loi suivie par $Y$ ? Justifier.
- **b)** Calculer la probabilité que trois temps parmi ces huit soient supérieurs ou égaux à $5$ heures.
- **c)** Calculer l'espérance mathématique de $Y$ (on arrondira à l'entier le plus proche).

## Exercice 40

**Démonstration Espérance de la loi exponentielle**

Soit $X$ une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

**1)** Rappeler l'expression de la fonction densité $f$ de $X$ en fonction de $x$.

**2)** L'espérance mathématique de la variable aléatoire $X$ est le réel défini par :
$E(X) = \lim\limits_{t \to +\infty} \displaystyle\int_0^t xf(x)dx$.

- **a)** On note $g$ la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = xf(x)$.
Montrer que $G : x \longmapsto \left(-x - \dfrac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda x}$ est une primitive de $g$ sur $[0\ ;\ +\infty[$.
- **b)** Soit $t$ un réel positif. Exprimer $\displaystyle\int_0^t xf(x)dx$ en fonction de $t$.
- **c)** En déduire la valeur de $E(X)$.

**3)** **Application**
La durée, en minute, des conversations téléphoniques de Monsieur Bavard suit une loi exponentielle de paramètre $0,011$.
Quelle est la durée moyenne d'une conversation téléphonique de Monsieur Bavard en heure et minute ?

## Exercice 41

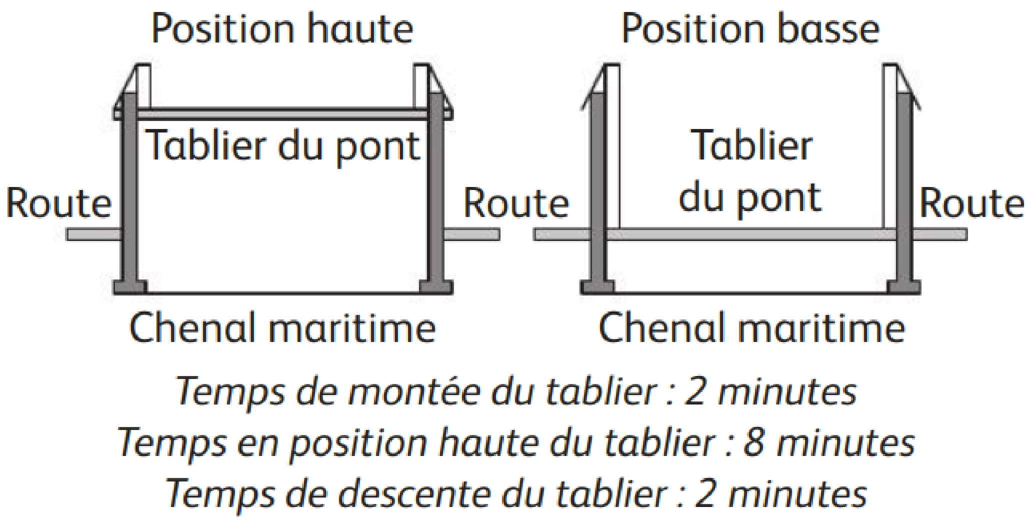
**Prise d'initiative**

La durée moyenne entre deux appels dans une hotline téléphonique est de $3$ minutes. Simon, standardiste, a raccroché son combiné il y a deux minutes.

Quelle est la probabilité que son téléphone ne sonne pas dans les quatre minutes à venir ?

**Exercice 42**

Un pont levant enjambant un canal peu fréquenté est constitué d'un tablier qui, une fois relevé, permet le passage de bateaux de différentes tailles.




**Partie A : Sur la route**

Un automobiliste se présente devant le pont. Le tablier du pont est en position haute. On s'intéresse ici au temps d'attente $D$, de l'automobiliste avant qu'il puisse franchir le canal, pont baissé (hors incident).

**1)** Combien de temps l'automobiliste attend-il au minimum ? au maximum ?

On admet que le temps d'attente, en minute, de l'automobiliste pour franchir le pont est une variable aléatoire $D$ de loi uniforme sur $[2\ ;\ 10]$.

**2)** Déterminer l'espérance de la variable aléatoire $D$ et interpréter le résultat dans le contexte.

**3)** Calculer la probabilité que le temps d'attente de l'automobiliste ne dépasse pas $5$ minutes.

**Partie B : Sur l'eau**

Lorsqu'un bateau est passé, le tablier du pont revient en position basse. Le temps de latence, exprimé en heure, avant que le bateau suivant se présente devant le pont est une variable aléatoire $T$ qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,05$.

**1)** Calculer et interpréter l'espérance $E(T)$.

**2)** Soit la fonction $f$ définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = 0,05e^{-0,05x}$.
Donner une primitive $F$ de $f$ puis justifier que, pour tout réel $t$ positif, on a :
$p(T \leqslant t) = 1 - e^{-0,05t}$.

**3)** Calculer la probabilité que le temps de latence soit inférieur à une demi-journée, soit $12$ heures.

**4)** Une journée donnée, aucun bateau ne s'est présenté devant le pont. Quelle est la probabilité qu'aucun bateau ne se présente le lendemain ?

## Exercice 43

Théo construit des circuits électroniques. Il achète des composants dont certains présentent un défaut.On estime que la probabilité qu'un composant soit défectueux est égale à $0,02$.

On suppose que la durée de vie $T_1$, en heure, de chaque composant défectueux suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_1 = 5 \times 10^{-4}$ et que la durée de vie $T_2$, en heure, de chaque composant non défectueux suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_2 = 10^{-4}$.

**1)** Calculer la probabilité que la durée de vie d'un composant soit supérieure à $1\,000$ heures :

- **a)** lorsque ce composant est défectueux ;
- **b)** lorsque ce composant n'est pas défectueux.
  Arrondir ces probabilités à $10^{-2}$ près.

**2)** Soit $T$ la durée de vie, en heure, d'un composant acheté au hasard.
Montrer que la probabilité que ce composant soit encore en état de marche après $t$ ($t \geqslant 0$) heures de fonctionnement est :
$p(T \geqslant t) = 0,02e^{-5\times 10^{-4}t} + 0,98e^{-10^{-4}t}$.

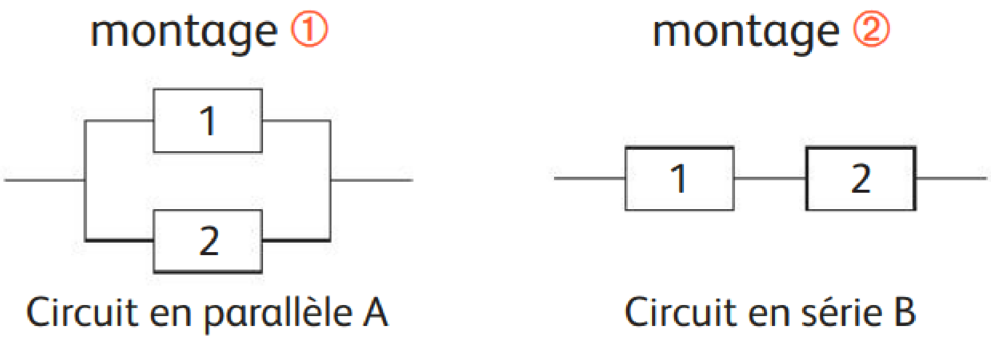
**3)** Sachant que le composant acheté fonctionne $1\,000$ heures après son installation, quelle est la probabilité que ce composant soit défectueux ?

## Exercice 44

Un circuit électronique est constitué de deux composants identiques numérotés ① et ②.

Les durées de vie, en année, de ces composants sont indépendantes et suivent la même loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,5$.

Deux montages sont envisagés :




**1)** Lorsque les composants sont montés « en parallèle », le circuit A est défaillant uniquement si les deux composants sont simultanément défaillants.
Calculer la probabilité que le circuit A soit défaillant avant un an.

**2)** Lorsque les composants sont montés « en série », le circuit B est défaillant dès que l'un au moins des deux composants est défaillant.
Calculer la probabilité que le circuit B soit défaillant avant un an.

**Exercice 45**

**Exercice 46**

**Exercice 47**

**Exercice 48**

**Exercice 49**

**Exercice 50**