Exercice 1

Dans chacun des cas suivants, indiquer si X suit une loi uniforme discrète et, si c'est le cas, donner sa loi de probabilité puis son espérance mathématique.

1) Dans une urne contenant des boules indiscernables numérotées de 5 à 20, on en prélève une et on note X la variable aléatoire donnant son numéro.

2) On lance deux dés cubiques équilibrés. On note X la variable aléatoire donnant la somme des points.

3) Dans un jeu de 32 cartes, on enlève l'ensemble des figures (rois, dames et valets). On prélève au hasard une carte et on note X la variable aléatoire donnant la valeur de la carte prélevée.

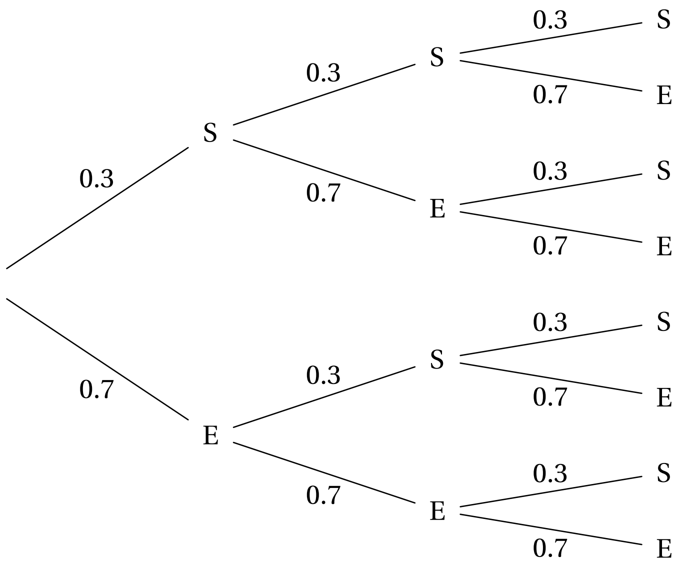
Exercice 2

1) Définir la notion d'épreuve de Bernoulli.

2) Pour chacun des contextes suivants, définir une épreuve de Bernoulli (en précisant un événement Succès et sa probabilité).

- **a)** On tire au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes.
- **b)** On lance un dé tétraédrique équilibré.
- **c)** On lance deux dés cubiques équilibrés.
- **d)** On tire une boule dans une urne contenant 2 boules noires et 3 boules blanches indiscernables au toucher.

Exercice 3



On considère l'arbre ci-dessus décrivant la répétition d'épreuves de Bernoulli indépendantes.

1) Quelle est la probabilité d'un chemin comptant exactement 2 succès ?

2) Combien de chemins comptent exactement 2 succès ?

3) On note X la variable aléatoire comptant le nombre de succès à l'issue du schéma.
Déterminer la valeur de $p(X = 2)$ puis de $p(X = 1)$.

Exercice 4

Soient n, k de $\mathbb{N}$ et p un réel de l'intervalle $[0\ ;\ 1]$.
Compléter les phrases suivantes.

1) Pour $0 \leqslant k \leqslant n$, on a $\binom{n}{k} = \binom{n}{\dots}$.

2) Pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$, la relation de Pascal s'écrit :
$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{\dots} = \binom{\dots}{\dots}$.

3) X suit la loi $\mathcal{B}(n\ ;\ p)$, alors, pour tout $k \in [\![0\ ;\ n]\!]$:
$p(X = k) = \binom{\dots}{\dots} \times p^{\cdots} \times \cdots$.
On a alors $E(X) = \cdots$ et $\sigma(X) = \cdots$.

Exercice 5

QCM

Dans chaque cas, relever les réponses correctes.

1) Une association organise un loto. Parmi 100 billes indiscernables au toucher numérotées de 1 à 100, on en tire une au hasard et on note X la variable aléatoire égale au numéro de cette bille.

- **a)** X suit une loi de Bernoulli.
- **b)** $E(X) = 50,5$.

2) On lance trois pièces équilibrées. Si on obtient le même résultat pour les trois pièces, on dit qu'on obtient un succès. La variable aléatoire X prend la valeur 1 en cas de succès et 0 sinon.

- **a)** X suit une loi de Bernoulli.
- **b)** $E(X) = \dfrac{1}{2}$
- **c)** $\sigma(X) = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$

Exercice 6

Dans chaque cas, indiquer si la variable aléatoire X suit une loi uniforme, une loi de Bernoulli ou aucune de ces deux lois. Le cas échéant, préciser les paramètres de cette loi et l'épreuve de Bernoulli associée.

1) On lance un dé cubique équilibré. La variable aléatoire X prend la valeur 0 si on obtient un multiple de trois et prend la valeur 1 sinon.

2) On lance un dé tétraédrique équilibré. On note X la variable aléatoire égale au double des points qu'affiche le dé.

3) On lance deux dés équilibrés. La variable aléatoire X prend la valeur 0 si on obtient un double et 1 sinon.

4) Un jeu de tarot compte 78 cartes dont 21 atouts numérotés de 1 à 21. On tire une carte au hasard parmi les atouts d'un jeu de tarot. X est la variable aléatoire égale au numéro de l'atout tiré.

5) Dans un jeu de tarot, on tire une carte au hasard. X est la variable aléatoire égale à 1 si on obtient un atout et égale à 0 sinon.

Exercice 7

On considère une variable aléatoire X suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[\![3\ ;\ 21]\!]$.

1) Décrire une expérience aléatoire mettant en jeu une telle variable aléatoire X.

2) Déterminer l'espérance de X.

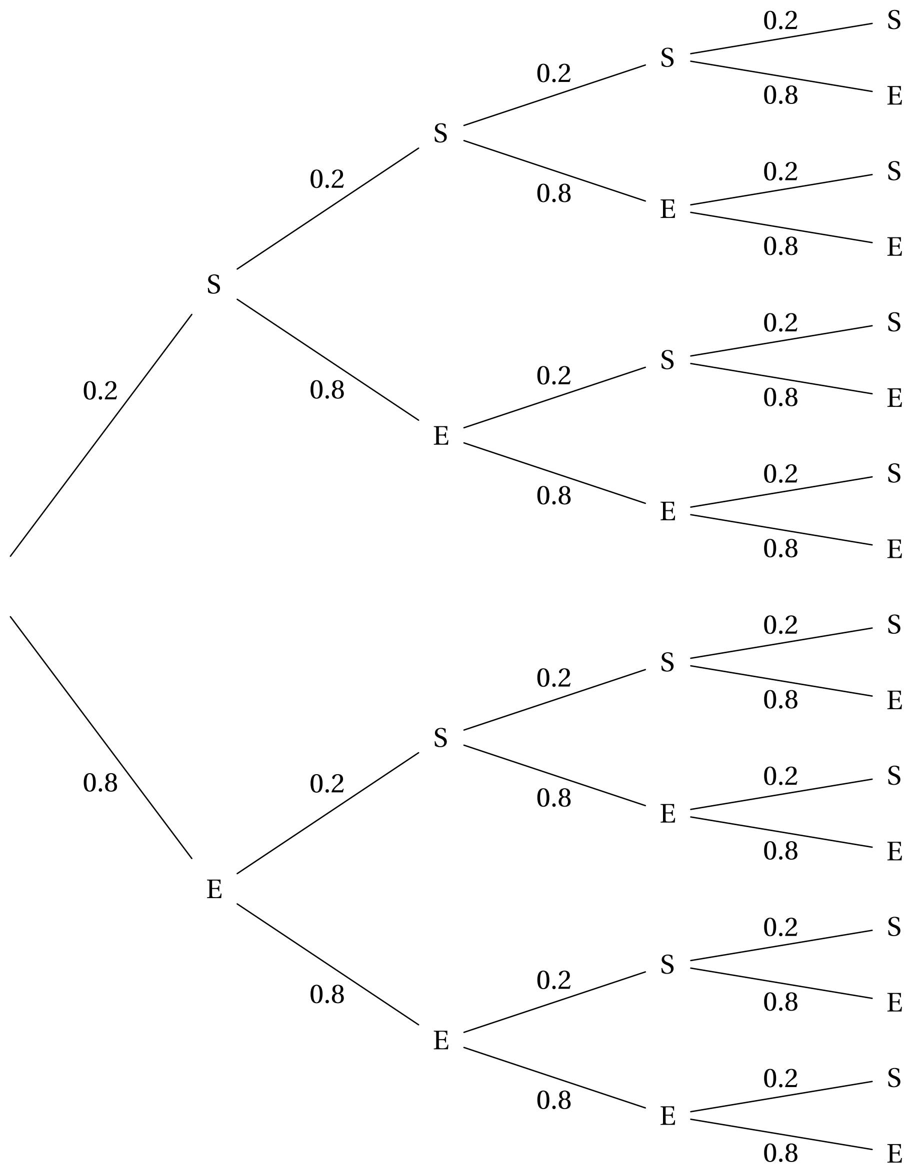
Exercice 8

Lors d'une épreuve de biathlon, épreuve olympique mêlant ski de fond et tir à la carabine, chaque skieur doit parcourir un circuit à l'issue duquel il tire sur 5 cibles distantes de 50 mètres. Un biathlète rate sa cible dans $3\ \%$ des cas.

Cette situation peut-elle être modélisée par un schéma de Bernoulli ? Dans l'affirmative, préciser ses paramètres.

Exercice 9

Vrai ou faux ?



On considère l'arbre de probabilités ci-dessus dans lequel S désigne l'événement Succès et E l'événement Échec. Indiquer si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse. Justifier.

1) Cet arbre modélise un schéma de Bernoulli à 2 épreuves.

2) Dans cet arbre, il existe un unique chemin ne contenant que des Échecs.

3) Dans cet arbre, il existe exactement $\binom{4}{1}$ chemins contenant un seul Échec et trois Succès.

4) Dans cet arbre, exactement 6 chemins contiennent 2 Échecs et 2 Succès.

Exercice 10

QCM

Dans chaque cas, déterminer la (ou les) bonne(s) réponse(s).

1) $\binom{20}{1} =$

- **a)** 0
- **b)** 1
- **c)** 20
- **d)** $\binom{20}{19}$

2) $\binom{5}{2} =$

- **a)** 3
- **b)** $\binom{5}{3}$
- **c)** 10
- **d)** $\binom{4}{1} + \binom{4}{2}$

3) $\binom{5}{3} + \binom{5}{4} =$

- **a)** $\binom{10}{7}$
- **b)** $\binom{6}{4}$
- **c)** 15
- **d)** $\binom{6}{2}$

Exercice 11

On considère un jeu de 32 cartes. On prélève successivement et avec remise trois cartes de ce jeu. On compte le nombre de figures obtenues à l'issue de ces trois tirages.

1) Modéliser la situation par un arbre de probabilités.

2) Cette expérience aléatoire constitue-t-elle un schéma de Bernoulli ? Dans l'affirmative, préciser ses paramètres.

3) Déterminer la probabilité qu'exactement deux cartes sur les trois cartes prélevées soient des figures.

Exercice 12

On considère un jeu de 32 cartes. On prélève successivement et sans remise trois cartes de ce jeu. On compte le nombre de figures obtenues à l'issue de ces trois tirages.

Cette expérience aléatoire constitue-t-elle un schéma de Bernoulli ? Dans l'affirmative, préciser ses paramètres.

Exercice 13

Déterminer sans calculatrice la valeur des coefficients binomiaux suivants.

1) $\binom{4}{1}$

2) $\binom{10}{9}$

3) $\binom{15}{1}$

4) $\binom{30}{0}$

5) $\binom{20}{20}$

Exercice 14

On a obtenu les résultats suivants à l'aide de la calculatrice.

Sans calculatrice, déduire de ces résultats la valeur des coefficients binomiaux suivants.

1) $\binom{18}{11}$

2) $\binom{18}{10}$

3) $\binom{19}{8}$

4) $\binom{19}{11}$

Exercice 15

À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur des coefficients binomiaux suivants.

1) $\binom{15}{12}$

2) $\binom{18}{16}$

3) $\binom{20}{10}$

4) $\binom{30}{16}$

Exercice 16

QCM

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$et $p = 0,2$.
Dans chaque cas, indiquer les réponses correctes.

1) La (les) probabilité(s) correcte(s) est (sont) :

- **a)** $p(X = 10) = 0,2^{10}$
- **b)** $p(X = 2) = 0,2^2 \times 0,8^8$
- **c)** $p(X = 0) = 0,2^0$
- **d)** $p(X = 3) = 120 \times 0,2^3 \times 0,8^7$

2) L'espérance mathématique de X est égale à :

- **a)** 8
- **b)** 10
- **c)** 2
- **d)** $1,6$

3) L'écart type de X est égale à :

- **a)** $1,6$
- **b)** $\sqrt{2}$
- **c)** $\sqrt{1,6}$
- **d)** $0,4$

Exercice 17

QCM

On appelle X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,6$.
Dans chaque cas, indiquer les réponses correctes.

1) La probabilité $p(X = 0)$ est égale à :

- **a)** $0,4^5$
- **b)** $5 \times 0,4^5$
- **c)** $0,6^5$
- **d)** $5 \times 0,6^5$

2) La probabilité $p(X \geqslant 1)$ est égale à :

- **a)** $1 - p(X = 0)$
- **b)** $1 - 0,4^5$
- **c)** $1 - 0,6^5$
- **d)** $0,6^5$

3) La probabilité $p(X < 5)$ est égale à :

- **a)** $p(X \leqslant 4)$
- **b)** $1 - 0,4^5$
- **c)** $1 - 0,6^5$
- **d)** $0,4^5$

Exercice 18

X suit une loi binomiale de paramètres $= 20$ et $p = 0,3$.
À l'aide de la calculatrice, déterminer les probabilités suivantes.

1) $p(X = 4)$

2) $p(X \leqslant 7)$

3) $p(X > 9)$

4) $p(X \geqslant 5)$

Exercice 19

Selon l'INJEP, en 2015, $47\ \%$ des jeunes Français de 16 ans ont une pratique sportive hebdomadaire. On interroge au hasard et de façon indépendante 20 jeunes Français de 16 ans dans la population.

On note X la variable aléatoire donnant le nombre de jeunes de cet échantillon ayant une pratique sportive hebdomadaire.

Indiquer si la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Dans l'affirmative, préciser ses paramètres.

Exercice 20

Dans un stock de 20 vis dont 3 sont trop longues, on prélève successivement 15 vis au hasard et sans remise.

On note X la variable aléatoire donnant le nombre de vis qui ont la bonne longueur parmi les 15 vis choisies.

Indiquer si la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Dans l'affirmative, préciser ses paramètres.

Exercice 21

On lance un dé tétraédrique équilibré à six reprises.

X est la variable aléatoire qui compte le nombre de fois où on a obtenu 4.

Indiquer si la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Dans l'affirmative, préciser ses paramètres.

Exercice 22

Le conseil régional dote un lycée de 20 nouveaux ordinateurs. Une étude montre qu'un ordinateur de ce type tombera en panne durant la période de garantie avec une probabilité de $5\ \%$. On suppose que ces ordinateurs sont tous du même type et qu'ils peuvent tomber en panne indépendamment les uns des autres.
On note X la variable aléatoire égale au nombre d'ordinateurs qui tomberont en panne durant la période de garantie.

1) Quelle est la loi suivie par X ? Justifier.

2) Calculer la probabilité des événements suivants.

- **a)** Au moins un ordinateur tombe en panne durant la période de garantie.
- **b)** Exactement cinq ordinateurs tombent en panne durant la période de garantie.
- **c)** Au plus sept ordinateurs tombent en panne durant la période de garantie.

3) Calculer et interpréter l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

Exercice 23

Un restaurateur a constaté qu'au déjeuner six clients sur dix prennent un café. Huit clients se présentent pour déjeuner et commandent de façon indépendante. On note X la variable aléatoire égale au nombre de clients qui commandent un café sur l'en-semble des huit clients ayant déjeuné.

1) X suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.

2) Calculer la probabilité des événements suivants.

- **a)** Un seul client prend un café.
- **b)** Exactement trois clients prennent un café.
- **c)** Au moins un client prend un café.
- **d)** Au plus quatre clients prennent un café.

3) Calculer et interpréter l'espérance de X.

Exercice 24

Une étude Ipsos menée en novembre 2019 indique qu'en réaction au phénomène de surconsommation $54~\%$ des Français privilégient désormais les marques éthiques et éco-responsables ou les articles recyclés lors de leurs achats en ligne. On interroge douze Français au hasard et de façon indépendante.
On note Y la variable aléatoire donnant le nombre de personnes parmi les douze personnes interrogées qui adoptent un tel comportement lors de leurs achats en ligne.

1) Quelle est la loi suivie par Y ? Justifier.

2) On a réalisé le calcul suivant sur une calculatrice :

Quelle probabilité ce calcul permet-il d'obtenir ?

3) **a)** Calculer et interpréter la probabilité $p(Y = 5)$.

b) Déterminer la probabilité qu'au moins une personne interrogée adopte un comportement éco-responsable lors de ses achats en ligne.

c) Déterminer la probabilité qu'au moins la moitié des personnes interrogées adopte un comportement éco-responsable lors de ses achats en ligne.

Exercice 25

Vrai ou faux ?

Soit X une variable aléatoire de loi binomiale $\mathcal{B}(n\ ;\ p)$ avec $n = 13$ et $p = 0,3$.
On a tabulé ci-dessous les probabilités pour (valeurs arrondies à $0,001$ par défaut).

k	0	1	2	3	4
$P(X \leqslant k)$	0,009	0,063	0,202	0,42	0,654
k	5	6	7	8	9
$P(X \leqslant k)$	0,834	0,937	0,981	0,995	0,999

Enfin, pour $k \in [\![10\ ;\ 12]\!]$, on a $p(X = k) \approx 0,999$ et $p(X \leqslant 13) = 1$.

1) Le plus petit $a \in \mathbb{N}$ tel $p(X \leqslant a) > 0,025$ que est 1.

2) Le plus petit $b \in \mathbb{N}$ tel $p(X \leqslant b) \geqslant 0,975$ que est 6.

3) Le plus petit $k \in \mathbb{N}$ tel $p(X \leqslant k) \geqslant 0,995$ que est 8.

4) On a $p(1 \leqslant X \leqslant 7) \geqslant 0,95$. Ainsi, l'intervalle $[1\ ;\ 7]$ est un intervalle de fluctuation à $95\ \%$ de X.

Exercice 26

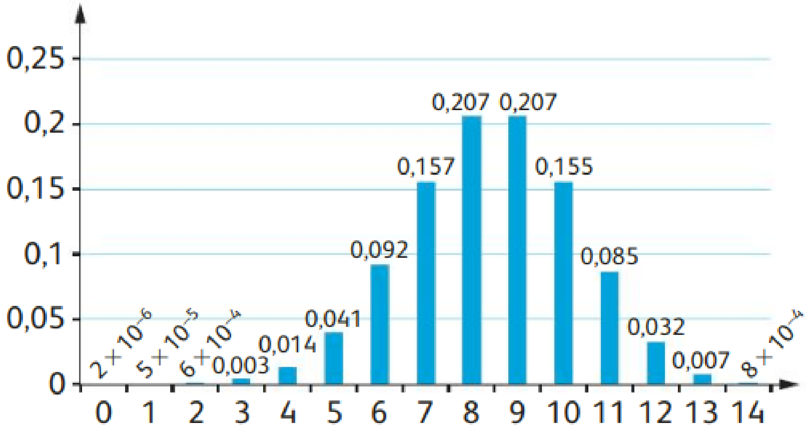
Pièce équilibrée ?

On lance 200 fois une pièce de monnaie. On obtient 123 fois Pile.

Peut-on remettre en question, au seuil de $95\ \%$, le fait que cette pièce soit équilibrée ?

Exercice 27

On a représenté ci-dessous la distribution de la loi binomiale de paramètres $n = 14$ et $p = 0,6$.



En utilisant ces informations, déterminer un intervalle de fluctuation à $95\ \%$ pour une variable aléatoire X de loi binomiale $\mathcal{B}(n\ ;\ p)$.

En déduire un intervalle de fluctuation de la variable aléatoire fréquence $F = \dfrac{X}{14}$ associée à X.

Exercice 28

Une machine d'un laboratoire pharmaceutique fabrique, en très grande quantité, un médicament sous forme de gélules. Lorsque cette machine est bien réglée, au moins $97\ \%$ des gélules sont conformes.
Afin d'évaluer le bon réglage de cette machine, on effectue un contrôle en prélevant un échantillon de $1\,000$ gélules dans la production. Celle-ci étant supposée suffisamment importante, on assimile ce prélèvement à $1\,000$ tirages successifs avec remise. Le contrôle effectué a permis de dénombrer 53 gélules non conformes dans l'échantillon prélevé.

1) Quelle est la fréquence de gélules conformes dans l'échantillon ?

2) Grâce à un tableur, on a calculé les probabilités $p(X \leqslant k)$ où X suit la loi $\mathcal{B}(n\ ;\ p)$ avec $n = 1\,000$ et $p = 0,97$.

	A	B
1	k	$P(X \leq k)$
958	956	0,0088
959	957	0,0135
960	958	0,0204
961	959	0,0302
962	960	0,0437
963	961	0,0619

	A	B
1	k	$P(X \leq k)$
979	977	0,9226
980	978	0,9481
981	979	0,9667
982	980	0,9796
983	981	0,9881
984	982	0,9934

a) Donner les plus petits entiers a et b tels que $p(X \leqslant a) > 0,025$ et $p(X \leqslant b) \geqslant 0,975$.

b) En déduire un intervalle de fluctuation à $95\ \%$ de la fréquence associée à X.

3) Le contrôle remet-il en question les réglages faits par le laboratoire ?

Exercice 29

Python

La fonction **random()** issue de la bibliothèque **random** de Python renvoie un nombre réel aléatoire de l'intervalle et ceci de manière équirépartie.

1) Compléter la fonction ci-dessous de telle sorte qu'elle simule le lancer d'un dé tétraédrique équilibré, c'est-à-dire qu'elle renvoie un entier de l'intervalle avec équiprobabilité.

```python
from random import random

def de_tetraedrique():
    x=random()
    if x<0.25:
        return 1
    elif x<.5:
        return 2
    elif x< ... :
        return ...
    else:
        return ...
```

2) Un autre point de vue. La fonction **int(x)** renvoie la partie entière d'un réel x, c'est-à-dire le plus grand entier inférieur ou égal à x.

- **a)** On saisit la commande **4*random()** dans la console Python. Dans quel intervalle peuvent varier les valeurs retournées par cette commande ?
- **b)** Reprendre la question précédente pour la commande **int(4*random())**, puis **int(4*random())+1**.
- **c)** En déduire une autre façon de simuler le lancer d'un dé tétraédrique équilibré.

3) De même, construire une fonction **de_cubique()** simulant le lancer d'un dé cubique équilibré (on proposera deux méthodes).

Python

La fonction **random()** issue de la bibliothèque **random** de Python renvoie un nombre réel aléatoire de l'intervalle et ceci de manière équirépartie.

1) Compléter la fonction ci-dessous de telle sorte qu'elle simule le lancer d'un dé tétraédrique équilibré, c'est-à-dire qu'elle renvoie un entier de l'intervalle avec équiprobabilité.

```python
from random import random

def de_tetraedrique():
    x=random()
    if x<0.25:
        return 1
    elif x<.5:
        return 2
    elif x< ... :
        return ...
    else:
        return ...
```

```python
from random import random

def de_tetraedrique():
    x = random()
    if x <0.25:
        return 1
    elif x < 0.5:
        return 2
    elif x < 0.75:
        return 3
    else :
        return 4

```

2) Un autre point de vue. La fonction **int(x)** renvoie la partie entière d'un réel x, c'est-à-dire le plus grand entier inférieur ou égal à x.

a) On saisit la commande **4*random()** dans la console Python. Dans quel intervalle peuvent varier les valeurs retournées par cette commande ?

4*random() est compris dans $[0\ ;\ 4[$.

b) Reprendre la question précédente pour la commande **int(4*random())**, puis **int(4*random())+1**.

4*random()+1 est compris dans $[1\ ;\ 5[$.

int(4*random()+1) est compris dans $[\![1\ ;\ 4]\!]$.

c) En déduire une autre façon de simuler le lancer d'un dé tétraédrique équilibré.

```python
from random import random

def de_tetraedrique():
    return int(4*random()+1)

```

3) De même, construire une fonction **de_cubique()** simulant le lancer d'un dé cubique équilibré (on proposera deux méthodes).

```python
from random import random

def de_cubique():
    return int(6*random()+1)

```

Exercice 30

Python

Le programme suivant, écrit en Python, simule des lancers d'un dé cubique classique, puis affiche le nombre d'apparitions de chacune des faces.

```
from random import randrange

dice = [0]*6
for _ in range(1000):
    face = randrange(1, 7)
    dice[face - 1] += 1
print(dice)
```

Adapter ce programme afin de simuler les événements suivants.

1) $4\,000$ lancers d'un dé tétraédrique équilibré.

2) $1\,000$ lancers d'une pièce de monnaie équilibrée.

3) $2\,000$ tirages d'une des cartes as, 2, 3, $\ldots$ dame, roi parmi les 14 cartes de cœur possibles.

Info : L'instruction **[0]***6** crée une liste de six zéros.

Exercice 31

On considère l'équation $x^2 + bx + c = 0$ où le couple $(b\ ;\ c)$ est obtenu de la manière suivante : b est le résultat du premier jet d'un dé équilibré tétraédrique dont les faces portent les numéros 2, 3, 4, 5 ; c est le résultat du second jet du même dé. Chaque couple a la même probabilité d'apparition.

1) Soit B la variable aléatoire qui prend les valeurs obtenues lors du premier lancer. Déterminer la loi de B.

2) Soit D la variable aléatoire qui prend la valeur $b^2 - 4c$. D suit-elle une loi uniforme ?

3) Soit S la variable aléatoire qui vaut 0 quand l'équation n'admet pas de solution et 1 sinon. Déterminer la loi de S.

Exercice 32

Pour obtenir le Code de la route, il faut répondre à 40 questions et faire un nombre de fautes inférieur ou égal à 5.

1) Un candidat répond au hasard à chacune des 40 questions : montrer que cette situation est celle d'un schéma de Bernoulli dont on précisera le nombre de répétitions.

2) En imaginant l'arbre associé à cette situation, calculer le nombre de chemins de cet arbre correspondant à :

a) exactement 35 bonnes réponses ;

b) au plus 5 fautes ;

c) au moins 38 bonnes réponses.

3) Interpréter, en termes de chemins, les nombres suivants.

a) $\binom{40}{10}$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} \binom{40}{k}$

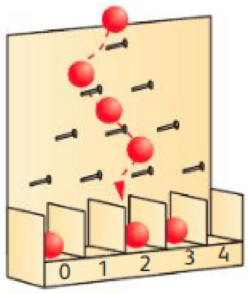
Exercice 33

On joue avec un dé cubique parfaitement équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et un jeu classique de 32 cartes.On choisit le dé ou bien le jeu de cartes.

- Si on a choisi le dé : on le lance 5 fois, on gagne si on obtient au moins une fois le 1 ;
- Si on a choisi le jeu de cartes : on tire avec remise 7 cartes dans le paquet, on gagne si on obtient au moins une fois un as.

À l'aide d'un arbre pondéré, répondre, en justifiant, au problème suivant :
"Pour avoir le plus de chances de gagner, est-il préférable de choisir le dé ou le jeu de cartes ?"

Exercice 34



La planche de Galton, dispositif inventé par Francis Galton (1822-1911), est constitué d'une planche dans laquelle sont plantés quatre rangées de clous en quinconce. Lorsqu'on lâche une bille au sommet de la planche, cette dernière rencontre une succession de clous. À chaque clou rencontré, la bille passe à sa droite ou à sa gauche avec équiprobabilité. En fin de parcours, elle tombe dans une case.

1) **Exploitation de simulations avec tableur**
   On souhaite construire une feuille tableur du type :

B2 =SI(ALEA()<0,5;"D";"G")

	A	B	C	D	E	F
1	Simulation	Clou n°1	Clou n°2	Clou n°3	Clou n°4	Case arrivée
2	1	D	G	D	G	2
3	2	G	G	D	D	2
4	3	D	D	G	D	3

   a) Expliquer la formule saisie dans la cellule $B2$. De la même façon, compléter les cellules $C2$ à $E2$.
   b) En exploitant la fonction **NB.SI**, écrire une formule pour la cellule $F2$.
   c) Recopier les cellules vers le bas pour effectuer $1\,000$ puis $10\,000$ simulations de trajectoires.
   d) En utilisant la fonction **NB.SI**, calculer les fréquences des billes présentes dans chaque case. On pourra rafraîchir les simulations en appuyant sur **F9**.

2) **Modélisation par un schéma de Bernoulli**

   a) Justifier que la chute d'une bille peut être modélisée par un schéma de Bernoulli.
   b) Quelle est la probabilité qu'une bille tombe dans la case n° 0 ? la case n° 4 ?
   c) Dénombrer les chemins qui mènent à la case n° 2. Quelle est la probabilité d'un tel chemin ? En déduire la probabilité qu'une bille tombe dans la case n° 2.
   d) De la même façon, déterminer la probabilité que la bille tombe en case n° 1, puis en case n° 3.

Exercice 35

Python

Quand elle tape « coefficient binomial » dans un moteur de recherche, Zoé découvre la formule : $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

1) Construire les cinq premières lignes du triangle de Pascal.

2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, le nombre $n!$ se lit « factorielle n » et est défini par $n! = n \times (n-1 \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1$. Par convention, $0! = 1$.

- **a)** Calculer $A = \binom{3}{2}$ et $B = \binom{5}{3}$ à l'aide des factorielles.
- **b)** Vérifier ces résultats à l'aide du triangle de Pascal.

3)
- **a)** Pour $n \geqslant 1$, exprimer $n!$ en fonction de $(n-1)!$.
- **b)** Compléter le programme ci-dessous, écrit en Python, conduisant au calcul de $n!$.

```
def facto(n):
  if n==0:
    return ...
  else:
    return ... * facto(...)
```

- **c)** Écrire une fonction en Python qui permet de calculer $\binom{n}{p}$ à l'aide de la fonction **facto**.

Exercice 36

Exercice commenté

L'entraîneur d'une équipe de foot junior a constaté que son meilleur buteur réussit $70\ \%$ de ses penaltys. L'entraîneur a prévu de lui faire tirer une série de 10 penaltys (on suppose que ses tirs sont indépendants). On note X la variable aléatoire égale au nombre de penaltys réussis.

1) Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
Aide : Pour cela, identifier une répétition de n épreuves identiques et indépendantes de Bernoulli (à décrire), en précisant le succès et sa probabilité. Indiquer que X compte le nombre de succès.

2) Déterminer la probabilité de :

- **a)** réussir 3 penaltys ;
- **b)** ne réussir aucun penalty ;
- **c)** réussir au moins 1 penalty.
  Aide : L'événement « réussir au moins un penalty » est l'événement contraire de l'événement précédent.
- **d)** réussir au plus 6 penaltys.
  Aide : Exploiter les fonctionnalités de la calculatrice.

3) Sur un échantillon de 10 tirs, combien de penaltys ce buteur réussit-il en moyenne ?
Aide : Moyenne rime avec espérance mathématique ...

Exercice 37

Une étude indique qu'environ $23\ \%$ des Français consultent leur Smartphone avant de s'endormir. On interroge 15 personnes au hasard en France (on assimile le choix des 15 personnes à un tirage avec remise).

On note X la variable aléatoire égale au nombre de personnes qui consultent leur Smartphone avant de s'endormir parmi les 15 personnes interrogées.

1) Déterminer la loi de probabilité de X.

2) Calculer et interpréter $p(X = 4)$ et $p(X \leqslant 5)$.

3) Calculer la probabilité qu'au moins une personne parmi celles interrogées consulte son Smartphone avant de s'endormir.

4) Calculer et interpréter $E(X)$.

Exercice 38

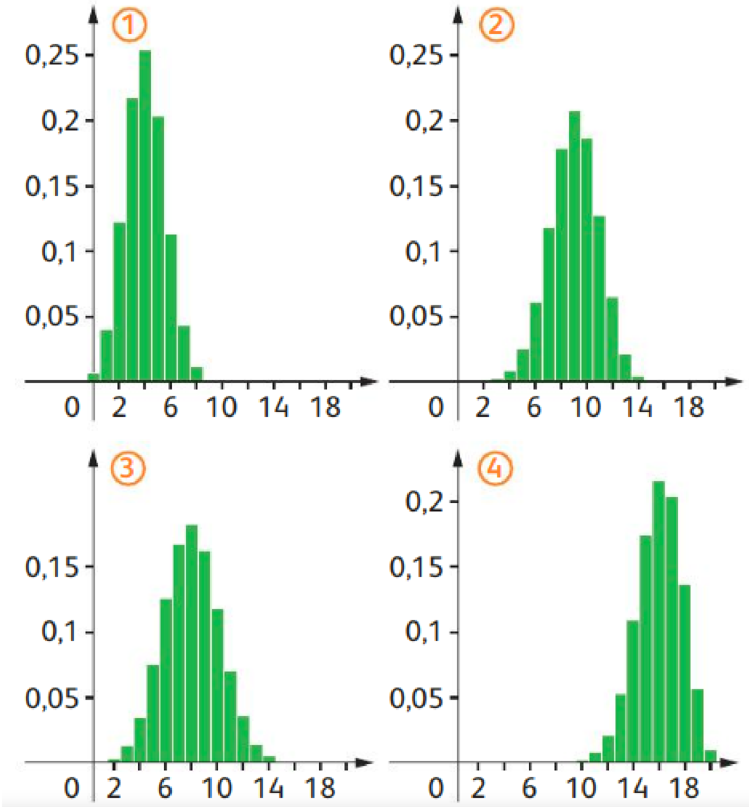
Associer chaque schéma avec la loi binomiale lui correspondant, puis vérifier à l'aide d'un logiciel ou de la calculatrice.

1) $\mathcal{B}(15\ ;\ 0,6)$

2) $\mathcal{B}(20\ ;\ 0,4)$

3) $\mathcal{B}(20\ ;\ 0,8)$

4) $\mathcal{B}(10\ ;\ 0,4)$



Exercice 39

Lors d'une assemblée de copropriétaires, il faut que le nombre de présents (ou mandatés) représente au moins la moitié de la propriété (on dit alors que le quorum est atteint). Une copropriété compte 22 copropriétaires représentant chacun $\frac{1}{22}$. La probabilité qu'un copropriétaire assiste (ou soit représenté) à l'assemblée est de $80\ \%$ et est indépendante de la venue des autres.

Quelle est la probabilité que, lors de la prochaine assemblée, le quorum soit atteint ?

Exercice 40

On suppose qu'une urne contient 1 boule blanche et 99 boules noires. On effectue n tirages successifs d'une boule avec remise.

Déterminer le plus petit entier naturel n pour que la probabilité de tirer au moins une fois la boule blanche soit supérieure ou égale à $0,95$.

Pistes de résolution : On pourra introduire la variable aléatoire X égale au nombre de boules blanches obtenues à l'issue des n tirages. Exprimer $p(X \geqslant 1)$ en fonction de n puis remarquer que le problème se ramène à résoudre une inéquation d'inconnue n.

Exercice 41

Louna affirme : « Avec un dé classique bien équilibré, on a autant de chances d'obtenir au moins un 6 en quatre lancers que d'obtenir au moins deux 6 avec huit lancers. » Sarah pense que Louna à tort, car il lui semble plus facile d'obtenir deux 6 en huit lancers.

1) Soit Q la variable aléatoire qui compte le nombre de 6 obtenus en lançant quatre fois le dé.
Préciser la loi de Q puis calculer la probabilité d'obtenir au moins un 6 en quatre lancers.

2) De la même façon, déterminer la probabilité d'obtenir au moins deux 6 en huit lancers.

3) Conclure.

Exercice 42

Une entreprise fabrique chaque jour $100\,000$ briques de plastique pour des jeux de construction. Chaque brique présente un défaut, indépendamment des autres, avec la probabilité $0,0007$.
Si la brique est repérée comme étant défectueuse, elle est refondue. Une vérification coûte $0,1$ € et une refonte coûte 1 €.

1) Soit D la variable aléatoire qui donne le nombre de briques défectueuses.

- **a)** Déterminer la loi de D et calculer son espérance mathématique.
- **b)** Déterminer le coût de contrôle (vérification et destruction) moyen journalier.

2) À la suite d'un audit, on met en place une nouvelle procédure :

- on groupe les briques par lots de vingt ;
- on vérifie chaque lot pour un coût de $0,25$ €/lot ;
- si au moins une des briques d'un lot est défectueuse, ce lot est refondu pour un coût de 10 €/lot.

On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de lots refondus.

- **a)** Justifier que X suit la loi binomiale de paramètres $n = 5\,000$ et $p = 0,0139$.
- **b)** Déterminer le coût de contrôle (vérification et destruction) moyen journalier de ce nouveau dispositif. Calculer l'économie moyenne espérée par jour.

Exercice 43

Un QCM comporte 20 questions. Pour chaque question, quatre réponses sont proposées dont une seule est correcte. Chaque réponse juste rapporte 1 point, une réponse fausse retire $0,25$ point et l'absence de réponse n'apporte et n'enlève aucun point (la note finale peut donc être négative). On suppose qu'un candidat répond au hasard à chaque question.

1) **a)** Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre de bonnes réponses du candidat. Déterminer la loi de X.

b) Calculer et interpréter l'espérance de X.

c) Calculer la probabilité que le candidat obtienne au moins la moyenne à ce QCM.

2) Soit N la variable aléatoire qui donne la note du candidat (sur 20).

a) Exprimer N en fonction de X. En déduire la note moyenne qu'il peut espérer obtenir.

b) Déterminer le nombre de points à attribuer à une réponse fausse afin qu'un candidat qui réponde au hasard puisse espérer obtenir une note de 5 à ce QCM.

Exercice 44

Une entreprise dans l'aéronautique utilise des composants électroniques d'un certain type en grande quantité. Elle les commande par lots à une compagnie spécialisée. La probabilité qu'un composant soit défectueux est $0,005$.

Cette entreprise souhaite que la probabilité d'avoir au moins un composant défectueux dans un lot acheté ne dépasse pas les $10\ \%$. Quelle est la taille maximale des lots qu'elle peut acheter ?

Exercice 45

Un casino achète en grande quantité des dés qui doivent être parfaitement équilibrés. Le directeur du casino décide, pour tester l'un de ces dés, de le lancer 100 fois et de noter les résultats obtenus. Il observe alors 28 apparitions du numéro 6. L'objectif de cet exercice est de déterminer si le directeur doit considérer que le dé est équilibré ou non.

1) Intervalle de fluctuation au seuil de $95\ \%$

a) En considérant le dé testé équilibré et en notant X la variable aléatoire égale au nombre de 6 obtenus à l'issue de 100 lancers, déterminer la loi de X.

b) À l'aide de la calculatrice, déterminer les plus petits entiers k_1 et k_2 tels que : $p(X \leqslant k_1) \geqslant 0,025$ et $p(X \leqslant k_2) \geqslant 0,975$.

c) En déduire un intervalle de fluctuation pour la fréquence associée à la variable aléatoire X.

2) Prise de décision

a) Le directeur doit-il accepter, au seuil de $95\ \%$, l'hypothèse selon laquelle la probabilité que son dé tombe sur 6 est égale à $\frac{1}{6}$?

b) Que doit-il en déduire sur son dé ? Peut-il être sûr de sa décision ?

Exercice 46

Le maire d'une commune prétend que $40\ \%$ de ses administrés sont favorables à la construction d'une rocade desservant les communes avoisinantes. Une association de lutte contre les nuisances sonores doute de la réalité de cette affirmation et décide de réaliser un sondage auprès de 150 habitants. La population de la ville étant importante, on considère que le choix de ces 150 habitants est assimilable à un tirage avec remise de 150 individus.

1) En supposant que le maire dise vrai, déterminer la loi de la variable aléatoire X qui, à un échantillon de 150 habitants choisis au hasard, associe le nombre de personnes favorables à la rocade.

2) Déterminer un intervalle de fluctuation au seuil de $99\ \%$ de la variable aléatoire fréquence associée à X.

3) Sur les 150 personnes interrogées par l'association, 50 se déclarent favorables à la construction de cette rocade. Sur la base de cet échantillon, l'association peut-elle remettre en cause l'affirmation du maire ?

Exercice 47

Python

On souhaite écrire une fonction Python permettant de déterminer un intervalle de fluctuation au seuil de $0,95$ de la variable aléatoire X de loi $\mathcal{B}(n\ ;\ p)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0\ ;\ 1]$.

1) On considère la fonction Python suivante permettant de déterminer le plus petit entier vérifiant $p(X \leqslant k) > 0,025$.

```
1  from scipy.special import binom
2
3  def coeff_k1(n,p):
4      k=0
5      proba=...
6      proba_cumule=proba
7      while proba_cumule<=...:
8          k=k+1
9          proba=...
10         proba_cumule=proba_cumule+...
11     return ...
```

a) En ligne 5 et en ligne 9, écrire une formule permettant de calculer respectivement $p(X = 0)$ et $p(X = k)$. Pour cela, on utilisera la fonction **binom(n,k)** de la bibliothèque **scipy.special**.

b) La variable **proba_cumule** permet de stocker la valeur de $p(X \leqslant k)$. Compléter alors les lignes 7, 10 et 11 de cette fonction, puis la tester.

2) De même, écrire une fonction Python permettant de déterminer le plus petit entier k_2 vérifiant $p(X \leqslant k_2) \geqslant 0,975$.

3) En déduire une fonction Python retournant les bornes d'un intervalle de fluctuation de la variable aléatoire fréquence $F = \dfrac{X}{n}$.

4) Pour aller plus loin
Modifier les fonctions précédentes afin de déterminer un intervalle de fluctuation au seuil α où est $\alpha \in [0\ ;\ 1]$ un réel donné en argument.

Exercice 48

Une étude a montré que $2\ \%$ de la population de Bossedurie est sujet à la procrastination. Le professeur Obrufe pense que cela est dû à l'allèle A+ du gène A.
Des tests cliniques ont montré que, sur un échantillon de 900 personnes possédant cet allèle, 21 personnes sont sujettes à la procrastination.
À la suite de cette étude, le professeur Obrufe peut-il affirmer, au seuil de $95\ \%$, que l'allèle A+ du gène A a une influence sur la procrastination dans la population de Bossedurie ?

Exercice 49

Exercice 50