

Exercice 1

Recopier et compléter les phrases suivantes.

- 1) L'écart type mesure la dispersion autour de la
 - 2) mesure la dispersion autour de la médiane.
 - 3) Plus l'écart type est grand, plus
 - 4) La médiane partage la série en, les quartiles en et les en dix séries de même taille.
 - 5) D_1 est la plus petite valeur de la série telle que
-

Exercice 2

Vrai ou Faux ?

Soit f une fonction continue positive sur $[a ; b]$ et F une primitive de f sur $[a ; b]$.

1) Pour tout réel $x \in [a ; b]$, $f'(x) = F(x)$.

2) $\int_a^b f(x)dx = f(b) - f(a)$

3) La valeur moyenne de f sur $[a ; b]$ est égale à $\mu = \frac{1}{b-a} (F(b) - F(a))$.

4) L'aire du domaine du plan compris entre la courbe représentative de f , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est égale à $\int_a^b f(x)dx$.

Exercice 3

QCM



| Stats1-Var |
|------------------------|
| $\bar{x}=10.02857143$ |
| $\Sigma x=351$ |
| $\Sigma x^2=4503$ |
| $Sx=5.376887982$ |
| $\sigma x=5.299518654$ |
| $n=35$ |
| $\min X=2$ |
| $Q_1=5$ |
| $Med=9$ |
| $Q_3=15$ |
| $\max X=23$ |

On considère une série statistique pour laquelle on a obtenu les résultats ci-contre à l'aide de la calculatrice. Dans chacun des cas, indiquer la bonne réponse.

1) La moyenne de la série est environ égale à :

- a) 10
- b) 9
- c) 351

2) Le cinquième décile est égal à :

- a) 10
- b) 9
- c) 23

3) L'écart type est environ égal à :

- a) 5,38
- b) 4503
- c) 5,30

4) L'écart interquartile est égal à :

- a) 21
- b) 10
- c) 15

Exercice 4

On considère les séries S_1 et S_2 suivantes.

- S_1 : 90 ; 100 ; 100 ; 110.
 - S_2 : 95 ; 95 ; 105 ; 105.
- 1) Calculer, à la main, la moyenne de la série S_1 , puis celle de la série S_2 .
Peut-on les différencier à l'aide de cet indicateur ?
 - 2)
 - a) Quelle semble être la série la plus dispersée ?
 - b) Calculer, à la main, l'écart type de la série S_1 , puis celui de la série S_2 . Comparer finalement les deux séries.

Exercice 5

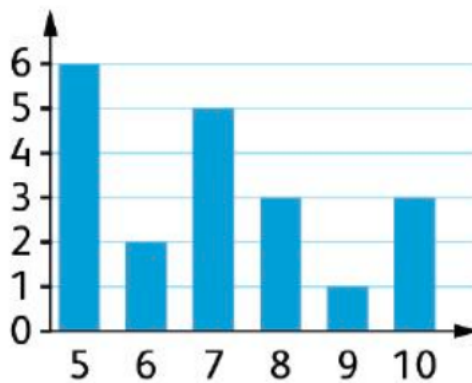
Dans un questionnaire, on demande aux personnes interrogées une valeur numérique sur leur degré de satisfaction, qui est un nombre entier entre 0 (pas du tout satisfait) et 10 (totalement satisfait).

On note σ l'écart type de la série des réponses obtenues. Pour chaque valeur de σ associer une situation.

- $S_a : 1 \leq \sigma \leq 2$.
 - $S_b : \sigma \geq 6$.
 - $S_c : \sigma = 0$.
 - 1) Les personnes sondées sont unanimement d'accord.
 - 2) Les personnes sondées sont partagées.
 - 3) Les personnes sondées sont globalement d'accord.
-

Exercice 6

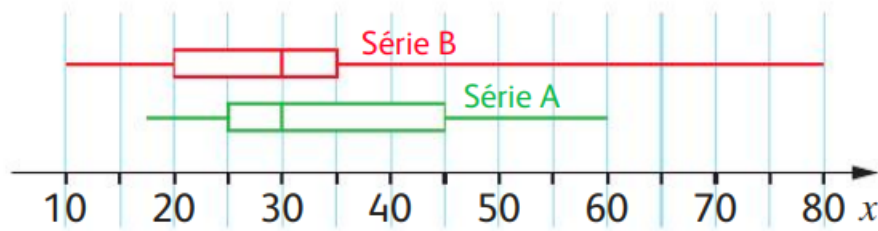
Vrai ou Faux ?



Un échantillon est représenté par ce diagramme.

- 1) La médiane de cette série est 7,5.
- 2) L'écart interquartile $Q_3 - Q_1$ vaut 3.
- 3) $\bar{x} = \frac{5 \times 6 + 6 \times 2 + 7 \times 5 + 8 \times 3 + 9 + 10 \times 3}{6}$.
- 4) Un autre échantillon a un écart type égal à 3. Il est plus homogène que l'échantillon ci-dessus.

Exercice 7



On donne ci-dessus les diagrammes en boîte de deux séries A et B .
Pour chaque affirmation, indiquer si elle est vraie ou fausse.

- 1) L'étendue de la série A est plus petite que l'étendue de la série B .
- 2) La série B et la série A ont la même médiane.
- 3) La série B est plus dispersée que la série A .

Exercice 8

| Pays | France | Allemagne | Royaume-Uni |
|-----------|--------|-----------|-------------|
| D_1 | 9,9 | 8,0 | 8,5 |
| Me | 14,8 | 15,3 | 14,7 |
| D_9 | 26,7 | 30,2 | 32,7 |
| Me/D_1 | 1,5 | 1,9 | 1,7 |
| D_9/D_1 | 2,7 | 3,8 | 3,8 |
| D_9/Me | 1,8 | 2,0 | 2,2 |

On donne des informations statistiques pour trois séries de salaires horaires bruts (en euro) en 2014.

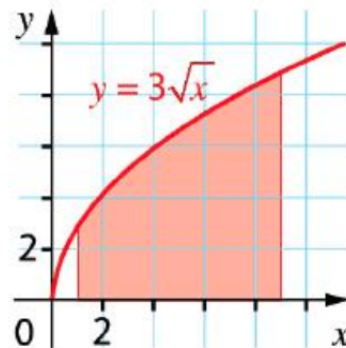
- 1)
 - a) Donner les valeurs de D_1 , D_9 et de la médiane de la série des salaires horaires bruts pour la France. En donner la signification pour chacune.
 - b) Vérifier les valeurs données des ratios $\frac{Me}{D_1}$, $\frac{D_9}{D_1}$ et $\frac{D_9}{Me}$.
- 2) Entre la France, l'Allemagne et le Royaume-Uni, quel pays a la plus grande disparité :
 - a) parmi la partie basse de la répartition des salaires ?
 - b) parmi la partie haute de la répartition des salaires ?
 - c) sur l'ensemble de la répartition des salaires ?

Exercice 9

QCM

Pour chaque question, indiquer la (ou les) bonne(s) réponse(s).

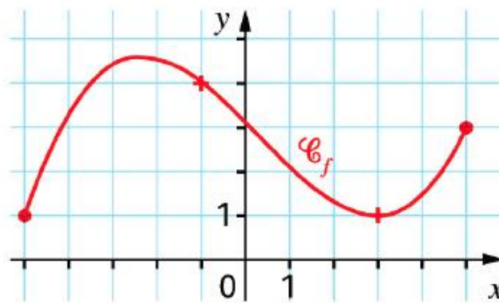
1)



L'aire, en unité d'aire, du domaine coloré est :

- a) $\int_1^9 3\sqrt{x}dx$
- b) $\int_1^9 3\sqrt{t}dt$
- c) $\int_0^9 3\sqrt{x}dx$
- d) 24

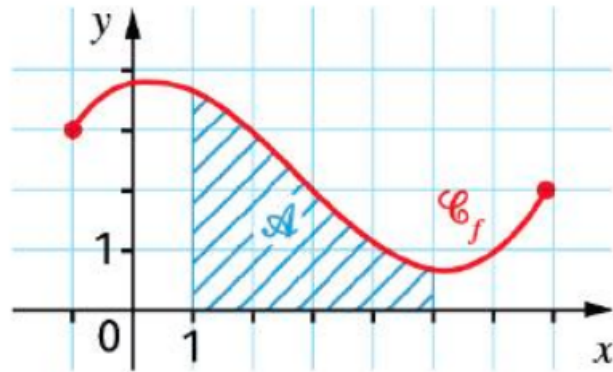
2)



Soit (C_f) la courbe représentant une fonction f continue sur $[-5 ; 5]$.

- a) $\int_{-5}^{-1} f(x)dx \leq 0$
- b) $1 \leq \int_{-5}^{-1} f(x)dx \leq 4$
- c) $1 \leq \int_3^5 f(x)dx \leq 6$

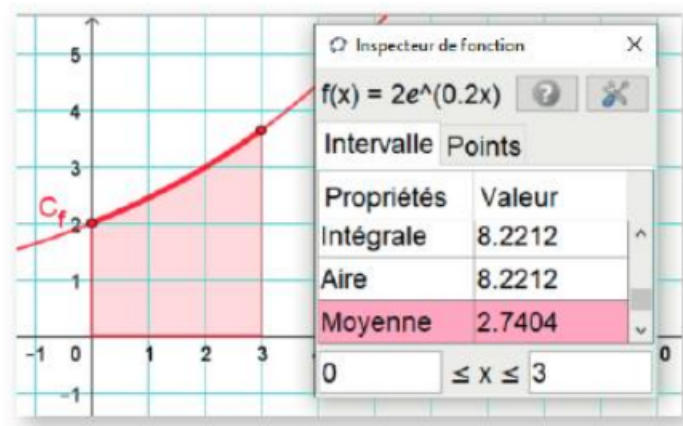
Exercice 10



Soit f la fonction définie sur représentée ci-dessous.

- 1) Exprimer, à l'aide d'une intégrale, l'aire \mathcal{A} .
- 2) Par lecture graphique, donner une valeur approchée de cette aire en unité d'aire.
- 3) En déduire une valeur approchée de la valeur moyenne de la fonction f sur $[1 ; 5]$.
- 4) Vérifier graphiquement en utilisant la hauteur d'un rectangle construit sur l'intervalle $[1 ; 5]$.

Exercice 11



La croissance d'une population, en million, est modélisée par la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 2e^{0.2x}$, où x est le nombre d'années écoulées.

On a réalisé la recherche précédente à l'aide d'un logiciel de géométrie.

- 1) Que signifient les valeurs « Aire » et « Moyenne » affichées par le logiciel dans le contexte de l'exercice ?
- 2) Démontrer les résultats obtenus par le logiciel.

Exercice 12

Vrai ou faux ?

Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

- 1) La valeur moyenne de la fonction f définie par $f(x) = x^3$ sur $[-2 ; 2]$ est 0.
- 2) La valeur moyenne de la fonction g définie par $g(x) = e^{2x-1}$ sur $[0 ; 4]$ est $e - 1$.
- 3) La valeur moyenne de la fonction h définie par $h(x) = \frac{1}{x}$ sur $[2 ; 5]$ est $\ln\left(\frac{5}{2}\right)$.

Exercice 13

Dans chacun des cas suivants, calculer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle I donné.

1) $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$ sur $I = [-2 ; 2]$.

2) $f(x) = 0,01x^3 - 0,99x^2$ sur $I = [0 ; 1]$.

3) $f(x) = 4x - 1 + 3e^x$ sur $I = [0 ; 1]$.

4) $f(x) = 3 - \frac{2}{x}$ sur $I = [1 ; e]$.

Exercice 14

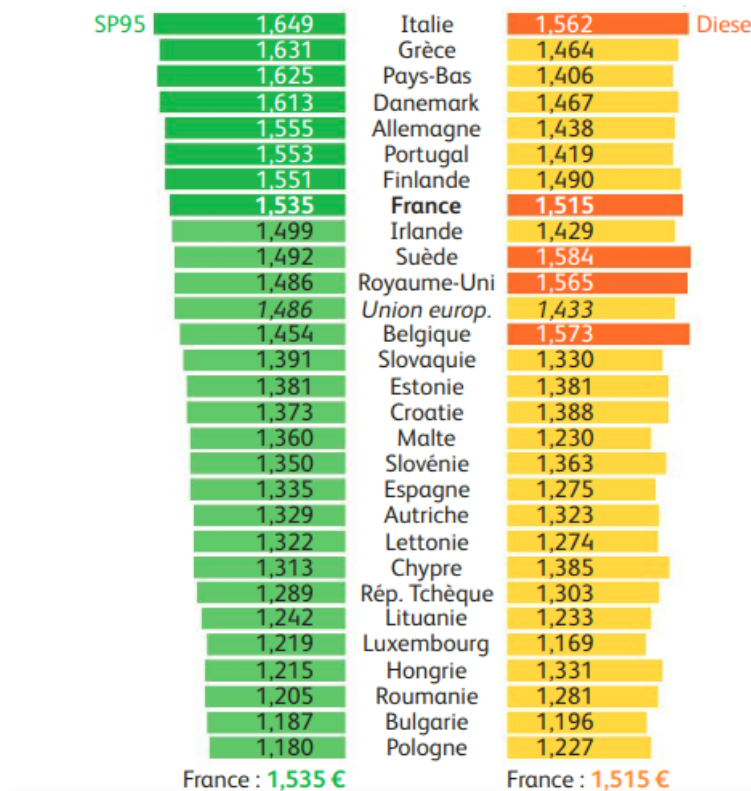
| Catégorie | Cadre | Ouvrier |
|-----------|---------|---------|
| Salaire | 6 000 € | 1 400 € |

En 2019, une entreprise employait deux cadres et six ouvriers.

- 1) Calculer le salaire moyen d'un employé.
- 2) Les résultats de l'entreprise étant bons, le chef d'entreprise décide d'augmenter tous les salaires de 10 % et d'engager cinq ouvriers supplémentaires. Un employé affirme : « Malgré nos augmentations, le salaire moyen de l'entreprise a baissé. » S'est-il trompé ?

Exercice 15

On donne ci-dessous les prix, en €/L, des carburants dans l'Union européenne en novembre 2018.



- 1) Calculer les indicateurs statistiques (moyenne, écart type, médiane et quartiles) des deux séries.
- 2) a) La ligne « Union européenne » indique un prix de 1,486 €/L pour le SP95 et 1,433 €/L pour le Diesel. Ces valeurs correspondent-elles aux deux moyennes calculées dans la question précédente ? Expliquer pourquoi.
b) Expliquer et commenter pourquoi certaines cases sont coloriées en vert foncé ou en orange foncé.
- 3) Un journaliste, s'appuyant sur ces données, souhaite intituler un article : « La France, un des pays de l'UE où le prix des carburants est le plus cher. » Sur quel(s) indicateur(s) statistique(s) s'appuie-t-il ?
- 4) a) D'après l'INSEE, le salaire médian net est de 1 710 € par mois en France en 2017. Calculer le nombre de pleins de 50 litres que l'on peut faire en France avec un mois de salaire médian.
b) En se basant sur le salaire médian en 2017 et les prix des carburants en 2018, la Commission européenne donne le nombre de pleins de 50 litres que l'on peut faire avec l'équivalent d'un mois de revenu médian.
Ces données peuvent-elles remettre en cause les analyses faites à la question 3. ?

| | SP95 | Diesel |
|------------|------|--------|
| Luxembourg | 51,4 | 49,3 |
| Roumanie | 3,6 | 3,8 |

Exercice 16

L'INSEE donne le poids des dépenses de logement selon les revenus, en %, pour 2001, 2006 et 2013.

| | 2001 | 2006 | 2013 |
|----------------------------|------|------|------|
| Les 10 % les plus modestes | 31,4 | 34,1 | 42,1 |
| Les 10 à 20 % | 22,9 | 24,2 | 28,5 |
| Les 20 % à 30 % | 21,3 | 22,9 | 25,3 |
| Les 30 à 40 % | 20,6 | 21,7 | 23,5 |
| Les 40 à 50 % | 19,6 | 20,0 | 22,3 |
| Les 50 à 60 % | 18,3 | 18,8 | 21,0 |
| Les 60 à 70 % | 17,0 | 17,6 | 19,0 |
| Les 70 à 80 % | 15,7 | 15,7 | 17,6 |
| Les 80 à 90 % | 13,9 | 14,5 | 15,1 |
| Les 10 % les plus riches | 9,8 | 10,0 | 10,8 |

Fin 2017, l'Observatoire des inégalités écrivait : « Les 10 % les plus modestes consacrent 42 % de leurs revenus au logement, soit quatre fois plus que les 10 % les plus aisés. Le poids des dépenses de logement s'est fortement accentué depuis 2001, essentiellement pour les ménages les plus pauvres. » Justifier.

Exercice 17

Courbe de Lorenz

- On appelle courbe de Lorenz la représentation graphique d'une fonction L définie sur $[0 ; 1]$ vérifiant :
 - * $L(0) = 0$ et $L(1) = 1$;
 - * L est croissante et convexe sur $[0 ; 1]$.
- En notant $O(0 ; 0)$ et $A(1 ; 1)$, l'indice de Gini est le double de l'aire du domaine compris entre la courbe représentative de L et le segment $[OA]$, en unité d'aire.

-
- 1) Montrer que la courbe représentative de la fonction f définie sur $[0 ; 1]$ est une courbe de Lorenz.
 - 2) Puis calculer la valeur exacte de l'indice de Gini γ .
-

Exercice 18

Courbe de Lorenz

- On appelle courbe de Lorenz la représentation graphique d'une fonction L définie sur $[0 ; 1]$ vérifiant :
 - * $L(0) = 0$ et $L(1) = 1$;
 - * L est croissante et convexe sur $[0 ; 1]$.
 - En notant $O(0 ; 0)$ et $A(1 ; 1)$, l'indice de Gini est le double de l'aire du domaine compris entre la courbe représentative de L et le segment $[OA]$, en unité d'aire.
-

Soit $f(x) = 0,2x^2 + 0,8x$.

- 1) Montrer que la courbe représentative de la fonction f définie sur $[0 ; 1]$ est une courbe de Lorenz.
 - 2) Puis calculer la valeur exacte de l'indice de Gini γ .
-

Exercice 19

Courbe de Lorenz

- On appelle courbe de Lorenz la représentation graphique d'une fonction L définie sur $[0 ; 1]$ vérifiant :
 - * $L(0) = 0$ et $L(1) = 1$;
 - * L est croissante et convexe sur $[0 ; 1]$.
 - En notant $O(0 ; 0)$ et $A(1 ; 1)$, l'indice de Gini est le double de l'aire du domaine compris entre la courbe représentative de L et le segment $[OA]$, en unité d'aire.
-

Soit $f(x) = \frac{2}{2-x} - 1$.

- 1) Montrer que la courbe représentative de la fonction f définie sur $[0 ; 1]$ est une courbe de Lorenz.
 - 2) Puis calculer la valeur exacte de l'indice de Gini γ .
-

Exercice 20

Courbe de Lorenz

- On appelle courbe de Lorenz la représentation graphique d'une fonction L définie sur $[0 ; 1]$ vérifiant :
 - * $L(0) = 0$ et $L(1) = 1$;
 - * L est croissante et convexe sur $[0 ; 1]$.
 - En notant $O(0 ; 0)$ et $A(1 ; 1)$, l'indice de Gini est le double de l'aire du domaine compris entre la courbe représentative de L et le segment $[OA]$, en unité d'aire.
-

Soit $f(x) = \frac{4}{3} \times \frac{1}{(x-2)^2} - \frac{1}{3}$.

- 1) Montrer que la courbe représentative de la fonction f définie sur $[0 ; 1]$ est une courbe de Lorenz.
 - 2) Puis calculer la valeur exacte de l'indice de Gini γ .
-

Exercice 21

Courbe de Lorenz

- On appelle courbe de Lorenz la représentation graphique d'une fonction L définie sur $[0 ; 1]$ vérifiant :
 - * $L(0) = 0$ et $L(1) = 1$;
 - * L est croissante et convexe sur $[0 ; 1]$.
 - En notant $O(0 ; 0)$ et $A(1 ; 1)$, l'indice de Gini est le double de l'aire du domaine compris entre la courbe représentative de L et le segment $[OA]$, en unité d'aire.
-

Soit $f(x) = \frac{20}{5-x} - 4$.

- 1) Montrer que la courbe représentative de la fonction f définie sur $[0 ; 1]$ est une courbe de Lorenz.
 - 2) Puis calculer la valeur exacte de l'indice de Gini γ .
-

Exercice 22

Courbe de Lorenz

- On appelle courbe de Lorenz la représentation graphique d'une fonction L définie sur $[0 ; 1]$ vérifiant :
 - * $L(0) = 0$ et $L(1) = 1$;
 - * L est croissante et convexe sur $[0 ; 1]$.
 - En notant $O(0 ; 0)$ et $A(1 ; 1)$, l'indice de Gini est le double de l'aire du domaine compris entre la courbe représentative de L et le segment $[OA]$, en unité d'aire.
-

Soit $f(x) = \frac{7,2}{(3-x)^2} - 0,8$.

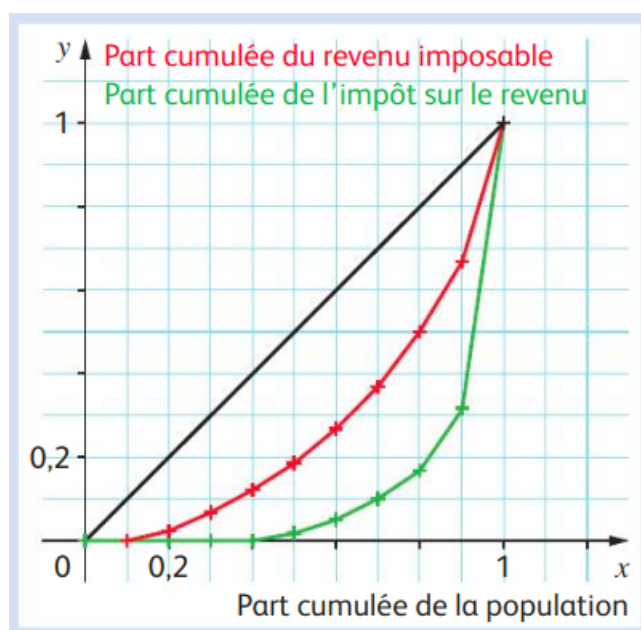
- 1) Montrer que la courbe représentative de la fonction f définie sur $[0 ; 1]$ est une courbe de Lorenz.
 - 2) Puis calculer la valeur exacte de l'indice de Gini γ .
-

Exercice 23

Courbe de Lorenz

- On appelle courbe de Lorenz la représentation graphique d'une fonction L définie sur $[0 ; 1]$ vérifiant :
 - * $L(0) = 0$ et $L(1) = 1$;
 - * L est croissante et convexe sur $[0 ; 1]$.
- En notant $O(0 ; 0)$ et $A(1 ; 1)$, l'indice de Gini est le double de l'aire du domaine compris entre la courbe représentative de L et le segment $[OA]$, en unité d'aire.

Le graphique suivant donne la répartition du revenu imposable et du montant de l'impôt sur le revenu en France en 2016.



On modélise les fonctions de répartition du revenu imposable et du montant de l'impôt sur le revenu respectivement par les fonctions f et g définies sur $[0 ; 1]$ par $f(x) = 0,75x^4 + 0,25x$ et

$$\begin{cases} \text{si } 0 \leq x \leq 0,4, & g(x) = 0 \\ \text{si } 0,4 < x \leq 1, & g(x) = \frac{e^{8(x-0,4)} - 1}{e^{4,8} - 1} \end{cases}$$

où x correspond à la part cumulée de la population.

- Montrer que la courbe représentative de f est une courbe de Lorenz.
 - Calculer l'intégrale $I = \int_0^1 f(x)dx$. En déduire l'indice de Gini pour les revenus imposables en 2016.
- Montrer que la fonction g est continue, croissante et convexe sur $[0 ; 1]$.
 - On admet que la courbe représentative de g est une courbe de Lorenz. Calculer l'indice de Gini pour l'impôt sur le revenu pour 2016.
- Comparer les deux répartitions. En donner une explication.

Exercice 24

Courbe de Lorenz

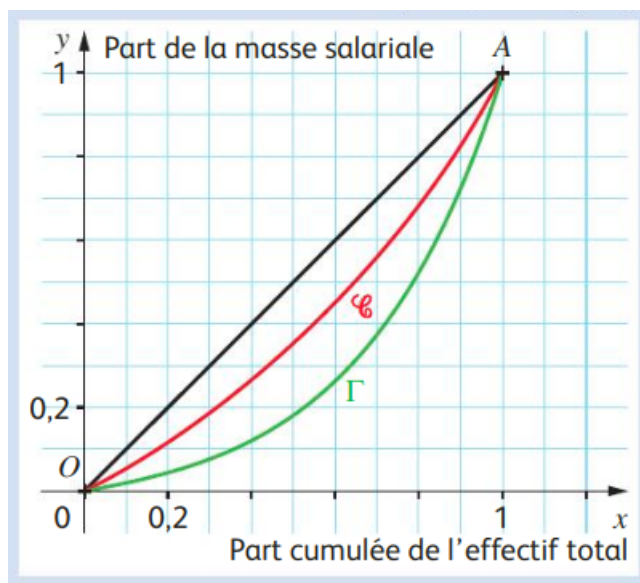
- On appelle courbe de Lorenz la représentation graphique d'une fonction L définie sur $[0 ; 1]$ vérifiant :
 - * $L(0) = 0$ et $L(1) = 1$;
 - * L est croissante et convexe sur $[0 ; 1]$.
- En notant $O(0 ; 0)$ et $A(1 ; 1)$, l'indice de Gini est le double de l'aire du domaine compris entre la courbe représentative de L et le segment $[OA]$, en unité d'aire.

Les répartitions des salaires dans deux entreprises A et B sont respectivement modélisées par les fonctions f et g définies sur $[0 ; 1]$ par

$$f(x) = 0,25x^3 + 0,25x^2 + 0,5x \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{e^{3x} - 1}{e^3 - 1}.$$

x représente la part cumulée de salariés ayant les salaires les plus faibles dans chaque entreprise et $f(x)$ (resp. $g(x)$) représente la part de la masse salariale totale que touche cette proportion x de salariés dans l'entreprise A (resp. l'entreprise B).

On rappelle que la masse salariale est la somme des rémunérations brutes des salariés de l'entreprise. On note \mathcal{C} et Γ les courbes représentatives respectives de f et g , et les points $O(0 ; 0)$ et $A(1 ; 1)$.



- Montrer que \mathcal{C} est une courbe de Lorenz.
 - Calculer l'intégrale $I = \int_0^1 f(x)dx$.
- Calculer $g(0)$ et $g(1)$.
 - Justifier que la fonction g est croissante et convexe sur $[0 ; 1]$.
 - Pour tout réel $x \in [0 ; 1]$, on pose $h(x) = g(x) - x$. Justifier les éléments donnés dans les tableaux de signes et de variations ci-dessous. On ne demande pas de calculer la valeur de α .

| | | | |
|----------|---|----------|---|
| x | 0 | α | 1 |
| $h''(x)$ | | + | |
| $h'(x)$ | | | |
| $h'(x)$ | - | 0 | + |
| $h(x)$ | | | |
| $h(x)$ | 0 | - | 0 |

d) En déduire que la courbe Γ est une courbe de Lorenz.

e) Montrer que $\int_0^1 g(x)dx = \frac{1}{3} \times \frac{e^3 - 4}{e^3 - 1}$.

3) Calculer, pour chaque entreprise, la valeur approchée de l'indice de Gini des salaires.

4) a) Dans quelle entreprise la distribution des salaires est-elle la plus irrégulièrement répartie ?

b) Le graphique permettait-il de prévoir ce résultat ?



Exercice 25

Exercice 26

Exercice 27

Exercice 28

Exercice 29

Exercice 30

Exercice 31

Exercice 32

Exercice 33

Exercice 34

Exercice 35

Exercice 36

Exercice 37

Exercice 38

Exercice 39

Exercice 40

Exercice 41

Exercice 42

Exercice 43

Exercice 44

Exercice 45

Exercice 46

Exercice 47

Exercice 48

Exercice 49

Exercice 50