Exercice 1

Compléter les pointillés.

1) Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$, alors la droite d'équation $\ldots$ est $\ldots$ à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ en $\ldots$.

2) Si $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -\infty$, alors la droite d'équation $\ldots$ est $\ldots$ à la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

3) Si la droite d'équation $y = -5$ est asymptote à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ en $-\infty$, alors $\ldots$.

Exercice 2

Soit f une fonction définie sur $]-\infty\ ;\ 1[\cup]1\ ;\ +\infty[$ dont le tableau de variations est le suivant.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$	-2	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	3

1) Donner les limites de f aux bornes de son ensemble de définition ainsi que les équations des asymptotes à la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

2) Tracer une courbe pouvant représenter la fonction f.

Exercice 3

Démonstration

Soient f une fonction continue sur un intervalle I et F une primitive de f sur I.

1) Soit k un réel. Montrer que la fonction G définie sur I par $G(x) = F(x) + k$ est une primitive de f.

2) Soit H une autre primitive de f sur I.
Calculer la dérivée de la fonction c, définie sur I, par $c(x) = F(x) - H(x)$.

3) En déduire que deux primitives de f sur I diffèrent d'une constante.

Exercice 4

Vrai ou faux ?

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse.

1) La courbe de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2}{e^x + 1}$ admet l'axe des ordonnées pour asymptote en $+\infty$.

2) Si f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x^2}$, alors toutes les primitives de f sont croissantes sur $\mathbb{R}$.

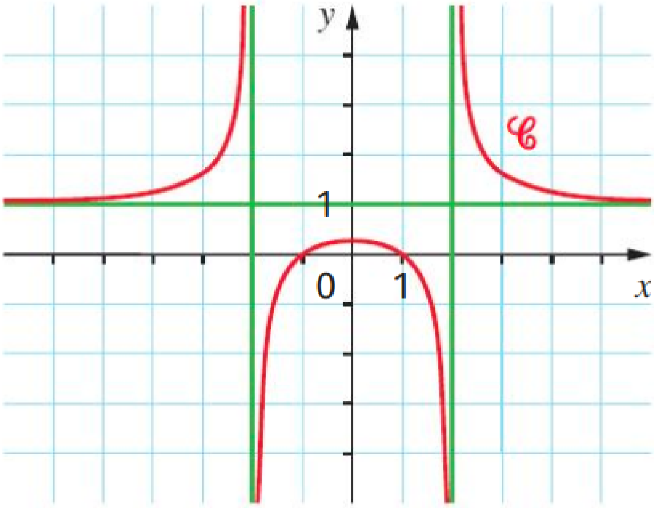
3) Les solutions de l'équation différentielle $y' + 2y = 0$ sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = k\ e^{2x}$, où k est une constante réelle.

4) La fonction constante $x \longmapsto 0,01$ est solution de l'équation différentielle $2y' + 0,5y = 0,05$.

5) Les solutions de l'équation différentielle $y' = 3y - 6$ sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = k\ e^{3x} - 6$, où k est un nombre réel.

Exercice 5

La courbe $(\mathcal{C}_f)$ ci-dessous représente une fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-2\ ;\ 2\}$.
Les droites d'équations $x = -2$, $x = 2$ et $y = 1$ sont asymptotes à la courbe $(\mathcal{C}_f)$.



Lire graphiquement les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

Exercice 6

On donne ci-dessous le tableau de variations d'une fonction f de courbe représentative $(\mathcal{C}_f)$.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f(x)$	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1	↗	3

1) Préciser les équations des asymptotes à $(\mathcal{C}_f)$.

2) Tracer une allure possible de $(\mathcal{C}_f)$.

Exercice 7

Dans chacun des cas suivants, donner une allure possible de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ représentant une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.

1) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -2$, $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

2) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -\infty$ et la droite d'équation $y = 2$ est asymptote à $(\mathcal{C}_f)$ en $+\infty$.

Exercice 8

1) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - 1 + e^x)$.

2) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} (3e^x - 2x + 1)$.

Exercice 9

1) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} x\,(2x-3)$.

2) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} -x^2\,(x+2)$.

Exercice 10

1) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} (x-1)\, e^{x}$.

2) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{2}{x}+1\right)(e^{x}-3)$.

Exercice 11

1) Déterminer $\lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x^2+3}$.

2) Déterminer $\lim_{x \to -\infty} \frac{2e^x - 1}{e^x + 1}$.

Exercice 12

1) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{2x+1}$.

2) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{2x+1}$.

Exercice 13

1) Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x-1}{x^2}$.

2) Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} \left(-\dfrac{2}{x^2}+1\right)(x-1)$.

Exercice 14

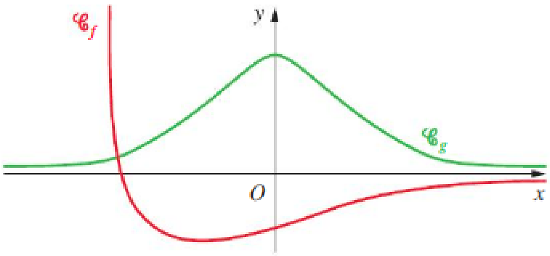
1) Déterminer $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \dfrac{2x+3}{x-1}$.

2) Déterminer $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} \dfrac{2x+3}{x-1}$.

Exercice 15

Vrai ou faux ?

Le graphique ci-dessous donne les courbes représentatives de deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$.
L'axe des abscisses est asymptote à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ en $+\infty$ à la courbe $(\mathcal{C}_g)$ en $-\infty$ et $+\infty$. On admet que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.



1) Donner les limites de f et g en $-\infty$ et $+\infty$.

2) Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse, ou si on ne peut pas conclure. Justifier.

   a) $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - g(x)) = +\infty$

   b) $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) \times g(x)) = 0$

   c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$

   d) La courbe représentative de la fonction $f + g$ admet l'axe des ordonnées pour asymptote en $+\infty$.

Exercice 16

Démonstration

On considère la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = e^x - x$.

1) Étudier le sens de variation de f sur $[0\ ;\ +\infty[$.

2) En déduire que, pour tout réel $x \geqslant 0$, $e^x > x$.

3) En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x$.

Exercice 17

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$ telle que, pour tout réel $x \geqslant 1$, $\dfrac{1}{x^2} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{x}$.

1) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

2) Que peut-on en déduire pour sa représentation graphique $(\mathcal{C}_f)$?

Exercice 18

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ par $f(x) = -\dfrac{2}{x^2} + 3$. On note $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative.

1) Montrer que $(\mathcal{C}_f)$ admet l'axe des ordonnées pour asymptote verticale.

2) Montrer que $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote horizontale en $-\infty$ et en $+\infty$ dont on donnera une équation.

Exercice 19

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{2}{3+e^x}$ et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative.

1) Tracer la courbe $(\mathcal{C}_f)$ sur la calculatrice. Conjecturer les équations des asymptotes à $(\mathcal{C}_f)$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

2) Démontrer les conjectures précédentes.

Exercice 20

Résoudre les équations différentielles suivantes.

1) $y' = 1$

2) $y' = 2x + 3$

Exercice 21

Résoudre les équations différentielles suivantes.

1) $y' = -x^2 + 2x - 1$

2) $y' = -3e^{2x} - 3$

Exercice 22

Résoudre les équations différentielles suivantes.

1) $y' = \dfrac{2}{x^2}$

2) $y' = e^{2x} - 3$

Exercice 23

Déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle indiqué.

1) $f(x) = -2x^2 + 3x - 1$ sur $\mathbb{R}$.

2) $f(x) = 1 - x + 2e^x$ sur $\mathbb{R}$.

3) $f(x) = 5x - \dfrac{3}{x^2}$ sur $]0\ ;\ +\infty[$.

Exercice 24

Déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle indiqué.

1) $f(x) = -\dfrac{3}{\sqrt{x}} + 2e^{2x} - \dfrac{1}{2}$ sur $]0\ ;\ +\infty[$.

2) $f(x) = -2e^{-2x+1}$ sur $\mathbb{R}$.

3) $f(x) = e^{3x+1}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 25

Déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle indiqué.

1) $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$ sur $]1\ ;\ +\infty[$.

2) $f(x) = (x+1)e^{x^2+2x}$ sur $\mathbb{R}$.

3) $f(x) = 2(x-e^{-x})(1+e^{-x})$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 26

Dans chaque cas, déterminer la primitive F de la fonction f vérifiant la condition indiquée.

1) $f(x) = x + e^{-x}$ et $F(0) = -1$.

2) $f(x) = 3x\, e^{-x^2}$ et $F(1) = 0$.

Exercice 27

Vrai ou faux ?

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse. Justifier.

1) La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x}$ est solution de l'équation différentielle $y' = e^{2x}$.

2) La fonction F définie par $F(x) = x\,e^{3x}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de f, définie par $f(x) = (3x+1)\,e^{3x}$.

3) Toutes les primitives de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$ sont croissantes sur $\mathbb{R}$.

4) Si F et G sont deux primitives d'une fonction f sur I, alors F et G ont le même sens de variation sur I.

Exercice 28

Résoudre les équations différentielles proposées.

1) $y' = 5y$

2) $y' = -0,75y$

3) $3y' = 2y$

4) $y = -2y'$

Exercice 29

Résoudre les équations différentielles proposées.

1) $4y' - 3y = 0$

2) $-5y' + 6y = 0$

Exercice 30

Résoudre les équations différentielles proposées.

1) $2y' - 3y = y' + y$

2) $2(y' + 2y) = 3y' + 5y$

Exercice 31

On considère l'équation différentielle (E) : $y' = 3y$.

1) Résoudre l'équation différentielle (E).

2) À l'aide de la calculatrice ou d'un logiciel, tracer l'allure des solutions de (E).

3) Déterminer la solution f de (E) qui vérifie $f(0) = 2$.

4) Déterminer la solution g de (E) dont la courbe représentative passe par le point $A(-1\ ;\ 3)$.

Exercice 32

Pour chacune des fonctions f , définies sur $\mathbb{R}$, déterminer le réel a tel que f soit solution de l'équation différentielle $y' = ay$.

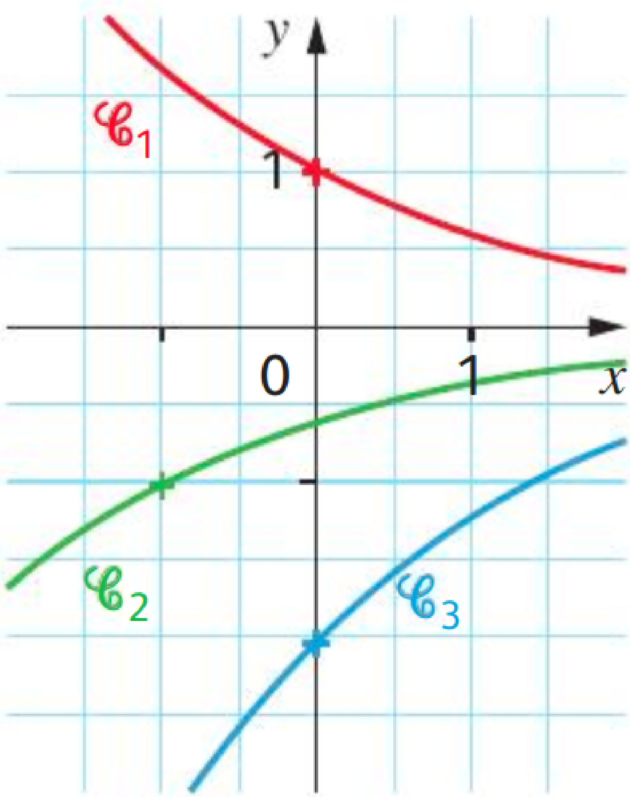
1) $f(x) = e^{2x}$

2) $f(x) = 2e^{-3x}$

3) $f(x) = e^{-3x+4}$

4) $f(x) = -2e^{x-1}$

Exercice 33



Les courbes $(\mathcal{C}_1)$, $(\mathcal{C}_2)$ et $(\mathcal{C}_3)$ représentées ci-dessus sont les courbes représentatives de trois fonctions, solutions de l'équation différentielle $y' = -\frac{1}{2}y$.

Déterminer une équation de chacune de ces courbes.

Exercice 34

Lors d'une hydrolyse du saccharose, on étudie l'évolution de sa concentration, exprimée en $mol.L^{-1}$, en fonction du temps t, exprimé en minute. Cette concentration est modélisée par une fonction C solution de l'équation différentielle $y' = -0,008y$.
La concentration initiale du saccharose est de $10\ mol.L^{-1}$.

1) Pour tout réel $t \geqslant 0$, exprimer $C(t)$ en fonction de t.

2) Déterminer la concentration de saccharose après 2 h 30 d'hydrolyse.

Exercice 35

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes :

- f est solution d'une équation différentielle $y' = ay$, où a est un nombre réel ;
- la tangente à la courbe $(\mathcal{C}_f)$, représentative de la fonction f, au point $A(0\ ;\ 2)$ passe par le point $B(-3\ ;\ 1)$.

1) Déterminer $f(0)$ et $f'(0)$.

2) En déduire la valeur de a.

3) Exprimer $f(x)$ en fonction de x.

Exercice 36

On considère l'équation différentielle $(E) : y' + 2y = 6x + 1$.

1) Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x - 1$ est solution de (E).

2) Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2e^{-2x} + 3x - 1$ est solution de (E).

Exercice 37

On considère l'équation différentielle $(E) : y' - y = e^x$.

1) Montrer que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x\ e^x$ est solution de (E).

2) Montrer que, pour tout réel k, la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = (x + k)e^x$ est solution de (E).

Exercice 38

Dans chaque cas, montrer que la fonction f est solution de l'équation différentielle (E) sur l'intervalle indiqué.

1) $(E) : y' + 2y = e^{-2x}$ et $f(x) = (x+1)\,e^{-2x}$ sur $\mathbb{R}$.

2) $(E) : -y' + y = \dfrac{e^x}{x^2}$ et $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$ sur $]0\,;\,+\infty[$.

3) $(E) : y' = 2y(1-y)$ et $f(t) = \dfrac{1}{1+9e^{-2t}}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 39

Soit l'équation différentielle $(E) : y' + 3y = e^{2x}$.

1) Déterminer le nombre réel a tel que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = a\ e^{2x}$ soit solution de (E).

2) Montrer que, pour tout réel k, la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = k\ e^{-3x} + a\ e^{2x}$ est solution de (E).

Exercice 40

Vrai ou faux ?

Pour les deux affirmations suivantes, dire si elles sont vraies ou fausses, en justifiant la réponse.

1) La fonction exponentielle est l'unique solution de l'équation différentielle $y' = y$.

2) Si la fonction u est solution de $(E) : y' - 3y = 3$, alors la fonction v définie par $v(x) = u(x)\, e^{-2x}$ est solution de $(E') : y' - y = 3e^{-2x}$.

Exercice 41

On considère l'équation différentielle $E)$: $y' + 2y = 2x^2 + 1$.

1) Montrer que la fonction p définie sur $\mathbb{R}$ par $p(x) = x^2 - x + 1$ est solution de (E).

2) Soit f une solution de (E). Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) - p(x)$ est solution de l'équation différentielle (E') : $y' + 2y = 0$.

3) Réciproquement, montrer que si la fonction g est solution de (E'), alors la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = g(x) + p(x)$ est solution de (E).

4) Résoudre (E').

5) En déduire l'ensemble des solutions de (E).

Exercice 42

Soit l'équation différentielle $(E) : y' = -5y + 1$.

1) Montrer que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = \dfrac{1}{5}$ est solution de (E).

2) Résoudre (E).

Exercice 43

Résoudre les équations différentielles suivantes en commençant par chercher une fonction constante solution.

1) $y' = 2y + 8$

2) $2y' - 5y = -3$

3) $8y' + 2y = 0,2$

Exercice 44

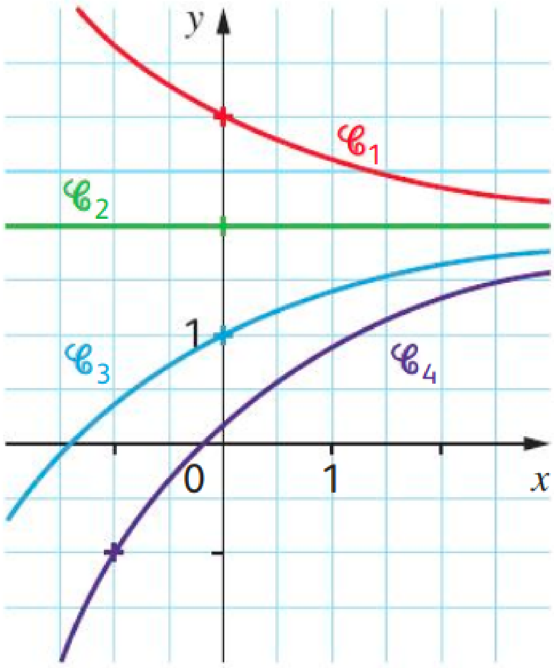
Dans chaque cas, déterminer la fonction f solution de l'équation différentielle (E) vérifiant la condition indiquée.

1) $(E) : y' + 2y = 3$ et $f(0) = -3$.

2) $(E) : y' - 5y + 10 = 0$ et $f(1) = 0$.

3) $(E) : 2y' + y = -3$ et $f(0) = 2$.

Exercice 45



Les courbes $(\mathcal{C}_1)$, $(\mathcal{C}_2)$, $(\mathcal{C}_3)$ et $(\mathcal{C}_4)$ représentées ci-dessus sont les courbes représentatives de quatre fonctions, solutions d'une équation différentielle de la forme $2y' = -y + b$, où b est un nombre réel fixé.

1) Déterminer la valeur du réel b.

2) Déterminer une équation de chacune de ces courbes.

Exercice 46

La température de refroidissement d'un objet, fabriqué industriellement, est modélisée par une fonction f, où, pour tout réel $t \geqslant 0$, $f(t)$ représente la température de l'objet, exprimée en degré Celsius, à l'instant t, exprimé en heure. La fonction f est solution de l'équation différentielle $(E) : y' + \dfrac{1}{2}y = 10$.

1) Résoudre l'équation différentielle (E).

2) La température initiale de l'objet est $220C$.
Déterminer, pour tout réel $t \geqslant 0$, l'expression de $f(t)$ en fonction de t.

- **a)** Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
- **b)** Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
- **c)** Interpréter les résultats précédents dans le contexte de l'exercice.

Exercice 47

Déterminer les limites suivantes.

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x - e^{-0,5x}\right)$

2) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \dfrac{e^x}{1-x}$

3) $\lim\limits_{t \to +\infty} 2,8\left(1 - e^{-0,3t}\right)$

4) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 - 1)(e^{-x} - 1)$

Exercice 48

Pour chacune des fonctions f suivantes, montrer que sa courbe représentative $(\mathcal{C}_f)$ admet pour asymptote la droite D indiquée.

1) $f(x) = -2(3e^{-x} - 1)$ et $D : y = 2$ en $+\infty$.

2) $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$ et $D : x = -1$.

3) $f(x) = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+2}$ et $D : y = -\dfrac{1}{2}$ en $-\infty$.

4) $f(x) = \dfrac{3}{1+e^{-2x+1}}$ et $D : y = 3$ en $+\infty$.

Exercice 49

Pour chacune des fonctions f vérifiant l'inégalité indiquée, déterminer sa limite en $+\infty$.

1) Pour tout réel $x > 0$, $\quad 0 < f(x) < \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

2) Pour tout réel x, $\quad f(x) \geqslant 2e^{x} - 3$.

3) Pour tout réel $x \geqslant 0$, $\quad e^{-2x} < f(x) - 1 < e^{-x}$.

Exercice 50

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - x^2 + x - 1$.

1) Déterminer la limite de f en $-\infty$.

2) Montrer que, pour tout réel $x \neq 0$, on a $f(x) = x^3 \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)$.

3) En déduire la limite de f en $+\infty$.

Exercice 51

Soient la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ par $f(x) = \dfrac{-2x+1}{x-2}$ et $(\mathcal{C}_f)$ sa représentation graphique.

1) **a)** Déterminer les limites de f en 2.

b) Que peut-on en déduire pour la courbe $(\mathcal{C}_f)$?

2) **a)** Expliquer pourquoi on ne peut pas déterminer directement les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

b) Montrer que, pour tout réel x différent de 0 et de 2, on a $f(x) = \dfrac{-2+\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{1}{x}}$.

c) En déduire la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

d) Que peut-on en déduire pour la courbe $(\mathcal{C}_f)$?

Info : Pour calculer la limite d'une fonction polynôme ou rationnelle en l'infini, on peut, en cas de forme indéterminée, factoriser par le terme de plus haut degré.

Exercice 52

Info : Pour calculer la limite d'une fonction polynôme ou rationnelle en l'infini, on peut, en cas de forme indéterminée, factoriser par le terme de plus haut degré.

Déterminer les limites suivantes.

1) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(-3x^3 - 2x^2 + 5x - 2\right)$

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+1}{x^2-2}$

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x^2+x-1}{2x+3}$

4) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x^2-1}{2x^2+3}$

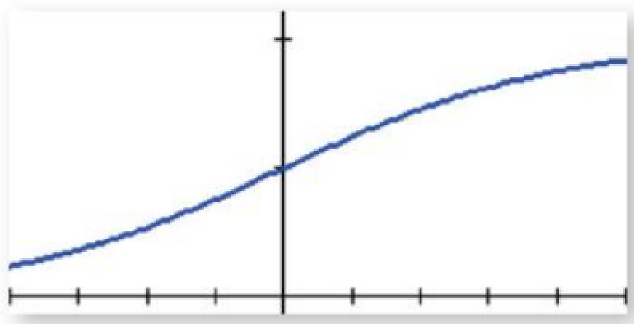
Exercice 53

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - e^{2x}$ et $(\mathcal{C}_f)$ sa représentation graphique.

1) Montrer que la courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet l'axe des abscisses pour asymptote en $-\infty$.

2) En factorisant $f(x)$, déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

Exercice 54



Sur sa calculatrice, Marine a tracé la courbe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{2e^{0,5x}}{e^{0,5x}+1}$.

1) Conjecturer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

2) Montrer la conjecture formulée sur la limite de f en $-\infty$. Que peut-on en déduire pour la courbe $(\mathcal{C}_f)$?

3) **a)** Montrer que, pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{2}{1+e^{-0,5x}}$.

b) En déduire la limite de f en $+\infty$. Que peut-on en déduire pour la courbe $(\mathcal{C}_f)$?

Exercice 55

Un protocole de traitement d'une maladie comporte une perfusion longue durée d'un médicament adapté. La concentration du médicament dans le sang, exprimée en micromole par litre, au cours du temps, exprimé en heure, est modélisée par la fonction C définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $C(t) = 12\left(1 - e^{-\frac{7}{80}t}\right)$.
En médecine, on appelle « plateau » la limite de la fonction C en $+\infty$.

1) Étudier le sens de variation de la fonction C.

2) Pour être efficace, le plateau doit être égal à 15. Le traitement est-il efficace ?

Exercice 56

Un parachutiste de $80\ kg$ saute d'une altitude de $1\,000\ m$ avec une vitesse verticale initiale de $1 m.s^1$.
La distance $d(t)$, exprimée en mètre, parcourue par le parachutiste t secondes après son saut, est donnée par $d(t) = 10t + C(e^{-t} - 1)$, où C est une constante.
La vitesse $v(t)$ du parachutiste à l'instant t est donnée par $v(t) = d'(t)$.

1) Déterminer $v(t)$.

2) Sachant que $v(0) = 1$, déterminer la valeur de C.

3) Quelle est la vitesse limite que peut approcher le parachutiste ?

Exercice 57

L'évolution de la hauteur d'un plant de maïs en fonction du temps est modélisée par la fonction h définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $h(t) = \dfrac{a}{1 + b\, e^{-0{,}04t}}$, où a et b sont des constantes réelles positives, t est la variable temps, exprimée en jour, et $h(t)$ la hauteur du plant, exprimée en mètre.
On sait qu'initialement, pour $t = 0$, le plant mesure $0,1\ m$ et que sa hauteur tend vers une limite de $2\ m$.

Déterminer les valeurs de a et de b.

Exercice 58

Résoudre les équations différentielles suivantes.

1) $y' = -x^3 + x^2 + x - 1$

2) $y' = -2e^{-t} + 1$

3) $y' = 2\left(1 - e^{-2t+3}\right)$

4) $y' = -\dfrac{2}{x^2} + x^4 - 2$

Exercice 59

Dans chaque cas, déterminer la solution f de l'équation différentielle proposée vérifiant la condition indiquée.

1) $y' = 3x^2\, e^{x^3} + 1$ avec $f(0) = -2$.

2) $y' = -x\, e^{x^2+1}$ avec $f(1) = 1$.

3) $y' = -2(x+1)(x^2+2x+3)$ avec $f(0) = 2$.

Exercice 60

Dans chaque cas, déterminer les primitives de la fonction f sur l'intervalle indiqué.

1) $f(x) = \dfrac{3x^2+1}{x^2}$ sur $]0\ ;\ +\infty[$.

2) $f(x) = \dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}$ sur $\mathbb{R}$.

3) $f(x) = \dfrac{e^{2x}-3e^x+1}{e^{2x}}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 61

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (3x - 4)\, e^{-x}$.

1) Montrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = (-3x + 1)e^{-x}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2) Déterminer la primitive G de f qui vérifie $G(0) = 3$.

3) Déterminer les primitives de la fonction H définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (3x - 4)\, e^{-x} + 2x - 3$.

Exercice 62

Dans chaque cas, indiquer si les fonctions F et G sont les primitives sur $\mathbb{R}$ d'une même fonction sans calculer leur dérivée. Justifier.

1) $F(x) = (x+3)(x-2)$ et $G(x) = x^2 + x - 1$.

2) $F(x) = \left(e^{-x} - 1\right)^2$ et $G(x) = -2e^{-2x} + e^{-2x}$.

3) $F(x) = \dfrac{2x+4}{x^2+1}$ et $G(x) = \dfrac{2x-3}{x^2+1}$.

Exercice 63

On donne ci-dessous le tableau de variations d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	1

Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

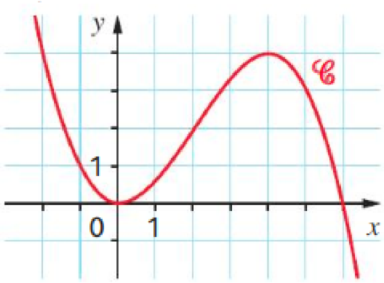
1) Étudier les variations de F sur $\mathbb{R}$.

2) Si F vérifie $F(1) = -3$, déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de F au point d'abscisse 1.

Exercice 64

Vrai ou faux ?

La courbe $(\mathcal{C}_f)$ ci-dessous est la courbe représentative d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$.



Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

1) F est décroissante sur $[4\ ;\ +\infty[$.

2) F est croissante sur $[-2\ ;\ 6]$.

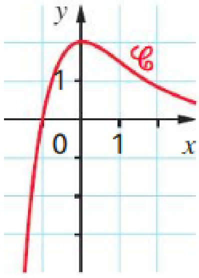
3) F admet un minimum en 0.

4) La courbe représentative de F admet des tangentes horizontales aux points d'abscisses 0 et 6.

5) Le coefficient directeur de la tangente à la courbe de F au point d'abscisse 2 est 2.

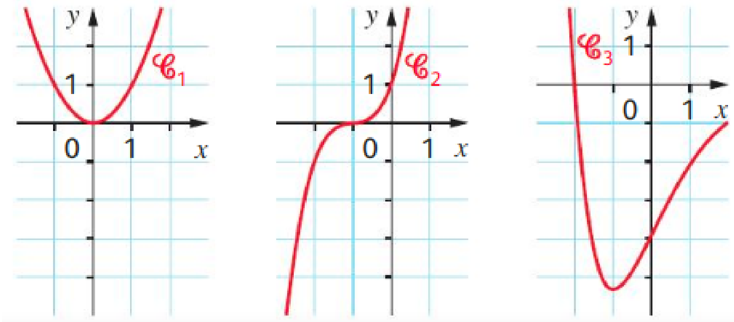
Exercice 65

La courbe $(\mathcal{C}_f)$ ci-dessous est la courbe représentative d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$.



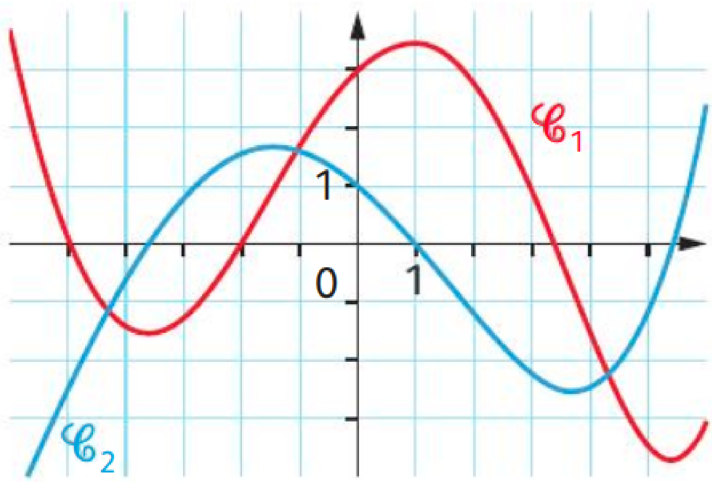
Une des trois courbes suivantes représente une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Déterminer laquelle, en expliquant le choix effectué.



Exercice 66

On a représenté ci-dessous les courbes représentatives d'une fonction f définie sur l'intervalle et de l'une de ses primitives F.



Identifier, en justifiant la réponse, la courbe de f et celle de F.

Exercice 67

Une entreprise a une production maximale de $5\,000$ litres de liquide alimentaire. Le coût marginal, en millier d'euros, est défini, pour $x \in [0\ ;\ 5]$ par $C_m(x) = 10e^{-x} + 3x - 6$.

On rappelle que la fonction C_T, modélisant le coût total des x premiers milliers de litres produits, est une primitive de C_m.

1) Déterminer toutes les primitives de C_m sur $[0\ ;\ 5]$.

2) Sachant que les coûts fixes s'élèvent à $50\,000$ euros, déterminer l'expression de $C_T(x)$ en fonction de x.

3) En déduire le coût total de la production maximale.

Exercice 68

Une boulangerie fabrique chaque jour des cupcakes avec un maximum de production quotidienne de 70 cupcakes. Le coût marginal de production, en euro, de x dizaines de cupcakes est donné par la fonction C_m définie sur $[0\ ;\ 7]$ par $C_m(x) = 6 - (-x + 1,5)\, e^{-x^2+3x}$.

1) Déterminer les primitives de C_m sur $[0\ ;\ 7]$.

2) On considère que le coût marginal est la dérivée du coût total. Sachant que les coûts fixes de cette boulangerie s'élèvent à 300 euros, déterminer l'expression du coût total, en euro, de la production de x dizaines de cupcakes pour $x \in [0\ ;\ 7]$.

Exercice 69

Soit f la fonction solution de l'équation différentielle $(E) : y' = 3y - 5$ telle que $f(0) = -1$.

1) **a)** Sans résoudre (E), déterminer $f'(0)$.

b) En déduire une équation de la tangente à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 0.

2) **a)** Résoudre l'équation (E).

b) Retrouver alors les résultats obtenus à la question 1.

3) **a)** Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. Que peut-on en déduire pour la courbe $(\mathcal{C}_f)$?

b) Étudier le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 70

Exercice guidé

Soit l'équation différentielle (E) : $y' = -2y + 6$.

1) Résoudre (E).

2) Thomas affirme que toutes les fonctions solutions de (E) sont décroissantes sur $\mathbb{R}$.
A-t-il raison ? Justifier.

3) Montrer que les courbes représentatives de toutes les solutions de (E) admettent la droite d'équation $y = 3$ pour asymptote en $+\infty$.

Pistes de résolution

1) On reconnaît une équation différentielle $y' = ay + b$, on commence par chercher une fonction constante solution, puis on donne l'ensemble des solutions...

2) On exprime la dérivée d'une fonction solution quelconque dont le signe dépend de...

3) On calcule la limite de f en $+\infty$ ...

Exercice 71

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, de courbe représentative $(\mathcal{C}_f)$, vérifiant les propriétés suivantes :

- f est solution d'une équation différentielle de la forme $y' = ay + b$, où a et b sont des réels non nuls ;
- la courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet la droite d'équation $y = 3$ pour asymptote en $+\infty$;
- la courbe $(\mathcal{C}_f)$ passe par le point $A(0\ ;\ 1)$ et admet en ce point une tangente de coefficient directeur 2.

Déterminer l'expression de $f(x)$ en fonction de x.

Exercice 72

Après de violents orages, des eaux de ruisselle-ment contenant $4~\%$ de pesticides se déversent dans un bassin aménagé pour la baignade. Le système d'évacuation du bassin permet d'y maintenir un volume constant de $30\,000$ litres.
On admet que le volume de pesticide, en litre, dans ce bassin est modélisé par une fonction V définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $V(t) = f(t) + 1\,200$, où t est le temps, exprimé en minute, et f une fonction solution de l'équation différentielle $(E) : y' + 0,005y = 0$.

1) Résoudre l'équation différentielle (E).

2) On suppose qu'à l'instant $t = 0$, le volume de pesticide dans l'eau est nul.
En déduire que, pour tout réel $t \geqslant 0$, $\quad V(t) = 1\,200\left(1 - e^{-0,005t}\right)$.

3) **a)** Calculer le volume limite de pesticide, noté V_L, défini par $V_L = \lim\limits_{t \to +\infty} V(t)$.

b) Étudier le sens de variation de la fonction V sur $[0\ ;\ +\infty[$ et dresser son tableau de variations.

c) Montrer que l'équation $V(t) = 600$ admet une unique solution α sur $[0\ ;\ +\infty[$ dont on donnera une valeur approchée à l'unité près.

4) Les services sanitaires considèrent que des affections cutanées peuvent survenir dès que le volume de pesticide dans le bassin atteint la moitié de la valeur limite. Au bout de combien de temps ce taux est-il atteint ?

Exercice 73

Exercice commenté
Aux bornes d'une bobine de résistance R, exprimée en ohm, et d'inductance L, exprimée en henry, on branche, à l'instant $t = 0$, un générateur de force électromotrice E, exprimée en volt. L'intensité du courant dans le circuit, exprimée en ampère, est une fonction i, dérivable du temps t, exprimé en seconde, et solution de l'équation différentielle $Ly' + Ry = E$.
On suppose qu'à l'instant $t = 0$ l'intensité est nulle.
On prend $R = 5$, $L = 0,5$ et $E = 3$.

1) Montrer que la fonction i est solution de l'équation différentielle $y' = -10y + 6$.

2) En déduire, pour tout réel $t \geqslant 0$, l'expression de $i(t)$ en fonction de t.

3) Déterminer $\lim\limits_{t \to +\infty} i(t)$. Interpréter cette valeur.

Aide : En remplaçant L, R et E par leurs valeurs numériques, et en exprimant y' en fonction de y, on se ramène à une équation différentielle $y' = ay + b$, que l'on résout en commençant par chercher une fonction constante solution. On traduit ensuite que $i(0) = 0$, ce qui permet d'obtenir l'expression de $i(t)$ en fonction de t.

Exercice 74

Dans une pièce à température constante de $20C$, à l'instant $t = 0$, la température d'un liquide est égale à $70C$. On admet que la température θ de ce liquide est une fonction dérivable du temps t, exprimé en minute, et que $\theta'(t)$ est proportionnelle à la différence entre la température $\theta(t)$ et celle de la pièce, de coefficient de proportionnalité égal à -2.

1) Montrer que la fonction θ est solution de l'équation différentielle $y' = -2y + 40$.

2) En déduire, pour tout réel $t \geqslant 0$, l'expression de $\theta(t)$ en fonction de t.

3) Déterminer $\lim\limits_{t \to +\infty} \theta(t)$. Interpréter cette valeur.

Exercice 75

On s'intéresse à la chute d'un parachutiste avant l'ouverture de son parachute. On admet que la vitesse du parachutiste pendant la chute, exprimée en $m.s^{-1}$, peut être modélisée par une fonction v, fonction du temps t, exprimé en seconde, solution de l'équation différentielle (E) : $my' + ky = mg$, où m est la masse totale du parachutiste et de son parachute, g l'accélération de la pesanteur et k un coefficient dépendant de la résistance de l'air.
On prendra $m = 80\ kg$, $g = 10\ m.s^{-2}$ et $k = 25$.

1) Montrer que la fonction v est solution de l'équation différentielle (E) : $y' = -0,3125y + 10$.

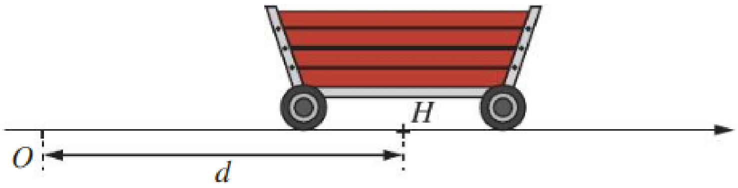
2) Résoudre l'équation différentielle (E).

3) Sachant que $v(0) = 0$, montrer que, pour tout réel $t \geqslant 0$, $\quad v(t) = 32\left(1 - e^{-0,3125t}\right)$.

4) Le parachutiste peut-il atteindre une vitesse de $50\ km.h^{-1}$?

Exercice 76

Un chariot de masse $200\ kg$ se déplace sur une voie rectiligne et horizontale. La position du chariot est repérée par la distance d, en mètre, du point H à l'origine O du repère en fonction du temps t, exprimé en seconde.



Les lois de Newton permettent de montrer que la fonction d vérifie, pour tout réel $t \geqslant 0$, la relation $200d''(t) + 25d'(t) = 50$.

1) Pour $t \geqslant 0$, on note $v(t)$ la vitesse du chariot à l'instant t. On rappelle que, pour tout $t \geqslant 0$, $v(t) = d'(t)$. Montrer que la fonction v est solution de l'équation différentielle $(E) : y' = -0,125y + 0,25$.

2) **a)** Résoudre l'équation différentielle (E).

b) On suppose que $v(0) = 0$. Déterminer, pour tout réel $t \geqslant 0$, $v(t)$ en fonction de t.

c) Calculer $V = \lim\limits_{x \to +\infty} v(t)$. Interpréter cette valeur.

3) **a)** Que représente la fonction d pour la fonction v ?

b) On suppose que $d(0) = 0$. Montrer que, pour tout réel $t \geqslant 0$, $\quad d(t) = 2t - 16 + 16e^{-0,125t}$.

c) Déterminer, au décimètre près, la distance parcourue par le chariot au bout de 30 secondes.

Exercice 77

Au début d'une épidémie, on constate que $0,01$ % de la population est contaminée. Pour $t \in [0\ ;\ 30]$, on note $f(t)$ le pourcentage de personnes touchées par la maladie après t jours. On a donc $f(0) = 0,01$.
On admet que la fonction f est dérivable et strictement positive sur $[0\ ;\ 30]$ et qu'elle est solution de l'équation différentielle $y' = 0,05y(1-y)$.

1) Soit la fonction g définie sur $[0\ ;\ 30]$ par $g(t) = \dfrac{1}{f(t)}$.

- **a)** Calculer $g(0)$.
- **b)** Montrer que la fonction g est solution de l'équation différentielle (F) : $y' = -0,05y + 0,05$.
- **c)** Résoudre (F). En déduire, l'expression de $g(t)$ en fonction de t.

2) **a)** Montrer que, pour tout réel $t \in [0\ ;\ 30]$, $\quad f(t) = \dfrac{1}{99e^{-0,05t}+1}$.

- **b)** Calculer, au centième près, le pourcentage de la population infectée après 30 jours.

Au début d'une épidémie, on constate que $0,01$ % de la population est contaminée. Pour $t \in [0\ ;\ 30]$, on note $f(t)$ le pourcentage de personnes touchées par la maladie après t jours. On a donc $f(0) = 0,01$.
On admet que la fonction f est dérivable et strictement positive sur $[0\ ;\ 30]$ et qu'elle est solution de l'équation différentielle $y' = 0,05y(1-y)$.

1) Soit la fonction g définie sur $[0\ ;\ 30]$ par $g(t) = \dfrac{1}{f(t)}$.

a) Calculer $g(0)$.

$$g(t) = \frac{1}{f(t)}$$

$$g(0) = \frac{1}{f(0)} = \frac{1}{0,01} = 100$$

b) Montrer que la fonction g est solution de l'équation différentielle (F) : $y' = -0,05y + 0,05$.

$$g(t) = \frac{1}{f(t)}$$

$$g'(t) = -\frac{f'(t)}{(f(t))^2}$$

$$0,05g(t) + 0,05 = -\frac{0,05}{f(t)} + 0,05 = \frac{-0,05 + 0,05f(t)}{f(t)} = \frac{0,05(-1+f(t))f(t)}{(f(t))^2}$$

$$0,05g(t) + 0,05 = -\frac{0,05(1-f(t))f(t)}{(f(t))^2}$$

Or, f est solution de $y' = 0,05y(1-y)$.
$f'(t) = 0,05f(t)(1-f(t))$.

$$0,05g(t) + 0,05 = -\frac{f'(t)}{(f(t))^2}$$

$$0,05g(t) + 0,05 = g'(t)$$

g est solution de l'équation différentielle (F) : $y' = -0,05y + 0,05$.

c) Résoudre (F). En déduire, l'expression de $g(t)$ en fonction de t.

$$(F) : y' = -0,05y + 0,05$$

$u(t) = 1$ est solution de (F).

$g(t) = C\ e^{-0{,}05t} + 1$

Or $g(0) = 100$.

$C + 1 = 100$

$C = 99$

$g(t) = 99\ e^{-0{,}05t} + 1$

2) **a)** Montrer que, pour tout réel $t \in [0\ ;\ 30]$, $\quad f(t) = \dfrac{1}{99e^{-0{,}05t} + 1}$.

$g(t) = \dfrac{1}{f(t)}$ donc $f(t) = \dfrac{1}{g(t)}$.

$g(t) = 99\ e^{-0{,}05t} + 1$

$f(t) = \dfrac{1}{99e^{-0{,}05t} + 1}$

b) Calculer, au centième près, le pourcentage de la population infectée après 30 jours.

$f(t) = \dfrac{1}{99e^{-0{,}05t} + 1}$

$f(30) = \dfrac{1}{99e^{-1{,}5} + 1}$

$f(30) \approx 0,04$

Exercice 78

Exercice 79

Exercice 80

Exercice 81

Exercice 82

Exercice 83

Exercice 84

Exercice 85