Exercice 1

QCM

Soient E et F deux événements de probabilités non nulles.

1) La probabilité conditionnelle de F sachant E se note :

- **a)** $p(E \cap F)$
- **b)** $p_F(E)$
- **c)** $p_E(F)$

2) La probabilité conditionnelle de F sachant E est égale à :

- **a)** $p(E) \times p(F)$
- **b)** $\dfrac{p(E \cap F)}{p(E)}$
- **c)** $\dfrac{p(E \cap F)}{p(F)}$

3) La probabilité $p_E(\overline{F})$

- **a)** $1 - p_E(F)$
- **b)** $1 - p_{\overline{E}}(\overline{F})$
- **c)** $1 - p(E \cap \overline{F})$

4) La probabilité de $\overline{E} \cap F$ est égale à :

- **a)** $p(\overline{E}) \times p(F)$
- **b)** $p(\overline{E}) \times p_{\overline{E}}(F)$
- **c)** $p(\overline{E}) \times p_F(\overline{E})$

5) La probabilité de F est égale à :

- **a)** $p_E(F) + p_{\overline{E}}(F)$
- **b)** $p_E(F)$
- **c)** $p(E \cap F) + p(\overline{E} \cap F)$

6) La probabilité $p_F(E)$ est égale à :

- **a)** $\dfrac{p(E \cap F)}{p(E \cap F) + p(\overline{E} \cap F)}$
- **b)** $\dfrac{p(E)}{p(F)}$
- **c)** $\dfrac{p_E(F)}{p(E)}$

Exercice 2

Soient deux événements A et B d'un même univers et de probabilités non nulles.
Rappeler la formule de Bayes liant les probabilités $p_A(B)$ et $p_B(A)$.

Quel est l'intérêt de cette formule ?

Exercice 3

Donner deux méthodes permettant de justifier que deux événements A et B sont indépendants.

Exercice 4

Soient A et B deux événements d'un même univers tel que ;
$p(A) = 0,7$; $p_A(B) = 0,25$ et $p_{\overline{A}}(B) = 0,5$.

1) Modéliser la situation par un arbre pondéré.

2) En exploitant l'arbre choisi, calculer les probabilités suivantes :

a) $p(B)$

b) $p(\overline{B})$

c) $p(\overline{A} \cap B)$

d) $p_B(A)$

Exercice 5

Soient A et B deux événements d'un même univers tel que ;
$p(B) = 0,4$; $p(A \cap B) = 0,16$ et $p_{\overline{B}}(A) = 0,3$.

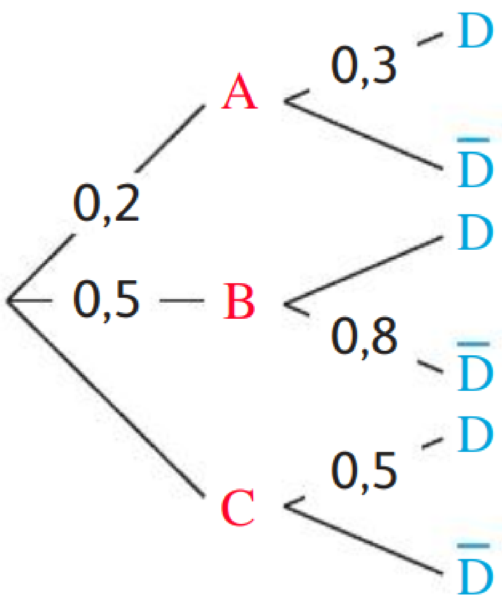
1) Modéliser la situation par un arbre pondéré.

2) En exploitant l'arbre choisi, calculer les probabilités suivantes :

- **a)** $p(A)$
- **b)** $p(\overline{A} \cap B)$
- **c)** $p_A(\overline{B})$
- **d)** $p_{\overline{A}}(B)$

Exercice 6

Vrai ou Faux ?



On considère l'arbre de probabilité ci-dessus où A, B et C forment une partition de l'univers.
Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Justifier.

1) $p(C) = 0,3$

2) $p_B(D) = 0,2$

3) $p_D(C) = 0,5$

4) $p(D) = 0,3$

5) $p(B \cap \overline{D}) = 0,4$

6) $p(\overline{D}) = 0,69$

Exercice 7

Dans une entreprise spécialisée dans les technologies high-tech, le personnel est réparti en trois catégories :

- $28~\%$ sont ingénieurs de recherche (I),
- $45~\%$ sont ouvriers spécialisés (O),
- le restant sont techniciens supérieurs (T).

Parmi les techniciens, on dénombre $45~\%$ de femmes (F).
Seulement $30~\%$ des ingénieurs sont des femmes.
$70~\%$ des ouvriers sont des hommes (H).

On interroge au hasard un membre du personnel.

1) Traduire l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.

2) **a)** Quelle est la probabilité que la personne interrogée soit une ingénieure ? une ouvrière ?

b) Déterminer la probabilité que la personne interrogée soit une femme.

3) Calculer la probabilité que la personne interrogée soit ingénieur sachant que cette personne est une femme.

Exercice 8

Une urne contient dix boules indiscernables au toucher : 7 noires et 3 blanches.

On tire au hasard successivement et sans remise deux boules de l'urne.

1) Modéliser la situation à l'aide d'un arbre pondéré.

2) Déterminer la probabilité :

- **a)** de prélever deux boules blanches ;
- **b)** de prélever deux boules de couleurs différentes ;
- **c)** que la deuxième boule prélevée soit noire.

3) On vient de prélever deux boules de l'urne. La seconde est noire. Quelle est la probabilité que la première soit blanche ?

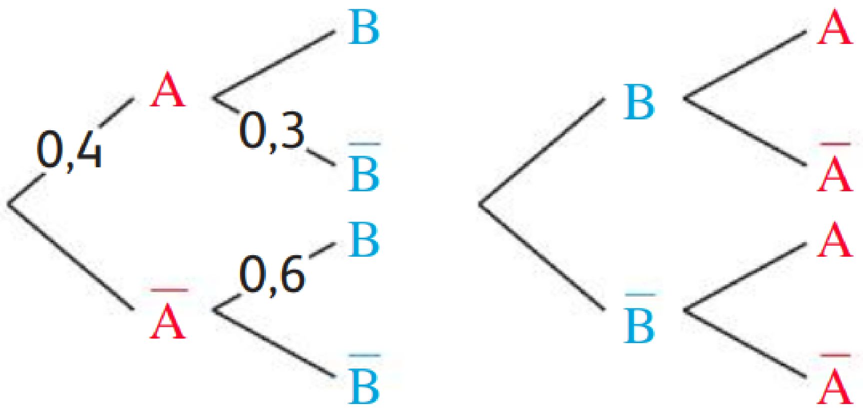
Exercice 9

Emma habite une petite ville où il pleut en moyenne un jour sur quatre. Lorsqu'il ne pleut pas, elle sort son chien avec une probabilité de $\frac{4}{5}$. Lorsqu'il pleut, elle sort son chien dans $10\ \%$ des cas.

Déterminer la probabilité qu'Emma sorte son chien un jour quelconque de la semaine.

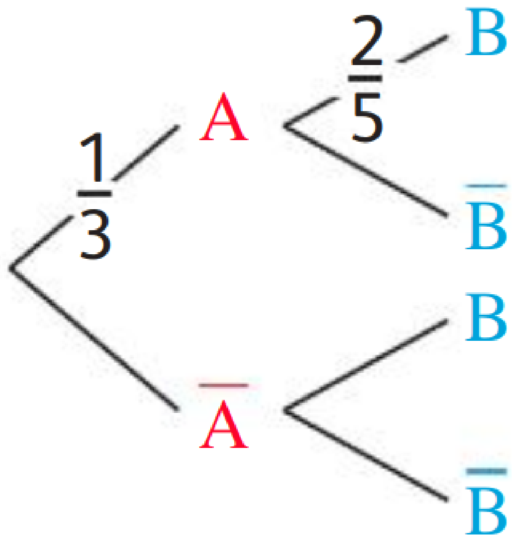
Exercice 10

On considère les deux arbres pondérés suivants où A et B sont deux événements d'un même univers.



Compléter ces arbres pondérés par les probabilités manquantes en justifiant les calculs nécessaires.

Exercice 11



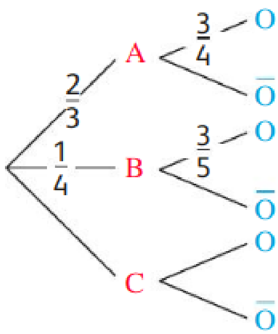
On considère l'arbre pondéré ci-dessus.
On sait de plus que $p(B) = \frac{2}{3}$.

1) Compléter cet arbre de probabilité en détaillant tous les calculs nécessaires.

2) Calculer les probabilités $p_B(A)$ et $p_B(\overline{A})$.

Exercice 12

Une association envisage de proposer des livrai-sons de paniers de produits fermiers contenant ou non des œufs frais. Pour savoir si ses adhérents sont intéressés, elle réalise un sondage.
On interroge un adhérent au hasard. L'adhérent peut choisir des paniers de petite taille (A), de taille moyenne (B) ou de grande taille (C).
On considère l'événement O : « l'adhérent est intéressé par un panier contenant des œufs frais ». On dispose de certaines données, qui sont résumées dans l'arbre ci-dessous.



1) Dans cette question, on ne cherchera pas à compléter l'arbre intégralement.

- **a)** Calculer la probabilité que l'adhérent choisisse un panier de petite taille et soit intéressé par une livraison d'œufs.
- **b)** Calculer $p(B \cap \overline{O})$ puis interpréter ce résultat à l'aide d'une phrase.
- **c)** La livraison d'œufs frais ne sera mise en place que si la probabilité de l'événement O est supérieure à $0,6$. Est-ce que ce sera le cas ici ?

2) On sait de plus que $p(O) = 0,675$.

- **a)** À l'aide de la formule des probabilités totales, calculer $p(C \cap O)$.
- **b)** Démontrer que $p_C(O) = 0,3$.
  Compléter alors l'arbre précédent.
- **c)** Un adhérent a choisi une livraison d'œufs. Quelle est la probabilité qu'il ait choisi un panier de grande taille ?

Exercice 13

Exercice commenté

Le responsable d'un club d'astronomie adresse un questionnaire à ses adhérents pour mieux les connaître. Il obtient les informations suivantes :

- 64 % des personnes interrogées sont des nouveaux adhérents ;
- 27 % des personnes interrogées sont des anciens adhérents qui possèdent un télescope personnel ;
- 65 % des nouveaux adhérents n'ont pas de télescope personnel

On choisit au hasard un adhérent.

Aide : *On pourra nommer des événements puis interpréter les données chiffrées en termes de probabilités.*
Ici, 27 % correspond-il à une probabilité simple ou conditionnelle ? Construire alors un arbre que l'on pondérera au fur et à mesure de l'exercice.

1) Montrer que la probabilité que l'adhérent choisi possède un télescope personnel est $0,494$.

Aide : *Exploiter l'arbre et la formule des probabilités totales.*

2) On choisit au hasard un adhérent parmi ceux qui possèdent un télescope personnel. Quelle est la probabilité que ce soit un nouvel adhérent ?

Aide : *Quelle est la nature de la probabilité à calculer ? Quelle(s) formule(s) peut-on exploiter ici ?*

Exercice 14

Un logiciel antispam détecte les messages indésirables appelés spams et les déplace dans un dossier « spam ». Comme indiqué par le concepteur du logiciel, 95 % des spams sont déplacés. De plus, 60 % des messages reçus sont des spams. Après installation du logiciel, on constate que $58,6$ % des messages reçus sont déplacés comme spams. On choisit un message au hasard et on considère les événements S « le message est un spam » et D « le message est déplacé ».

1) Calculer la probabilité $p(S \cap D)$. Interpréter.

2) Quelle est la probabilité que le message soit déplacé sachant qu'il ne s'agit pas d'un spam ?

3) On choisit au hasard un message non déplacé. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'un spam ?

Exercice 15

Une enquête commandée par un supermarché révèle que, parmi les clients ayant choisi de passer à une borne automatique, $86\ \%$ attendent moins de 10 minutes.
De plus, parmi les clients passant en caisse « classique », $63\ \%$ attendent moins de 10 minutes.
Une attente supérieure à 10 minutes à une caisse engendre chez le client une perception négative du magasin. Ainsi, le gérant souhaite qu'au moins $75\ \%$ des clients attendent moins de 10 minutes.
Déterminer la proportion minimale de clients choisissant une borne automatique de paiement pour que cet objectif soit atteint.

Pistes de résolution :
En notant p la proportion de clients choisissant une borne automatique, exprimer, en fonction de p, la probabilité qu'un client attende moins de 10 minutes à la caisse. Écrire alors une inéquation vérifiée par p.

Exercice 16

Chaque semaine, un agriculteur propose un panier de produits frais contenant une bouteille de jus de fruits consignée. Une étude statistique révèle que :

- à l'issue de la première semaine, la probabilité qu'un client rapporte la bouteille consignée la semaine suivante est $0,9$;
- si le client a rapporté la bouteille une semaine, alors il la ramène la semaine suivante avec une probabilité égale à $0,95$;
- si le client n'a pas rapporté la bouteille une semaine, il ramène la bouteille la semaine suivante avec une probabilité égale à $0,2$.

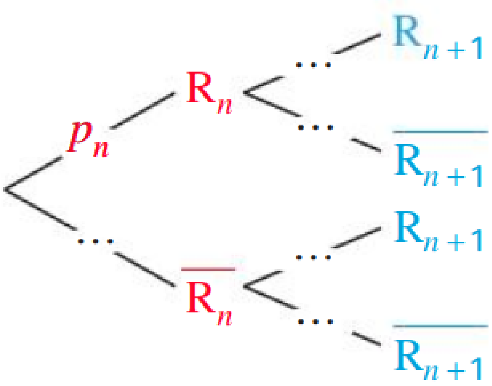
On choisit au hasard un client de cet agriculteur.
Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note R_n l'événement « le client rapporte la bouteille de la n-ième semaine ».

1) **a)** Modéliser la situation étudiée pour les deux premières semaines à l'aide d'un arbre pondéré.

b) Montrer que $p(R_2) = 0,875$. Interpréter.

2) Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note p_n la probabilité que le client rapporte la bouteille la n-ième semaine. Ainsi, on a $p_n = p(R_n)$.

a) Recopier et compléter l'arbre de probabilité ci-dessous.



b) Justifier que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $p_{n+1} = 0,75p_n + 0,2$.
Quelle est la nature de la suite $(p_n)_{n\geqslant 1}$?

c) Déterminer une suite constante, notée α, vérifiant la même relation de récurrence que p_n.

d) Déterminer la nature de la suite (u_n) définie, pour tout entier $n \geqslant 1$, par $u_n = p_n - \alpha$. Justifier.

e) Exprimer, pour tout entier $n \geqslant 1$, u_n en fonction de n. En déduire que $p_n = 0,1 \times 0,75^{n-1} + 0,8$.

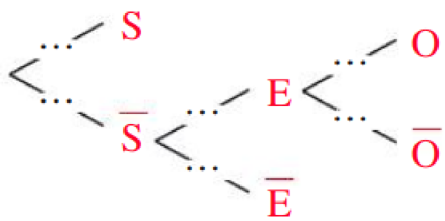
f) Quelle est la limite de la suite (p_n) ? Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice 17

Pour recruter ses futurs étudiants, une grande école procède en trois étapes : à l'issue de l'étude de leur dossier scolaire, $20~\%$ des candidats sont reçus. Les autres candidats passent un test écrit dont le taux de réussite est de $40~\%$.
Les candidats ayant réussi ce test sont convoqués à un entretien oral dont un quart sont finalement admis.
On considère un candidat au hasard et les événements suivants :

- S : « le candidat est admis sur dossier scolaire » ;
- E : « le candidat a passé et réussit le test écrit » ;
- O : « le candidat a passé l'entretien et est admis à son issue ».

1) Compléter l'arbre pondéré suivant modélisant la situation.



2) Montrer que la probabilité que le candidat soit admis dans cette école est égale à $0,28$.

3) Parmi les candidats admis, quelle est la proportion de candidats admis sur dossier scolaire ?

Exercice 18

Lors d'une soirée, une chaîne a retransmis un concours culinaire suivi d'une émission proposant des recettes rapides. On sait que :

- $56\ \%$ des téléspectateurs ont regardé le concours culinaire ;
- un quart des téléspectateurs ayant regardé le concours ont aussi regardé l'émission suivante ;
- $16,2\ \%$ des téléspectateurs ont regardé l'émission proposant des recettes rapides.

Quelle est la probabilité qu'un téléspectateur ait regardé l'émission de recettes sachant qu'il n'a pas regardé le concours culinaire ?

Exercice 19

Un audioprothésiste compte parmi ses clients $75~\%$ de personnes de plus de 50 ans. Parmi celles-ci, $80~\%$ souffrent de problèmes d'audition aux deux oreilles. Ce taux chute à $40~\%$ parmi les clients de moins de 50 ans.

Un client ne souffre pas de problème auditif aux deux oreilles ; quelle est la probabilité qu'il soit âgé de plus de 50 ans ?

Exercice 20

Le chikungunya est une maladie virale transmise d'un être humain à l'autre par les piqûres de mous-tiques femelles infectés. Un test a été mis au point pour le dépistage de ce virus. Le laboratoire fabriquant ce test fournit les caractéristiques suivantes :

- la probabilité qu'une personne atteinte par le virus ait un test positif est de $0,98$;
- la probabilité qu'une personne non atteinte par le virus ait un test positif est de $0,01$.

On procède à un test de dépistage systématique dans une population « cible ». Un individu est choisi au hasard dans cette population. On considère les événements M « l'individu choisi est atteint du chikungunya » et T « le test de l'individu choisi est positif ».
On note p (avec $p \in [0\ ;\ 1]$) la proportion de personnes atteintes par la maladie dans la population cible.

1) **a)** Représenter la situation par un arbre pondéré.

b) Exprimer $p(M \cap T)$, puis $p(T)$ en fonction de p.

2) **a)** Montrer que la probabilité de M sachant T est égale à $f(p) = \dfrac{98p}{97p+1}$.

b) Étudier et interpréter les variations de f sur $[0\ ;\ 1]$.

3) On décide de considérer que le test est fiable lorsque la probabilité qu'une personne ayant un test positif soit réellement atteinte du chikungunya est supérieure à $0,95$.
À partir de quelle proportion p de malades dans la population cible le test est-il fiable ?

Exercice 21

Indépendance

Dans une classe de 30 élèves, 10 font partie du club photo et 6 sont membres du club théâtre. Enfin, deux élèves sont membres des deux clubs.

On interroge un élève de la classe pris au hasard.

Montrer que les événements C « l'élève fait partie du club photo » et T « l'élève fait partie du club théâtre » sont indépendants.

Exercice 22

Indépendance

Une usine d'horlogerie fabrique une série de montres. Au cours de la fabrication peuvent apparaître deux types de défauts, désignés par a et b, indépendants l'un de l'autre. $2\ \%$ des montres fabriquées présentent le défaut a et $10\ \%$ le défaut b.

Une montre est tirée au hasard dans la production. On définit les événements suivants :

- A : « la montre tirée présente le défaut a » ;
- B : « la montre tirée présente le défaut b ».

1) Montrer que la probabilité que la montre tirée ne présente aucun des deux défauts est égale à $0,882$.

2) Déterminer la probabilité que la montre présente au moins un défaut.

3) Déterminer la probabilité que la montre présente un et un seul des deux défauts.

Exercice 23

Exercice 24

Exercice 25

Exercice 26

Exercice 27

Exercice 28

Exercice 29

Exercice 30

Exercice 31

Exercice 32

Exercice 33

Exercice 34

Exercice 35

Exercice 36

Exercice 37

Exercice 38

Exercice 39

Exercice 40

Exercice 41

Exercice 42

Exercice 43

Exercice 44

Exercice 45

Exercice 46

Exercice 47

Exercice 48

Exercice 49

Exercice 50