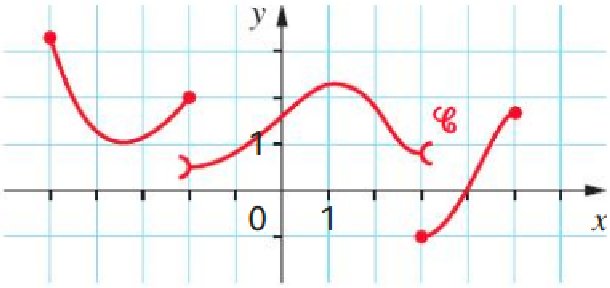
Exercice 1

Soit une fonction u dérivable sur un intervalle I.
On définit la fonction f sur I par $f(x) = (u(x))^2$.

Justifier que f est dérivable sur I, puis montrer que, pour tout réel $x \in I$, $f'(x) = 2u'(x)u(x)$.

Exercice 2



On considère une fonction f définie sur dont on donne la courbe représentative $(\mathcal{C}_f)$ ci-dessus.
Préciser si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1) La fonction f est discontinue en 3.

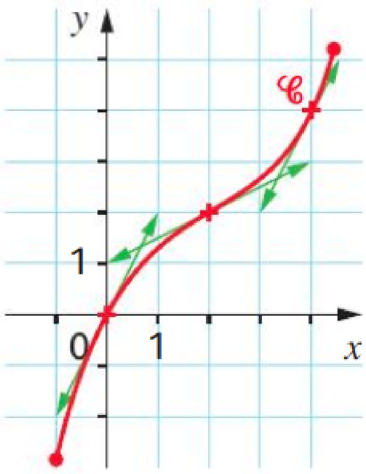
2) La fonction f est continue en 1.

3) La fonction f est continue sur l'intervalle $[-3\ ;\ 3]$.

4) La fonction f est continue sur l'intervalle $]-2\ ;\ 3[$.

5) La fonction f est continue sur l'intervalle $[-5\ ;\ -2]$.

Exercice 3



Soit la fonction f définie sur par sa courbe représentative $(\mathcal{C}_f)$ ci-dessus.
On a représenté les tangentes aux points d'abscisse 0 , 2 et 4.

1) **a)** Lire la position de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à ses tangentes sur $[-1\ ;\ 2]$.

b) Sur $[-1\ ;\ 2]$, f est-elle convexe ou concave ?

2) Sur $[2\ ;\ 4,5]$, f est-elle convexe ou concave ?

3) **a)** Que peut-on dire de la position de $(\mathcal{C}_f)$ et de sa tangente au point d'abscisse 2 ?

b) La fonction f est-elle convexe sur $[-1\ ;\ 4,5]$? concave sur $[-1\ ;\ 4,5]$?

Exercice 4

Fonctions de référence

Pour chacune des fonctions de référence (carré, inverse, cube, racine carrée, exponentielle), répondre aux questions suivantes.

1) Tracer à la calculatrice la courbe représentative $(\mathcal{C}_f)$ et observer la position de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à ses tangentes.

2) Conjecturer sur quel intervalle la fonction est convexe, concave. Préciser les points d'inflexion éventuels.

3) Démontrer les conjectures précédentes en étudiant le signe de la dérivée seconde.

Exercice 5

Dans chacun des cas, on définit une fonction f sur un ensemble $\mathcal{D}_f$.
Exprimer $f'(x)$ en fonction de x.

1) $f(x) = (2x-3)^2$ et $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

2) $f(x) = 4\left(-4x^2+3x+5\right)^2$ et $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

3) $f(x) = 2(x-1)^3 + 0,5x + 2$ et $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

Exercice 6

Dans chacun des cas, on définit une fonction f sur un ensemble $\mathcal{D}_f$.
Exprimer $f'(x)$ en fonction de x.

1) $f(x) = \dfrac{2x+1}{3x+6}$ et $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{2\}$.

2) $f(x) = \dfrac{-2x+1}{x^2+1}$ et $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

3) $f(x) = \dfrac{x^2-3}{2x-8}$ et $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{4\}$.

Exercice 7

Dans chacun des cas, on définit une fonction f sur un ensemble $\mathcal{D}_f$.
Exprimer $f'(x)$ en fonction de x.

1) $f(x) = 3e^{-x^2}$ et $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

2) $f(x) = 4 - 3e^{-0,1x+3}$ et $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

3) $f(x) = \sqrt{5x+10}$ et $\mathcal{D}_f =]-2\ ;\ +\infty[$.

Exercice 8

Dans chacun des cas, on définit une fonction f sur un ensemble $\mathcal{D}_f$.
Exprimer $f'(x)$ en fonction de x.

1) $f(x) = (2x+1)\,e^{-0,5x}$ et $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

2) $f(x) = (0,5x-1)\,e^{3x+1}$ et $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

3) $f(x) = \dfrac{x+1}{e^{2x}}$ et $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

Exercice 9

Dans chaque cas, on considère une fonction f définie sur un intervalle I.
Justifier que f est monotone sur I.

1) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ sur $I = \mathbb{R}$.

2) $f(x) = 3e^{-0,1x} + 3$ sur $I = \mathbb{R}$.

3) $f(x) = \dfrac{-5x+2}{2x+4}$ sur $I =]-2\,;\,+\infty[$.

4) $f(x) = 10 - 4e^{2x}$ sur $I = \mathbb{R}$.

Exercice 10

Dans chaque cas, on considère une fonction f définie sur un intervalle I.
Construire le tableau de variations de f sur I.

1) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 1$ sur $I = [3\ ;\ 6]$.

2) $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ sur $I = [-2\ ;\ 4]$.

3) $f(x) = \frac{-5x+2}{2x+4}$ sur $I =]-2\ ;\ +\infty[$.

4) $f(x) = 2x\, e^{-x}$ sur $I = [-5\ ;\ 5]$.

Exercice 11

Dans chacun des cas, on définit une fonction f sur un ensemble $\mathcal{D}_f$.
Étudier les variations de f sur $\mathcal{D}_f$.

1) $f(x) = (2x+1)\, e^{-0,5x}$ et $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

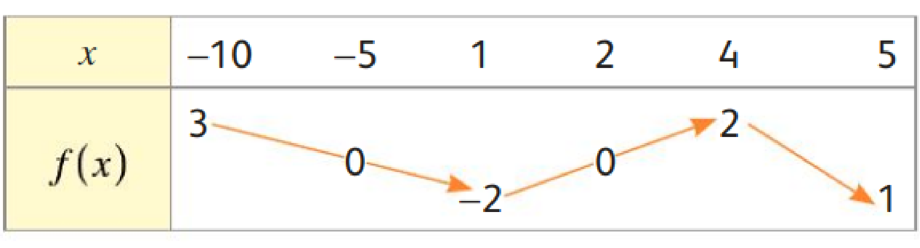
2) $f(x) = (0,5x-1)\, e^{3x+1}$ et $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

3) $f(x) = \dfrac{x+1}{e^{2x}}$ et $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

Exercice 12

Vrai ou Faux ?

On considère une fonction f continue, dont on donne le tableau de variations.



Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1) L'équation $f(x) = -1$ admet une unique solution.
2) L'équation $f(x) = 1$ admet trois solutions.
3) Le signe de f est donné par le tableau suivant.

x	-10		-5		2		5
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Exercice 13

Démontrer que l'équation $x^3 - 3x^2 - 1 = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$ et encadrer celle-ci par deux entiers consécutifs.

Exercice 14

Soit la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$.
L'équation $f(x)=1$ admet-elle des solutions ?

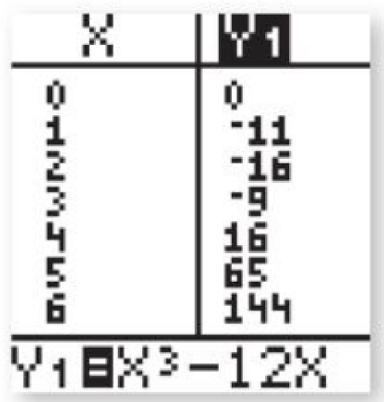
Exercice 15

La fonction f est définie sur $[-3\ ;\ 6]$ par $f(x) = x^3 - 12x$.

1) Construire le tableau de variations de f sur $[-3\ ;\ 6]$.

2) Combien l'équation $f(x) = 50$ admet-elle de solutions sur $[-3\ ;\ 6]$?

3) On a tabulé ci-contre la fonction f par pas de 1 à la calculatrice. En déduire un encadrement de la solution de l'équation entre deux entiers consécutifs.



X	Y1
0	0
1	-11
2	-16
3	-9
4	16
5	65
6	144

Y1 = X³−12X

4) En procédant de la même façon, obtenir un encadrement de la solution à 10^{-2} près.

Exercice 16

On considère la fonction f définie sur $[0\ ;\ 4]$ par $f(x) = 0,1x^2 + 2\sqrt{x} - 4$.

1) Établir le tableau de variations de f , puis justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α.

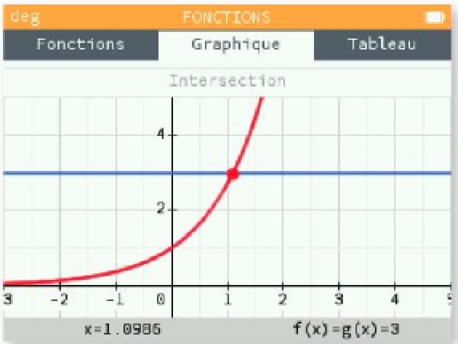
2) **a)** Calculer $f(2)$. Quel est son signe ?
En déduire, entre les intervalles $[0\ ;\ 2]$ et $[2\ ;\ 4]$, lequel contient la solution α_1.

b) Parmi $[2\ ;\ 3]$ et $[3\ ;\ 4]$, lequel contient α_1 ?

3) Déterminer un encadrement de α_1 à $0,5$ près.

Exercice 17

1) Un élève doit résoudre de façon approchée l'équation $e^x = 3$. On donne ci-dessous la capture d'écran de sa calculatrice.



Après avoir expliqué la démarche de l'élève, donner une valeur approchée de la solution de l'équation à $0,001$ près.

2) À l'aide des fonctionnalités de la calculatrice, résoudre graphiquement à $0,001$ près les équations suivantes.

a) $e^x = 0,5$

b) $e^x = 5$

c) $e^x = 20$

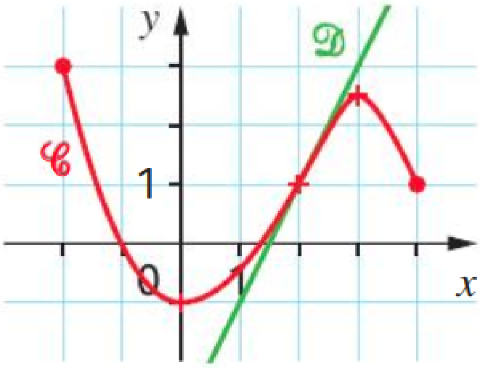
d) $e^x = 50$

e) $e^x = 200$

f) $e^x = 500$

Exercice 18

Vrai ou faux ?



On considère la fonction f définie sur $[-2\ ;\ 4]$ par sa courbe représentative $(\mathcal{C}_f)$.
La droite $(\mathcal{D})$ est la tangente à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 2.

Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1) La courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet un point d'inflexion en 2.

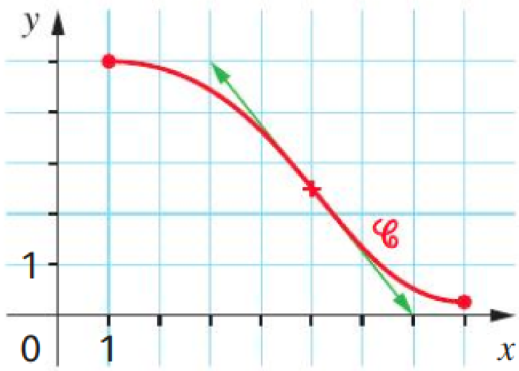
2) La fonction f' est croissante sur $[-2\ ;\ 2]$.

3) La fonction f' est positive sur $[-2\ ;\ -1]$.

4) La fonction f est concave sur $[2\ ;\ 4]$.

Exercice 19

QCM



Soit une fonction f définie sur par sa courbe représentative $(\mathcal{C}_f)$.
Pour chaque affirmation, déterminer la bonne réponse.

1) f est convexe sur :

- **a)** $[1\ ;\ 8]$
- **b)** $[1\ ;\ 5]$
- **c)** $[5\ ;\ 8]$

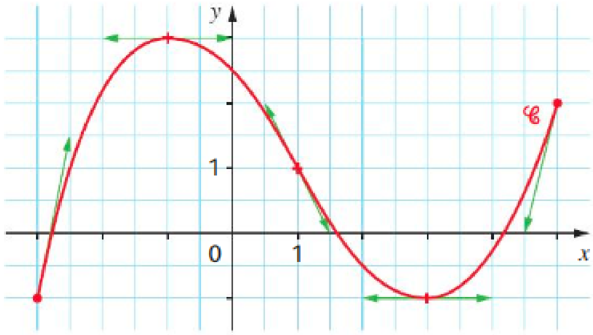
2) f est concave sur :

- **a)** $[1\ ;\ 8]$
- **b)** $[1\ ;\ 5]$
- **c)** $[5\ ;\ 8]$

3) $(\mathcal{C}_f)$ admet un point d'inflexion en :

- **a)** $2,5$
- **b)** 5
- **c)** 8

Exercice 20



On considère une fonction f définie sur $[-3 ; 5]$ par sa courbe représentative $(\mathcal{C}_f)$ ci-dessus.
On a tracé quelques tangentes à $(\mathcal{C}_f)$.

1) **a)** En visualisant les coefficients directeurs des tangentes lorsque l'on parcourt la courbe $(\mathcal{C}_f)$, justifier que la fonction f' est décroissante sur $[-3 ; 1]$.

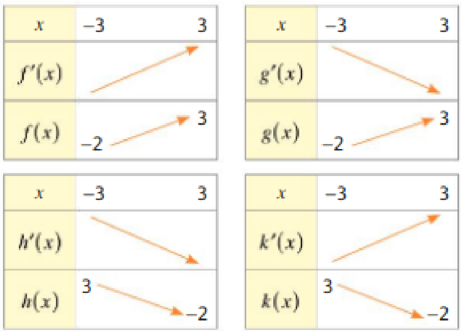
b) Que peut-on en déduire pour la fonction f ?Vérifier en visualisant la position de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à ses tangentes sur $[-3 ; 1]$.

2) Quel est le sens de variation de f' sur $[1 ; 5]$? Que peut-on en déduire pour la fonction f ?

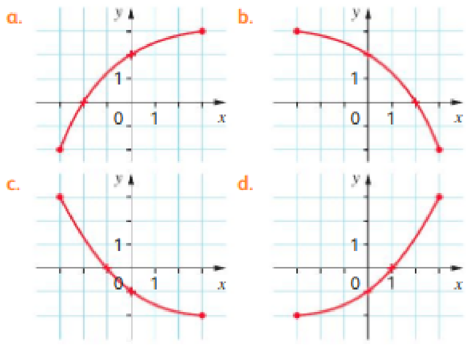
3) La courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet-elle un point d'inflexion ? Si oui, en quel réel ?

Exercice 21

On considère quatre fonctions dérivables f, g, h et k dont on donne les tableaux de variations, ainsi que leurs dérivées.



1) Les courbes de ces fonctions sont données ci-dessous.

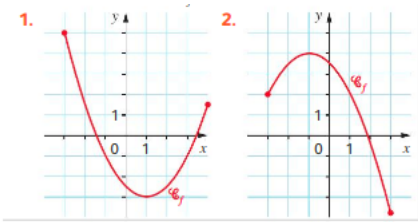


Associer fonctions et courbes, en justifiant.

2) Préciser la convexité des fonctions f, g, h et k.

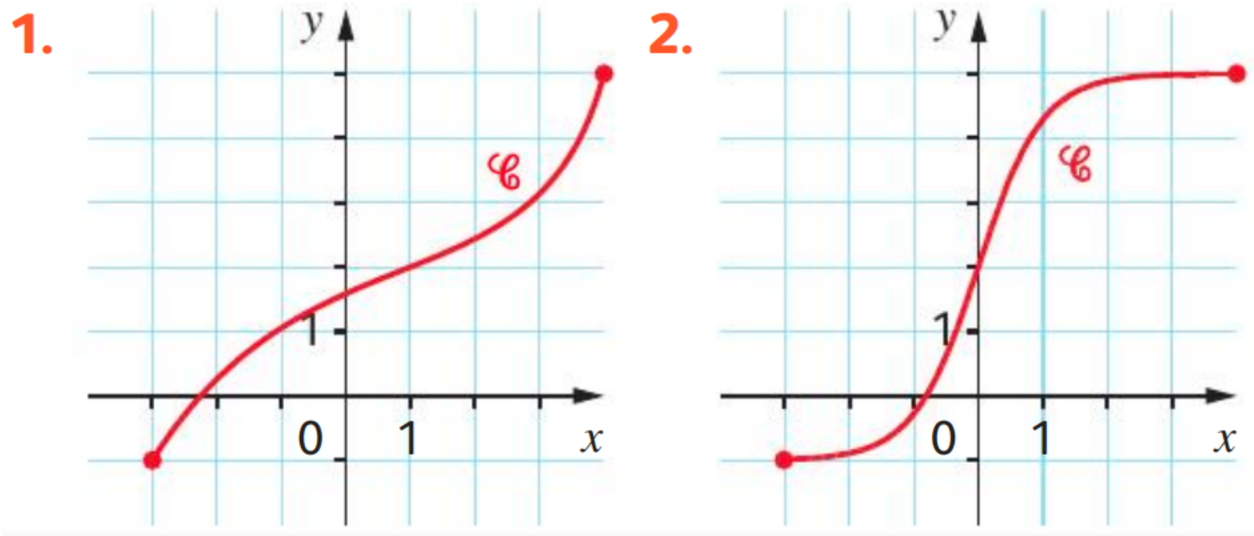
Exercice 22

Dans chaque cas, préciser si la fonction f représentée par la courbe $(\mathcal{C}_f)$ est convexe ou concave.



Exercice 23

Dans chaque cas, préciser les coordonnées du point d'inflexion de la courbe $(\mathcal{C}_f)$.



Exercice 24

QCM

Soit f la fonction définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-5x+1}$.
Pour chaque affirmation, déterminer la (ou les) bonne(s) réponse(s).

1) Sur $\mathbb{R}$, la fonction f est :

- **a)** positive
- **b)** croissante
- **c)** convexe

2) Sur $\mathbb{R}$, la fonction f' est :

- **a)** positive
- **b)** croissante
- **c)** convexe

Exercice 25

Vrai ou faux ?

x	0		5		15
$f'(x)$	30	$\searrow$	-5	$\nearrow$	20

Soit f une fonction dérivable sur $[0\ ;\ 15]$ pour laquelle on connaît **le tableau de variations de la dérivée** f'.
Préciser si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1) La fonction f est convexe sur $[-5\ ;\ 20]$.

2) La fonction f est concave sur $[0\ ;\ 5]$.

3) La courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet un point d'inflexion en 5.

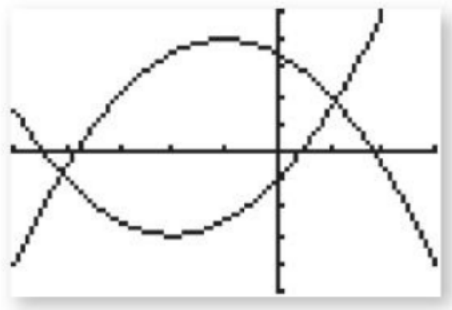
4) La courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet une unique tangente parallèle à l'axe des abscisses.

5) La fonction f'' est positive sur $[5\ ;\ 15]$.

Exercice 26

Soient les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0,5x^2 + 2x - 1$ et $g(x) = -0,5x^2 - x + 3,5$.

1) On a obtenu à la calculatrice les courbes représentatives de f et g ci-contre.



Après les avoir repérées, conjecturer si f , puis g, est convexe ou concave sur $\mathbb{R}$.

2) **a)** Calculer $f'(x)$, puis $f''(x)$.

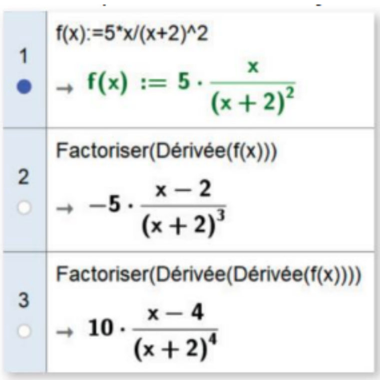
b) Calculer $g'(x)$, puis $g''(x)$.

3) Démontrer les conjectures émises.

Exercice 27

On considère la fonction f définie sur $[-1\ ;\ 8]$ par $f(x) = \dfrac{5x}{(x+2)^2}$.

On a obtenu les résultats suivants à l'aide d'un logiciel de calcul formel, que l'on utilisera sans justifier.



1) Étudier le signe de $f''(x)$ sur $[-1\ ;\ 8]$.

2) Déterminer sur quel intervalle la fonction f est :

- **a)** convexe
- **b)** concave

3) En quel point la courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet-elle un point d'inflexion ?

Exercice 28

On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

Dans chacun des cas suivants, déterminer si la fonction f est convexe ou concave sur $\mathbb{R}$.

1) $f(x) = x^4 - 3x - 2$

2) $f(x) = 10e^{-0,5x} + 2$

3) $f(x) = -2x^2 + 3$

4) $f(x) = -5e^{3x} + 4$

Exercice 29

On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$, de courbe représentative $(\mathcal{C}_f)$.
Dans chaque cas, déterminer les points d'inflexion éventuels de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ (on vérifiera en traçant la courbe $(\mathcal{C}_f)$ à la calculatrice).

1) $f(x) = x^3 - 3x + 5$

2) $f(x) = e^x - \dfrac{1}{2}x^2$

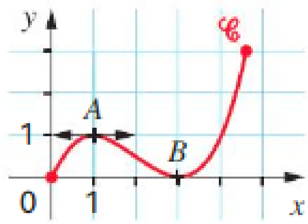
3) $f(x) = (x-1)^3 + 2$

4) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

5) $f(x) = e^{-x^2}$

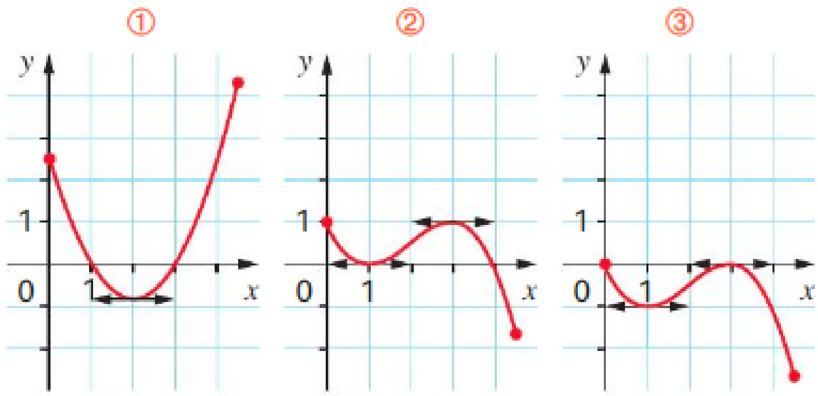
6) $f(x) = x\, e^{-x}$

Exercice 30



On considère une fonction f définie et dérivable sur $[0\ ;\ 4,5]$ et dont on donne la courbe $(\mathcal{C}_f)$ ci-dessus.
La courbe $(\mathcal{C}_f)$ passe par les points $O(0\ ;\ 0)$, $A(1\ ;\ 1)$ et $B(2\ ;\ 0)$.

1) L'une des trois courbes suivantes représente la fonction dérivée f'. Laquelle ?



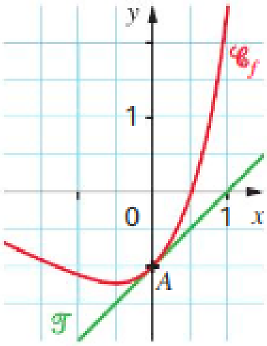
2) On admet que $f(x) = \dfrac{1}{4}x^3 + ax^2 + bx$ pour tout réel x de $[0\ ;\ 4,5]$, où a et b sont des nombres réels.

a) Calculer $f(1)$ et $f(3)$ en fonction de a et b.

b) En déduire les nombres réels a et b.

3) Justifier que la courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet des tangentes parallèles à l'axe des abscisses en A et en B.

Exercice 31



La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (ax + b)e^x$, où a et b sont deux réels, est représentée par la courbe $(\mathcal{C}_f)$ ci-dessus.
La droite $(\mathcal{F})$ est la tangente à $(\mathcal{C}_f)$ au point $A(0\ ;\ -1)$.

1) **a)** Lire graphiquement $f(0)$.
b) En déduire la valeur de b.

2) **a)** Lire graphiquement $f'(0)$.
b) Montrer que pour tout réel x : $f'(x) = (ax + a + b)e^x$.
c) En déduire la valeur de a.

3) Déterminer en quel point :
a) la courbe $(\mathcal{C}_f)$ coupe l'axe des abscisses ;
b) la courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

Exercice 32

La trypsine est une enzyme digestive qui a pour but de digérer les protéines.Son efficacité lors de la digestion dépend du pH x du duodénum, selon la relation $f(x) = 0,37x^3 - 9,35x^2 + 76,51x - 200,95$.
Le pH est compris entre 6 et 9. Ainsi $x \in [6\ ;\ 9]$.

1) Étudier les variations de la fonction f sur $[6\ ;\ 9]$.

2) Quel doit être le pH du duodénum pour que l'action de la trypsine soit la plus efficace possible ?

Exercice 33

Une entreprise s'apprête à lancer sur le marché français un nouveau jouet. On modélise les ventes espérées par la fonction f définie sur $[0\ ;\ 18]$ par $f(x) = 4x\ e^{-0,25x}$ où x est le nombre de jours écoulés depuis le début de la campagne publicitaire et $f(x)$ est le nombre de jouets vendus le x-ième jour, en millier.

1) Montrer que pour tout réel $x \in [0\ ;\ 18]$, $f'(x) = (4 - x)e^{-0,25x}$.

2) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0\ ;\ 18]$, puis dresser le tableau de variations de f sur $[0\ ;\ 18]$.

3) Déterminer le nombre de jours au bout duquel le maximum de ventes par jour est atteint, ainsi que le nombre de jouets vendus, arrondi à l'unité.

Exercice 34

Une entreprise pharmaceutique peut produire entre 200 et $2\,000$ litres d'un soin antipelliculaire par semaine.
Le bénéfice algébrique, en dizaine de milliers d'euros, réalisé pour la production et la vente de x centaine de litres de ce soin est donné par $B(x) = (5x - 30)\, e^{-0,25x}$, où $x \in [2\ ;\ 20]$.

1) Calculer le bénéfice réalisé par la fabrication et la vente de 500 litres de soin (arrondir à l'euro près).

2) **a)** Construire le tableau de signes de B sur $[2\ ;\ 20]$.

b) Quelle quantité de soin l'entreprise doit-elle produire et vendre pour obtenir un bénéfice positif ?

3) **a)** Calculer $B'(x)$, puis construire le tableau de variations de B sur $[2\ ;\ 20]$.

b) Quelle quantité de soin l'entreprise doit-elle produire et vendre pour réaliser le bénéfice maximal ?

Exercice 35

Une entreprise fabrique et vend des pièces métalliques de type « ME70 ». Elle peut construire entre 0 et 800 pièces par mois. Le bénéfice, en millier d'euros, réalisé par la fabrication et la vente de x centaine de pièces est modélisé par la fonction B définie sur $[0\ ;\ 8]$ par $B(x) = (4x^2 + 2x - 2)\, e^{-x}$.

1) Combien de pièces l'entreprise doit-elle fabriquer et vendre pour réaliser des bénéfices ?

2) Combien de pièces l'entreprise doit-elle fabriquer et vendre pour réaliser le bénéfice maximal ?

Exercice 36

Pommes de Terre

de 1 à 5 kg 1€25 le kilo
+ 5 kg 1€10 le kilo
+ 15 kg 0€90 le kilo
+ 50 kg 0€70 le kilo
+ 100 kg 0€55 le kilo

Comme chaque année, Théo fait sa réserve de pommes de terre. À la première pesée, il cumule $44\ kg$. Le responsable de la ferme lui conseille alors de prendre un peu plus de pommes de terre, car il n'est pas loin de $50\ kg$ et le tarif sera moins cher.

1) Le responsable a-t-il raison ?

2) Théo décide d'acheter $52\ kg$ de pommes de terre. Fait-il ainsi des économies ?

Exercice 37

On injecte du glucose à un patient.
On estime que la glycémie, en gramme par litre de sang, au bout de t heures est modélisée par la fonction f définie sur $[0\ ;\ 7]$ par $f(t) = 0,6e^{-0,8t} + 0,84$.

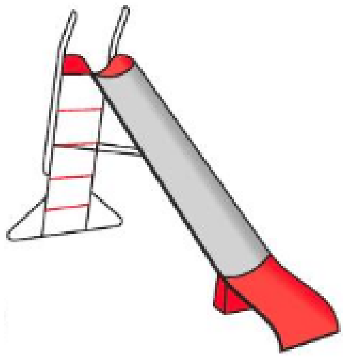
1) Déterminer la glycémie au moment de l'injection.

2) Étudier le sens de variation de f. Interpréter.

3) À l'aide de la calculatrice, déterminer, à $0,1\ h$ près, le temps au bout duquel :

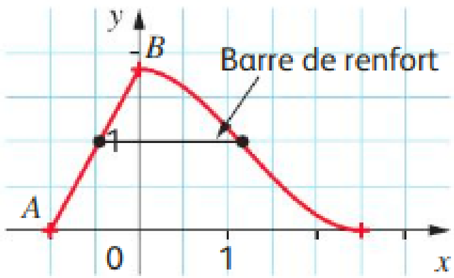
- **a)** la glycémie descend à $1,24$ gramme par litre ;
- **b)** la glycémie aura diminué de $0,5$ gramme par litre.

Exercice 38



Un toboggan est formé d'une échelle oblique et d'une glissière.
Celle-ci suit la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 2,5]$ par $f(x) = 0,2304x^3 - 0,864x^2 + 1,8$.
Les dimensions sont en mètre.

1) Pour des raisons de sécurité, la pente du toboggan doit être horizontale en haut de l'échelle et au niveau du sol. Est-ce le cas ?
2) En quel point du toboggan la pente est-elle la plus forte ?
3) On donne ci-dessous la vue de profil du toboggan (l'échelle est représentée par $[AB]$).Pour consolider ce toboggan, le constructeur souhaite installer une barre de renfort horizontale, à $1\ m$ du sol.Quelle est la longueur de la barre, arrondie au cm ?



Exercice 39

Algo

La population, en dizaine de milliers d'habitants, à l'année $(2015 + x)$, d'une ville nouvelle est modélisée pour les cinq premières années par la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2x^3 + 1}{x^3 + 1}$ pour $x \in [0\ ;\ 5]$.

1) **a)** Étudier les variations de f sur $[0\ ;\ 5]$.

b) Montrer que, pour la période considérée, la population de cette ville atteindra $18\,500$ habitants.

Aide : On pense aux conséquences de la propriété des valeurs intermédiaires.

2) **a)** Exécuter l'algorithme ci-contre.

$x \leftarrow 1$
Tant que $f(x) < 1{,}85$ Faire
  $x \leftarrow x + \dfrac{1}{12}$
Fin Tant que
Afficher x

Aide : On peut remplir un tableau de suivi des variables.

x	1	$1+\dfrac{1}{12}$	$1+\dfrac{2}{12}$	...
$f(x)$	$1{,}5$	$\approx 1{,}56$	...	...
$f(x) < 1{,}85$?	Vrai	Vrai	...	...

b) En déduire la date au cours de laquelle le seuil des $18\,500$ habitants a été atteint.

Exercice 40

Algo

Le taux de satisfaction d'un nouveau produit, en valeur décimale, est modélisé pour l'année $(2020 + x)$, six mois après sa mise sur le marché, par la fonction f définie sur $[0,5\ ;\ 4]$ par $f(x) = \dfrac{3x}{x^2 + 2x + 1}$.

1) **a)** Étudier les variations de f sur $[0,5\ ;\ 4]$.

b) Montrer que, d'après ce modèle, le taux descendra à moins de $50\ \%$ sur la période 2020-2024.

2) **a)** Exécuter l'algorithme ci-dessous.

```
x ← 0,5
Tant que f(x) > 0,5 Faire
    x ← x + 0,5
Fin Tant que
Afficher x
```

b) À partir de quel semestre le taux de satisfaction sera-t-il inférieur à $50\ \%$?

Exercice 41

Un éditeur spécialisé en ouvrages d'art diffuse, sur une année, $22\,000$ livres dont les prix varient de 15 à 75 €.
On estime que les fonctions d'offre f et de demande g sont définies sur $[15\ ;\ 75]$ par $f(x) = 55,8x + 1\,340$ et $g(x) = -0,03x^2 + 5x^2 - 300x + 8\,780$, où x est le prix d'un livre, en euro.

Cela signifie que lorsqu'un livre coûte x euro, l'éditeur est prêt à vendre $f(x)$ livres et les consommateurs sont prêts à acheter $g(x)$ livres.

1) **a)** Calculer $f(30)$ et $g(30)$. Interpréter les valeurs obtenues. L'offre est-elle supérieure à la demande ?

b) Mêmes questions avec $f(50)$ et $g(50)$.

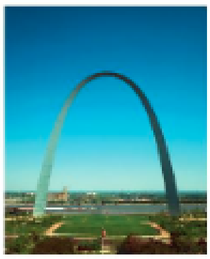
2) Étudier les variations de f sur $[15\ ;\ 75]$. Interpréter.

3) Étudier les variations de g sur $[15\ ;\ 75]$. Interpréter.

4) On appelle prix d'équilibre le prix pour lequel l'offre est égale à la demande.
Après avoir justifié que l'équation admet une unique solution x_0 sur $[15\ ;\ 75]$, déterminer, à l'aide de la calculatrice, une valeur approchée de x_0, arrondie au centime d'euro près.
Quelles sont alors l'offre et la demande ? Arrondir à l'unité.

Exercice 42

Algo



Pour fêter les 50 ans du Gateway Arch de Saint-Louis (USA), le producteur du spectacle souhaite placer de chaque côté des pieds de l'arche un laser dont le faisceau est tangent à l'arche aux points situés à 60 m de l'axe de symétrie.On modélise l'arche par la fonction f définie sur l'intervalle $[-100\ ;\ 100]$ par $f(x) = 212 - 10,5\left(e^{0,033x} + e^{-0,033x}\right)$.

1) **a)** Calculer $f'(x)$ et résoudre l'inéquation $f'(x) > 0$.

b) Construire le tableau de variations de la fonction f.

c) Exécuter l'algorithme ci-dessous.

```
a ← 0
b ← 100
Tant que b − a > 0,01 Faire
    m ← (a + b)/2
    Si f(a) × f(m) > 0 Alors
        a ← m
    Sinon b ← m
    Fin Si
Fin Tant que
Afficher a et b
```

Que représentent les valeurs finales affichées dans le contexte de l'exercice ?

d) Donner l'équation de la tangente à l'arche au point d'abscisse 60.
Arrondir les valeurs à $0,01$ près.

2) En utilisant les résultats précédents, répondre aux questions suivantes.

a) Quelle est la hauteur de l'arche ?

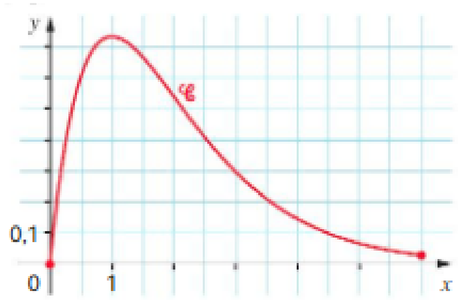
b) Quelle est la largeur au sol de l'arche, à $0,1\ m$ près ?

c) À quelle distance des pieds de l'arche faut-il positionner les lasers ?

Info : Le Gateway Arch, conçu et terminé en 1965 par l'architecte d'origine finlandaise Eero Saarinen, est une « chaînette renversée ». L'arc dont la stabilité est assurée par son propre poids est utilisé dans de nombreuses constructions (Panthéon, dôme de la basilique de Florence...).

Exercice 43

À la suite d'un accident industriel, un gaz se répand dans un local d'usine. On admet qu'au-delà de six minutes il n'y a quasiment plus de gaz dans l'air.On modélise l'évolution du taux de gaz dans l'air grâce à la fonction f définie sur $[0\ ;\ 6]$par $f(x) = 2x\ e^{-x}$ où x est le nombre de minutes écoulées depuis l'accident et $f(x)$ le taux de gaz dans l'air exprimé en partie par million (ppm).
On donne la courbe représentative $(\mathcal{C}_f)$ de la fonction f sur $[0\ ;\ 6]$.



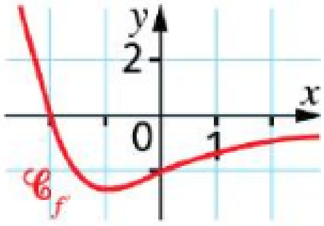
1) Déterminer le tableau complet des variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ 6]$.

2) **a)** Montrer que l'équation $f(x) = 0,65$ admet deux solutions x_1 et x_2 sur $[0\ ;\ 6]$, avec $x_1 < x_2$.

b) À l'aide de la calculatrice, donner une valeur approchée de x_1 et x_2 à $0,1$ minute près.

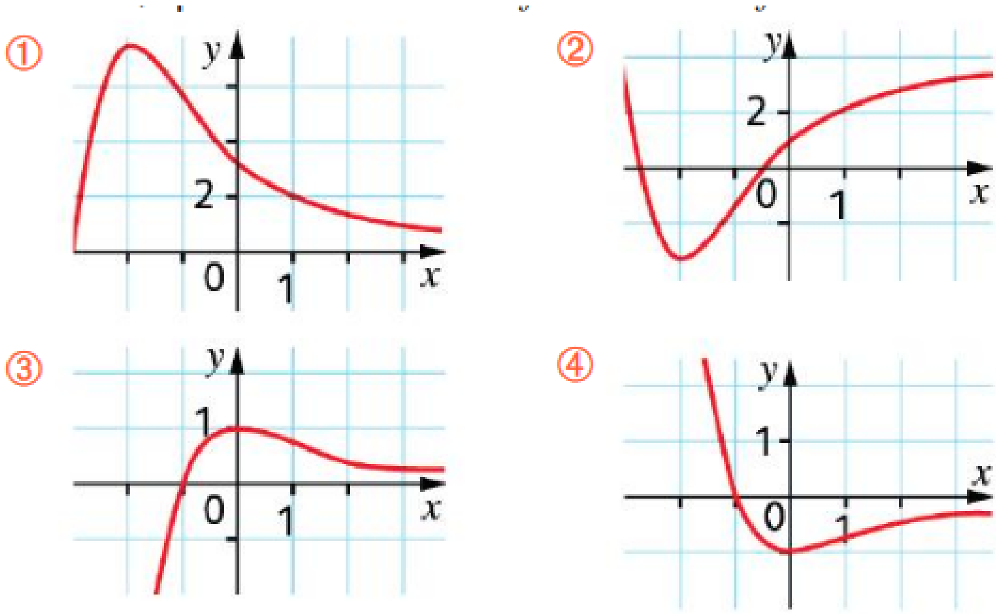
3) On considère que le gaz a un effet irritant pour l'organisme si le taux dépasse $0,65$ ppm pendant plus d'une minute.
Déterminer si le personnel de l'usine a été affecté ou non par la fuite de gaz, en explicitant la démarche.

Exercice 44



Soit une fonction f deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ dont **la représentation graphique de sa fonction dérivée** est donnée ci-dessus.

1) Parmi les représentations suivantes, quelle est celle de f ? Celle de f'' ?



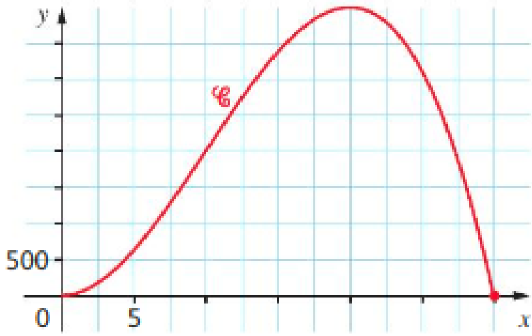
2) Combien la courbe représentant f admet-elle de points d'inflexion ?

Exercice 45

On étudie la propagation d'une maladie dans une ville.

Partie A : Lectures graphiques

La courbe $(\mathcal{C}_f)$ représente le nombre de personnes malades en fonction du temps t, exprimé en jour.



1) Déterminer les jours où il y a $2\,000$ malades.

2) Déterminer le jour où le nombre de malades est maximal. Quel est alors ce maximum ?

3) Proposer un intervalle sur lequel :

- **a)** la progression de la maladie s'accélère ;
- **b)** la progression de la maladie décélère ;
- **c)** la maladie recule.

4) Estimer le jour où la vitesse de propagation de la maladie est la plus grande.

Partie B : Étude théorique

On suppose que le nombre de personnes malades en fonction du temps t, exprimé en jour, peut être modélisé par la fonction f définie sur $[0\ ;\ 30]$ par $f(t) = -t^3 + 30t^2$.

La **vitesse de propagation** de la maladie au jour t est égale au nombre dérivé $f'(t)$.

1) Déterminer le tableau de variations de f.

2)
- **a)** Expliquer pourquoi au 5e jour de l'épidémie, on estime que la maladie progresse au rythme de 225 nouvelles personnes par jour.
- **b)** Estimer la vitesse de propagation de la maladie en nombre de nouvelles personnes malades par jour au 10e jour, puis au 15e jour de l'épidémie.

3)
- **a)** Étudier le sens de variation de la dérivée f'. Mettre en relation avec les résultats de A. 3.
- **b)** Que peut-on dire de la vitesse de propagation de la maladie le 10e jour ?

Exercice 46

Une entreprise fabrique des bouteilles toutes identiques, entre $20\,000$ et $70\,000$ par mois.
Pour une quantité q produite, en millier, on estime que les coûts de production, en millier d'euros, sont $C(q) = 0,005(q-40)^3 + 0,1q + 50$ où $20 \leqslant q \leqslant 70$.

1) **a)** Montrer que la courbe représentative de C admet un point d'inflexion en 40.

b) Étudier la convexité de la fonction C.

2) On rappelle que le **coût marginal** est assimilé à la dérivée du coût total : $C_m(q) = C'(q)$.

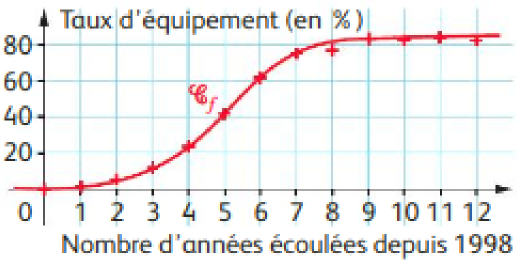
a) Montrer que le coût marginal est minimal en 40.

b) Mettre en relation les variations du coût marginal C_m et la convexité du coût total C.

Exercice 47

On étudie ici l'évolution du taux d'équipement des ménages français en lecteurs de DVD depuis 1998.
Partie A : De 1998 à 2010

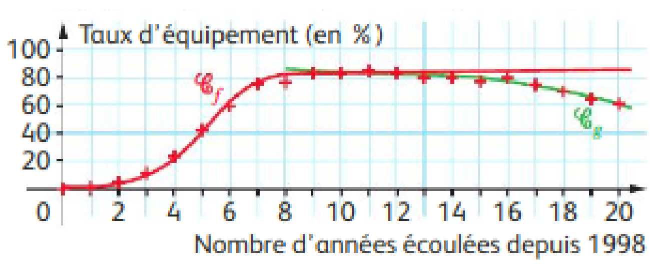
Les valeurs constatées du taux d'équipement amènent à estimer, pour l'année $1998 + x$, pour $0 \leqslant x \leqslant 12$, le taux d'équipement en lecteurs de DVD, en $\%$, par $f(x) = \dfrac{85}{1 + 150e^{-x}}$.



1) Déterminer le sens de variation de f sur $[0\ ;\ 12]$.
2) Le **rythme de croissance (instantané)** du taux d'équipement est assimilé à la dérivée de f.
   a) En utilisant le graphique, estimer en quelle année le rythme de croissance est maximal.
   b) Déterminer algébriquement le point d'inflexion de la courbe représentative de f.
   Mettre en relation avec le résultat de la question 2. a.

Partie B : Depuis 2010

Le graphique suivant représente l'évolution du taux d'équipement des ménages français en lecteurs DVD entre 1998 et 2018. On y a également représenté la fonction g définie sur $[9\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = -0,026x^3 + 0,92x^2 - 11,6x + 133,4$.



1) Expliquer pourquoi la fonction f n'est plus adaptée pour modéliser l'évolution à partir de 2010, contrairement à la fonction g.
2) Préciser le sens de variation de g sur $[9\ ;\ +\infty[$.
3) a) Étudier le sens de variation de g' sur $[9\ ;\ +\infty[$.
   Interpréter dans le contexte de l'exercice.
   b) La courbe $(\mathcal{C}_g)$ admet-elle un point d'inflexion ? Si oui, quelle est son abscisse ?
4) Selon le modèle, en quelle année plus aucun ménage français ne devrait posséder de lecteur DVD ?

Exercice 48

Exercice 49

Exercice 50