Exercice 1

Vrai ou faux ?

f est une fonction continue et positive sur $\mathbb{R}$, indiquer si les propositions suivantes sont vraies ou fausses.

1) $\displaystyle\int_{-2}^{5} f(x)dx + \int_{5}^{9} f(x)dx = \int_{-2}^{9} f(x)dx.$

2) Si f est paire, alors $\displaystyle\int_{-4}^{8} f(x)dx = 2\int_{0}^{6} f(x)dx.$

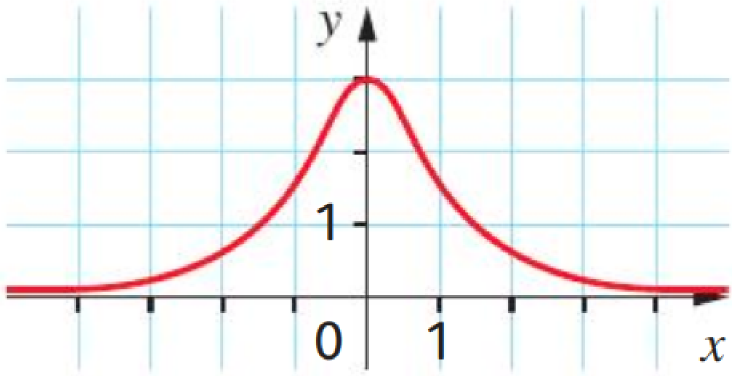
3) La valeur moyenne de f sur $[3\ ;\ 7]$ est $\displaystyle\frac{1}{10}\int_{3}^{10} f(x)dx.$

4) $\displaystyle\int_{0}^{2} [f(x) + 2x]\, dx = 4 + \int_{0}^{2} f(x)dx.$

Exercice 2

Vrai ou faux ?

Répondre aux questions suivantes par vrai ou par faux à l'aide du graphique.



1) $\displaystyle\int_{-3}^{0} f(x)dx = \int_{0}^{3} f(x)dx.$

2) $\displaystyle\int_{0}^{1} f(x)dx = \int_{1}^{3} f(x)dx.$

3) $\displaystyle 1 \leqslant \int_{1}^{2} f(x)dx \leqslant 2.$

4) La valeur moyenne de f sur $[-2 ; 2]$ est 1.

Exercice 3

Soient f et g deux fonctions telles que : $\displaystyle\int_{-1}^{3} f(x)dx = 5$ et $\displaystyle\int_{-1}^{3} g(x)dx = 2$.

1) Calculer :

a) $I = \displaystyle\int_{-1}^{3} [f(x) + g(x)]\, dx$

b) $J = \displaystyle\int_{-1}^{3} [f(x) - g(x)]\, dx$

2) Existe-t-il deux réels α et β tels que :
$\displaystyle\int_{-1}^{3} [\alpha f(x) + \beta g(x)]\, dx = 10$?

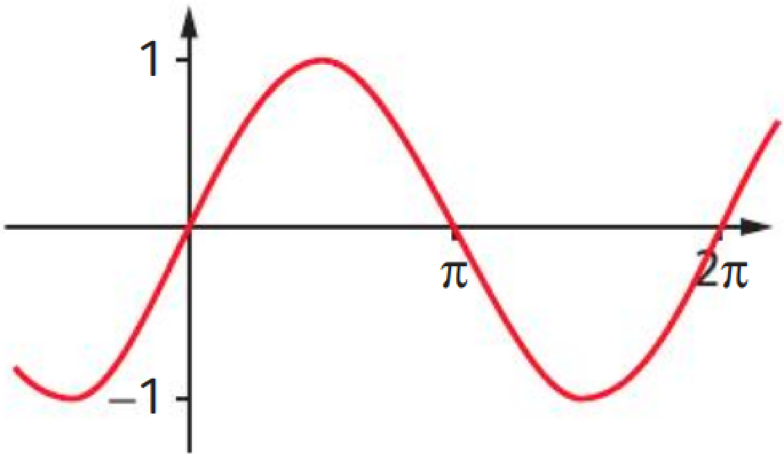
Exercice 4

Déterminer la dérivée de la fonction f définie sur I.

1) $f(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2} dt$ avec $I = [0 \ ; \ +\infty[$.

2) $f(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t^2} dt$ avec $I = [1 \ ; \ +\infty[$.

Exercice 5



Le graphique représente la fonction sinus. En admettant que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)dx = 1$, calculer les intégrales suivantes.

1) $I = \int_0^{\pi} \sin(x)dx$

2) $J = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)dx$

3) $K = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} \sin(x)dx$

Exercice 6

Vrai ou faux ?

On suppose que l'unité correspond à $2\ cm$ sur l'axe des abscisses et à $1\ cm$ sur l'axe des ordonnées. Dire si les affirmations sont vraies ou fausses.

1) L'aire du domaine 1 vaut $10\ cm^2$.

2) L'aire du domaine 1 vaut 10 carreaux.

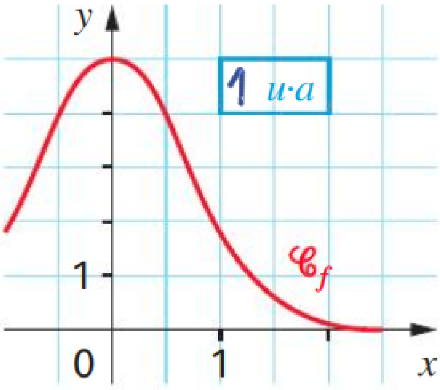
3) L'aire du domaine 2 vaut plus de $28\ cm^2$.

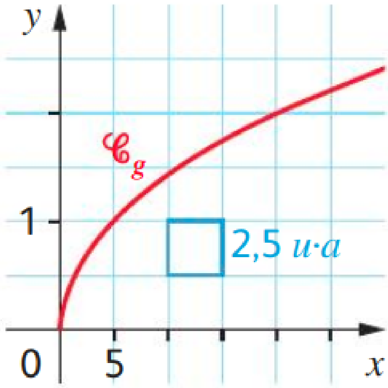
4) L'aire du domaine 3 est supérieure à celle du domaine 2.

5) L'aire du domaine 3 est comprise en $36\ cm^2$ et $48\ cm^2$.

Exercice 7

Estimer l'aire des domaines au demi carreau près, puis en unité d'aire, à l'unité près.



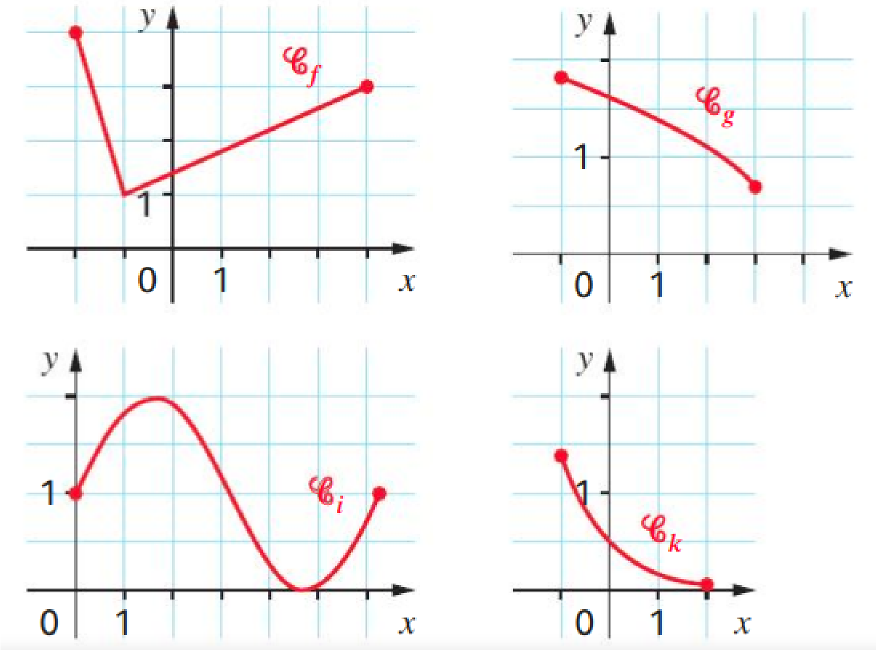


1) Le domaine 1 est compris entre l'axe des abscisses, la courbe $(\mathcal{C}_f)$, les droites d'équation $x = -0,5$ et $x = 1$.

2) Le domaine 2 est compris entre l'axe des abscisses, la courbe $(\mathcal{C}_g)$, les droites d'équation $x = 5$ et $x = 20$.

Exercice 8

Pour chacune des représentations, à l'aide d'une lecture graphique, estimer la valeur moyenne de la fonction sur l'intervalle sur lequel elle est représentée.



Exercice 9

Calculer les intégrales.

1) $I = \displaystyle\int_3^7 \left[x^2 + 2x - 9\right] dx$

2) $J = \displaystyle\int_{-4}^{-1} \left[x + \frac{1}{x}\right] dx$

Exercice 10

Calculer les intégrales.

1) $I = \displaystyle\int_{-2}^{2} \left[x^3 + x\right] dx$

2) $J = \displaystyle\int_{1}^{4} \left[\frac{1}{2\sqrt{t}} - \frac{1}{t^2}\right] dt$

Exercice 11

Calculer les intégrales.

1) $I = \displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{1}{x+2}dx$

2) $J = \displaystyle\int_{0}^{4} \frac{2t}{\sqrt{t^2+3}}dt$

Exercice 12

Calculer les intégrales.

1) $I = \displaystyle\int_0^4 \frac{2x}{(x^2+3)^2}dx$

2) $J = \displaystyle\int_{-1}^1 e^{2t-1}dt$

Exercice 13

Calculer les intégrales.

1) $I = \displaystyle\int_1^3 \frac{\ln x}{x} dx$

2) $J = \displaystyle\int_{-2}^5 4t\left(2t^2+3\right)^2 dt$

Exercice 14

Calculer les intégrales.

1) $I = \displaystyle\int_{-2}^{4} (3x-1)\, e^{1,5x^2-x+3} dx$

2) $J = \displaystyle\int_{1}^{2} \left(-3t^2+4t\right)\left(-t^3+2t^2+1\right) dt$

Exercice 15

Calculer les intégrales.

1) $I = \displaystyle\int_{-4}^{0} \frac{2x-5}{x^2-5x+3}dx$

2) $J = \displaystyle\int_{-5}^{-4} \frac{2}{(2t+7)^2}dt$

Exercice 16

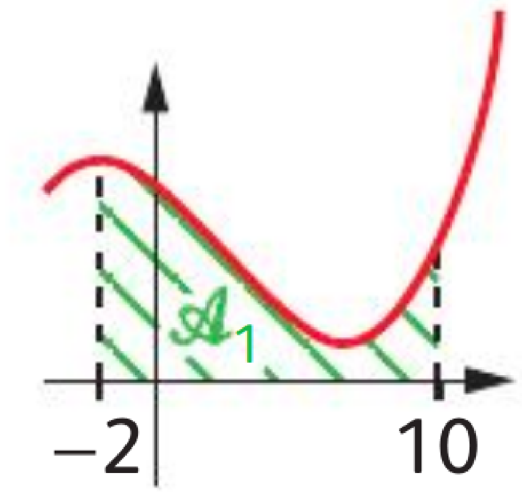
Calculer les intégrales.

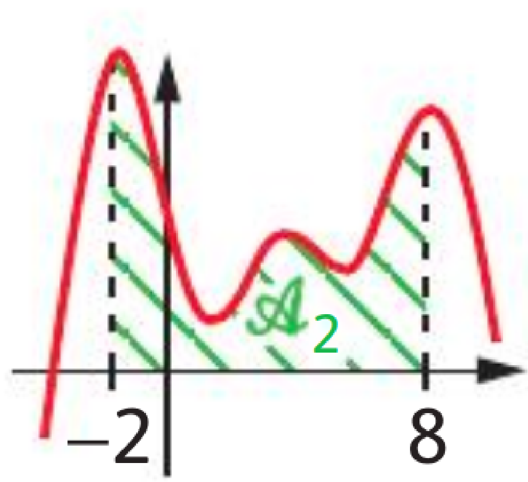
1) $I = \displaystyle\int_1^3 \frac{7-6x}{\sqrt{9+7x-3x^2}}dx$

2) $J = \displaystyle\int_{e^{-1}}^{e} \frac{(\ln t)^2}{t}dt$

Exercice 17

Exprimer l'aire hachurée sous forme d'intégrale, puis en déduire la valeur moyenne de la fonction sur I.



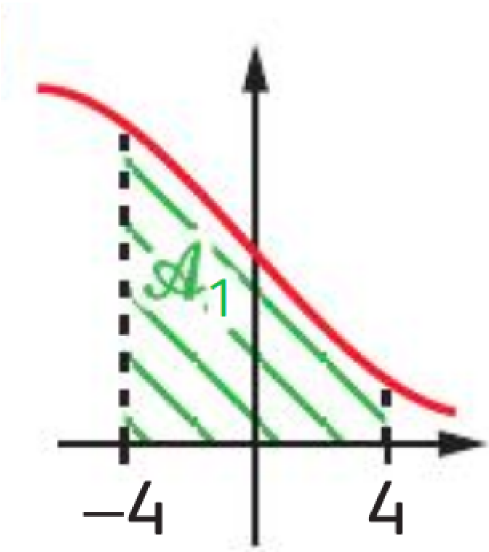


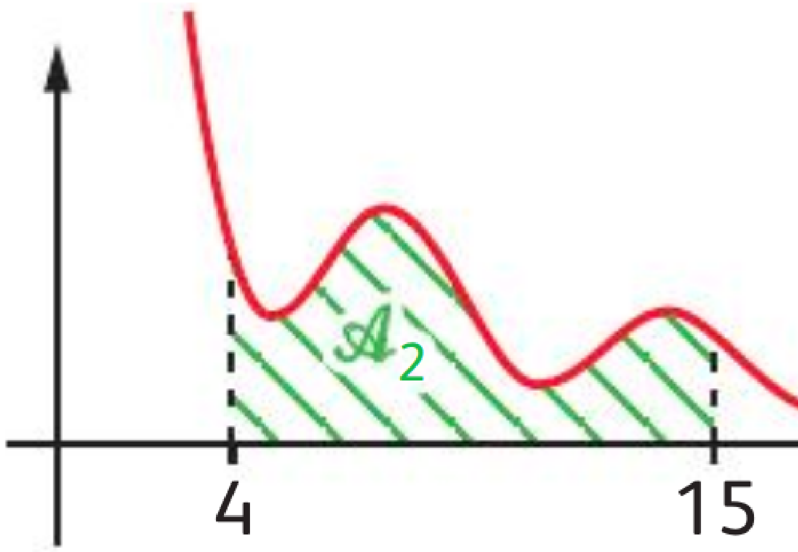
1) $\mathcal{A}_1 = 48\ u.a.$

2) $\mathcal{A}_2 = 45\ u.a.$

Exercice 18

Exprimer l'aire hachurée sous forme d'intégrale, puis en déduire la valeur moyenne de la fonction sur I.





1) $\mathcal{A}_1 = 4\ u.a.$

2) $\mathcal{A}_2 = 2,5\ u.a.$

Exercice 19

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{1+e^x}$ et $I = \displaystyle\int_{-3}^{3} f(x)dx$.

1) Donner une valeur approchée de I à l'aide de la calculatrice.

2) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad f(x) = 1 - \dfrac{e^x}{1+e^x}$.

3) Calculer la valeur exacte de I.

4) En déduire la valeur moyenne de f sur $[-3\ ;\ 3]$.

Exercice 20

Soit l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{t^2}{t+2} dt$.

1) Déterminer une valeur approchée de I à l'aide de la calculatrice.

2) Montrer que, pour tout $t \in [0\ ;\ 1]$, $f(t) = \frac{t^2}{t+2} = t - 2 + \frac{4}{t+2}$.

3) Calculer la valeur exacte de I.

4) En déduire la valeur moyenne de f sur $[0\ ;\ 1]$.

Exercice 21

Soit la fonction f définie sur $[0\ ;\ 1]$ par $f(x) = \dfrac{x-2}{(2x+3)^2}$.

1) Déterminer les réels a et b tels que $f(x) = \dfrac{a}{(2x+3)^2} + \dfrac{b}{2x+3}$.

2) Déterminer le signe de $(2x+3)$ sur $[0\ ;\ 1]$, puis en déduire $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)dx$.

Exercice 22

Soient les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ et $g(x) = \dfrac{x^3}{1+x^2}$.

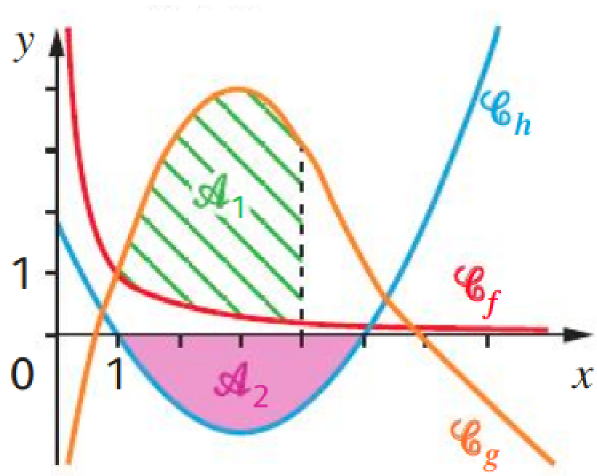
1) Calculer $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)dx$.

2) Soit $J = \displaystyle\int_0^1 g(x)dx$.

- **a)** Calculer $I + J$.
- **b)** En déduire la valeur de J.

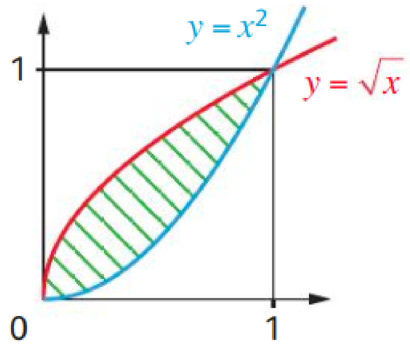
Exercice 23

Les courbes $(\mathcal{C}_1)$, $(\mathcal{C}_2)$ et $(\mathcal{C}_3)$ représentent les fonctions f, g et h sur $]0\ ;\ +\infty[$ dans un repère orthonormé d'unité graphique $1\ cm$.
On a $f(x) = \dfrac{1}{x}$ et $h(x) = \dfrac{3}{8}(x-1)(x-5)$. On ne donne pas l'expression de $g(x)$ en fonction de x.



1) Calculer l'aire du domaine défini par $(\mathcal{C}_f)$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 4$.
2) Exprimer les aires $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ à l'aide d'intégrales.
3) Vérifier (en justifiant) que $\mathcal{A}_2 = 4\ cm^2$.
4) Sachant que, pour tout $x \in [1\ ;\ 3]$, $1 \leqslant g(x) \leqslant 3$, et que, sur $[3\ ;\ 4]$, $3 \leqslant g(x) \leqslant 4$; montrer que : $5 \leqslant \displaystyle\int_1^4 g(x)dx \leqslant 12$.
5) En déduire un encadrement de $\mathcal{A}_1$.

Exercice 24



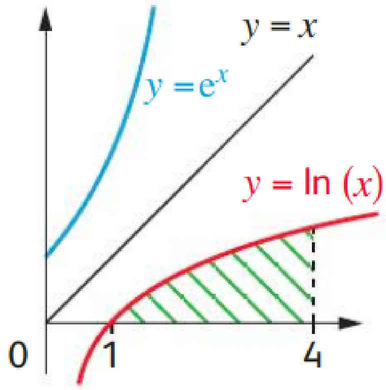
1) Calculer l'aire du domaine délimité par la courbe de la fonction $x \longmapsto x^2$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

2) À l'aide de considérations géométriques, donner la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \left(1 - \sqrt{x}\right) dx$.

3) En déduire l'aire du domaine délimité par les courbes des fonctions $x \longmapsto x^2$ et $x \longmapsto \sqrt{x}$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

NB : se servir de la symétrie des courbes des fonctions réciproques.

Exercice 25



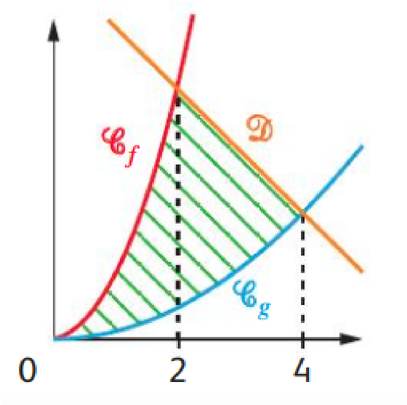
1) Écrire l'aire du domaine défini par la courbe de la fonction $\ln$, l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = 1$ et $x = 4$ sous forme d'intégrale.

2) Pourquoi le calcul de l'intégrale est-il impossible avec les connaissances actuelles ?

3) À l'aide du graphique, trouver une méthode pour calculer l'aire du domaine.

NB : se servir de la symétrie des courbes des fonctions réciproques.

Exercice 26



Soient et les courbes représentatives des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ et $g(x) = \dfrac{x^2}{8}$.
La droite $\mathcal{D}$ a pour équation $y = 6 - x$.
Les informations sont données sur le graphique, l'unité est le centimètre.

Montrer que l'aire du domaine hachuré est $6\ cm^2$.

Exercice 27

En remarquant que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^3 = x + 3 + 2x - 2x$, calculer $I = \displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} \frac{x^3}{x^2 + 2} dx$.

Exercice 28

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ par $f(t) = (1+t)\sqrt{1+t}$.

1) Calculer $f'(t)$.

2) En déduire $I = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+t}\, dt$.

3) En admettant que $J = \displaystyle\int_0^1 t\sqrt{1+t}\, dt = \frac{4}{15}\left(1+\sqrt{2}\right)$, en déduire $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt$.

Exercice 29

Soit la fonction I définie sur $[0\,;\,+\infty[$ pour tout $\lambda > 0$ par $I(x) = \displaystyle\int_0^x \lambda\, e^{-\lambda t} dt$.

1) Calculer $I(x)$.

2) Calculer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} I(x)$. Interpréter graphiquement.

Exercice 30

Propriété : La longueur de la courbe représentant la fonction f sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$ se calcule à l'aide de la formule $L = \displaystyle\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$ où f' est la dérivée de la fonction f.

Une chaînette est la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

1) Donner l'expression de $f'(x)$, la dérivée de la fonction f.

2) Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ est telle que
$g(x) = 1 + (f'(x))^2 = \dfrac{1}{4}\left(e^x + e^{-x}\right)^2$

3) Déterminer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, le signe de $(e^x + e^{-x})$.

4) Justifier que la longueur L de la chaînette entre -4 et 4 est donnée par $L = \displaystyle\int_0^4 \left(e^x + e^{-x}\right) dx$.

5) En déduire la valeur exacte de L, puis une valeur approchée à 10^{-2}.

Info : La chaînette est la forme prise par un fil pesant flexible infiniment mince, homogène, inextensible, suspendu entre deux points, dans un champ de pesanteur uniforme.

Exercice 31

Propriété : La longueur de la courbe représentant la fonction f sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$ se calcule à l'aide de la formule $L = \displaystyle\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$ où f' est la dérivée de la fonction f.

1) Montrer que la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = \dfrac{1}{2}\left[x\sqrt{1+x^2} - \ln\left(-x + \sqrt{1+x^2}\right)\right]$ est une primitive de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \sqrt{1+x^2}$.

2) En déduire la longueur exacte de l'arc de parabole défini par la fonction $f \longmapsto \dfrac{1}{2}x^2$ sur $[0\ ;\ 1]$, puis une valeur approchée à 10^{-2} de cette longueur.

Exercice 32

Soit la fonction f définie sur $[0\ ;\ 4]$ par $f(x) = x^2\ e^{-x}$.

1) Étudier les variations de f sur $[0\ ;\ 4]$, en déduire que le maximum de f sur $[0\ ;\ 4]$ est $4e^{-2}$.

2) Justifier que $0 \leqslant \int_0^4 f(x)dx \leqslant 16e^{-2}$.

3) Déterminer une primitive F de f telle que $F(x) = (ax^2 + bx + c)\ e^{-x}$, avec a, b et c trois réels à déterminer.

4) En déduire la valeur exacte de $\int_0^4 f(x)dx$.

Exercice 33

On pose $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{e^x+1}dx$ et $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}dx$.

1) Calculer $I + J$.

2) Calculer J.

3) En déduire I.

Exercice 34

On pose $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{2e^u + 1}{e^u + 1} du$ et $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{e^u + 1} du$.

1) Calculer $I + J$.

2) Calculer $I - J$.

3) En déduire I et J.

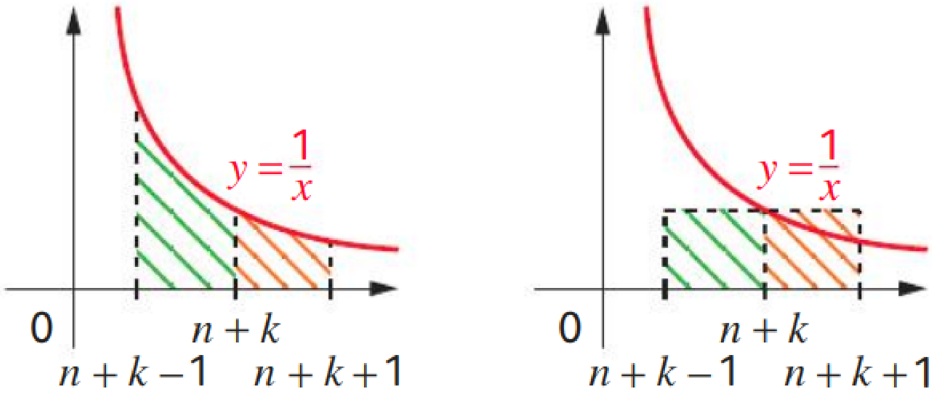
Exercice 35

Limite d'une suite

L'objectif de cet exercice est de déterminer si la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par $u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$ a une limite finie, et si oui, de déterminer cette limite.

1) Écrire u_n en utilisant la notation $\sum$.

2) À l'aide de considérations géométriques, en déterminant les aires représentées sur chacun des graphiques, justifier que, pour $n \geqslant 1$ et $k \geqslant 0$:
$\displaystyle\int_{n+k-1}^{n+k} \frac{1}{x} dx \geqslant \frac{1}{n+k} \geqslant \int_{n+k}^{n+k+1} \frac{1}{x} dx.$



3) Montrer que $\displaystyle\int_{n}^{2n} \frac{1}{x} dx \geqslant u_n \geqslant \int_{n+1}^{2n+1} \frac{1}{x} dx$.

4) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice 36

1) Soit f une fonction paire définie sur $\mathbb{R}$.

a) À partir d'une propriété géométrique de la courbe d'une fonction paire, déterminer, pour tout $a > 0$, une relation entre $\displaystyle\int_{-a}^{0} f(x)dx$ et $\displaystyle\int_{0}^{a} f(x)dx$.

b) Soit $a > 0$, montrer que $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$.

2) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2\left(e^x + e^{-x}\right)$.

a) Démontrer que f est paire.

b) En admettant que $\displaystyle\int_{0}^{1} f(x)dx = e - 5e^{-1}$, calculer $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)dx$.

Exercice 37

Soit f la fonction de période 4 définie sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout x appartenant à $[0\ ;\ 4[$,

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \in [0\ ;\ 2[\\ \dfrac{(x-4)^2}{2} & \text{si} \quad x \in [2\ ;\ 4[\end{cases}$$

1) Calculer :

a) $\lim\limits_{\substack{x\to 2 \\ x<2}} f(x)$ et $f(2)$;

b) $\lim\limits_{\substack{x\to 4 \\ x<4}} f(x)$ et $f(0)$.

Interpréter graphiquement les résultats.

2) Tracer la courbe représentative de f sur $[-8\ ;\ 8]$.

3) Calculer $\displaystyle\int_0^2 f(x)dx$ et $\displaystyle\int_0^4 f(x)dx$.

4) En déduire $\displaystyle\int_0^8 f(x)dx$ et $\displaystyle\int_{-4}^4 f(x)dx$.

Exercice 38

Soit f la fonction de période 2π définie sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout t appartenant à $[0\ ;\ 2\pi[$,

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{si} \quad t \in [0\ ;\ \pi[\\ 2\pi - t & \text{si} \quad t \in [\pi\ ;\ 2\pi[\end{cases}$$

1) Calculer :

a) $\lim\limits_{\substack{t \to \pi \\ x < \pi}} f(t)$ et $f(\pi)$;

b) $\lim\limits_{\substack{t \to 2\pi \\ x < 2\pi}} f(t)$ et $f(0)$.

Interpréter graphiquement les résultats.

2) Tracer la courbe représentative de f sur $[-4\pi\ ;\ 4\pi]$.

3) Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)dt$ et $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)dt$.

4) En déduire $\displaystyle\int_{-2\pi}^{2\pi} f(t)dt$ et $\displaystyle\int_{-4\pi}^{3\pi} f(t)dt$.

Exercice 39

Soit f une fonction continue sur un intervalle I ; a et b sont deux réels de I.

1) On suppose f positive sur I. Donner le signe de $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ dans le cas où :

- **a)** $a \leqslant b$
- **b)** $a \geqslant b$

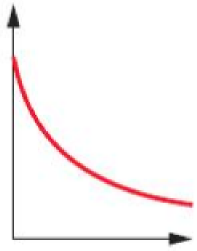
2) Reprendre la question précédente avec f négative sur I.

3) Donner le signe des intégrales suivantes sans les calculer.

- **a)** $I_1 = \displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{1}{x-3}dx$
- **b)** $I_2 = \displaystyle\int_{2}^{-3} (2x+1)^2 dx$
- **c)** $I_3 = \displaystyle\int_{e}^{e+1} \frac{1}{t^2+1}dt$
- **d)** $I_4 = \displaystyle\int_{e^{-1}}^{1} \ln(t)dt$

Exercice 40

Samu-L, célèbre artiste de Street Art, vient d'être engagé par l'Union Européenne pour peindre une œuvre célébrant la chute du mur de Berlin. Il doit peindre une fresque sur un mur dont la forme est donnée par le schéma ci-dessous : la hauteur initiale est $19,61$ mètres et la fonction symbolisant le profil du mur doit être une des trois proposées.



- $f(t) = \dfrac{19,61}{1+t}$
- $g(t) = 19,61\left(\dfrac{1}{1+t}\right)^2$
- $h(t) = \dfrac{19,61}{\sqrt{t}}$

1) Pour chaque projet, déterminer la surface à peindre en mètre carré si la longueur au sol est de $19,89$ mètres.

2) Afin de pousser le symbolisme, Samu-L imagine peindre un mur dont la longueur au sol est infinie ! Déterminer la quantité de peinture nécessaire pour chaque projet.

Exercice 41

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 + 1)\, e^{2-x}$.

On note $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal (d'unité $1\ cm$) et (Δ) la droite d'équation $y = \dfrac{5}{2}x$.

On note $\mathcal{A}$ l'aire (exprimée en unité d'aire) du domaine limité par la courbe $(\mathcal{C}_f)$, la droite (Δ) et l'axe des ordonnées.
On note O et P les points de coordonnées respectives $O(0\ ;\ 0)$ et $P(0\ ;\ 5)$.

1) **a)** Représenter la courbe dans un repère et compléter le graphique au fur et à mesure des questions.

b) Calculer les coordonnées du point R, intersection de $(\mathcal{C}_f)$ et de l'axe des ordonnées.

c) Vérifier que le point Q de coordonnées $Q(2\ ;\ 5)$ est le point d'intersection de $(\mathcal{C}_f)$ et (Δ).

d) Calculer les aires des triangles OPQ et OQR, en déduire un encadrement de $\mathcal{A}$.

2) Soit G la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = -(x^2 + 2x + 3)\, e^{2-x}$.

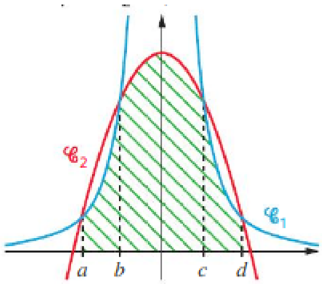
a) Calculer $G'(x)$, la dérivée de G.

b) En déduire une primitive de la fonction f .

c) Écrire $\mathcal{A}$ sous forme d'une intégrale, puis calculer sa valeur exacte.

Exercice 42

Le domaine de la figure est délimité par l'axe des abscisses et les courbes $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$ représentant les fonctions $f :\longmapsto 5 - x^2$ et $g :\longmapsto \dfrac{4}{x^2}$.



1) **a)** Reproduire la figure à l'aide d'un logiciel.

b) Identifier la fonc-tion associée à chacune des courbes $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$.

c) Lire les abscisses des points d'intersection des deux courbes.

2) Retrouver ces abscisses par le calcul.

Aide : On pourra poser et résoudre ainsi une équation du second degré en X.

3) Déterminer les abscisses des points d'intersection de la parabole avec l'axe des abscisses.

4) À l'aide de considérations géométriques, justifier que l'aire cherchée est le nombre :
$\mathcal{A} = 2\left(\displaystyle\int_0^1 (5-x^2)dx + \int_1^2 \frac{4}{x^2}dx + \int_2^{\sqrt{5}} (5-x^2)dx\right)$.

5) Calculer la valeur exacte de $\mathcal{A}$.

Exercice 43

Python : Méthode des rectangles

Louna cherche à calculer l'aire $\mathcal{D}_a$ du domaine délimité par $\mathcal{G}_a$, la courbe de la fonction g_a, l'axe des abscisses et les droites d'équation $a = -a$ et $x = a$.
La fonction g_a est définie sur $\mathbb{R}$ par $g_a(x) = \frac{1}{a}e^{-\left(\frac{x}{a}\right)^2}$ avec $a > 0$.
Comme elle n'arrive pas à trouver de primitive de la fonction g_a, elle décide d'approximer l'aire à l'aide de la méthode des rectangles qu'elle code dans un programme écrit en Python.

1) Démontrer que la fonction g_a est paire.

2) Calculer la dérivée de g_a, en déduire le tableau de variations de la fonction g_a.

3) Justifier que :

- **a)** pour limiter les calculs, Louna peut restreindre son programme au calcul du domaine délimité par $\mathcal{G}_a$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -0$ et $x = a$;
- **b)** on a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a}{n} g_a\left(\frac{a}{n} \times k\right) \geqslant \int_0^a g_a(x)dx \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{a}{n} g_a\left(\frac{a}{n} \times k\right)$.

4) **image** est la liste des images de la fonction g_a pour les valeurs de k de l'intervalle $[\![0 ; n+1[\![$.
Expliquer et compléter les lignes définissant **rect_sup** et **rect_inf**.
Expliquer dans la commande **print** la présence du facteur 2, puis compléter la ligne.

```
from math import exp

def g_a(x):
    return 1/a * exp(-(x/a)**2)

a, n = 1, 1000
image = [g_a(a/n * k) for k in range(n+1)]
rect_sup = a/n * sum(image[])
rect_inf = 
print(2*rect_inf," <= aire <= ", )
```

5) À l'aide du programme, donner un encadrement au millième de l'aire du domaine $\mathcal{D}_a$ quand $a = 1$.

6)
- **a)** Louna teste ensuite son programme avec différentes valeurs de a. Que constate-t-elle ?
- **b)** À l'aide d'un logiciel, représenter les courbes pour les différentes valeurs de a testées précédemment et donner une interprétation des résultats obtenus.

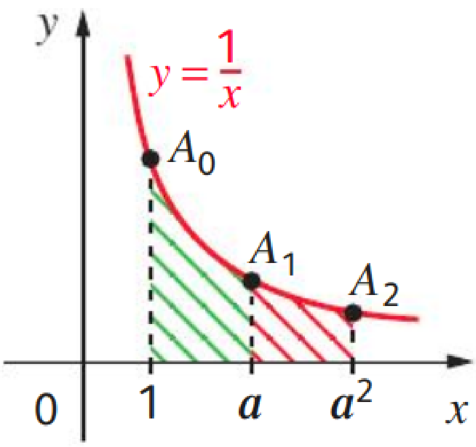
Exercice 44

Grégoire de Saint-Vincent

En 1647, Grégoire de Saint-Vincent publie Opus geometricum : $1\,230$ pages, dix grands chapitres, dont le chapitre 6, De Hyperbola.
Sa proposition CIX peut s'énoncer :

« Si les abscisses des points A_n de l'hyperbole sont en progression géométrique, alors les aires des domaines délimités par l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = a^n$ et $x = a^{n-1}$ et l'hyperbole sont égales. »

Suit une démonstration géométrique assez compliquée : le calcul intégral n'existant pas à cette époque !



1) Soit a un réel strictement supérieur à 1 et (I_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $I_n = \displaystyle\int_{a^{n-1}}^{a^n} \frac{dx}{x}$.

- **a)** Exprimer I_1 et I_2 en fonction de a.
- **b)** Exprimer I_n en fonction de a.
- **c)** Interpréter ces résultats dans le contexte de l'énoncé.

2) Soit $(\mathcal{A}_n)$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $\mathcal{A}_n = \displaystyle\int_{1}^{a^n} \frac{dx}{x}$.

- **a)** Déterminer la nature de cette suite.
- **b)** En déduire une autre formulation possible de la proposition CIX :

  « Si les abscisses des points A_n sont en progression ..., alors les aires des domaines délimités par les droites d'équation $x = 1$, $x = a^n$, l'axe des abscisses et l'hyperbole sont en progression ...»

Exercice 45

Exercice 46

Exercice 47

Exercice 48

Exercice 49

Exercice 50