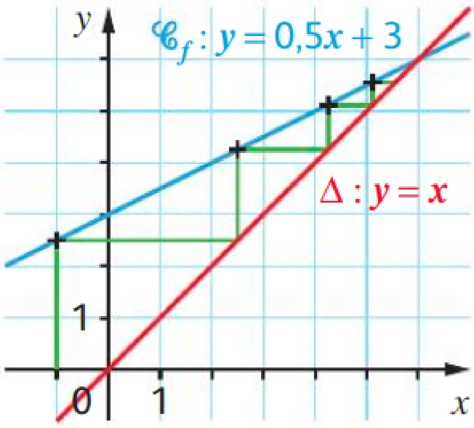
Exercice 1



On a tracé ci-dessus dans un repère orthonormé la courbe représentative d'une fonction f et la droite d'équation $y = x$.
On a représenté les quatre premiers termes de la suite (u_n), définie par son premier terme u_0 et, pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = f(u_n)$.

1) Donner la valeur de u_0 et lire des valeurs approchées de u_1, u_2 et u_3.

2) Conjecturer le sens de variation et la limite de la suite (u_n).

3) Pour n entier naturel, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. Calculer u_1, u_2 et u_3.

Exercice 2

La suite (u_n) est définie par son premier terme u_0 et, pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 1$.

Dans chacun des cas suivants, représenter graphiquement sur l'axe des abscisses les cinq premiers termes de la suite , puis conjecturer son sens de variation ainsi que la valeur de sa limite.

1) $u_0 = 10$

2) $u_0 = -4$

Exercice 3

Les suites (u_n) et (v_n) sont définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 200 \\ u_{n+1} = 1,03u_n \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = -150 \\ v_{n+1} = v_n - 0,05v_n \end{cases}$$

Pour n entier naturel, exprimer u_n et v_n en fonction de n et déterminer les limites des suites (u_n) et (v_n).

Exercice 4

Les suites (u_n) et (v_n) sont définies sur $\mathbb{N}$ par :

$u_n = n^2 + 3n - 1$ et $v_n = 2 - \dfrac{3}{n}$.

Déterminer les limites des suites (u_n) et (v_n).

Exercice 5

Les suites (u_n) et (v_n) sont définies sur $\mathbb{N}$ par :

$u_n = n(1-2n)$ et $v_n = n + \dfrac{2}{n^2+1}$.

Déterminer les limites des suites (u_n) et (v_n).

Exercice 6

Les suites (u_n) et (v_n) sont définies sur $\mathbb{N}$ par :

$u_n = 5 - 3n^2 - \sqrt{n}$ et $v_n = 1 - 2 \times 0,7^n$.

Déterminer les limites des suites (u_n) et (v_n).

Exercice 7

Soit q un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ 1[$.
Pour n entier naturel, on pose : $S_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n$.

1) Donner l'expression de S_n en fonction de q et de n.

2) En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \dfrac{1}{1-q}$.

3) Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q. On pose $T_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.
Déterminer la limite de (u_n) en fonction de q et de u_0.

Exercice 8

Pour chaque situation ci-dessous, indiquer si elle peut être modélisée par une suite arithmétique ou géométrique, en précisant la raison dans chaque cas.

1) Le loyer de Mathilde augmente de 50 euros à chaque fin d'année.

2) Thomas a placé $2\,000$ euros sur un compte épargne rémunéré à 1 % d'intérêts composés pendant 10 ans.

3) Lors d'une première démarque, le prix d'un short a baissé de 20 %, puis de 30 % lors d'une deuxième démarque.

4) Tous les ans, une ville perd $\dfrac{1}{10}$ de sa population.

Exercice 9

Pour chacune des suites (u_n) suivantes, définies sur $\mathbb{N}$, exprimer u_n en fonction de n.

1) (u_n) est la suite des carrés des entiers impairs rangés dans l'ordre croissant.

2) (u_n) est la suite des multiples de 3 rangés dans l'ordre croissant.

3) (u_n) est la suite des inverses des puissances de 2 rangées dans l'ordre croissant.

Exercice 10

On souhaite modéliser les deux situations suivantes.
Situation 1 : un établissement scolaire voit partir chaque année 30 % de ses élèves et enregistre l'arrivée de 350 nouveaux élèves. En 2020, il y avait $1\,000$ élèves.
Situation 2 : un capital de $1\,000$ euros est placé à intérêts composés au taux annuel de 3 %. Chaque année, on retire 50 euros après avoir touché les intérêts.
On note (u_n) et (v_n) les suites modélisant ces situations.

1) Associer chaque situation à la bonne suite sachant que $u_1 = 980$ et $v_1 = 1\,050$.

2) Déterminer l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n puis celle de v_{n+1} en fonction de v_n.

3) **a)** Calculer le nombre d'élèves dans le lycée en 2022.

b) Calculer le capital placé au bout de 4 ans.

Exercice 11

Dans chacun des cas suivants, rédiger l'énoncé d'une situation concrète qui pourrait être modélisée par la suite (u_n).

1) La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1\,200$, et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 1,03u_n$.

2) La suite (u_n) est définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = 1\,200 + 150n$.

3) La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1\,200$, et, pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = 1,03u_n + 150$.

Exercice 12

Python

On souhaite stériliser une boîte de conserve. Pour cela, on la prend à la température ambiante $T_0 = 25°C$ et on la place dans un four à température constante $T_F = 100°C$.
La stérilisation débute dès que la température de la boîte est supérieure à $85°C$. On modélise la température de la boîte, en degré Celsius, par une suite (T_n).

L'algorithme ci-dessous permet d'afficher la température T_n au bout de n minutes.

```
T ← 25
Pour k allant de 1 à n Faire
    T ← 0,85×T +15
Fin Pour
Retourner T
```

1) Pour n entier naturel, exprimer T_{n+1} en fonction de T_n.

2) Programmer et exécuter l'algorithme en Python pour diverses valeurs de n.
Au bout de combien de minutes la stérilisation débute-t-elle ?

Exercice 13

Deux récipients A et B sont séparés par une membrane perméable dans les deux sens. On place dans les récipients A et B deux solutions contenant respectivement 150 molécules et 20 molécules.
On suppose que toutes les heures, 20 % des molécules passent de A dans B et 10 % passent de B dans A.
Pour tout entier naturel n, on note a_n et b_n les effectifs respectifs de molécules présentes dans A et B au bout de n heures. On a donc $a_0 = 150$ et $b_0 = 20$.

1) Calculer l'effectif de molécules présentes dans A et B au bout d'une heure.

2) Pour n entier naturel, exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.

3) Calculer l'effectif de molécules présentes dans A et B au bout de quatre heures.

4) À l'aide d'un tableur, conjecturer les effectifs des molécules dans chaque compartiment à long terme.

Exercice 14

Le mathématicien toscan Fibonacci, dit Léonard de Pise, pose en 1202 le « problème des lapins ».

Un couple de lapins, né le 1er janvier, donne naissance à un autre couple de lapins chaque mois, dès qu'il atteint l'âge de deux mois. Les nouveaux couples de lapins suivent la même loi de reproduction. Combien y aura-t-il de couples de lapins le 1er janvier de l'année suivante, en supposant qu'aucun couple n'ait disparu entre temps ?

Pour n entier naturel non nul, on note u_n le nombre de couples de lapins au cours du n-ième mois. On a $u_1 = 1$.

1) Calculer u_2, u_3, u_4 et u_5.

2) Justifier que pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

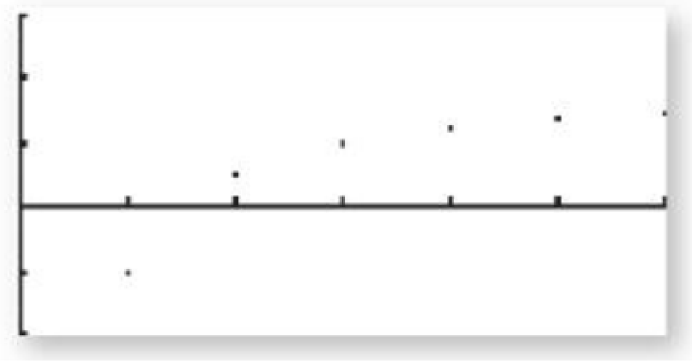
3) Répondre alors au problème posé par Fibonacci.

Exercice 15

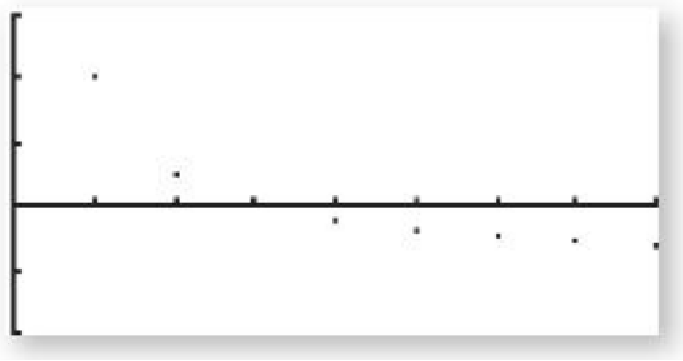
On donne ci-dessous deux copies d'écran obtenues en programmant une suite (u_n) sur une calculatrice.

Dans chaque cas, conjecturer le sens de variation de la suite (u_n).

①



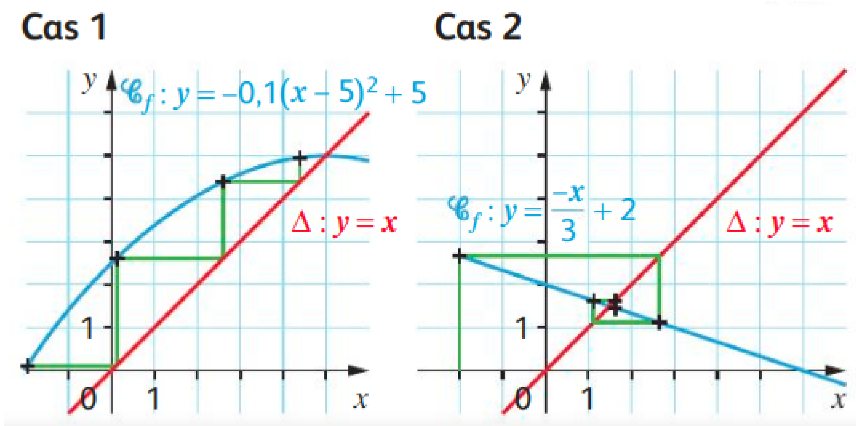
②



Exercice 16

Dans chaque cas, on a tracé ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f et on a représenté les quatre premiers termes de la suite (u_n), définie par son premier terme u_0 et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.
Dans chaque cas :

1) donner la valeur de u_0 et des valeurs approchées de u_1, u_2 et u_3 ;
2) conjecturer le sens de variation et la limite de (u_n).



Exercice 17

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = 0,8u_n + 1$.

1) **a)** Déterminer les coordonnées du point d'intersection des droites $\mathcal{D}$ et Δ d'équations respectives $y = 0,8x + 1$ et $y = x$.

   b) Tracer les droites $\mathcal{D}$ et Δ dans un repère orthonormé d'unité $2\ cm$.

2) **a)** Représenter sur l'axe des abscisses les cinq premiers termes de la suite (u_n)en explicitant le procédé de construction.

   b) Conjecturer le sens de variation et la limite de la suite (u_n).

Exercice 18

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = 1 + \dfrac{2}{u_n}$.

1) Dans un repère orthonormé d'unité $2\ cm$, tracer la courbe représentative de la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = 1 + \dfrac{2}{x}$.

2) **a)** Représenter sur l'axe des abscisses les cinq premiers termes de la suite (u_n).

b) La suite (u_n) est-elle monotone ? Conjecturer la valeur de sa limite.

Exercice 19

1) On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ par $f(x) = 2x(1-x)$.

- **a)** Étudier le sens de variation de la fonction f.
- **b)** Dans un repère orthonormé d'unité $10\ cm$, tracer la courbe $(\mathcal{C}_f)$représentative de la fonction f.

2) On étudie l'évolution d'une population de coccinelles. En 2015, on compte $100\,000$ coccinelles. On modélise l'effectif des coccinelles par la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$, et pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = 2u_n(1-u_n)$, où u_n est l'effectif des coccinelles, exprimé en million d'individus, en $2015+n$.

3)
- **a)** Sur le graphique de la question 1., représenter sur l'axe des abscisses les cinq premiers termes de la suite (u_n) en explicitant le procédé de construction.
- **b)** Conjecturer le sens de variation et la limite de la suite (u_n).
- **c)** En supposant que ce modèle reste valide pour les années à venir, que peut-on dire de l'évolution de la population de coccinelles à long terme ?

<u>Exercice 20</u>

Calculer la limite de la suite (u_n).

1) $u_n = 50 \times 0,7^n$

2) $u_n = 3 \times 1,5^n$

3) $u_n = -2 \times 0,4^n + 3$

4) $u_n = -15 \times 1,02^n$

Exercice 21

Calculer la limite de la suite (u_n).

1) $u_n = 5 - 2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$

2) $u_n = 3n + 2 \times \left(\frac{5}{3}\right)^{n}$

3) $u_n = 1,01^n - 10\,000$

4) $u_n = -2\left(\frac{3}{5}\right)^{n} + 2\left(\frac{5}{3}\right)^{n}$

Exercice 22

On considère la suite définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = \dfrac{3^n}{3^n + 2^n}$.

1) En utilisant la calculatrice, conjecturer la limite de la suite (u_n).

2) Montrer que, pour tout entier naturel n : $u_n = \dfrac{1}{1 + \left(\dfrac{2}{3}\right)^n}$.

3) Démontrer la conjecture formulée à la question 1.

Exercice 23

Une entreprise commercialise une nouvelle peinture anti-bruit, composée de microbilles en verre, qui capture l'air lors de l'application d'une couche. Chaque couche permet de réduire l'intensité des sons de $20~\%$.
Pour n entier naturel, on note I_n l'intensité en décibels (dB) d'un son traversant n couches de peinture isolante. On considère un son de $80~dB$, donc $I_0 = 80$.

1) Quelle est la nature de la suite (I_n) ?

2) Donner l'expression de I_n en fonction de n.

3) Déterminer la limite de la suite (I_n) et interpréter.

Exercice 24

Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer, lorsque cela est possible, la limite de la suite (u_n).

1) Pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant 0,5^n$.

2) Pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 1,03^n$.

3) Pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant 2^n$.

4) Pour tout entier naturel n, $0,8^n \leqslant u_n \leqslant 0,9^n$.

Exercice 25

$S_n = 1 + 0,9 + 0,9^2 + \cdots + 0,9^n$ et $T_n = 1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

1) Exprimer S_n et T_n en fonction de n.

2) Calculer la limite des suites (S_n) et (T_n).

Exercice 26

$S_n = 1 + 0,25 + 0,25^2 + \cdots + 0,25^{n-1}$ et $T_n = \dfrac{3}{4} + \left(\dfrac{3}{4}\right)^2 + \cdots + \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$.

1) Exprimer S_n et T_n en fonction de n.

2) Calculer la limite des suites (S_n) et (T_n).

Exercice 27

$S_n = 2 + 2 \times 0,7 + 2 \times 0,7^2 + \cdots + 2 \times 0,7^n$ et $T_n = -3 - \dfrac{3}{2} - \dfrac{3}{2^2} - \cdots - \dfrac{3}{2^n}$.

1) Exprimer S_n et T_n en fonction de n.

2) Calculer la limite des suites (S_n) et (T_n).

Exercice 28

Un globe-trotter a parié de parcourir 5 000 km à pied. Frais et dispo, il peut parcourir $50\ km$ en une journée. Mais chaque jour, la fatigue s'accumule et sa performance diminue de $1\ \%$ tous les jours.
Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note d_n la distance parcourue le n-ième jour et D_n la distance totale parcourue au bout de n jours, en kilomètre.

1) **a)** Montrer que la suite (d_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

b) En déduire l'expression de d_n en fonction de n.

2) **a)** Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $D_n = 5\,000\,(1 - 0,99^n)$.

b) Déterminer la limite de la suite (D_n). Le globe-trotter peut-il gagner son pari ?

3) À l'aide de la calculatrice, déterminer le nombre minimal de jours qui lui seraient nécessaires pour parcourir $1\,500\ km$.

Exercice 29

On s'intéresse à une population de tortues vivant sur une île et dont le nombre d'individus diminue de façon inquiétante. Au début de l'an 2010, on comptait 300 tortues.

Une étude a permis de modéliser le nombre de tortues par la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 0,3 \\ u_{n+1} = 0,9u_n(1-u_n) \end{cases}$

où est le nombre de tortues, en millier, au début de l'année $2010+n$.

1) Calculer, suivant ce modèle, le nombre de tortues au début de l'année 2011, puis de l'année 2012.

2) À l'aide de la calculatrice :

- **a)** estimer le nombre de tortues en 2020 ;
- **b)** conjecturer le sens de variation et la limite de (u_n).

3) On admet que, pour tout entier naturel n, on a $0 \leqslant u_n \leqslant 0,3 \times 0,9^n$.

- **a)** Déterminer la limite de la suite (u_n).
- **b)** Que peut-on en conclure sur l'avenir de cette population de tortues ?

Exercice 30

Un apiculteur étudie l'évolution de sa population d'abeilles. Au début de son étude, il évalue à 10 000 le nombre de ses abeilles. Chaque année, l'apiculteur observe qu'il perd $20\ \%$ des abeilles de l'année précédente, et il rachète $10\,000$ abeilles. On modélise l'effectif des abeilles par une suite (u_n), où u_n désigne le nombre d'abeilles, en dizaine de milliers, au bout de la n-ième année. On a donc $u_0 = 1$.

1) Justifier que, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = 0,8u_n + 1$.

2) **a)** Dans un repère orthonormé, tracer les droites $\mathcal{D}$ et Δ d'équations respectives $y = 0,8x + 1$ et $y = x$.

b) Représenter sur l'axe des abscisses les cinq premiers termes de la suite (u_n).

c) Conjecturer la limite de la suite (u_n).

3) Soit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 5$.

a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique.

b) En déduire que, pour tout entier naturel n, on a $u_n = 5 - 4 \times 0,8^n$.

c) Démontrer la conjecture formulée à la question 2. c.
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice 31

Un fabricant de calculatrices estime que, chaque année, les ventes augmentent de $5\ \%$ par rapport à l'année précédente et que la concurrence lui fait perdre $10\,000$ ventes. En 2019, il en a vendu $600\,000$.
Pour n entier naturel, on note u_n le nombre de milliers de calculatrices vendues à l'année $2019+n$. On a donc $u_0 = 600$.

1) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = 1,05u_n - 10$.

2) **a)** Déterminer une suite constante vérifiant la même relation de récurrence que (u_n). On note α cette constante.

b) Montrer que la suite (v_n), définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - \alpha$, est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

3) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

4) Déterminer la limite de la suite (u_n).
Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice 32

La suite (u_n) vérifie $u_0 = -1$, $u_2 = 0$ et $u_3 = 2$.

1) Justifier que la suite (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

2) Soit $f(x) = a(x-\alpha)(x-\beta)$. Déterminer les réels a, α et β afin que la suite (u_n) soit définie par $u_n = f(n)$.

3) En déduire u_1 et u_{100}.

Exercice 33

La suite (u_n) vérifie $u_0 = 2$, $u_3 = 2$ et $u_5 = 0$.

1) Justifier que la suite (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

2) Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$. Déterminer les réels a, b et c afin que la suite (u_n) soit définie par $u_n = f(n)$.

3) En déduire u_2 et u_4.

Exercice 34

Christelle joue avec sa calculatrice : elle a tapé $\sqrt{10}$, puis a demandé la racine carrée du résultat en tapant $\sqrt{Ans}$, puis a recommencé un grand nombre de fois.

1) Comme Christelle, répéter cette opération un grand nombre de fois. Émettre une conjecture au sujet de la suite de nombres obtenus (monotonie, convergence).

2) Soit (u_n) la suite représentant la manipulation de Christelle.

- **a)** Déterminer u_0, puis u_{n+1} en fonction u_n.
- **b)** Représenter dans un repère la fonction racine carrée puis la suite (u_n). Conjecturer les variations et la limite de la suite.

Exercice 35

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{6}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$.

1) Calculer u_1 u_2, u_3 et u_4.

2) À l'aide d'un logiciel, représenter graphiquement les premiers termes de la suite (u_n).

3) Les points semblent appartenir à la courbe d'une fonction dont l'expression pourrait être (justifier) :

- **a)** une fonction affine : $f(x) = mx + p$;
- **b)** une fonction du second degré : $g(x) = ax^2 + bx + c$;
- **c)** une fonction homographique : $h(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$.

4) À l'aide des valeurs de calculées en 1., identifier les coefficients de la fonction choisie.

5) En admettant que l'expression de la fonction trouvée donne u_n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donner une formule permettant de calculer la somme des carrés des n premiers entiers naturels non nuls.

Exercice 36

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, représenter les suites de points $M(x_n\ ;\ y_n)$définies par :

$$\begin{cases} x_{n+1} = ax_n + by_n \\ y_{n+1} = cx_n + dy_n \end{cases}$$

À partir de $M_0(0\ ;\ 1)$:

Suite	a	b	c	d
A	0,25	0,5	0,75	1
B	0,5	1	–1	–0,5

1) Suite A

a) Pour $n \geqslant 1$, quelle conjecture peut-on faire sur le nuage de points obtenu ?

b) Infirmer ou confirmer la conjecture précédente.

2) Suite B

a) Quelles conjectures peut-on faire sur le nuage de points obtenu ?

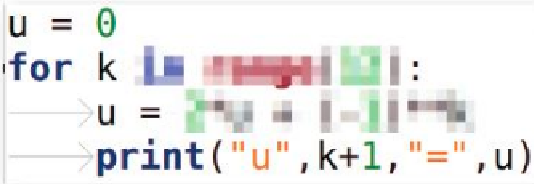
b) Exprimer x_{n+2} en fonction de x_n, puis démontrer une des conjectures précédentes.

Exercice 37

Python

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 2u_n + (-1)^n$.

1) Compléter le programme Python afin d'obtenir les premiers termes de la suite.



2) On définit la suite (v_n) sur $\mathbb{N}$ par $v_{n+1} = u_{n+1} + u_n$.
Modifier le programme précédent afin d'afficher côte à côte les premières valeurs de (u_n) et (v_n).

3) Conjecturer l'expression de v_n en fonction de n pour $n \geqslant 1$.

4) En admettant la conjecture précédente, donner l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 38

Samuel doit ranger sa chambre. Ce lundi, l'indice représentant l'état de saleté-bazar est de 100. Chaque jour, quoiqu'il fasse, cet indice augmente de $10\ \%$! Pour préserver l'ambiance familiale, Samuel a deux options : nettoyer un peu chaque jour, l'indice baisse alors de 12 unités par jour ; ou bien faire un grand ménage le dimanche, l'indice baisse alors de 98 unités chaque dimanche.
Modéliser ces situations à l'aide d'un logiciel. Une de ces stratégies lui permet-elle d'atteindre un indice de 0 ?

LB La fonction MOD sur tableur donne le reste de la division euclidienne ; en Python, cette fonction est l'opérateur $\%$.

Exercice 39

Soient les suites (u_n) et (v_n) définies sur par :
$$\begin{cases} u_0 = 10 \\ u_{n+1} = \dfrac{5u_n - v_n}{4} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = 20 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases}.$$

1) À l'aide d'un logiciel, déterminer puis représenter les premiers termes de (u_n) et (v_n).

2) Conjecturer les variations et les limites de chacune de ces suites.

3) Soit la suite (w_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = v_n - 2u_n$.

- **a)** Calculer les premiers termes de (w_n). Émettre une conjecture au sujet de la suite (w_n).
- **b)** Exprimer w_{n+1} en fonction de w_n. En déduire l'expression de w_n en fonction de n.
- **c)** En déduire les expressions de u_n et v_n en fonction de n, puis démontrer les conjectures émises en 2.

Exercice 40

Les suites (u_n) et (v_n) sont définies sur $\mathbb{N}$.

Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$, $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$ puis $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n + v_n)$.
Commenter les résultats obtenus.

1) $u_n = n^2$ et $v_n = -4n + 4$.

2) $u_n = n(n-1)$ et $v_n = 10 - n^2$.

3) $u_n = n + \cos^2(n)$ et $v_n = \sin^2(n) - n$.

Exercice 41

Les suites (u_n) et (v_n) sont définies sur $\mathbb{N}$.

Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n \times v_n)$.
Commenter les résultats obtenus.

1) $u_n = (n+1)^2$ et $v_n = \dfrac{1}{2(n+1)}$.

2) $u_n = e^{2n+1}$ et $v_n = e^{3-2n}$.

3) $u_n = \sqrt{n}$ et $v_n = -\dfrac{2}{n}$.

Exercice 42

Remarquer que A et B peuvent s'écrire comme la limite de sommes des termes d'une suite géométrique, en déduire leur valeur.

$A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$

$B = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots$

Exercice 43

Montrer que le réel $= 7,77777...$ (une infinité de chiffres) est un nombre rationnel.

Aide : $A = 7 + \dfrac{7}{10} + \dfrac{7}{100} + \cdots$

Autre méthode : calculer $A - \dfrac{A}{10}$.

Exercice 44

On considère les suites (a_n) et (b_n) définies par :
$$\begin{cases} a_0 = 50 \\ a_{n+1} = \dfrac{2a_n + b_n}{4} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} b_0 = 30 \\ b_{n+1} = \dfrac{a_n + 2b_n}{4} \end{cases}.$$

1) **a)** À l'aide d'un tableur, obtenir les 12 premiers termes de chaque suite et leur représentation graphique.

b) Conjecturer la monotonie et la convergence de chacune.

2) Soient (u_n) et (v_n) les suites définies sur $\mathbb{N}$ par $u_n = b_n + a_n$ et $v_n = b_n - a_n$.

a) Compléter la feuille de tableur afin d'obtenir les 12 premiers termes des suites (u_n) et (v_n) ainsi que leurs représentations graphiques.

b) Conjecturer la nature, la monotonie et la convergence de chacune.

c) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. Confirmer ou infirmer la conjecture précédente.

d) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n. Confirmer ou infirmer la conjecture précédente.

e) En déduire les expressions explicites de (a_n) et (b_n).

Exercice 45

Nombre de Copeland-Erdös

Le n-ième terme de la suite de Copeland-Erdös est le nombre décimal de partie entière 0 et de partie décimale obtenue par concaténation des n premiers nombres premiers.
Donc $u_1 = 0,2$; $u_2 = 0,23$ et $u_3 = 0,235$.

1) Donner les termes u_4, u_5 et u_6.

2) Déterminer le sens de variation de cette suite.

3) Justifier que $M = 0,3$ est un majorant de (u_n) ; que penser de la convergence de (u_n) ?

Exercice 46

Soit la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{1+u_n}$.

1) Remarquer que u_{n+1} peut s'écrire sous la forme $u_{n+1} = f(u_n)$, avec f une fonction à déterminer. En déduire les variations et la limite de (u_n) à l'aide d'une représentation graphique.

2) Résoudre $f(x) = x$.

3) Soit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{2^n}{1+2^n}$.

- **a)** Calculer v_0.
- **b)** Calculer $\dfrac{2v_n}{1+v_n}$, en déduire une expression de u_n en fonction de n.
- **c)** Montrer que $u_n = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2^n}}$.

  En déduire la limite de (u_n).

Exercice 47

La souris sort de son trou. À sa vue, le chat se précipite dans sa direc-tion ! Surprise, la souris s'enfuit le long du mur avec la même vitesse que le chat.

Modélisation

Dans un repère orthonormé, la souris est en $(0\ ;\ 0)$ et elle se déplace le long de l'axe des ordonnées positives ; le chat est initialement en $(200\ ;\ 0)$ et il se déplace en direction de la souris. Le chat et la souris se déplacent de 20 unités à chaque étape.

1) Compléter le programme Python ci-dessous afin de représenter le déplacement du chat et de la souris.

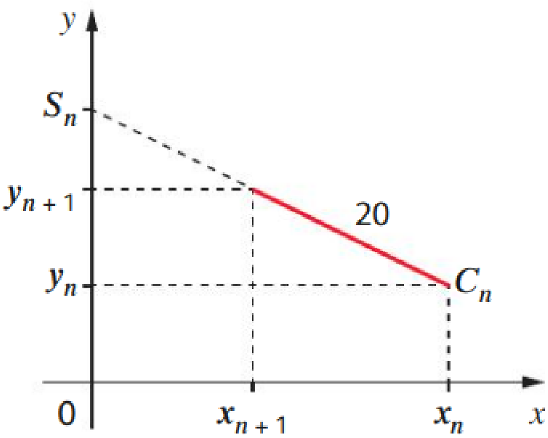
```
import turtle as tl

souris, chat = tl.Turtle(), tl.Turtle()
souris.goto(0,0)
souris.setheading(90)
chat.up()
chat.goto(...)
chat.down()
...
    chat.setheading(chat.towards(souris))
    chat.forward(20)
    souris.forward(...)

tl.mainloop()
```

Info : L'instruction **chat.setheading(chat.towards(souris))** tourne la tête du chat dans la direction de la souris.

2) Dans ce qui suit, les suites de points (C_n) et (S_n) représentent les positions du chat et de la souris à l'instant n. À l'aide du schéma, en supposant $x_{n+1} > 0$, déterminer la distance d_n qui sépare le chat de la souris au bout de $n$secondes.



3) **a)** Justifier que si x_{n+1} est positif, alors les coordonnées du point C_{n+1} sont données par :

$$\begin{cases} x_{n+1} = \left(1 - \dfrac{20}{d_n}\right) x_n \\ y_{n+1} = \dfrac{400n - 20y_n}{d_n} + y_n \end{cases}.$$

b) Créer une feuille de tableur afin de retrouver les résultats ci-dessous.

	A	B	C	D
1	n	xn	yn	dn
2	0	200,00	0,00	200,00
3	1	180,00	0,00	181,11
4	2	160,12	2,21	164,52
5	3	140,66	6,80	150,38
6	4	121,95	13,88	138,72

c) Tabuler les formules jusqu'à $n = 19$. Quelle semble être la variation de la suite (d_n) ? Quelle semble être sa limite ? Interpréter.

Exercice 48

Les suites (u_n) et (v_n) sont définies sur $\mathbb{N}$ par :
$u_n = n + \cos\left(\dfrac{2\pi}{3}n\right)$ et $v_n = n - 1$.

1) Calculer les 4 premiers termes de (u_n).

2) Donner une représentation graphique de (u_n).

3) Donner la limite de (u_n) en la comparant à celle de la suite (v_n) (et éventuellement à celle d'une seconde suite à déterminer).

Exercice 49

Les suites (u_n) et (v_n) sont définies sur $\mathbb{N}$ par :
$u_n = 2n + (-1)^n$ et $v_n = 2n - 1$.

1) Calculer les 4 premiers termes de (u_n).

2) Donner une représentation graphique de (u_n).

3) Donner la limite de (u_n) en la comparant à celle de la suite (v_n) (et éventuellement à celle d'une seconde suite à déterminer).

Exercice 50

Les suites (u_n) et (v_n) sont définies sur $\mathbb{N}$ par :
$u_n = \cos\left(\frac{\pi}{4}n^2\right) - n$ et $v_n = 1 - n$.

1) Calculer les 4 premiers termes de (u_n).

2) Donner une représentation graphique de (u_n).

3) Donner la limite de (u_n) en la comparant à celle de la suite (v_n) (et éventuellement à celle d'une seconde suite à déterminer).

Exercice 51

Les suites (u_n) et (v_n) sont définies sur $\mathbb{N}$ par :
$u_n = n^2 - (-1)^n \times 2n + 1$ et $v_n = (n-1)^2$.

1) Calculer les 4 premiers termes de (u_n).

2) Donner une représentation graphique de (u_n).

3) Donner la limite de (u_n) en la comparant à celle de la suite (v_n) (et éventuellement à celle d'une seconde suite à déterminer).

Exercice 52

Les suites (u_n) et (v_n) sont définies sur $\mathbb{N}$ par :

$u_n = \dfrac{1+\sin\left(\dfrac{\pi}{2}n\right)}{n+1}$ et $v_n = \dfrac{2}{n+1}$.

1) Calculer les 4 premiers termes de (u_n).

2) Donner une représentation graphique de (u_n).

3) Donner la limite de (u_n) en la comparant à celle de la suite (v_n) (et éventuellement à celle d'une seconde suite à déterminer).

Exercice 53

Les suites (u_n) et (v_n) sont définies sur $\mathbb{N}$ par :
$u_n = \dfrac{1}{n+e^{-n}}$ et $v_n = \dfrac{1}{n}$.

1) Calculer les 4 premiers termes de (u_n).

2) Donner une représentation graphique de (u_n).

3) Donner la limite de (u_n) en la comparant à celle de la suite (v_n) (et éventuellement à celle d'une seconde suite à déterminer).

Exercice 54

Des spécialistes de l'éducation étudient le taux d'attention des élèves en cours de maths pendant l'année. Il dépend de plusieurs paramètres (jour de l'année scolaire, quantité de devoirs à rendre, charge de la batterie du Smartphone...). Une étude, menée en 2020, a permis d'estimer le taux d'attention à $0,9$ le jour de la rentrée : $90\ \%$ de l'attention est alors disponible pour le cours de maths.
On modélise le taux d'attention par la suite (A_n) qui, à tout entier naturel n, associe le taux d'attention n mois après la rentrée.
On a ainsi $A_0 = 0,9$. Le modèle choisi est tel que, pour tout entier naturel n, on a : $A_{n+1} = A_n - 0,08A_n^2$.

1) On estime qu'en janvier le taux d'attention est proche de $0,7$. Est-ce conforme au modèle ?

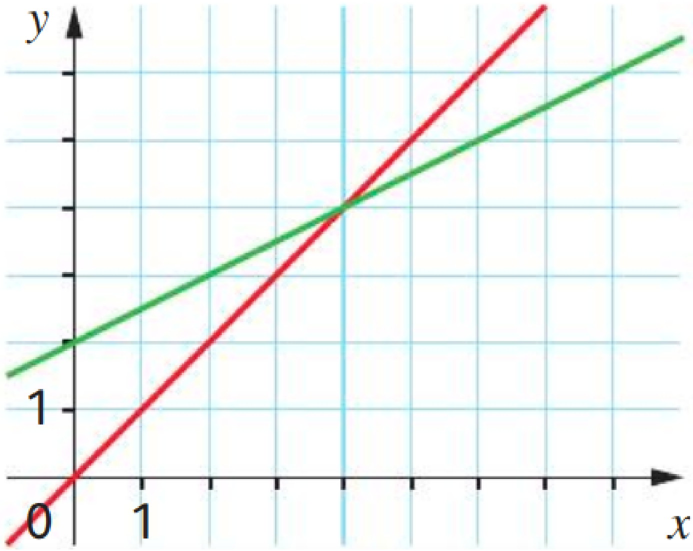
2) On définit la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ par $f(x) = x - 0,08x^2$.
La suite (A_n) vérifie donc, pour tout entier naturel n, $A_{n+1} = f(A_n)$.

- **a)** Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$.
- **b)** Montrer que, pour entier naturel n, si $0 \leqslant A_n \leqslant 1$, alors $0 \leqslant A_{n+1} \leqslant 1$.
- **c)** Déterminer le sens de variation de (A_n).
- **d)** Représenter graphiquement la suite (A_n) dans un repère. Avec du bon sens, déterminer sa limite.

3) Compléter le programme Python ci-dessous afin de déterminer le mois à partir duquel le taux d'attention sera inférieur au seuil critique estimé à $47\ \%$.

```
a, n = 0.9, 0
[redacted]
    a = a -.08 * (a**2)
    [redacted]
print(n)
```

Exercice 55



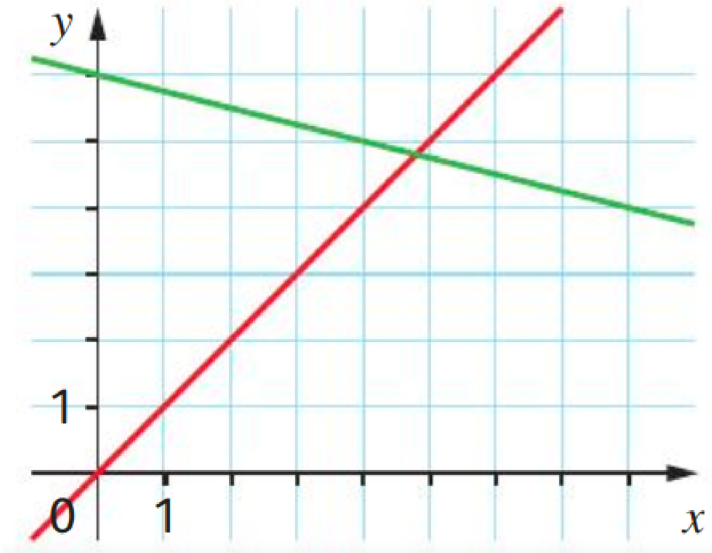
Le graphique représente la droite d'équation $y = x$ et la courbe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0,5x + 2$.

Déterminer graphiquement le sens de variation et la limite de la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ quand :

1) $u_0 = 8$

2) $u_0 = 1$

Exercice 56



Le graphique représente la droite d'équation $y = x$ et la courbe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 6-0,25x$.

Déterminer graphiquement le sens de variation et la limite de la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ quand :

1) $u_0 = 2$

2) $u_0 = 8$

Exercice 57

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :
$u_0 = 4$, $u_1 = 7$ et $u_{n+2} = \frac{5}{4}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$.

1) À l'aide d'un logiciel, calculer les premiers termes de la suite. Conjecturer ses variations et son éventuelle limite.

2) Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$.

- **a)** Calculer $v_{n+1} - v_n$. En déduire la nature de (v_n).
- **b)** En déduire une expression de u_{n+1} en fonction de u_n, puis la nature de la suite (u_n).
- **c)** Résoudre l'équation $\alpha = \frac{1}{4}\alpha + 6$. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
- **d)** En déduire la limite de (u_n).

Exercice 58

Zorana s'est découvert une passion pour l'aquariophilie. Novice, elle demande régulièrement de l'aide sur les forums.

« *J'ai versé* 240 *litres d'eau dans mon aquarium* $(121 \times 41 \times 55)$. *J'aurais besoin de conseils ou de renseignements sur l'évaporation de mon aquarium, car il perd exactement* 2 *à* 3 cm *de hauteur d'eau par semaine.* »

1) Combien de litres d'eau Zorana peut-elle rajouter avant que son aquarium déborde ?

2) Supposons que la hauteur de l'aquarium est 55 cm, la perte d'eau observée exactement 2 à 3 cm par semaine peut-elle être de $13,5$ litres ? Déterminer alors le pourcentage d'évaporation (par rapport aux 240 litres initiaux).

3) Par la suite, on suppose que chaque semaine le taux d'évaporation est de 5 % et que Zorana rajoute toujours 13,5 litres. Soit la suite (V_n) représentant le volume d'eau dans l'aquarium chaque semaine.Justifier que $V_0 = 240$ et $V_{n+1} = 0,95V_n + 13,5$.

4) Soit la suite (W_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $W_n = V_n - 270$.

- **a)** Vérifier que la suite (W_n) est géométrique ; préciser la raison et le premier terme.
- **b)** En déduire l'expression de V_n en fonction de n.
- **c)** Si Zorana poursuit ce procédé chaque mois, son aquarium risque-t-il de déborder ?

Exercice 59

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :
$u_0 = 5$ et $u_{n+1} = -\dfrac{2}{3}u_n + \dfrac{7}{3}$.

1) Représenter graphiquement la suite dans un repère. Conjecturer les variations de la suite et la valeur de son éventuelle limite.

2) En suivant le plan de travail présenté dans le cours, déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

3) On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

Démontrer que $S_n = \left(1 - \left(-\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}\right) \times \dfrac{54}{25} + \dfrac{7}{5}(n+1)$.

4) Avec du bon sens, justifier le commentaire : « Pour n assez grand, la somme des termes vaut environ $1,4n$. »

Exercice 60

La romancière Literharry étudie un audit concernant la vente de ses livres. Elle sort un livre tous les deux ans, qui, le mois de sa sortie, se vend à $5\,000$ exemplaires. Ensuite, chaque mois, ses ventes diminuent de $20\ \%$ par rapport au mois précédent.

Son éditeur lui propose différentes actions marketing afin d'augmenter les ventes : chaque mois, à la suite de ces actions, Literharry gagne l nouveaux lecteurs.

Existe-t-il une valeur de l qui lui permettrait d'avoir $30\,000$ ventes sur deux ans ?

Plan de travail possible :

1) Modéliser le problème à l'aide d'une suite définie par une relation de récurrence.

2) Exprimer les termes de cette suite en fonction de n.

3) Calculer la somme des termes représentant une durée de deux ans.

Exercice 61

Exercice 62

Exercice 63

Exercice 64

Exercice 65

Exercice 66

Exercice 67

Exercice 68

Exercice 69

Exercice 70