Exercice 1

QCM

Pour chacune des questions suivantes, indiquer la (ou les) bonne(s) réponse(s).

1) $\ln 1$ est égal à :

- **a)** 0
- **b)** $\ln(1)$
- **c)** e^0
- **d)** 1

2) $\ln e$ est égal à :

- **a)** 0
- **b)** $\ln(e)$
- **c)** e^0
- **d)** 1

3) $e^{\ln 2}$ est égal à :

- **a)** 2
- **b)** $\ln(e^2)$
- **c)** $\ln 2$
- **d)** e^2

4) $\ln(e^2)$ est égal à :

- **a)** 2
- **b)** $e^{\ln 2}$
- **c)** $\ln 2$
- **d)** e^2

Exercice 2

Démonstration

Soient deux réels x et y strictement positifs.

1) Rappeler les propriétés algébriques du logarithme d'un produit et du logarithme de l'inverse.

2) En remarquant que $\dfrac{x}{y} = x \times \dfrac{1}{y}$, démontrer que :
$\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$.

Exercice 3

Vrai ou faux ?

Pour chaque affirmation, préciser si elle est vraie ou fausse.

1) $\ln 21 = \ln 7 \times \ln 3$

2) $\ln 0,5 = \dfrac{1}{\ln 2}$

3) $\ln 8 = 3 \ln 2$

4) $\dfrac{\ln 16}{\ln 8} = \ln 2$

5) $\ln \left(e^{-5}\right) = -5$

6) $-2 \ln 3 = -\ln 9$

Exercice 4

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a) $e^x - 5 = 0$

b) $4e^x - 2 = 0$

2) Résoudre dans $]0\ ;\ +\infty[$ les équations suivantes.

a) $\ln x - 5 = 0$

b) $4\ln x - 2 = 0$

Exercice 5

Vrai ou faux ?

Pour chaque affirmation, préciser si elle est vraie ou fausse.

1) La fonction inverse est une primitive de la fonction logarithme népérien sur $]0\ ;\ +\infty[$.

2) La dérivée de la fonction logarithme népérien est la fonction inverse.

3) La fonction logarithme est croissante sur $]-\infty\ ;\ +\infty[$.

4) La fonction logarithme est positive sur $]0\ ;\ +\infty[$.

5) La fonction logarithme est concave sur $]0\ ;\ +\infty[$.

Exercice 6

Dans chacun des cas, sans calculatrice, comparer les nombres donnés.

1) $\ln 2$ et $\ln 4,3$

2) $\ln 0,6$ et $\ln 0,8$

3) $\ln 1,4$ et $\ln e$

4) $\ln 0,4$ et $\ln 1,3$

Exercice 7

Sans calculatrice, en utilisant les positions relatives des courbes représentatives de la fonction carré et de la fonction racine carrée, comparer les nombres donnés dans les cas suivants.

1) $a = 0,124$; $b = 0,124^2$ et $C = \sqrt{0,124}$.

2) $a = 7,3$; $b = 7,3^2$ et $C = \sqrt{7,3}$.

Exercice 8

Sans calculatrice

1) En remarquant que $2^2 = 4$ et $3^2 = 9$, justifier que $2 < \sqrt{7} < 3$.

2) Encadrer $\sqrt{13}$ entre deux entiers consécutifs.

Exercice 9

On donne $e^2 \approx 7,4$ et $e^3 \approx 20,1$.

Donner une valeur approchée de $\ln 7$ et $\ln 20$.

Vérifier les résultats à l'aide d'une calculatrice.

Exercice 10

Avec la calculatrice

En s'appuyant sur les courbes représentatives des fonctions exponentielle et logarithme, et sur la droite d'équation $y = x$, conjecturer une comparaison des réels x, $\ln x$ et e^x, pour tout réel $x > 0$.

NB : L'inégalité obtenue permet de comparer les croissances des fonctions : le logarithme croît moins vite que la fonction identité, qui croît moins vite que l'exponentielle.

Exercice 11

QCM

Pour chacune des questions suivantes, indiquer la bonne réponse.

1) $\lim\limits_{x \to 0} (\ln(3x)) =$

a) 0

b) $-\infty$

c) $+\infty$

2) $\lim\limits_{x \to 0} (-x + \ln(2x)) =$

a) 0

b) $-\infty$

c) $+\infty$

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^2 + \ln(6x)\right) =$

a) 0

b) $-\infty$

c) $+\infty$

4) $\lim\limits_{x \to +\infty} (-x - \ln x) =$

a) 0

b) $-\infty$

c) $+\infty$

5) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\ln(x^2 + 1)\right) =$

a) 0

b) $-\infty$

c) $+\infty$

Exercice 12

Déterminer les limites suivantes.

1) $\lim\limits_{x \to 0} (x + \ln x)$

2) $\lim\limits_{x \to 0} (3 - \ln x)$

3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln x}{x+1}$

4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{10}{\ln x}$

Exercice 13

Déterminer les limites suivantes.

1) $\lim_{x \to +\infty} \left(x^2 + 3\ln x\right)$

2) $\lim_{x \to +\infty} ((1 - x)\ln x)$

3) $\lim_{x \to +\infty} (1 - 4\ln x)$

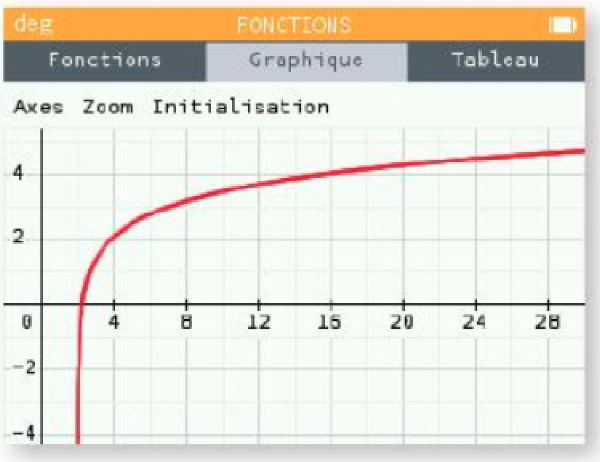
4) $\lim_{x \to +\infty} \left(x^2(6 - 2\ln x)\right)$

Exercice 14

Soit f la fonction définie sur $]2\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \ln(4x - 8)$.

1) Justifier que f est définie sur $]2\ ;\ +\infty[$.

2) On a obtenu ci-dessous la courbe représentative $(\mathcal{C}_f)$ de f.



a) Quelles conjectures peut-on faire sur les limites de la fonction f aux bornes de son domaine de définition ?

b) Démontrer ces conjectures.

Exercice 15

Déterminer l'expression de la fonction dérivée des fonctions f proposées, sans s'occuper de l'ensemble de définition.

1) $f(x) = 3\ln x - 1$

2) $f(x) = 5 - 2\ln x$

3) $f(x) = 2\ln x - x + \dfrac{1}{x}$

4) $f(x) = x^2 - \ln x$

Exercice 16

Déterminer l'expression de la fonction dérivée des fonctions f proposées, sans s'occuper de l'ensemble de définition.

1) $f(x) = \ln(3x)$

2) $f(x) = 4\ln(5x)$

3) $f(x) = \ln(2x) - 1$

4) $f(x) = \ln(2x - 1)$

Exercice 17

Déterminer l'expression de la fonction dérivée des fonctions f proposées, sans s'occuper de l'ensemble de définition.

1) $f(x) = x \ln x - x$

2) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

3) $f(x) = e^x \ln(x)$

4) $f(x) = \dfrac{e^x}{\ln x}$

Exercice 18

Déterminer l'expression d'une primitive des fonctions f proposées, sans s'occuper de l'ensemble de définition.

1) $f(x) = \dfrac{1}{x} - 4x$

2) $f(x) = 3 - \dfrac{1}{x}$

3) $f(x) = \dfrac{2}{x} - x^2 + 1$

4) $f(x) = 2x - \dfrac{5}{x}$

Exercice 19

Déterminer l'expression d'une primitive des fonctions f proposées, sans s'occuper de l'ensemble de définition.

1) $f(x) = \dfrac{3}{3x+1}$

2) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$

3) $f(x) = \dfrac{1}{5x+3}$

4) $f(x) = \dfrac{2}{x-1}$

Exercice 20

Soit f la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = 2x + 3 + 4\ln x$.

1) Calculer $f'(x)$.

2) Montrer que la fonction F définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $F(x) = x(x - 1 + 4\ln x)$ est une primitive de f.

Exercice 21

Soit f la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

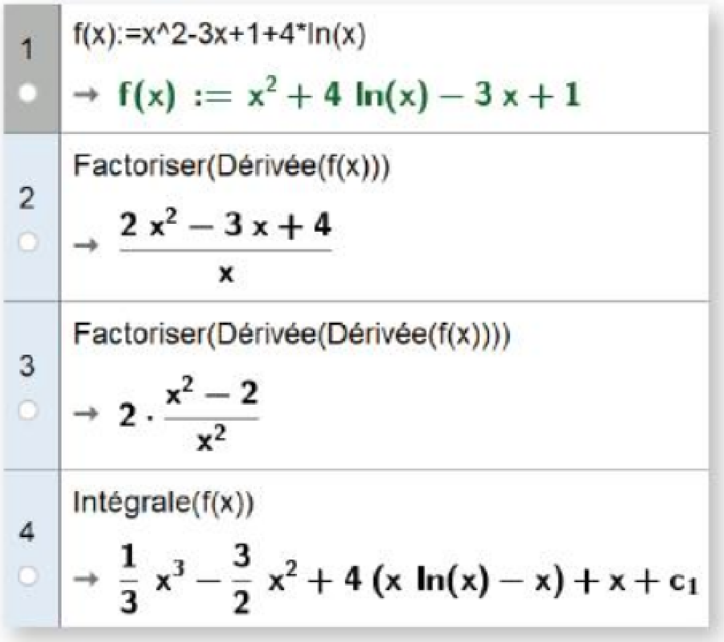
1) Calculer $f'(x)$.

2) En remarquant que, pour $x > 0$, $\dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{1}{x} \times \ln x$, déterminer une primitive de f.

3) Déterminer la primitive de f s'annulant en e.

Exercice 22

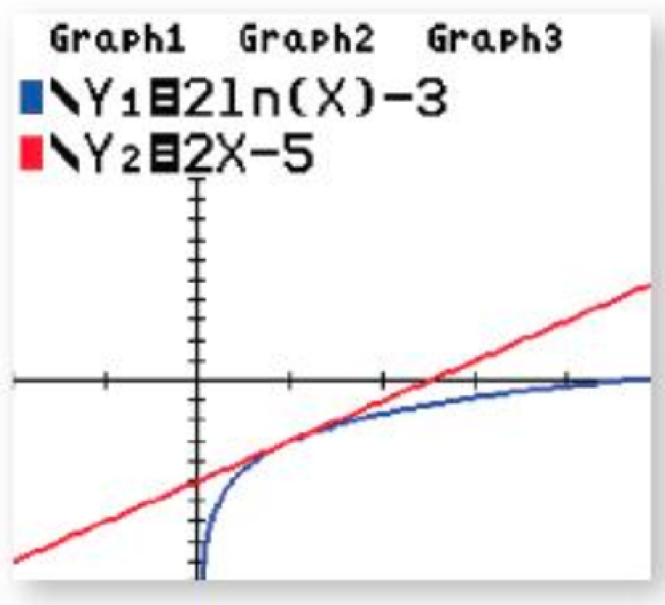
Démontrer les résultats ci-dessous obtenus à l'aide d'un logiciel de calcul formel.



NB : La ligne 4 permet de déterminer l'expression des primitives de la fonction f.

<u>Exercice 23</u>

On a obtenu sur une calculatrice la copie d'écran ci-dessous.



1) Quelle conjecture peut-on faire sur la droite d'équation $y = 2x - 5$ par rapport à la courbe représentative de la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = 2\ln x - 3$?

2) Démontrer la conjecture.

Exercice 24

QCM
On considère la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \ln(2x)$.
Pour chacune des questions suivantes, indiquer la bonne réponse.

1) $f(0,5) =$
- **a)** 0
- **b)** $\ln 2$
- **c)** 1

2) $f(e) =$
- **a)** 1
- **b)** $\ln 2 + 1$
- **c)** 2

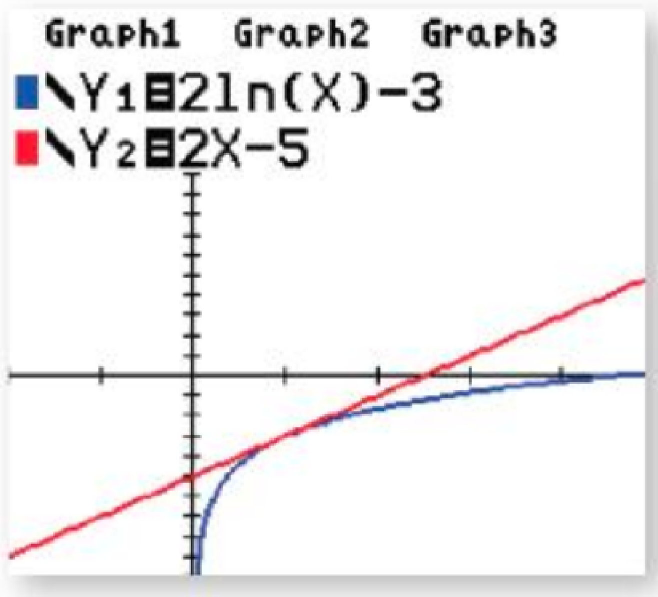
3) Pour tout réel $x > 0$, on a :
- **a)** $f'(x) = \dfrac{1}{2x}$
- **b)** $f'(x) = \dfrac{1}{x}$
- **c)** $f'(x) = \dfrac{2}{x}$

4) Sur $]0\ ;\ +\infty[$ la fonction f est
- **a)** croissante
- **b)** décroissante
- **c)** non monotone

5) Sur $]0\ ;\ +\infty[$ la fonction f est
- **a)** convexe
- **b)** concave
- **c)** ni convexe ni concave

Exercice 25

1) Soit la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \ln(x) - 2$.
Un élève écrit :



L'élève a-t-il raison ? Justifier.

2) Dans chacun des cas suivants, construire le tableau de signes de la fonction f sur $]0\ ;\ +\infty[$.

a) $f(x) = \ln x - 1$

b) $f(x) = \ln x - 3$

c) $f(x) = 2\ln x - 10$

d) $f(x) = 4 - 3\ln x$

Exercice 26

On considère la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = x + \ln x$.
On note $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de f et Δ la droite d'équation $y = x$.

1) Montrer que la fonction f est croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$.

2) Pour tout réel $x > 0$, on pose $h(x) = f(x) - x$.

  a) Étudier le signe de h sur $]0\ ;\ +\infty[$.

  b) Que peut-on en déduire pour la courbe $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à la droite Δ ?

Exercice 27

Vrai ou faux ?

On considère la fonction f définie sur $]1\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$
On note $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative.

Pour chaque affirmation, préciser si elle est vraie ou fausse.

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

2) $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 1$.

3) Pour tout réel $x > 1$, $f'(x) = -\dfrac{1}{(\ln x)^2}$.

4) La fonction f est positive sur $]1\ ;\ +\infty[$.

Exercice 28

Soit f la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \ln x - x$.

1) **a)** Montrer que, pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{1-x}{x}$.

b) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $]0\ ;\ +\infty[$.

c) Dresser le tableau de variations de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.

2) **a)** Déterminer le maximum de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.
En déduire le signe de $f(x)$ sur $]0\ ;\ +\infty[$.

b) En déduire que, pour tout réel $x > 0$, on a $\ln x < x$.

c) Interpréter graphiquement le résultat.

Exercice 29

Soit f la fonction définie sur $]-1\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \ln(1+x)$.

1) **a)** Justifier que f est définie sur $]-1\ ;\ +\infty[$.

b) Étudier les limites aux bornes du domaine de définition.

2) Calculer $f'(x)$.
En déduire le sens de variations de la fonction f.

3) Étudier la convexité de la fonction f.

4) **a)** Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe de f au point d'abscisse 0.

b) Étudier la position relative de la tangente (T) et la courbe représentative de f.

5) Vérifier les résultats précédents à l'aide de la calculatrice.

Exercice 30

Soit f la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

Justifier tous les éléments obtenus dans le tableau de variations et dans le tableau de signes suivants.

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖	↗	$\dfrac{1}{e}$	↘	

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$	‖	$-$	0	$+$	

Exercice 31

QCM

Pour chacune des questions suivantes, indiquer la (ou les) bonne(s) réponse(s).

1) La solution de l'équation $e^x = 3$ est :
- **a)** 3
- **b)** e^3
- **c)** $\ln 3$

2) La solution de l'équation $\ln x = 5$ est :
- **a)** 5
- **b)** e^5
- **c)** $\ln 5$

3) L'équation $\ln x = 0$ admet pour solution :
- **a)** 0
- **b)** 1
- **c)** e

4) L'équation $2\ln x + 10 = 0$ admet pour ensemble-solution :
- **a)** $\varnothing$
- **b)** $\{e^{-5}\}$
- **c)** $\{\ln 5\}$

5) L'équation $2e^x + 10 = 0$ admet pour ensemble-solution :
- **a)** $\varnothing$
- **b)** $\{e^{-5}\}$
- **c)** $\{\ln 5\}$

<u>Exercice 32</u>

Résoudre, dans chaque cas, l'équation donnée.

1) $\ln x = 10$

2) $5\ln x - 8 = 0$

3) $(x-2)\ln x = 0$

4) $(\ln x + 1)(\ln x - 3) = 0$

Exercice 33

Résoudre, dans chaque cas, l'équation donnée.

1) $e^x = 10$

2) $e^x + 5 = 0$

3) $2e^x - 3 = 0$

Exercice 34

Résoudre, dans chaque cas, l'équation donnée.

1) $\ln(x+1) = 2$

2) $\ln(x-1) = 0$

3) $2\ln(x+3) = 10$

4) $\ln(x) \times \ln(x+2) = 0$

Exercice 35

Résoudre, dans chaque cas, l'inéquation donnée.

1) $e^x < 5$

2) $e^x > 4$

3) $e^x + 1 \geqslant 0$

Exercice 36

Résoudre, dans chaque cas, l'inéquation donnée.

1) $\ln x \leqslant 3$

2) $\ln x + 3 \leqslant 0$

3) $\ln x > 4$

Exercice 37

Résoudre, dans chaque cas, l'inéquation donnée.

1) $\ln(x+1) \geqslant 3$

2) $\ln(x-1) < 2$

Exercice 38

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (e^x + 1)(e^x - 3)$.

Dresser le tableau de signes de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 39

Soit f la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \ln x \times (\ln x + 1)$.

Dresser le tableau de signes de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.

Exercice 40

Soit f la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = -x \ln x$.

1) Monter que, pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = -1 - \ln x$.

2) **a)** Résoudre dans $]0\ ;\ +\infty[$ l'inéquation $-1 - \ln x > 0$.

b) En déduire le tableau de signes de $f'(x)$ sur $]0\ ;\ +\infty[$.

3) **a)** Dresser le tableau de variations de f.

b) En déduire que, pour tout $x > 0$, $f(x) \leqslant e^{-1}$.

Exercice 41

Un élève doit déterminer le plus petit entier naturel n tel que $0,8^n \leqslant 10^{-5}$.
Il écrit :

$$0,8^n \leqslant 10^{-5} \Leftrightarrow \ln(0,8^n) \leqslant \ln(10^{-5})$$

$$\Leftrightarrow n\ln(0,8) \leqslant \ln(10^{-5})$$

$$\Leftrightarrow n \leqslant \frac{\ln(10^{-5})}{\ln(0,8)}$$

Or $\dfrac{\ln(10^{-5})}{\ln(0,8)} \approx 51,6$ et n est un entier naturel.

Donc le plus petit entier cherché est 51.

L'élève a-t-il raison ? Justifier.

Exercice 42

Vrai ou faux ?

Pour chaque affirmation suivante, déterminer si elle est vraie ou fausse, en justifiant.

1) Le plus petit entier naturel n tel que $2^n > 10^3$ est égal à $\dfrac{\ln(10^3)}{\ln(2)}$.

2) Le plus petit entier naturel n tel que $0,5^n < 10^{-3}$ est égal à 10.

3) Le plus petit entier naturel n tel que $3 \times 5^n > 450$ est égal à 3.

Exercice 43

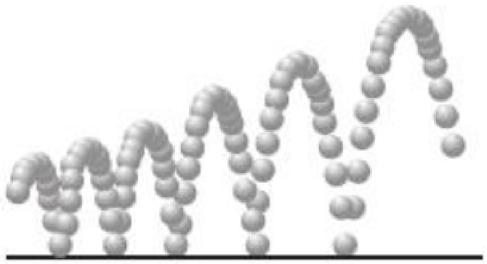
Déterminer le plus petit entier naturel n tel que :

1) $1,5^n > 100$

2) $1,1^n > 10^3$

3) $0,9^n \leqslant 10^{-5}$

Exercice 44



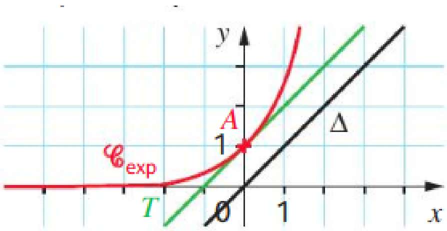
On lâche une balle de tennis d'une hauteur de 2 mètres. Après chaque rebond, la balle remonte aux trois quarts de la hauteur du rebond précédent.

Pour tout entier n, on note h_n la hauteur atteinte par la balle au n-ième rebond.

1) Calculer la hauteur, en mètre, atteinte après un, deux, puis trois rebonds.

2) Combien de rebonds faut-il avant que la hauteur de rebond soit inférieure à 1 cm ?

Exercice 45



On a tracé dans le repère orthonormé ci-dessus la courbe représentative de la fonction exponentielle, sa tangente T au point A d'abscisse 0, ainsi que la droite Δ d'équation $y = x$.

1) À quelle condition deux droites sont-elles parallèles ?
Démontrer que les droites T et Δ sont parallèles.

2) Quelles sont les coordonnées du point A ? En déduire celles du point B, image de A par la symétrie d'axe Δ.

3) Déterminer, par symétrie, l'équation de la droite D, image de T par la symétrie par rapport à la droite Δ.

4) Que représente la droite D pour la courbe représentative de la fonction logarithme népérien ?
Vérifier à l'aide de la calculatrice.

Exercice 46

On considère les courbes représentatives $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ des fonctions exponentielle et logarithme dans un repère orthonormé, et la droite Δ d'équation $y = x$.

1) Quelle est l'ordonnée du point A d'abscisse 1 sur la courbe $(\mathcal{C}_f)$? En déduire l'abscisse du point B d'ordonnée 1 sur la courbe $(\mathcal{C}_g)$.

2) Démontrer que la tangente à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ en A passe par l'origine du repère.

3) En déduire l'équation de la tangente à la courbe $(\mathcal{C}_g)$ au point B.
Vérifier à l'aide de la calculatrice.

Exercice 47

Justifier les résultats suivants, obtenus avec la calculatrice.

$$e^{\ln(7)}+3\ln(e)+5\ln(1) \qquad 10$$

$$\ln(e^3)-4\ln(1) \qquad 3$$

$$e^{\ln(4)}-3\ln(e)+2\ln(e^4) \qquad 9$$

Exercice 48

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1) $e^{x+1} = 3$

2) $e^{-2x+1} = 10$

3) $e^{2x} + 3 = 0$

Exercice 49

Résoudre les équations suivantes.

1) $\ln(x+1) = 5$

2) $\ln(2x) = 0$

3) $\ln(1-x) = 3$

Exercice 50

Dans chaque cas, dresser le tableau de signes de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

1) $f(x) = 3e^x - 6$

2) $f(x) = 4 - 3e^x$

3) $f(x) = (2x + 1)(e^x - 5)$

4) $f(x) = (2x - 5)(e^x + 1)$

Exercice 51

On considère la fonction f définie sur $[-4\ ;\ 2]$ par $f(x) = e^{2x} - 3x$.

1) Calculer $f'(x)$. En déduire le tableau de variations de la fonction f sur $[-4\ ;\ 2]$.

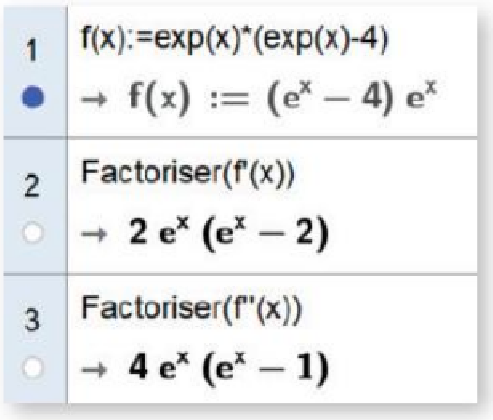
2) **a)** Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 10$.

b) Donner une valeur approchée de chaque solution, à $0,01$ près.

3) Étudier la convexité de f sur $[-4\ ;\ 2]$.

Exercice 52

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x(e^x - 4)$.
Un logiciel de calcul formel permet d'obtenir les résultats ci-dessous.



1) Justifier les résultats obtenus par le logiciel.

2) **a)** Étudier le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x.

b) En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$.

3) **a)** Étudier le signe de $f''(x)$ suivant les valeurs de x.

b) En déduire la convexité de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 53

1) Soit la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = 4x - \ln x$.

  a) Calculer $f'(x)$.

  b) Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire les variations de la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$.

2) Soit la fonction g définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = 2x + \ln x$.

  a) Calculer $g'(x)$.

  b) Étudier le signe de $g'(x)$ et en déduire les variations de la fonction g définie sur $]0\ ;\ +\infty[$.

Exercice 54

1) Soit la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = x^2 - 2\ln x$.

a) Calculer $f'(x)$.

b) Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire les variations de la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$.

2) Soit la fonction g définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = 4\ln x - x + \dfrac{3}{x}$.

a) Calculer $g'(x)$.

b) Étudier le signe de $g'(x)$ et en déduire les variations de la fonction g définie sur $]0\ ;\ +\infty[$.

Exercice 55

1) Soit la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 + 6x - 5\ln x$.

- **a)** Calculer $f'(x)$.
- **b)** Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire les variations de la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$.

2) Soit la fonction g définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = x - \dfrac{8}{x} - 6\ln x$.

- **a)** Calculer $g'(x)$.
- **b)** Étudier le signe de $g'(x)$ et en déduire les variations de la fonction g définie sur $]0\ ;\ +\infty[$.

Exercice 56

QCM

Pour chaque question suivante, déterminer l'unique réponse correcte.

1) Soit la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = 3\ln x - 2x + 1$
La tangente à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 1 est la droite d'équation :

- **a)** $y = x - 2$
- **b)** $y = -2x - 3$
- **c)** $y = x$

2) Soit la fonction g définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = -1,5x^2 + x^2\ln x$.
Pour tout réel :

- **a)** $g'(x) = -x + 1$
- **b)** $g'(x) = 2x\ln x - 2x$
- **c)** $g'(x) = -3x + 2$
- **d)** $g'(x) = -x\ln x - 0,5x$

3) La courbe de la fonction h définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $h(x) = \ln x + \dfrac{1}{x}$ admet un point d'inflexion en :

- **a)** 1
- **b)** 2
- **c)** $\ln 2$
- **d)** e^2

4) La fonction u est définie sur $I =]0\ ;\ +\infty[$ par $u(x) = 2x^2\ln x - 5x^2$.

- **a)** u est concave sur I.
- **b)** u est concave sur $[e^{-1}\ ;\ +\infty[$.
- **c)** u est convexe sur I.
- **d)** u est convexe sur $[e\ ;\ +\infty[$.

Exercice 57

On considère la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = 3x^2\ln(x)$.

1) Montrer que $f'(x) = 3x(2\ln x + 1)$.

2) Déterminer le signe de $f'(x)$ sur $]0\ ;\ +\infty[$.

3) En déduire les variations de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.

Exercice 58

Soit f la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{3\ln(x)}{x^2}$.

1) Montrer que $f'(x) = \dfrac{3(1-2\ln(x))}{x^3}$

2) Déterminer le signe de $f'(x)$.

3) En déduire les variations de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.

Exercice 59

On considère la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = x\ln(x)$.
On note $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de f et Δ la droite d'équation $y = x$.

1) **a)** Montrer que, pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = \ln x + 1$.

b) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $]0\ ;\ +\infty[$. En déduire le tableau de variations de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.

2) Étudier le signe de la fonction f sur $]0\ ;\ +\infty[$. Que peut-on en déduire pour la courbe $(\mathcal{C}_f)$?

3) Pour tout réel $x > 0$, on pose $h(x) = f(x) - x$.

a) Factoriser $h(x)$. En déduire le signe de h sur $]0\ ;\ +\infty[$.

b) Que peut-on en déduire pour la courbe $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à la droite Δ ?

Exercice 60

Une entreprise produit chaque année entre 100 et 900 pneus pour tracteurs.
On considère la fonction f définie sur $[1\ ;\ 9]$ par $f(x) = 0,5x^2 - 7x + 14 + 6\ln x$.

On admet que la fonction f modélise le coût moyen annuel de fabrication d'un pneu, exprimé en centaine d'euros, pour x centaines de pneus produits.

1) **a)** Montrer que, pour tout réel $x \in [1\ ;\ 9]$, $f'(x) = \dfrac{x^2 - 7x + 6}{x}$.

b) En déduire le tableau de variations de la fonction f.

2) **a)** Justifier que l'équation $f(x) = 5$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[1\ ;\ 9]$.

b) Donner un encadrement au centième près de α.

c) On considère l'algorithme ci-dessous.

```
x ← 1 ;    y ← 7,5
Tant que   y > 5 Faire
           x ← x + 0,01
           y ← 0,5x² − 7x + 14 + 6ln x
Fin Tant que
```

À la fin de l'exécution de l'algorithme, quelle valeur numérique contient la variable x ?

3) Pour quelle quantité de pneus le coût moyen annuel de fabrication est-il minimal ? À combien s'élève-t-il ?

Exercice 61

Sur une portion de 6 kilomètres du boulevard périphérique, le trafic peut être perturbé entre 7 h et 11 h du matin. Au début de cette portion, un panneau indique, à chaque instant, le temps de parcours d'un véhicule sur ces 6 kilomètres.

On modélise l'évolution du trafic à l'aide de la fonction f définie sur $[1\ ;\ 5]$ par $f(t) = \dfrac{22 \ln t}{t} + 4$.

Le nombre $f(t)$ est alors le temps de parcours indiqué sur le panneau et exprimé en minute, à un instant t exprimé en heure. Il est 7 h du matin à l'instant $t = 1$.

Le panneau indique « trafic fluide » s'il faut moins de 6 minutes pour parcourir les 6 kilomètres, il indique « trafic perturbé » s'il faut plus de 11 minutes.

1) Étudier les variations de f sur $[1\ ;\ 5]$ et dresser son tableau de variations.

2) En déduire que le trafic n'est pas fluide à 7 h 07 min et qu'il en est ainsi jusqu'à 11 h.

Exercice 62

Une entreprise fabrique chaque jour entre 100 et $2\,500$ pièces électroniques pour des vidéoprojecteurs. Toutes les pièces fabriquées sont identiques.
On admet que lorsque x centaines de pièces sont fabriquées, avec $1 \leqslant x \leqslant 25$, le coût moyen de fabrication d'une pièce est, en euro :d'une pièce est, en euro : $f(x) = \dfrac{x + 2 - \ln x}{x}$.

1) **a)** Montrer que, pour tout réel $x \in [1\ ;\ 25]$, $f'(x) = \dfrac{\ln x - 3}{x^2}$.

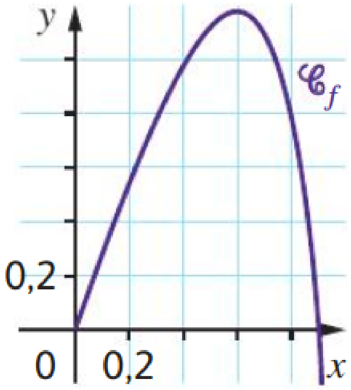
b) En déduire le tableau de variations de f sur $[1\ ;\ 25]$.

c) Déterminer, à l'unité près, le nombre de pièces à fabriquer pour que le coût moyen de fabrication d'une pièce soit minimal. Déterminer alors ce coût moyen, au centime d'euro près.

2) Justifier qu'il est possible que le coût moyen de fabrication d'une pièce soit inférieur ou égal à $1,50$ **€**.

3) Est-il possible que le coût moyen d'une pièce soit de 50 centimes ? Justifier.

Exercice 63



Lors d'une expérience en laboratoire, on lance un projectile dans un milieu fluide. Dans ce cas, le modèle parabolique usuel pour la trajectoire n'est pas adapté.

On modélise le projectile par un point qui se déplace, dans un plan vertical, sur la courbe représentative de la fonction f définie sur $[0\,;\,1[$ par $f(x) = 5x + 2\ln(1-x)$, où x est l'abscisse du projectile, son ordonnée, toutes les deux exprimées en mètre.

1) **a)** Montrer que, pour tout réel $x \in [0\,;\,1[$, $f'(x) = \dfrac{3-5x}{1-x}$.

b) En déduire le tableau de variations de f.

c) Quelle est la hauteur maximale atteinte par le projectile ?

2) **a)** Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions sur $[0\,;\,1[$: 0 et un réel $\alpha > 0,6$.
Donner une valeur approchée de α à $0,001$ près.

b) Interpréter la valeur de α dans le contexte.

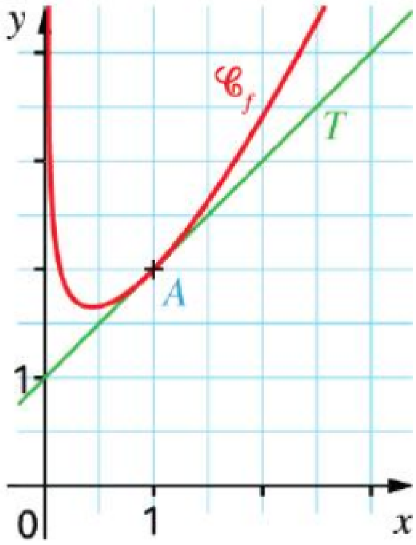
Exercice 64

Pour un épicéa dont l'âge est compris entre 20 et 120 ans, on modélise la relation entre son âge (en année) et le diamètre de son tronc (en mètre) mesuré à $1,30\ m$ du sol par la fonction f définie sur $]0\ ;\ 1]$ par $f(x) = 30\ln\left(\dfrac{20x}{1-x}\right)$, où x désigne le diamètre exprimé en mètre et $f(x)$ l'âge en année.

1) Étudier le sens de variation de f sur $]0\ ;\ 1]$. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

2) Déterminer les valeurs du diamètre x du tronc pour que l'âge calculé dans ce modèle reste conforme à ses conditions de validité, c'est-à-dire compris entre 20 et 120 ans.

Exercice 65



La courbe ci-dessus représente une fonction f définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = ax + b\ln x$, où a et b sont deux réels inconnus.
La courbe passe par le point A et admet en ce point la tangente T.

1) **a)** Lire graphiquement $f(1)$.
   b) En déduire la valeur du nombre a.

2) **a)** Montrer que $f'(x) = 2 + \dfrac{b}{x}$.
   b) Lire graphiquement $f'(1)$.
   c) En déduire la valeur du nombre b.

3) Étudier les variations de la fonction f.

Exercice 66

Soit u une fonction définie, dérivable et strictement positive sur un intervalle I. On note f la fonction définie sur I par $f(x) = \ln(u(x))$.

1) Exprimer $f'(x)$.

2) Étudier le signe de $f'(x)$ en fonction de celui de $u'(x)$ et $u(x)$.

3) En déduire que la fonction f a les mêmes variations que la fonction u.

Exercice 67

Vrai ou faux ?

Soient deux réels $a > 0$ et $b > 0$.

Pour chaque affirmation suivante, préciser si elle est vraie ou fausse.

1) $\ln(a+b) = \ln a \times \ln b$

2) $\ln(a^2) = 2\ln a$

3) $\ln(2a) = \ln 2 + \ln a$

4) $\ln(ea) = 1 + \ln a$

Exercice 68

Sans calculatrice

Vérifier les égalités suivantes.

1) $\ln 3 + \ln 9 + 3\ln\left(\frac{1}{3}\right) = 0$

2) $2\ln 4 + 3\ln 2 + 6\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln 2$

3) $3\ln e + \ln(e^4) + 5\ln\left(\frac{1}{e}\right) = 2$

Exercice 69

Écrire sous la forme d'un seul logarithme les nombres suivants.

1) $A = 2\ln 5 + 3\ln 2 - \ln 16$

2) $B = -3\ln 3 + \ln 9 + 1$

3) $C = 4\ln 3 + 2\ln 5 + 4\ln 1$

4) $D = 2\ln 4 - 3\ln 3$

<u>Exercice 70</u>

Justifier les résultats suivants, obtenus à l'aide d'un logiciel de calcul formel.

1	Simplifier(ln(4)+3*ln(2)-ln(8))
	→ $2\ln(2)$
2	Simplifier(3*ln(7)-2*ln(49))
	→ $-\ln(7)$

Exercice 71

Écrire sous la forme d'une somme de logarithmes les nombres suivants.

1) $A = \ln\left(\dfrac{3 \times 5}{7}\right)$

2) $B = \ln\left(5^4 \times 2^3\right)$

3) $C = \ln\left(\dfrac{3^4 \times 5^2}{7^3}\right)$

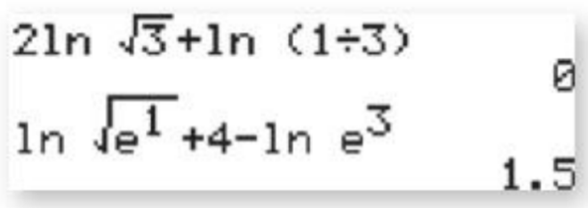
Exercice 72

Logarithme népérien d'une racine carrée

1) Soit $x > 0$.
En utilisant $(\sqrt{x})^2 = x$, montrer que $\ln\sqrt{x} = \frac{1}{2}\ln x$.

2) **a)** Montrer que : $\ln\sqrt{2} + \ln\sqrt{8} = 2\ln 2$.

b) Justifier la capture d'écran ci-dessous.



Exercice 73

Vrai ou faux ?

On considère l'équation suivante dans $]0\ ;\ +\infty[$:
$\ln(x^2) - \ln\left(\dfrac{x^5}{e}\right) + \ln 2 = \ln(2x) + 5.$

L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ?

« $\dfrac{1}{e}$ est l'unique solution de cette équation dans l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$. »

Exercice 74

Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul et tout nombre réel $k > 0$, l'équation $x^n = k$ admet pour unique solution $x = e^{\frac{1}{n}\ln k}$ dans $[0 ; +\infty[$.

NB : Cette solution s'appelle la racine n-ième de k. On la note $\sqrt[n]{k}$ ou $k^{\frac{1}{n}}$.

Exercice 75

D'après l'INSEE, la population en France (hors collectivités d'outre-mer) est passée de $65,027$ millions d'habitants en 2011 à $67,064$ millions d'habitants en 2020. On suppose que chaque année, entre 2011 et 2020, le nombre d'habitants a augmenté en moyenne de t %.

1) **a)** On note CM le coefficient multiplicateur associé à l'augmentation annuelle de t %.
Justifier que $CM^9 = \dfrac{67,064}{65,027}$.

b) Justifier que le résultat suivant, obtenu à l'aide de la calculatrice, permet de déterminer une valeur approchée de CM.

$$e^{\frac{1}{9}\ln\left(\frac{67.064}{65.027}\right)} \qquad 1.003433082$$

c) En déduire la valeur de t, arrondi à $0,01$ près.

d) Interpréter le résultat obtenu.

2) On suppose que cette évolution annuelle moyenne se maintient dans les années à venir.

a) Estimer le nombre d'habitants en 2025.

b) Estimer la première année à partir de laquelle la population française devrait dépasser les 70 millions d'habitants.

c) Cette estimation est-elle cohérente avec la projection de l'INSEE qui prévoit en 2030 une population de $70,281$ millions d'habitants ?

Exercice 76

Voici un extrait d'un article, publié en avril 2019, de futura-sciences.com :

> Selon des estimations, les glaciers alpins s'étendaient sur un peu moins de $340\ km^2$ au milieu des années 1980. À la fin des années 2000, en revanche, cette superficie avait fortement diminué, atteignant $275\ km^2$. **Soit une baisse de $20\ \%$ environ en vingt-cinq ans.**

1) Vérifier l'affirmation surlignée en gras.

2) Soit t le taux de diminution moyen annuel, exprimé en pourcentage, de la fonte des glaciers sur ces 25 ans.

- **a)** Justifier que $(1-t)^{25} = 0,8$.
- **b)** Montrer que $t \approx 0,889\ \%$.

3) Dans le même article, on peut lire : « Les glaciers alpins risquent de fondre à $90\ \%$ d'ici 2100. »
Que peut-on penser de cette affirmation ?

Exercice 77

Le musée du quai Branly à Paris a accueilli $1,26$ million de visiteurs en 2018, soit une hausse de $7\ \%$ par rapport à 2017. On suppose que cette évolution se maintient et on s'intéresse au nombre d'entrées en $2018 + n$ où n est un entier naturel.

1) Déterminer le nombre d'entrées en 2019 et 2020.

2) **a)** Déterminer la plus petite valeur de l'entier n telle que $1,26 \times 1,07^n > 2$.

b) Que signifie le résultat pour le musée ?

3) Dans le même temps, en 2018, le musée du Louvre a battu son record de fréquentation en accueillant $10,2$ millions de visiteurs. Déterminer en quelle année le musée du quai Branly devrait accueillir pour la première fois plus de 10 millions de visiteurs ?
Que peut-on penser du résultat obtenu ?

Exercice 78

Exercice 79

Exercice 80

Exercice 81

Exercice 82

Exercice 83

Exercice 84

Exercice 85