Exercice 1

(v_n) est la suite définie par $v_0 = 6$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad v_{n+1} = \dfrac{1}{2}v_n + 5$.

1) Calculer les cinq premiers terme de la suite (v_n).

2) Conjecturer son sens de variation.

3) Valider ou corriger votre conjecture à l'aide d'un raisonnement par récurrence.

Exercice 2

(w_n) est la suite définie par $w_0 = 150$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad w_{n+1} = 0,75w_n + 30$.

1) Conjecturer le sens de variation de la suite (w_n).

2) Valider ou corriger votre conjecture à l'aide d'un raisonnement par récurrence.

Exercice 3

P_n est la proposition : "$10^n - 1$ est divisible par 9".
Q_n est la proposition : "$10^n + 1$ est divisible par 9".

1) Démontrer que P_n et Q_n sont héréditaires.

2) Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie.

3) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, Q_n est fausse.

Exercice 4

Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3^{2n} - 1$ est divisible par 8.

Exercice 5

Démontrer par récurrence que, pour tout nombre $n \geqslant 1$:

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots + n \times (n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Exercice 6

Démontrer par récurrence que, pour tout nombre $n \geqslant 1$:

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2.$$

Exercice 7

(u_n) est la suite définie par $u_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad u_{n+1} = u_n - \dfrac{1}{n(n+1)}$.

1) Calculer les cinq premiers terme de la suite (u_n) sous la forme de fraction irréductible.

2) Conjecturer une expression de u_n en fonction de n.

3) Valider ou corriger votre conjecture à l'aide d'un raisonnement par récurrence.

Exercice 8

Voici une fonction en Python :

```
def suite(n):
    u=1
    for k in range(n):
        u=(1+1/(k+1))*u
    return u
```

1) Donner la forme récurrente de la suite (u_n) définie par cette fonction.

2) Que renvoient suite(0), suite(1), suite(2) ?

3) Conjecturer une expression de u_n en fonction de n.

4) Valider ou corriger votre conjecture à l'aide d'un raisonnement par récurrence.

Exercice 9

w_n est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $w_n = n^2 - 2n + 2$.

1) Conjecturer la limite de (w_n) à l'aide d'un outil numérique.

2) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = (n-1)^2 - 1$.

3) En utilisant une définition du cours, valider ou corriger votre conjecture.

Exercice 10

(v_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $\quad v_n = -\dfrac{5}{n^2}$.

1) Déterminer un indice n_0 à partir duquel $\quad v_n \in]-10^{-9}\ ;\ 10^{-9}[$.

2) En utilisant une définition du cours, justifier que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$.

Exercice 11

(x_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $\quad x_n = \dfrac{\sqrt{n}}{3n}$.

1) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad x_n = \dfrac{1}{3\sqrt{n}}$.

2) En déduire la limite de la suite (x_n).

Exercice 12

(u_n) est la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_{n+1} = \dfrac{n+2}{3n+5} \times u_n$.

On admet que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.
Recopier et compléter le programme suivant afin qu'à la fin de son exécution, la variable n contienne le plus petit entier naturel tel que $u_n \in]-10^{-9}\ ;\ 10^{-9}[$.

```
n = 0
u = 1
while ...:
    n = ...
    u = ...

print(n)
```

Exercice 13

(v_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = 2n^2 + 3n$.

1) Démontrer que la suite (v_n) est croissante sur $\mathbb{N}$.

2) On considère un nombre réel positif A.
Déterminer un entier naturel n_0 tel que, pour tout entier $n \geqslant n_0$, $v_n \in [A\ ;\ +\infty[$.

3) En déduire la limite de (v_n).

Exercice 14

(u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{3n^2 - 4}{n + 2}$.

1) Conjecturer la limite de la suite (u_n).

2) Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'inéquation $u_n \geqslant 1\,000$.

3) Pour vérifier sa réponse à la question b), Joseph a codé la fonction en Python suivante :

```python
def seuil():
    n = 0
    u = -2
    while (u>=1000):
        n = n+1
        u = (3*n**2-4)/(n+2)
    return u

```

D'après son professeur, des erreurs se sont glissées dans son programme. Aider Joseph à se corriger.

Exercice 15

(u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = n^2 - 4n + 5$.

1) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = n^2\left(1 - \dfrac{4}{n} + \dfrac{5}{n^2}\right)$.

2) En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 16

(w_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $w_n = \sqrt{n} - 2n^2$.

1) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $w_n = \sqrt{n}\,(1 - 2n\sqrt{n})$.

2) En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = +\infty$.

Exercice 17

(u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = e^{2n} - 4e^n + 2$.

1) À l'aide d'un outil numérique, conjecturer la limite de suite (u_n).

2) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = e^n \left[1 - 4e^{-n} + 2\left(e^{-n}\right)^2\right]$.

3) En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 18

Une ferme marine produit des algues alimentaires.
Un expert est chargé d'étudier l'évolution du stock, dont les variations dépendant de la reproduction naturelle.
L'expert estime que la masse totale du stock peut être modélisée par une suie (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = \dfrac{5\,000}{9 + e^{-0{,}1n}}$, où n désigne le temps écouté, exprimé en semaines, depuis l'instant initial.

1) **a)** À l'aide d'un outil numérique, calculer les 10 premiers termes de la suite (u_n).

b) Conjecturer les variations et la limite de (u_n).

c) Valider ou corriger les conjectures émises.

d) Interpréter les résultats.

2) Le gérant de la ferme souhaite suivre l'évolution de son stock jusqu'à la date à partir de laquelle celui-ci dépassera 550 tonnes.

a) Recopier et compléter la fonction en Python ci-dessous, qui renvoie dans une liste le stock de chaque semaine jusqu'à ce que celui-ci dépasse le nombre s passé en paramètre.

```python
import math

def production(s) :
    p = [500]
    n = 0
    while p[len(p)-1] ... :
        n = ...
        p.append(...)
    return p

```

b) Que renvoie sum(production(550)) ?
Interpréter ce résultat dans le contexte.

Exercice 19

(u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = 3n + \cos(n)$.

1) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $3n - 1 \leqslant u_n \leqslant 3n + 1$.

2) En déduire la limite de (u_n), en précisant quelle inégalité a été utilisée.

Exercice 20

(v_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $v_n = \dfrac{1+(-1)^n}{n^2}$.

1) Démontrer que, pour tout $nin\mathbb{N}^*$, on a : $0 \leqslant v_n \leqslant \dfrac{2}{n^2}$.

2) En déduire la limite de (v_n).

Exercice 21

(u_n) est la suite définie par $u_0 = 8$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_{n+1} = 0,8u_n + 2$.

1) Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, : $\quad u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 10$.

2) En déduire que la suite (u_n) converge.

3) Déterminer sa limite.

Exercice 22

(v_n) est la suite définie par $v_0 = 2,1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad v_{n+1} = \dfrac{v_n^2}{3}$.

1) Démontrer par récurrence que la suite (v_n) est décroissante et minorée par 0.

2) En déduire que cette suite converge.

3) On note l sa limite. Démontrer que $l = \dfrac{l^2}{3}$.

4) Justifier que $l \leqslant 2,1$.

5) En déduire la valeur de l.

Exercice 23

Une entreprise décide de réduire ses rejets de CO_2 de $2\ \%$ par an. En 2020, elle a rejeté 150 tonnes de CO_2.
On note T_n la masse totale de CO_2 rejetée par l'entreprise, en tonnes, entre 2020 et 2020 + n, où n est un nombre d'années entier.
L'informaticien chargé du dossier a codé la fonction suivante en Python.

```python
def masse_totale(n) :
    u = 150
    T = 0
    for i in range(n+1) :
        T = T+u
        u = u * 0.98
    return T

```

1) Que renvoie cette fonction ?

2) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad T_n = 7\,500\left(1 - 0,98^{n+1}\right)$.

3) En déduire la masse totale de CO_2 rejetée par l'entreprise sur le long terme.

Exercice 24

Sans questions intermédiaires

(u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 10$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_{n+1} = \dfrac{10}{e^{-u_n} + 5}$.
Démontrer la convergence de la suite (u_n).

Exercice 25

(u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $\quad u_n = \dfrac{2^n}{\sqrt{n!}}$.

1) Justifier que, pour tout entier naturel $n \geqslant 15$, $\quad u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2} u_n$.

2) En déduire que, pour tout entier naturel $n \geqslant 15$, $\quad 0 \leqslant u_n \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-15} u_{15}$.

3) En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 26

Exercice 27

Exercice 28

Exercice 29

Exercice 30

Exercice 31

Exercice 32

Exercice 33

Exercice 34

Exercice 35

Exercice 36

Exercice 37

Exercice 38

Exercice 39

Exercice 40

Exercice 41

Exercice 42

Exercice 43

Exercice 44

Exercice 45

Exercice 46

Exercice 47

Exercice 48

Exercice 49

Exercice 50