Exercice 1

Dans chaque cas, déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f = g \circ u$ et, pour tout x dans cet ensemble, exprimer $f(x)$.

1) $g \ : \ x \longmapsto \sqrt{x}$ et $u \ : \ x \longmapsto -x^2 + x + 6$.

2) $g \ : \ x \longmapsto e^x$ et $u \ : \ x \longmapsto |x|$.

3) $g \ : \ x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ et $u \ : \ x \longmapsto x^3 - 8$.

Exercice 2

Dans chaque cas, f est la fonction composée d'une fonction polynôme u suivie d'une fonction g.
Déterminer l'ensemble de définition de f et les deux fonctions g et u.

1) $f \ : \ x \longmapsto e^{2x^3+4x-1}$

2) $f \ : \ x \longmapsto \dfrac{1}{x^2-5x+4}$

3) $f \ : \ x \longmapsto |x^4-8|$

Exercice 3

Dans chaque cas, calculer la limite de la fonction f en a si elle existe.

1) $f(x) = \left(\frac{1}{x} - 3\right)^2$ et $a = +\infty$.

2) $f(x) = \sqrt{\sqrt{x} + x}$ et $a = +\infty$.

3) $f(x) = \frac{1}{e^{-6x-10}}$ et $a = -\infty$.

Exercice 4

Dans chaque cas, calculer la limite de la fonction f en a si elle existe.

1) $f(x) = \left(\dfrac{-3x^2+x}{x+2}\right)^2$ et $a = +\infty$.

2) $f(x) = \sqrt{-x^3+x}$ et $a = -\infty$.

3) $f(x) = e^{x^2-4x+5}$ et $a = +\infty$.

Exercice 5

Dans chaque cas, donner l'intervalle sur lequel la fonction f est dérivable et calculer la fonction dérivée sur cet intervalle.

1) $f(x) = \sqrt{-4x^2 + 16}$

2) $f(x) = 4x + 5 + e^{-2x+3}$

3) $f(x) = \dfrac{2}{1 + e^{-4x}}$

Exercice 6

Dans chaque cas, donner l'intervalle sur lequel la fonction f est dérivable et calculer la fonction dérivée sur cet intervalle.

1) $f(x) = \dfrac{1}{3x^2 + 9x + 6}$

2) $f(x) = \left(\sqrt{x} + 3\right)^4$

3) $f(x) = \dfrac{3x - 5}{e^{3x-5}}$

Exercice 7

Étudier les variations de la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x-4)\,e^{-5x}$.

Exercice 8

f est la fonction définie par $f(x) = \sqrt{\dfrac{2x-1}{2x+1}}$.

1) Justifier que l'ensemble de définition de f est $\left]-\infty\ ;\ -\dfrac{1}{2}\right[\cup \left[\dfrac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$.

2) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

3) Déterminer les intervalles sur lesquels la fonction f est dérivable et calculer $f'(x)$ sur ceux-ci.

4) Dresser le tableau de variations de f en y faisant figurer les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition.

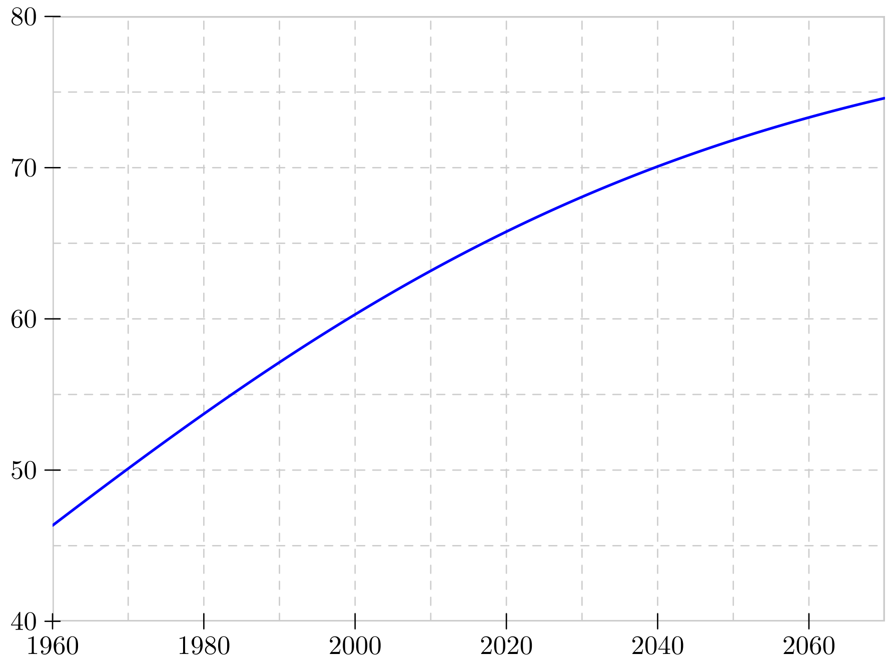
Exercice 9

a et b sont deux nombres réels tels que $a \neq 0$.
f est la fonction définie sur $[3\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{ax+b}$.
On note f' sa fonction dérivée définie sur l'intervalle $]3\ ;\ +\infty[$.

Sachant que $f(3) = 0$ et que $f'(5) = \dfrac{1}{2}$, déterminer les valeurs de a et de b.

Exercice 10

En 2007, l'INSEE a réalisé des projections sur l'évolution de la population en France métropolitaine jusqu'à l'année 2060.
Ce scénario a été modélisé par la fonction f définie sur $[1960\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{77}{1+e^{39-0{,}02x}} + 4$, où x désigne l'année et $f(x)$ la population en France métropolitaine en millions d'habitants.
La courbe représentative de f est donnée ci-dessous.



1) Selon ce modèle, quel sera le nombre d'habitants en France métropolitaine en 2020 ?
Donner une valeur approchée au millier d'habitants.

2) Démontrer que la fonction f est croissante sur $[1960\ ;\ +\infty[$.

3) Calculer la limite de f en $+\infty$.

Exercice 11

Pour chaque fonction, déterminer les intervalles sur lesquels elle est deux fois dérivable, puis calculer sa dérivée seconde.

1) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

2) $f(x) = 4x + 2$

3) $f(x) = \sqrt{x}$

Exercice 12

Pour chaque fonction, déterminer les intervalles sur lesquels elle est deux fois dérivable, puis calculer sa dérivée seconde.

1) $f(x) = (-4x+1)^3$

2) $f(x) = (2x-1)\,e^x$

3) $f(x) = e^{-0,1x^2}$

Exercice 13

Pour chaque fonction définie et deux fois dérivables sur I, étudier la convexité de la fonction.

1) $f(x) = e^x + e^{-x}$ sur $I = \mathbb{R}$.

2) $f(x) = e^{-6x+4}$ sur $I = \mathbb{R}$.

3) $f(x) = \dfrac{1}{2x-4}$ sur $I =]-\infty\ ;\ 2[$.

Exercice 14

Pour chaque fonction définie et deux fois dérivables sur I, étudier la convexité de la fonction.

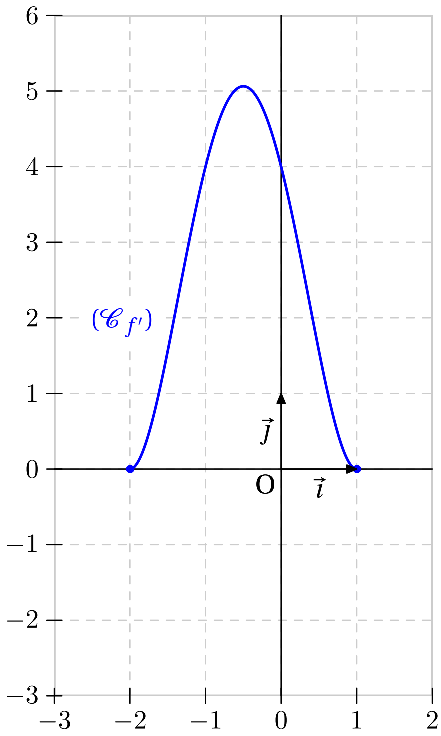
1) $f(x) = \sqrt{4x+1}$ sur $I = \left]-\frac{1}{4}\ ;\ +\infty\right[$.

2) $f(x) = \dfrac{-2x+1}{3x+5}$ sur $I = \left]-\frac{5}{3}\ ;\ +\infty\right[$.

3) $f(x) = (2x+1)^4$ sur $I =]-\infty\ ;\ 2[$.

Exercice 15

Dans le plan muni d'un repère, on a tracé la courbe représentative $(\mathcal{C}_{f'})$ de la fonction dérivée f' d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-2\ ;\ 1]$. On donne $f(0) = -2$.



1) À partir du graphique, conjecturer :

a) le sens de variation de la fonction f ;

b) une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 0 ;

c) la convexité de f.

2) Une expression de f' sur $[-2\ ;\ 1]$ est $f'(x) = (x^2 + x - 2)^2$.
Retrouver par le calcul toutes les conjectures émises de la question 1).

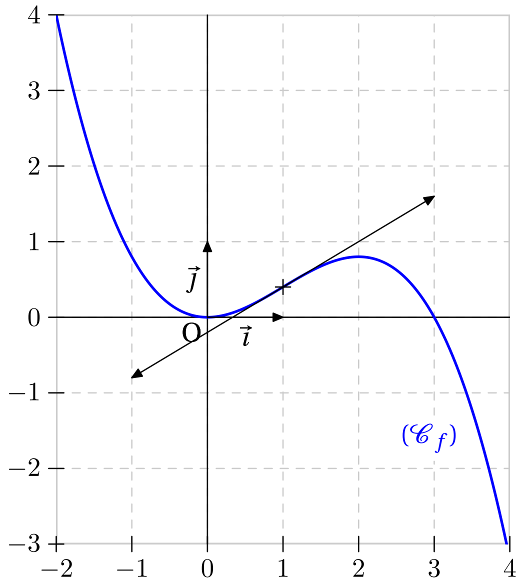
Exercice 16

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^3 + 5x^2 + 3x$, où a est un réel non nul.

Étudier la convexité de f en fonction de a.

Exercice 17

Dans le plan muni d'un repère, on a tracé la courbe représentative d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur l'intervalle $[-2\ ;\ 4]$.



1) Étudier graphiquement les variations et la convexité de la fonction f sur $[-2\ ;\ 4]$.

2) Déterminer graphiquement le signe et les variations de la fonction dérivée f' de f sur $[-2\ ;\ 4]$.

3) Le point $A(1\ ;\ -0,5)$ peut-il être un point de la courbe représentative de la fonction dérivée f' ? Justifier.

4) Peut-on dire que $f'(2,3) \geqslant f'(3,5)$? Justifier.

5) Le point $B(3\ ;\ 1)$ peut-il être un point de la courbe représentative de la fonction dérivée seconde f'' de f ? Justifier.

Exercice 18

Le coût total, en centaines d'euros, de production d'une lasure pour boiseries extérieures est modélisé par la fonction C définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 10]$ par $C(x) = 10 + 0,5x^2 - e^{-x+3}$, où x désigne le nombre de tonnes de lasure produites.

1) Calculer une expression de $C'(x)$ et de $C''(x)$ pour tout $x \in [0\ ;\ 10]$.

2) Le coût marginal de production est assimilé à la fonction dérivée du coût total. Pour quelle production le coût marginal est-il minimal ?

Info : en économie, le coût marginal C_m pour une quantité x produite est le coût de fabrication d'une unité supplémentaire : $C_m(x) = C(x+1) - C(x)$. Lorsque les quantités sont importantes, on a $C_m(x) \approx C'(x)$.

Exercice 19

f est la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ et $(\mathcal{C}_f)$ est sa courbe représentative dans le plan repéré.

1) Montrer que, $\quad \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \dfrac{4}{x+5} \leqslant \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{5}$.

2) Déterminer une équation de la tangente à $(\mathcal{C}_f)$ au point A d'abscisse 2 et en déduire que, pour tout nombre réel x strictement positif, $\quad \dfrac{1}{x} \geqslant -\dfrac{x}{4} + 1$.

NB : on pourra se servir des inégalités de convexité.

Exercice 20

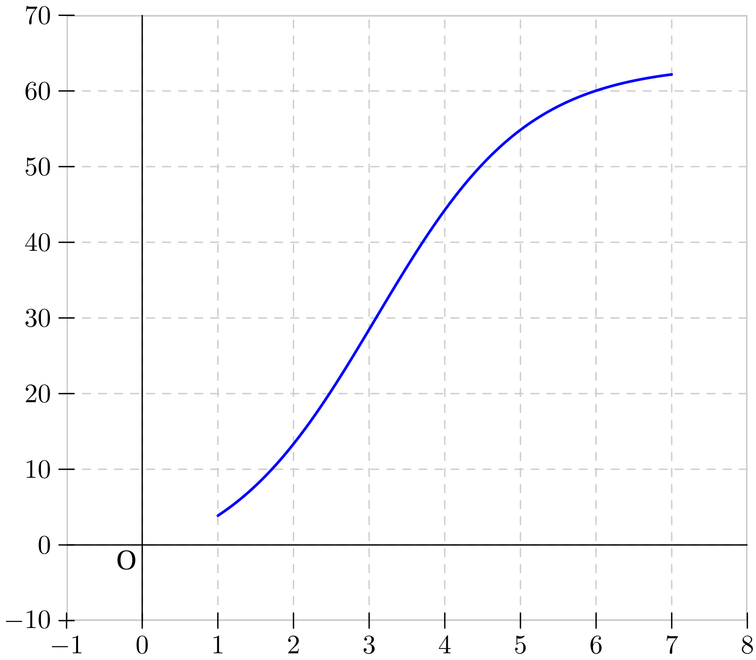
f est la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = x^3$ et $(\mathcal{C}_f)$ est sa courbe représentative dans le plan repéré.

1) Montrer que, $\quad (x+1)^3 \leqslant 4x^3 + 4$.

2) Déterminer une équation de la tangente à $(\mathcal{C}_f)$ au point A d'abscisse 1 et en déduire que, pour tout nombre réel x strictement positif, $\quad x^3 \geqslant 3x - 2$.

3) h est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\quad h(x) = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{3}{2}x^2 + 2x + 5$.
En utilisant l'inégalité précédente, montrer que la fonction h est croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

Exercice 21



La courbe ci-dessus modélise le taux d'équipement des français en téléphone mobile de 1997 à 2004.
On estime que le taux pour l'année $1996 + x$ est donné par : $f(x) = \dfrac{67}{1 + 22e^{-x}} - 3,5$ avec $x \in [1\ ;\ 7]$.
Par exemple, le 1er mars 1998, $x \approx 2,17$ et le taux d'équipement des Français est $f(2,17) \approx 15,5$.

1) **a)** À l'aide du graphique, estimer en quelle année le rythme de croissance est maximal.

b) À quoi correspond la valeur x associée à cette année pour la courbe représentative de la fonction f ?

c) La fonction f est deux fois dérivable sur $[1\ ;\ 7]$. Calculer une expression de $f''(x)$.

d) Déterminer, par le calcul, une valeur approchée de l'abscisse du point d'inflexion de la courbe représentative de f (on donne $e^{-3} \approx \dfrac{1}{22}$).

2) En 2018, $94\ \%$ des français étaient équipés en téléphone mobile.
Le modèle utilisé précédemment reflète-t-il la réalité après 2004 ?

Exercice 22

La quantité demandée de stylos d'une marque donnée, en fonction du prix unitaire x de 1 € à 10 €, est donnée par la fonction f définie sur l'intervalle $[1\ ;\ 10]$ par : $f(x)=\dfrac{10x}{(x+2)^2}$.

1) Étudier les variations et la convexité de f sur $[1\ ;\ 10]$.

2) Pour quel prix la demande est-elle maximale ?

3) Au-delà de ce prix maximal, si le prix augmente la demande diminue. À partir de quel prix peut-on dire que la vitesse de diminution ralentit ?

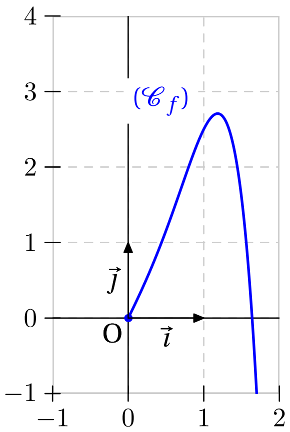
Exercice 23

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - 0,5\ e\ x^2$.

1) En utilisant la convexité de la fonction exponentielle et la tangente à sa courbe au point d'abscisse 1, justifier que pour tout x, $e^x \geqslant e\ x$.

2) Déterminer le tableau de variations de f.

Exercice 24



f est la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 2]$ par : $f(x) = -x^5 + x^4 + 0,5x^2 + 2x$.
On admet que la fonction f est convexe puis concave. sa courbe $(\mathcal{C}_f)$, tracée ci-dessus, admet donc un point d'inflexion.

Recopier et compléter le programme suivant de telle sorte que l'appel **inflexion(0)** renvoie une valeur approchée des coordonnées du point d'inflexion de $(\mathcal{C}_f)$.

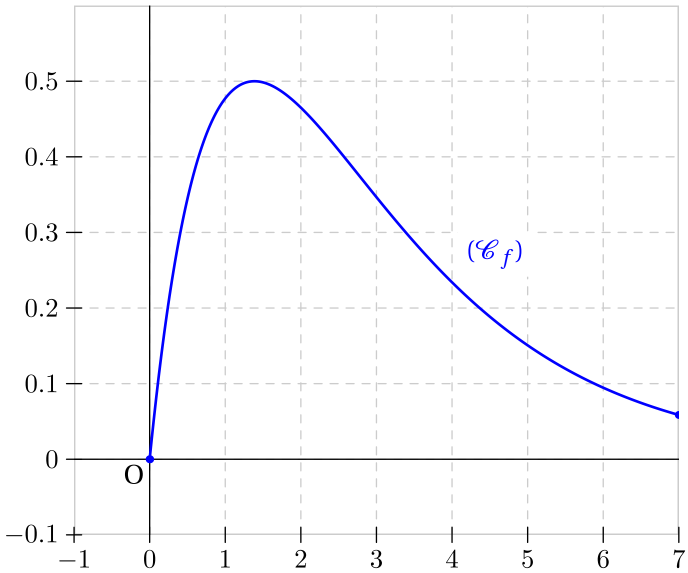
```
def fseconde(x):
    return ...

def inflexion(x) :
    while ... :
        x = x + 0.001
    return [...,...]

```

Exercice 25

On a étudié l'évolution du taux d'alcoolémie dans le sang d'un homme de $70\ kg$ pendant les cinq heures suivant l'absorption de deux verres de vin au cours d'un repas.
On suppose que le taux d'alcoolémie (exprimé en grammes d'alcool par litre de sang) est modélisé en fonction du temps écoulé depuis la consommation (exprimé en heures) pr la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 7]$ par $f(t) = 2e^{-\frac{t}{2}} - 2e^{-t}$.



Données : $e^{0,693} \approx 2$ et $e^{1,386} \approx 4$.

1) Déterminer par le calcul au bout de combien de temps, approximativement, le taux d'alcoolémie est maximal.
2) Étudier la convexité de f sur $[0\ ;\ 7]$.
3) Déterminer au bout de combien de temps, approximativement, la diminution du taux d'alcool dans le sang décélère.

Exercice 26

Exercice 27

Exercice 28

Exercice 29

Exercice 30

Exercice 31

Exercice 32

Exercice 33

Exercice 34

Exercice 35

Exercice 36

Exercice 37

Exercice 38

Exercice 39

Exercice 40

Exercice 41

Exercice 42

Exercice 43

Exercice 44

Exercice 45

Exercice 46

Exercice 47

Exercice 48

Exercice 49

Exercice 50