Exercice 1

Résoudre dans $]0\ ;\ +\infty[$ les équations suivantes.

1) $\ln(x) = 6$

2) $\ln(x) = -2$

3) $(\ln(x))^2 = 9$

4) $(e^x - 1)(7 + \ln x) = 0$

Exercice 2

Résoudre dans $]0\ ;\ +\infty[$ les équations suivantes.

1) $\ln(x) - \sqrt{2} = 0$

2) $1 - 2\ln x = 0$

3) $3\ln x + 11 = 5$

4) $(2x-1)(\ln x - 3) = 0$

Exercice 3

Exprimer chaque nombre réel en fonction de $\ln 2$.

1) $\ln 16$

2) $\ln\left(\dfrac{1}{4}\right)$

3) $\ln\left(\sqrt{64}\right)$

4) $\ln\left(\dfrac{1}{256}\right)$

Exercice 4

Exprimer chaque nombre réel en fonction de $\ln 3$ et $\ln 7$.

1) $\ln 21$

2) $\ln\left(\dfrac{3}{7}\right)$

3) $\ln\left(3\sqrt{21}\right) + \ln 49$

4) $\ln\left(\dfrac{343}{27}\right)$

Exercice 5

Montrer que $\frac{1}{e}$ est l'unique solution dans l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ de l'équation : $\ln\left(x^2\right)-\ln\left(\frac{x^5}{e}\right)+\ln 2=\ln(2x)+5$.

Exercice 6

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

1) "L'équation $x \ln x = 3 \ln x$ admet dans $]0\ ;\ +\infty[$ deux solutions : 1 et 3."

2) "L'équation $(e^x + 1)(e^x - 2) = 0$ n'admet aucune solution dans $\mathbb{R}$."

3) "$e^{5 \ln 2} \times e^{7 \ln 4} = 2^{19}$."

Exercice 7

QCM

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{-x}$.

1) L'image de $\ln 2$ par f est égale à :

a) $-2\ln 2$

b) $\ln 2$

c) $\frac{1}{2}\ln 2$

d) $2\ln 2$

2) L'image de $\ln\left(e^3\right)$ par f est égale à :

a) $3e^3$

b) $\frac{3\ln(e)}{e^3}$

c) $-3e^{\ln 3}$

d) $\frac{3}{e^{-3}}$

Exercice 8

1) Montrer que $\ln\left(\sqrt{3}\right) + \ln\left(\sqrt{27}\right) = 2\ln 3$.

2) Justifier que $\ln\left(2e^3\right) + \ln\left(\dfrac{e}{2}\right) = 4$.

3) Est-il vrai que $x = e^{\frac{\ln 5}{2}}$ est solution de l'équation $x^6 = 125$?

Exercice 9

QCM

1) L'équation $\ln(x+1) + \ln 5 = 1$ a pour solution sur $]-1\ ;\ +\infty[$:

a) $x = -0,5$

b) $x = e - 6$

c) $x = \dfrac{e}{5} - 1$

d) $x = -1$

2) Soit $f(x) = 2 - e^{2x - \ln 3}$. L'image de 1 par f est égale à :

a) $5 - e^2$

b) $-0,46$

c) $\dfrac{\ln 3}{2}$

d) $\dfrac{6 - e^2}{3}$

Exercice 10

Marwa s'interroge sur la fonction **p** codée en python ci-dessous.

```python
import math

def p(a,b) :
    c = math.log(a)+math.log(b)
    return math.exp(c)

```

1) Coder cette fonction et effectuer les appels **p(3,5)** et **p(7,3)**.

2) Démontrer que l'on pouvait s'attendre à ce résultat.

Exercice 11

Pour chaque équation, déterminer l'ensemble $\mathcal{D}$ des nombres réels x pour lesquels elle est définie, puis la résoudre dans $\mathcal{D}$.

1) $\ln(-x+1) = \ln 2$

2) $\ln\left(x^2 - 2x\right) = \ln 4$

3) $\ln\left(9x^2 - 64\right) = 1$

4) $\ln\left(\dfrac{1}{5x-1}\right) = 1$

Exercice 12

Pour chaque équation, déterminer l'ensemble $calD$ des nombres réels x pour lesquels elle est définie, puis la résoudre dans $calD$.

1) $\ln\left(x^2\right) = \ln 81$

2) $\ln\left(4x^2 - 1\right) - \ln(2x+1) = 0$

3) $\ln\left(3x - 1\right) + \ln x = 2\ln 5$

4) $\ln\left(x - 3\right) + \ln\left(3x - 1\right) = 2\ln 3$

Exercice 13

Dresser le tableau de variations de chacune des fonctions, définies et dérivables sur $]0\ ;\ +\infty[$.

1) $f(x) = \ln x + x - 3$

2) $f(x) = \ln x - \dfrac{1}{x} + 2$

3) $f(x) = (5 - x)\ln x$

4) $f(x) = (e^x - 2)(1 + 2\ln x)$

Exercice 14

Dresser le tableau de variations de chacune des fonctions, définies et dérivables sur $]0\ ;\ +\infty[$.

1) $f(x) = 2\ln x + x - 1$

2) $f(x) = \dfrac{2}{x} - \ln x$

Exercice 15

Résoudre dans $]0\ ;\ +\infty[$ chacune des inéquations suivantes.

1) $\ln x < 0$

2) $\ln x \geqslant 1$

3) $e^x + 2 > 4$

4) $3e^{2x} - 15 > 0$

Exercice 16

Résoudre dans $]0\ ;\ +\infty[$ chacune des inéquations suivantes.

1) $\ln x > \ln(3x)$

2) $1 - 2\ln x \leqslant 7$

3) $2e^x - 3 > 1 + e^x$

4) $e^{x^2} > 2$

Exercice 17

Résoudre dans $]0\ ;\ +\infty[$ chacune des équations suivantes.

1) $x^7 = 5$

2) $1 - x^8 = 0,2$

3) $x^{10} = 2$

Exercice 18

Résoudre dans $]0\ ;\ +\infty[$ chacune des équations suivantes.

1) $x^4 = 1,1$

2) $(1+x)^3 = 27$

3) $(1-x)^8 = 0,8$

Exercice 19

Déterminer le plus petit entier naturel n solution de chacune des inéquations suivantes.

1) $2^n > 175$

2) $\left(\frac{1}{4}\right)^n \leqslant 10^{-3}$

3) $0,8^n < 10^{-4}$

Exercice 20

Déterminer le plus petit entier naturel n solution de chacune des inéquations suivantes.

1) $0,5^n \leqslant 0,1$

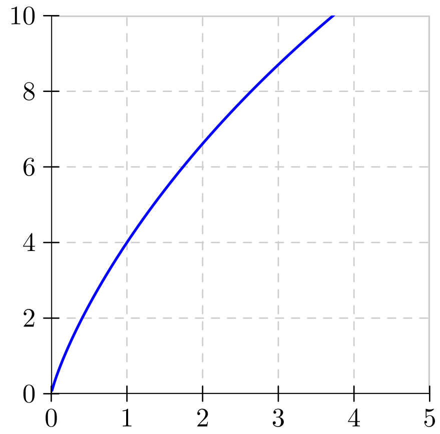
2) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^n \leqslant 10^{-4}$

3) $1 - \left(\dfrac{3}{7}\right)^n \geqslant 0,99$

Exercice 21

La fonction f est définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = 4x - x\ln x$.

Mila a obtenu à l'aide de sa calculatrice une partie de la courbe représentative de la fonction f présentée ci-contre.



Elle émet la conjecture suivante : "Il semble que la fonction f soit positive."

1) Résoudre dans $]0\ ;\ +\infty[$ l'équation $f(x) = 0$.

2) Déterminer le signe de $f(x)$ sur $]0\ ;\ +\infty[$.

3) Expliquer pourquoi Mila a pu penser que sa conjecture était vraie.

Exercice 22

La fonction f est définie et deux fois dérivable sur $[0,5\ ;\ 5]$ par $f(x) = \dfrac{5+5\ln x}{x}$.

1) Calculer sa dérivée et sa dérivée seconde.

2) Déterminer une équation de la tangente à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse e.

3) Déterminer la valeur exacte de l'abscisse du seul point d'inflexion de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ sur $[0,5\ ;\ 5]$.

Exercice 23

La fonction f est définie sur $[1,1\ ;\ 8]$ par $\quad f(x)=\dfrac{2x-1}{\ln x}$.

1) Montrer que pour tout nombre $x\in[1,1\ ;\ 8]$, $\quad f'(x)=\dfrac{2\ln x-2+\dfrac{1}{x}}{(\ln x)^2}$.

2) La fonction h est définie sur $[1,1\ ;\ 8]$ par $\quad h(x)=2\ln x-2+\dfrac{1}{x}$.

- **a)** Montrer que pour tout nombre $x\in[1,1\ ;\ 8]$, $\quad h'(x)=\dfrac{2x-1}{x^2}$.
- **b)** En déduire les variations de la fonction h sur $[1,1\ ;\ 8]$.
- **c)** Montrer que l'équation $h(x)=0$ admet une unique solution α sur $[1,1\ ;\ 8]$.
- **d)** Encadrer α par deux entiers consécutifs.

3) En déduire le signe de $h(x)$ sur $[1,1\ ;\ 8]$.

4) Dresser le tableau de variations de f sur $[1,1\ ;\ 8]$.

Exercice 24

QCM

La fonction f deux fois dérivables sur $[0,1\ ;\ 10]$ est définie par $f(x) = x^2\left(2\ln x - 5\right) + 2$.

1) f est concave sur $[0,1\ ;\ 10]$.

2) f est concave sur $[e\ ;\ 10]$.

3) f est convexe sur $[0,1\ ;\ 10]$.

4) f est convexe sur $[e\ ;\ 10]$.

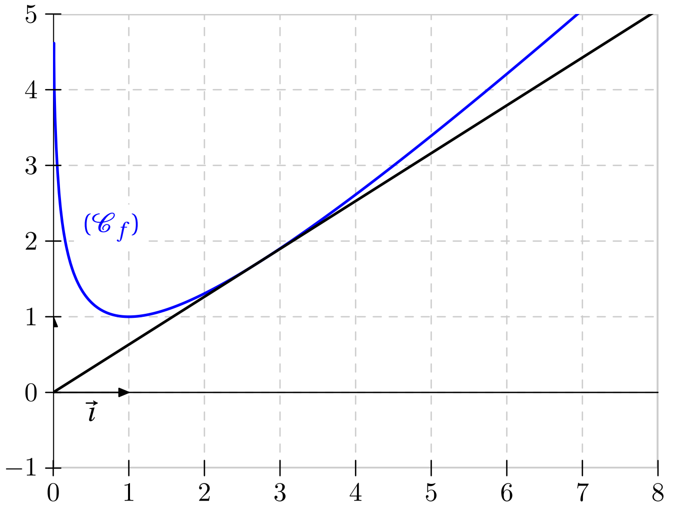
Exercice 25

```python
import math

n=1
A=2
while (math.log(n) <=A):
    n=n+1

print(n)
```

1) Quelle est la valeur de n affichée en fin d'exécution de ce programme python ?

2) Comment peut-on justifier sans exécuter ce programme ?

Exercice 26



La fonction f est définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = x - \ln x$.
Elle est représentée ci-dessus.

Existe-t-il une tangente à $(\mathcal{C}_f)$ qui passe par l'origine du repère ? Justifier.

Exercice 27

Étudier la limite en 0 et en $+\infty$ de chacune des fonctions définies sur $]0\ ;\ +\infty[$ par les expressions données.

1) $f(x) = x - 3\ln x$

2) $f(x) = (2 - x)\ln x$

3) $f(x) = \dfrac{x\ln x}{x+1}$

4) $f(x) = \sqrt{x}\ln x$

Exercice 28

Étudier la limite en 0 et en $+\infty$ de chacune des fonctions définies sur $]0\ ;\ +\infty[$ par les expressions données.

1) $f(x) = x\ln x - 2x$

2) $f(x) = 4x - (\ln x)^2$

3) $f(x) = x^2 - 5\ln x$

Exercice 29

Étudier les limites des fonctions suivantes aux bornes de l'intervalle I.

1) $f(x) = \ln(1-2x)$ avec $I = \left]-\infty\ ;\ \dfrac{1}{2}\right[$.

2) $f(x) = \ln\left(\dfrac{5-x}{x+3}\right)$ avec $I =]-3\ ;\ 5[$.

Exercice 30

Étudier les limites des fonctions suivantes aux bornes de l'intervalle I.

1) $f(x) = \ln\left(\dfrac{2x+1}{x-2}\right)$ avec $I =]2\ ;\ +\infty[$.

2) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+2}{(x-2)^2}\right)$ avec $I =]2\ ;\ +\infty[$.

Exercice 31

Pour chacune des fonctions définies et dérivables sur l'intervalle I, déterminer la fonction dérivée.

1) $f(x) = \ln\left(1 + x^2\right)$ avec $I = \mathbb{R}$.

2) $f(x) = \ln\left(e^{-x} + x\right)$ avec $I = \mathbb{R}$.

Exercice 32

Pour chacune des fonctions définies et dérivables sur l'intervalle I, déterminer la fonction dérivée.

1) $f(x) = \ln\left(\dfrac{4x+1}{x-3}\right)$ avec $I =]3\ ;\ +\infty[$.

2) $f(x) = x\ln\left(e^x+1\right)$ avec $I = \mathbb{R}$.

Exercice 33

Vrai ou faux ?

Dans chaque cas, indiquer si la proposition est vraie ou fausse. Justifier.

1) "La fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \ln(100 + x)$ est décroissante sur $[0\ ;\ +\infty[$."

2) La fonction g est définie sur $\left]-\dfrac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$ par $g(x) = 2x\ \ln(2x + 1)$.

a) "Sur $\left]-\dfrac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$, l'équation $g(x) = 2x$ admet une solution unique : $\dfrac{e-1}{2}$."

b) "Pour tout nombre réel x de $\left]-\dfrac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$, $g'(x) = 2\ln(2x + 1) + \dfrac{4x}{2x+1}$."

c) "Le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de la fonction g au point d'abscisse $\dfrac{1}{2}$ est $1 + \ln 4$."

Exercice 34

La fonction f est définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{2}x - 1 + \frac{\ln x}{x}$.
On note $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative.

1) **a)** À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique,tracer $(\mathcal{C}_f)$ puis la droite (Δ) d'équation $y = \frac{3}{2}x - 2$.

b) Conjecturer :

- le sens de variation de f sur $]0\ ;\ +\infty[$;
- les limites de f en 0 et en $+\infty$;
- ce que représente la droite (Δ) pour la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

2) **a)** Pour tout nombre réel $x > 0$, calculer $f'(x)$.

b) Pour tout nombre réel $x > 0$, montrer que $f'(x) = \frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{2}x^2 + 1 - \ln x\right)$.

c) Démontrer que, pour tout nombre réel $x > 0$: $\frac{1}{2}x^2 + 1 - \ln x > 0$.

d) En déduire les variations de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.

e) Valider ou corriger les conjectures émises à la question **1b)**.

Exercice 35

Un fournisseur d'énergie envisage d'installer un parc éolien en pleine mer. On note x la distance en dizaine de kilomètres séparant le parc de la côte.
Pour des raisons techniques, l'installation doit se faire entre 2 et 12 km de la côte, c'est-à-dire $0,2 \leqslant x \leqslant 1,2$.

Les ingénieurs spécialisés proposent de modéliser le bénéfice de ce parc, exprimé en centaines de milliers d'euros par année de fonctionnement, en fonction de la distance x de la côte, à l'aide de la fonction f définie par
$f(x) = 2x + \ln(-2x + 3)$.

1) À combien de kilomètres de la côte ce fournisseur d'énergie doit-il placer le parc éolien pour que son bénéfice soit maximal ?

2) Déterminer le bénéfice réalisé, en euros, en plaçant le parc à cette distance.

3) À partir de quelle distance x de la côte, exprimée en dizaines de kilomètres, le bénéfice dépasse-t-il $190\,000$ € ? En donner la valeur approchée à 10^{-2} près.

Exercice 36

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $\quad f(x) = x - \ln(1 + x^2)$.

1) **a)** Justifier tous les éléments du tableau de variations ci-dessous, excepté $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$+$	
Variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	$-\ln(2)+1$	$\nearrow$	$+\infty$

b) Montrer que, pour tout nombre x de l'intervalle $[0\ ;\ 1]$, $f(x)$ appartient à l'intervalle $[0\ ;\ 1]$.

2) **a)** Écrire en langage naturel un algorithme qui, pour une valeur d'un nombre réel A donnée, indique le plus petit nombre entier n tel que $f(n) \geqslant A$.

b) Programmer votre algorithme en Python et le tester pour $A = 100$.

Exercice 37

En acoustique, si un son possède une intensité sonore I (en $W.m^{-2}$), son niveau sonore (en décibels, dB) est donné par $N(I) = 10\log\left(\frac{I}{I_0}\right)$, avec $\log$ la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $\log x = \frac{\ln x}{\ln(10)}$ et $I_0 = 10^{-12}W.m^{-2}$ (plus petite intensité perceptible par l'oreille humaine).
Après un traumatisme, Adel ne supporte plus un niveau sonore supérieur à $90\ dB$.
Lors d'un concert, l'intensité sonore maximale était de $4\ W.m^{-2}$.

Adel a-t-il pu rester dans la salle ? Justifier.

Exercice 38

Pour faciliter certaines applications pratiques, on utilise les logarithmes décimaux. On note ainsi $\log$ la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $\quad \log x = \dfrac{\ln x}{\ln(10)}$.

On donne $\dfrac{1}{\ln(10)} \approx 0,4342$.

1) Que valent respectivement $\log 1$, $\log(10)$, $\log(100)$, $\log(0,1)$, $\log(0,000\,01)$?

2) Un nombre réel x est tel que $\log x \approx 0,552\,682\,16$.
Donner une approximation de x compatible avec la précision de l'outil numérique employé.

3) On considère un nombre entier N ayant pour logarithme décimal $11,97$ (à 10^{-10} près). Combien N a-t-il de chiffres ? À l'aide du langage Python ou d'une calculatrice, déterminer N.

Exercice 39

Exercice 40

Exercice 41

Exercice 42

Exercice 43

Exercice 44

Exercice 45

Exercice 46

Exercice 47

Exercice 48

Exercice 49

Exercice 50