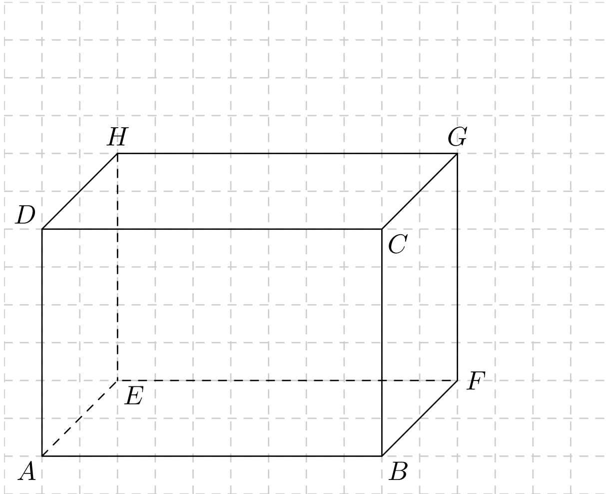
Exercice 1



$ABCDEFGH$ est un pavé droit.

Les points M et N sont tels que :
$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{AG}$.

1) Reproduire la figure et construire M et N.

2) Montrer que :

- **a)** $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AE}$;
- **b)** $\overrightarrow{CN} = 2\overrightarrow{CG}$.

3)
- **a)** En déduire que $\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{GN}$.
- **b)** Quelle est la nature du quadrilatère $EMNG$?

Exercice 2

$MATHS$ est une pyramide de sommet S dont la base $MATH$ est un parallélogramme.

Démontrer que $\overrightarrow{SM} + \overrightarrow{ST} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SH}$ en utilisant la relation de Chasles.

Exercice 3

$ABCD$ est un tétraèdre.
I est le milieu de $[AD]$.
G est le centre de gravité du triangle ABC.
E est le point défini par ; $\overrightarrow{ED} - \overrightarrow{EB} - \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{0}$.

1) **a)** Faire une figure avec un logiciel de géométrie dynamique.

b) Émettre une conjecture sur les points I, G et E.

2) Démontrer que $BDCE$ est un parallélogramme.

3) Montrer que $\overrightarrow{AG} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$.

4) En déduire l'expression de $\overrightarrow{IG}$ et de $\overrightarrow{IE}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{DC}$.

5) Conclure.

Exercice 4

$ABCD$ est un tétraèdre.
I est le milieu de $[AC]$.
E est le symétrique de D par rapport à B.
F est le point tel que $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{DC}$.

Démontrer que les droites (IB) et (EF) sont parallèles.

Exercice 5

A et B sont deux points distincts de l'espace, et P est un point tel que $7\overrightarrow{AP} - 2\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{0}$.

1) Que dire des vecteurs $\overrightarrow{AP}$ et $\overrightarrow{AB}$? Justifier.

2) Que dire des vecteurs $\overrightarrow{AP}$ et $\overrightarrow{PB}$? Justifier.

3) Que dire des points A, B et P ? Justifier.

Exercice 6

$MNOP$ est un tétraèdre, I est le milieu de $[MN]$ et G est le centre de gravité du triangle MNP.

1) Faire une figure.

2) Que dire des vecteurs $\overrightarrow{GP}$ et $\overrightarrow{GI}$? Justifier.

3) On note $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN}$.
Montrer que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{GI}$ sont colinéaires.

4) On note $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}$.
Montrer que $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{OG}$ sont colinéaires.

Exercice 7

$PYRAM$ est une pyramide de sommet P à base quadrilatère.
L est le point tel que $\overrightarrow{LP} = 3\overrightarrow{LY}$ et K est le point tel que $4\overrightarrow{KL} - \overrightarrow{KR} = \overrightarrow{0}$.

1) Faire une figure.

2) Montrer que les points K, P, Y et R sont coplanaires.

Exercice 8

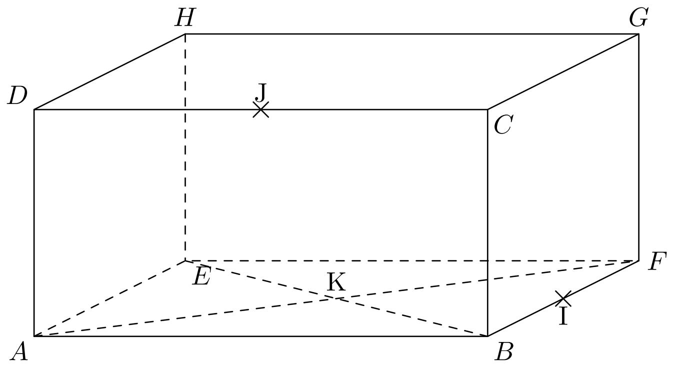
$ABCDEFGH$ est un cube de centre 0.

1) Faire une figure.

2) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{FH}$ et $\overrightarrow{HD}$ sont coplanaires.

3) Les vecteurs $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{FH}$ et $\overrightarrow{EH}$ sont-ils coplanaires ? Justifier.

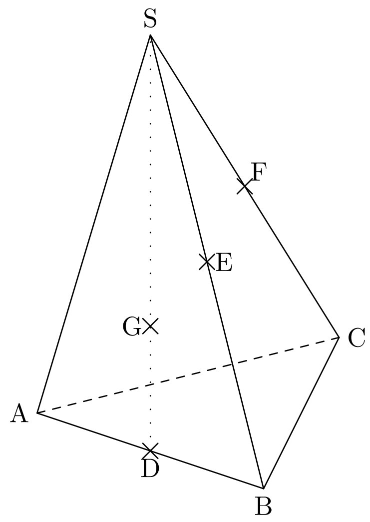
Exercice 9



$ABCDEFGH$ est un pavé droit.
I est le milieu de $[BF]$ et J celui de $[DC]$.
K est le centre du rectangle $ABFE$.

Les vecteurs $\overrightarrow{EK}$, $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{AG}$ sont-ils coplanaires ? Justifier.

Exercice 10



$SABC$ est un tétraèdre. E est le milieu de $[SB]$, F celui de $[SC]$, D celui de $[AB]$ et G est un point de $[SD]$.
Dans chacun des cas suivants, préciser les positions relatives des droites et des plans, en justifiant la réponse.

1) (EA) et (AC).

2) (ED) et (SA).

3) (EG) et (SBA).

4) (SG) et (ABC).

5) (EF) et (ABC).

6) (AG) et (SBD).

Exercice 11

$ABCDEFGH$ est un cube.
I, J, K, L M et N sont les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$, $[CG]$, $[GH]$, $[HE]$ et $[EA]$.

1) Faire une figure.

2) Les plans (IJK) et (MNL) sont-ils parallèles ? Justifier.

3) Les plans (EBG) et (KLM) sont-ils parallèles ? Justifier.

4) Les plans (ABC) et (EBG) sont-ils parallèles ? Justifier.

Exercice 12

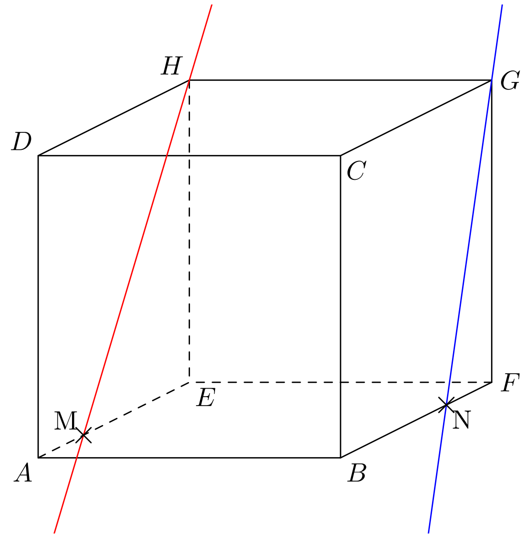
$ABRICOTS$ est un cube.
M, N et G sont les milieux respectifs de $[BA]$, $[BO]$ et $[IS]$.
P et K sont les milieux respectifs de $[MB]$ et $[NO]$.

1) Exprimer $\overrightarrow{PK}$ puis $\overrightarrow{TG}$ en fonction de $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BO}$.

2) Les vecteurs $\overrightarrow{PK}$ et $\overrightarrow{TG}$ sont-ils colinéaires ? Justifier.

3) Conclure sur les positions relatives des droites (PK) et (TG).

Exercice 13



$ABCDEFGH$ est un cube.
M est un point du segment $[EA]$ et N est un point du segment $[FB]$.

Les droites (HM) et (GN) sont-elles sécantes, parallèles ou non coplanaires ? Justifier.

Exercice 14

A, B, C et D sont quatre points de l'espace non coplanaires.

1) Faire une figure à main levée et construire les points A', B' et C' tels que A' soit le symétrique de D par rapport à A, $\overrightarrow{DC'} = 2\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{C'B'} = 2\overrightarrow{CB}$.

2) Montrer que les plans (ABC) et $(A'B'C')$ sont parallèles.

Exercice 15

$ABCDEFGH$ est un cube.
M, N et P sont les points définis par $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BF}$; $\overrightarrow{CN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AE}$.

1) **a)** Construire le cube et les points M, N et P sur un logiciel de géométrie dynamique.

b) Construire la section du cube par le plan (MNP).

2) Montrer que (DH) coupe (MNP) en un point I.

3) On note k le nombre réel tel que $\overrightarrow{DI} = k\overrightarrow{DH}$.
Conjecturer, puis déterminer, la valeur de k.

Exercice 16

$TRIA$ est un tétraèdre. E est un point du segment $[TA]$ distinct de T et de A.
La parallèle à la droite (AI) passant par E coupe (TI) en F, et la parallèle à la droite (RA) passant par E coupe (TR) en G.

1) Faire une figure.

2) **a)** Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{TA}$ et $\overrightarrow{TE}$ sont colinéaires.
On écrira alors $\overrightarrow{TE} = \alpha\overrightarrow{TA}$ où α est un nombre réel.

b) Exprimer $\overrightarrow{TF}$ en fonction de $\overrightarrow{TI}$ et de α.
Exprimer $\overrightarrow{TG}$ en fonction de $\overrightarrow{TR}$ et de α.

c) En déduire que $\overrightarrow{GF}$ et $\overrightarrow{RI}$ sont colinéaires, et conclure.

Exercice 17

On travaille dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
$A(1 ; -1 ; 0)$, $B(2 ; 4 ; -1)$ et $C(2 ; -3 ; 1)$ sont des points de l'espace.

Calculer les coordonnées :

1) du point D tel que $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AB}$;

2) du point E tel que $\overrightarrow{EA} = -3\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{BC}$.

3) du point F tel que $3\overrightarrow{FA} + 2\overrightarrow{FB} - \overrightarrow{FC} = \vec{0}$.

Exercice 18

On travaille dans un repère $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
$R(2\ ;\ 1\ ;\ 3)$, $S(-1\ ;\ 2\ ;\ 5)$, $T(-2\ ;\ -3\ ;\ 1)$ et $U(-5\ ;\ -2\ ;\ 3)$ sont des points de l'espace.

1) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{RS}$ et $\overrightarrow{TU}$.

2) En déduire la nature du quadrilatère $RSUT$.

Exercice 19

On travaille dans un repère $(O\ ;\ \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.
$A(2\ ;\ 1\ ;\ -2)$, $B(3\ ;\ -1\ ;\ 4)$ et $C(-1\ ;\ 0\ ;\ 2)$ sont des points de l'espace.
I est le milieu de $[AC]$.

1) Déterminer les coordonnées du point I.

2) En déduire les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

Exercice 20

On travaille dans un repère $(O\ ;\ \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.
$A(2\ ;\ 2\ ;\ -4)$, $B(5\ ;\ -4\ ;\ 8)$, $C(3\ ;\ -4\ ;\ 12)$ et $D(-2\ ;\ 6\ ;\ -8)$ sont des points de l'espace.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont-ils colinéaires ?

Exercice 21

On travaille dans un repère $(O\ ;\ \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.
$M(2\ ;\ -1\ ;\ 5)$, $N(-1\ ;\ 2\ ;\ 0)$ et $P(5\ ;\ -4\ ;\ 10)$ sont des points de l'espace.

M, N et P sont-ils alignés ?

Exercice 22

$\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}-2\\-3\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ sont-ils coplanaires ?

Exercice 23

1) Compléter la fonction ci-dessous qui prend en paramètres les coordonnées entières de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sous la forme de deux triplets (tuples) et qui renvoie un booléen indiquant s'ils sont colinéaires ou non.

```python
def colineaires(u,v) :
    xu,yu,zu=u
    xv,yv,zv=v
    if xu*yv != yu*xv:
        return False
    if ... :
        return False
    if ... :
        return False
    return True
```

2) Tester cette fonction pour déterminer si les vecteurs sont colinéaires.

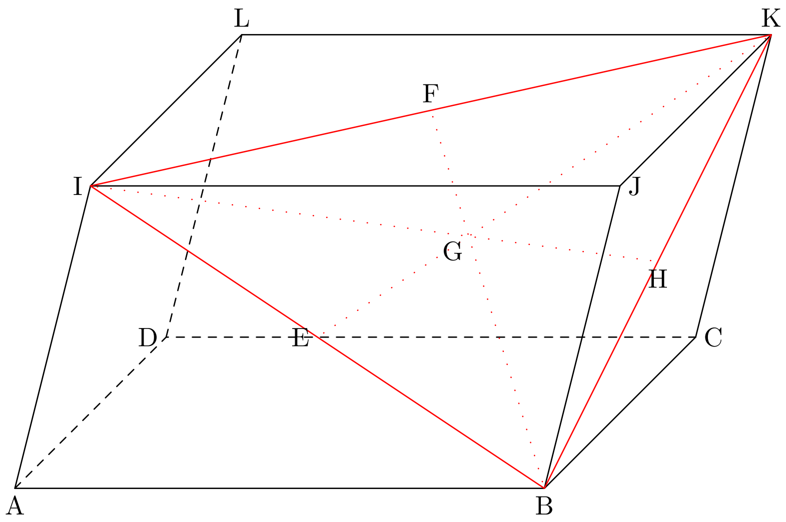
a) $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\4\\0\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$.

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}6\\-3\\12\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\1\\-4\end{pmatrix}$.

3) Coder une fonction prenant en paramètres les coordonnées entières de trois points (triplets) et qui renvoie un booléen indiquant si ces trois points sont alignes.

Exercice 24

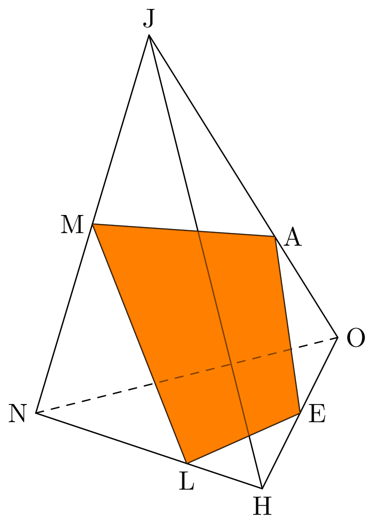
$ABCDIJKL$ est un parallélépipède.
E est le milieu de $[IB]$.
F est le milieu de $[IK]$.
H est le milieu de $[KB]$.
G est le centre de gravité du triangle BIK.



1) Déterminer les coordonnées des points D, G et J dans l'espace muni du repère $(A\ ;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AI})$.

2) Démontrer que les points D, G et J sont alignés.

Exercice 25



$JOHN$ est un tétraèdre.
Les points M et E sont les milieux respectifs des arêtes $[JN]$ et $[OH]$, et les points A et L sont définis par $\overrightarrow{JA} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{JO}$ et $\overrightarrow{NL} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{NH}$.

Démontrer que M, A, E et L sont coplanaires ;

Exercice 26

A et B sont deux points distincts de l'espace.

Montrer qu'il n'est pas possible de construire un point C de l'espace tel que $4\overrightarrow{CA} - 4\overrightarrow{CB} = 3\overrightarrow{AB}$.

Exercice 27

Exercice 28

Exercice 29

Exercice 30

Exercice 31

Exercice 32

Exercice 33

Exercice 34

Exercice 35

Exercice 36

Exercice 37

Exercice 38

Exercice 39

Exercice 40

Exercice 41

Exercice 42

Exercice 43

Exercice 44

Exercice 45

Exercice 46

Exercice 47

Exercice 48

Exercice 49

Exercice 50