Exercice 1

La fonction valeur absolue est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$.

1) Donner l'expression de $f(x)$ sur chacun des intervalles $]-\infty\ ;\ 0[$ et $[0\ ;\ +\infty[$.

2) Tracer la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère.

3) La fonction f est-elle continue ?

4) La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

Exercice 2

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x-1} & \text{si} \quad x \leqslant -1 \\ x^2 - 1 & \text{si} \quad -1 < x < 3 \\ 4x - 4 & \text{si} \quad x \geqslant 3 \end{cases}$.

Déterminer si f est continue sur $\mathbb{R}$.
Si la fonction f n'est pas continue, alors citer les intervalles sur lesquels la fonction est continue.

Exercice 3

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} e^{x-2}+2 & \text{si} \quad x<2 \\ -2x+7 & \text{si} \quad 2 \leqslant x < 4 \\ \dfrac{2}{1-x} & \text{si} \quad x \geqslant 4 \end{cases}$.

Déterminer si f est continue sur $\mathbb{R}$.
Si la fonction f n'est pas continue, alors citer les intervalles sur lesquels la fonction est continue.

Exercice 4

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 2 & \text{si} \quad x \leqslant -2 \\ 4x + a & \text{si} \quad x \in]-2\ ;\ 2[\\ ax + b & \text{si} \quad x \geqslant 2 \end{cases}$.

Déterminer les nombres a et b tels que f soit continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} (ax+1)^2 & \text{si} \quad x \leqslant 1 \\ 13x + 3a & \text{si} \quad x \in]1\ ;\ 3[\\ x^2 + bx + b & \text{si} \quad x \geqslant 3 \end{cases}$.

Déterminer les nombres a et b tels que f soit continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} -ax+b & \text{si} \quad x \leqslant -3 \\ (b-a)x+6a & \text{si} \quad x \in]-3\ ;\ 1[\\ ax-b-4 & \text{si} \quad x \geqslant 1 \end{cases}$.

Déterminer les nombres a et b tels que f soit continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si} \quad x < 1 \\ ax + b & \text{si} \quad x \geqslant 1 \end{cases}$ où a et b sont deux nombres réels.

1) Montrer que f est continue en 1 si et seulement si $a + b = e$.

2) Déterminer la valeur de a afin que la fonction f soit également dérivable en 1.

Exercice 8

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} (x+m)^2 - 4 & \text{si} \quad x \leqslant 3 \\ mx + 9 & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$.

Déterminer les nombres m tels que f soit continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 3x + a & \text{si} \quad x \leqslant 4 \\ ax + 6 & \text{si} \quad x > 4 \end{cases}$.

Déterminer les nombres a tels que f soit continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 10

Léandre a écrit le programme en Python suivant :

```
import math
import pylab

def image(x) :
    if math.floor(x)%2 == 0 :
        return x-math.floor(x)
    return 1-(x-math.floor(x))

abs = []
ord = []
x = 0
while x<=4 :
    abs.append(x)
    ord.append(image(x))
    x = x+0.01

pylab.plot(abs,ord)
pylab.show()

```

NB : la commande **math.floor(x)** renvoie la partie entière de x.

1) **a)** Coder et exécuter ce programme.

b) Le résultat de ce programme est la représentation graphique d'une fonction f définie sur $[0\ ;\ 4]$. Quelle conjecture peut-on faire sur la continuité de f ?

2) **a)** Déterminer l'expression de $f(x)$ sur chacun des intervalles $[0\ ;\ 1[$, $[1\ ;\ 2[$, $[2\ ;\ 3[$ et $[3\ ;\ 4]$.

b) Confirmer ou infirmer la conjecture émise à la question **1b)**.

Exercice 11

1) Dresser le tableau de variations d'une fonction f définie sur $[-1\ ;\ 1]$ telle que l'équation $f(x) = 3$ admet exactement deux solutions sur $[-1\ ;\ 1]$.

2) Dresser le tableau de variations d'une fonction g définie sur $[0\ ;\ 8]$ telle que l'équation $g(x) = 5$ admet une seule solution sur $[0\ ;\ 8]$.

3) Dresser le tableau de variations d'une fonction h définie sur $[-10\ ;\ 1]$ telle que l'équation $h(x) = \sqrt{3}$ n'admet pas de solution sur $[-10\ ;\ 1]$.

Exercice 12

f et g sont deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$:
$f(x) = \dfrac{2x^3 - 1}{x^2 + 5}$ et $g(x) = x^3 + 15x + 1$.

1) Après avoir étudié les variations de la fonction g, montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique sur $\mathbb{R}$, que l'on note α, et en donner un encadrement d'amplitude 10^{-2}.

2) Construire le tableau de signes de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

3) Montrer que la dérivée de la fonction f est $f'(x) = \dfrac{2x}{\left(x^2 + 5\right)^2} \times g(x)$.

4) Dresser le tableau de variations de la fonction f en utilisant la question **2)**.

Exercice 13

f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^2 + 8mx - 1$ où m est un nombre réel.

1) **a)** Représenter cette fonction sur un logiciel de géométrie dynamique pour faire varier la valeur du paramètre m.

b) Émettre une conjecture sur le nombre de solutions de l'équation $f(x) = -2$ en fonction de la valeur du paramètre m.

2) **a)** Dresser le tableau de variations de la fonction f en fonction de m, et montrer que la fonction f atteint son minimum en $-m$.

b) Calculer ce minimum, puis valider ou corriger la conjecture émise à la question **1)**.

Exercice 14

L'équation $e^x = x + 3$ admet-elle des solutions réelles ? Si oui, combien ? Justifier la réponse.

Exercice 15

La dichotomie permet d'approcher les solutions de l'équation $f(x) = 0$, où f est une fonction continue sur $[a\ ;\ b]$ vérifiant $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$.
Il existe donc au moins une solution c de l'équation $f(x) = 0$.
(u_n) et (v_n) sont deux suites définies par récurrence par leurs premiers termes $u_0 = a$ et $v_0 = b$ et :

- si $f\left(\dfrac{u_n + v_n}{2}\right) \leqslant 0$, alors $u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ et $v_{n+1} = v_n$;
- sinon, $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ et $u_{n+1} = u_n$.

Ainsi, à chaque étape, on divise par deux l'amplitude de l'intervalle $[u_n\ ;\ v_n]$ dans lequel se situe la solution c.

1) **a)** Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad v_n - u_n = \dfrac{b-a}{2^n}$.

b) En déduire que la suite (u_n) est croissante et la suite (v_n) décroissante.

c) En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes vers une même limite L.

2) **a)** Démontrer que, pour $n \in \mathbb{N}$, $f(u_n) \leqslant 0 \leqslant f(v_n)$.

b) En déduire que $f(L) = 0$.

3) La fonction f vérifiant les conditions précédentes, compléter cette fonction en Python renvoyant un intervalle d'amplitude 10^{-p} encadrant une solution de l'équation $f(x) = 0$ appartenant à l'intervalle $[a\ ;\ b]$.

```python
def dichotomie(f,a,b,p):
    u = a
    v = b
    while ... :
        if f(...) <= 0 :
            ...
        else :
            ...
    return [...,...]
```

Exercice 16

Un solide est composé d'une demi-sphère surmontée d'un cône dont la hauteur mesure $5\ cm$ de plus que son rayon de base r.

1) Montrer que le volume $V(r)$ de ce solide est égal à $\pi r^2\left(r+\dfrac{5}{3}\right)$.

2) Justifier qu'il existe un unique rayon $r \in [4\ ;\ 5]$ tel que $V(r) = 400\ cm^3$.

3) Utiliser la fonction **dichotomie** suivante écrite en Python pour calculer un encadrement à 10^{-6} du rayon de ce solide lorsque le volume vaut $400\ cm^3$.

```python
def dichotomie(f,a,b,p):
    u = a
    v = b
    while (v-u > 10**(-p)) :
        if f((u+v)/2) <= 0 :
            u = (u+v)/2
        else :
            v = (u+v)/2
    return [u,v]
```

Rappel : le volume d'une sphère de rayon r est $\dfrac{4}{3}\pi r^3$.

Exercice 17

Déterminer les valeurs arrondies de chacune des équations suivantes arrondies à 10^{-2} près.

1) $e^x - 7 = 0$

2) $x^5 = 12$

3) $x^2\, e^x = 3$

Exercice 18

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 - 8x^3 + 16x^2 - 20$.

Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$, puis donner un encadrement d'amplitude $0,01$ de chacune des solutions.

Exercice 19

Dans chaque cas, déterminer les limites de la suite (u_n) et de la suite $f(u_n)$. Justifier.

1) $u_n = \dfrac{1}{n+4}$ et $f(x) = \sqrt{3+x}$.

2) $u_n = \pi - \dfrac{2}{n^2}$ et $f(x) = \sin(x)$.

Exercice 20

Dans chaque cas, déterminer les limites de la suite (u_n) et de la suite $f(u_n)$. Justifier.

1) $u_n = \left(-\dfrac{1}{4}\right)^n$ et $f(x) = e^{x+1}$.

2) $u_n = \dfrac{2^n+2}{2^n+3}$ et $f(x) = x^2 - 5x + 4$.

Exercice 21

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{3}x + 2$.

1) Dans le plan muni d'un repère, tracer la droite d'équation $y = x$, la courbe représentative de f et les cinq premiers termes de la suite (u_n) sur l'axe des abscisses.
NB : On pourra construire un repère en prenant $2\ cm$ pour 1 unité sur les axes des abscisses et des ordonnées.

2) Conjecturer le sens de variation et la limite de la suite (u_n).

3) Justifier que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

4) Démontrer par récurrence que, pour tout nombre entier naturel n, $\quad 0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 6$.

5) En déduire que la suite (u_n) est convergente vers une limite que l'on notera l.

6) Résoudre l'équation $f(x) = x$ sur $\mathbb{R}$ et en déduire la valeur de l.

Exercice 22

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 10$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est la fonction définie sur $[1\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{5x-4}$.

1) À l'aide d'un outil numérique, conjecturer le sens de variation de la suite (u_n) et sa limite éventuelle.

2) Justifier que la fonction f est strictement croissante sur $[1\ ;\ +\infty[$.

3) Démontrer par récurrence que, pour tout nombre entier naturel n, $\quad 4 < u_{n+1} < u_n$.

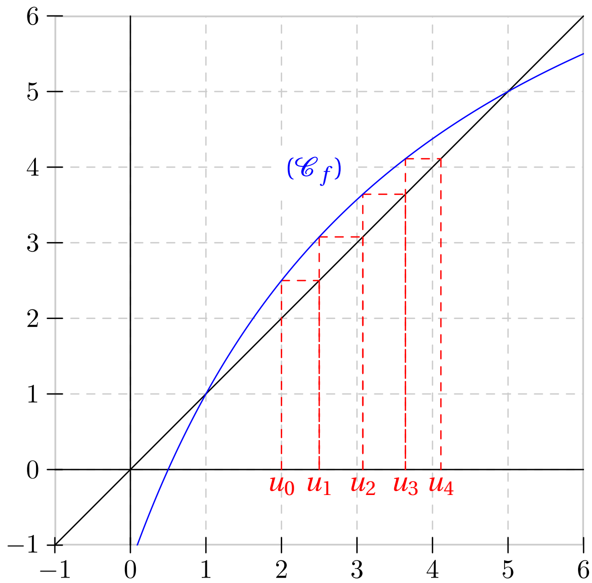
4) En déduire que la suite (u_n) est convergente vers une limite que l'on notera l.

5) Résoudre l'équation $f(x) = x$ sur $[1\ ;\ +\infty[$ et en déduire la valeur de l.

Exercice 23

Marion doit répondre au problème suivant : "Étudier la convergence de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ et la relation $u_{n+1} = \dfrac{10u_n - 5}{u_n + 4}$."

Voici les recherches sur brouillon de Marion :



- $f(x) = \dfrac{10x - 5}{x + 4}$
- f croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$
- (u_n) croissante
- (u_n) converge vers 5

---

1) Les conjectures émises par Marion sont-elles suffisantes pour démontrer la convergence de la suite (u_n) ? Sinon, quelles conjectures doit-on ajouter ?

2) Valider l'ensemble des conjectures permettant d'établir la convergence de la suite (u_n) et de déterminer sa limite.

Exercice 24

Un étang contient $3\,000\ m^3$ d'eau. En moyenne, chaque mois, le volume d'eau diminue de $2\ \%$ mais $49\ m^3$ d'eau sont rajoutés en début de chaque mois.

1) Justifier que le volume d'eau dans cet étang en m^3 peut être modélisé par la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = 0,98\ u_n + 49$ avec $u_0 = 3\,000$.

2) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.

3) Démontrer que la suite (u_n) converge vers un nombre l.

4) Justifier que la limite l est solution de l'équation $0,98x + 49 = x$ sur $[0\ ;\ +\infty[$ et conclure.

Exercice 25

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 \quad \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$.

1) Quelle est la condition pour que f soit continue en 0 ?

2) Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \frac{1}{2\pi n}$.

- **a)** Déterminer la limite de la suite $u_n)$.
- **b)** En déduire la limite de $f(u_n)$ en faisant l'hypothèse que f est continue en 0.
- **c)** Déterminer l'expression de $f(u_n)$ et sa limite.
- **d)** Que peut-on dire de l'hypothèse faite au **b)** ? Conclure.

Exercice 26

On considère le programme en Python suivant :

```python
import pylab

def f(x) :
    return 5-4/(x+1)

def trace_fonction(a,b):
    abs = [a+i*(b-a)/100 for i in range(101)]
    ord = [f(x) for x in abs]
    pylab.plot(abs,ord,color="green")

def trace_marche(u0,marche):
    abs = []
    ord = []
    x = u0
    for i in range(marche):
        abs = abs + [x,x,f(x)]
        ord = ord + [x,f(x),f(x)]
        x = f(x)
    pylab.plot(abs,ord,color="red")
    trace_fonction(u0,x)
    pylab.plot([u0,x],[u0,x],color="blue")

trace_marche(0,10)
pylab.show()
```

1) Coder et exécuter le programme ci-dessus.

2) Définir la suite (u_n) qui est représentée sur la fenêtre graphique affichée.

3) Émettre des conjectures sur le comportement de la suite (u_n).

4) Dresser le tableau de variations de la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = 5 - \dfrac{4}{x+1}$.

5) Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est croissante et majorée par 5.

6) En déduire la convergence de (u_n) et sa limite.

Exercice 27

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I = [-3\ ;\ 3]$ par $f(x) = 24x^3 - 34x^2 - 48x + 68$.

Le but de l'exercice est de déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle I.

1) **À l'aide d'un outil numérique,** représenter la courbe $(\mathcal{C}_f)$ et conjecturer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur I.

2) **À l'aide d'un tableau de variations**

   a) Justifier que la fonction f est continue sur I.

   b) Calculer $f'(x)$.

   c) Dresser le tableau de variations de f.

   d) À l'aide de la calculatrice, calculer les extremums relatifs de la fonction f. Peut-on conclure sur le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur I ?

3) **À l'aide d'une factorisation**

   a) Montrer que $f(x)$ se factorise par $2x^2 - 4$.

   b) Conclure sur le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur I et les déterminer exactement.

Exercice 28

L'objectif de cet exercice est de démontrer que la fonction exponentielle est strictement positive à l'aide d'un raisonnement par l'absurde.

1) Justifier que la fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$.

2) En simplifiant $e^x \times e^{-x}$, x étant un nombre réel, justifier que la fonction exponentielle ne s'annule pas.

3) **a)** Supposons qu'il existe un nombre réel a tel que $e^a < 0$. Montrer que la fonction exponentielle change alors de signe entre 0 et a.

b) En déduire qu'il existe un nombre réel b entre 0 et a pour lequel la fonction exponentielle s'annule.

c) Conclure.

Exercice 29

n est un nombre entier naturel impair.
P est une fonction polynôme de degré n définie sur $\mathbb{R}$ par :
$P(x) = a_n x^n + a_{n+1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$ où a_n, a_{n-1}, ..., a_1 et a_0 sont des nombres réels, avec a_n non nul.

1) Calculer la limite de P en $-\infty$ et en $+\infty$.

2) Montrer que tout polynôme P à coefficients réels et de degré impair admet au moins une racine réelle.

Exercice 30

ABC est un triangle rectangle en A tel que $BC = 12\ cm$.

1) **a)** On souhaite que le périmètre du triangle ABC soit de longueur $23\ cm$. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, essayer de construire un tel triangle. Quelle conjecture peut-on émettre sur son existence ?

b) Et si le périmètre a pour longueur $28\ cm$?

2) On note x la distance AC et on appelle P la fonction qui détermine le périmètre du triangle ABC en fonction de x. Déterminer une expression de $P(x)$.

3) Confirmer ou infirmer vos conjectures de la question **1)**. Si l'existence est prouvée, déterminer une valeur approchée d'une solution à l'aide d'un algorithme.

Exercice 31

Exercice 32

Exercice 33

Exercice 34

Exercice 35

Exercice 36

Exercice 37

Exercice 38

Exercice 39

Exercice 40

Exercice 41

Exercice 42

Exercice 43

Exercice 44

Exercice 45

Exercice 46

Exercice 47

Exercice 48

Exercice 49

Exercice 50