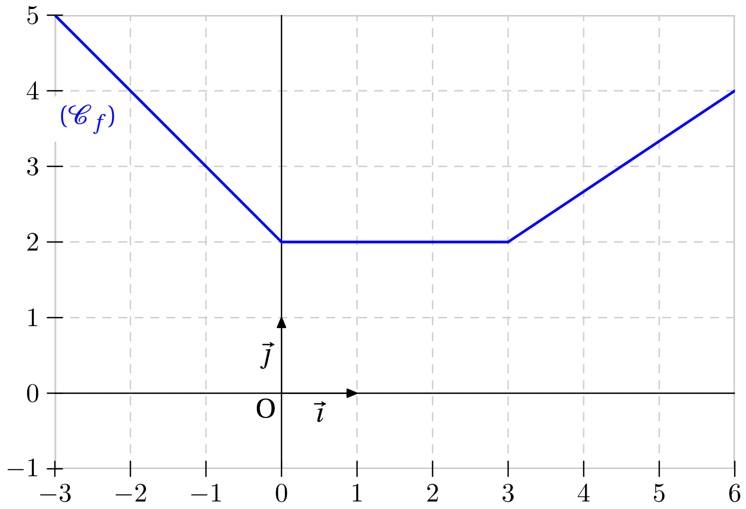
Exercice 1

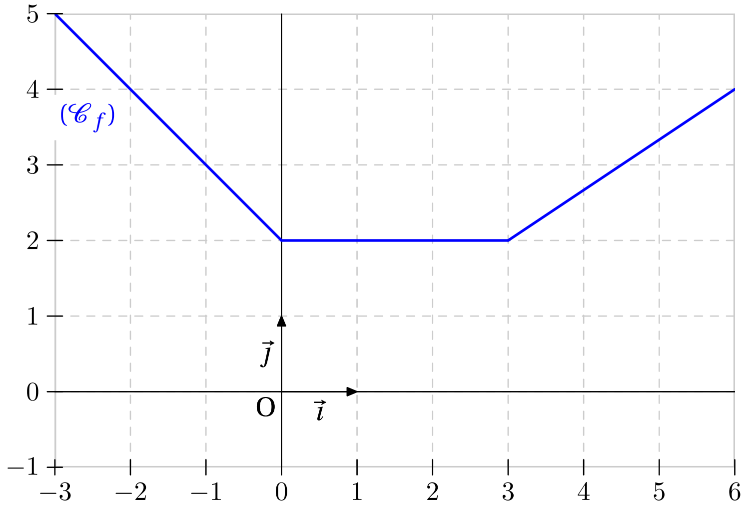


À l'aide du graphique, déterminer les intégrales suivantes :

1) $I = \displaystyle\int_{-3}^{0} f(x)dx$

2) $I = \displaystyle\int_{0}^{3} f(x)dx$

Exercice 2

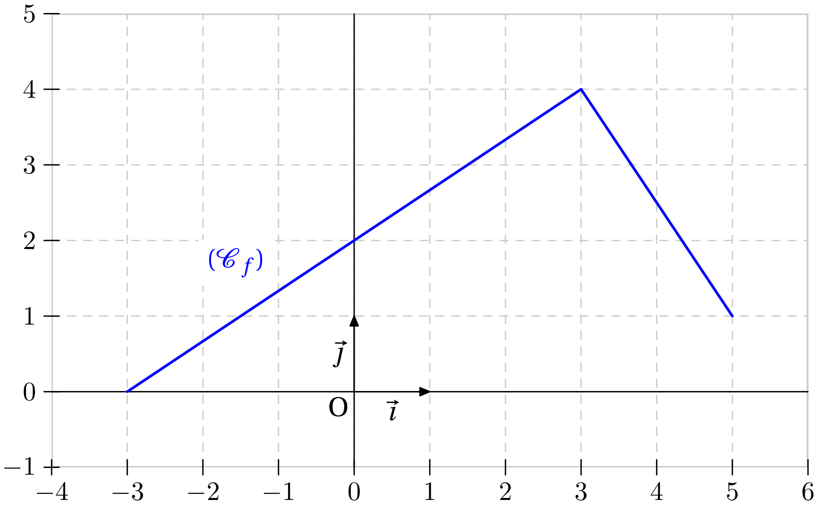


À l'aide du graphique, déterminer les intégrales suivantes :

1) $I = \displaystyle\int_0^6 f(x)dx$

2) $I = \displaystyle\int_{-3}^2 f(x)dx$

Exercice 3

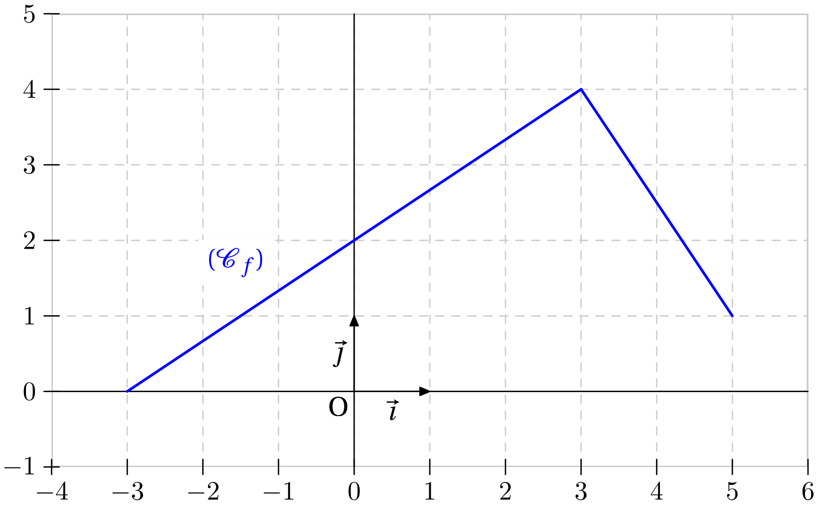


À l'aide du graphique, déterminer les intégrales suivantes :

1) $I = \displaystyle\int_{-3}^{0} f(x)dx$

2) $I = \displaystyle\int_{0}^{3} f(x)dx$

Exercice 4



À l'aide du graphique, déterminer les intégrales suivantes :

1) $I = \int_0^5 f(x)dx$

2) $I = \int_{-3}^5 f(x)dx$

Exercice 5

Soit $f(x) = \begin{cases} -x+3 & \text{si} \quad -2 \leqslant x < 1 \\ x+1 & \text{si} \quad 1 \leqslant x \leqslant 3 \end{cases}$.

1) Tracer la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal.

2) Justifier que f est continue et positive sur $[-2\ ;\ 3]$.

3) Calculer $I = \displaystyle\int_{-2}^{3} f(x)dx$.

Exercice 6

Soit $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si} \quad -2 \leqslant x < 0 \\ -\dfrac{2}{3}x+2 & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 3 \end{cases}$.

1) Tracer la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal.

2) Justifier que f est continue et positive sur $[-2\ ;\ 3]$.

3) Calculer $I = \displaystyle\int_{-2}^{3} f(x)dx$.

Exercice 7

1) Calculer $I = \int_5^6 6dx$.

2) Calculer $I = \int_{-2}^3 (-t+3)dt$.

NB : on s'aidera à chaque fois d'un graphique.

Exercice 8

1) Calculer $I = \int_0^4 (2x+1)dx$.

2) Calculer $I = \int_{-7}^{2} (-3)dt$.

NB : on s'aidera à chaque fois d'un graphique.

Exercice 9

1) Calculer $I = \displaystyle\int_{-2}^{2} |x| dx$.

2) Calculer $I = \displaystyle\int_{-3}^{3} (|t| + 1)\, dt$.

NB : on s'aidera à chaque fois d'un graphique.

Exercice 10

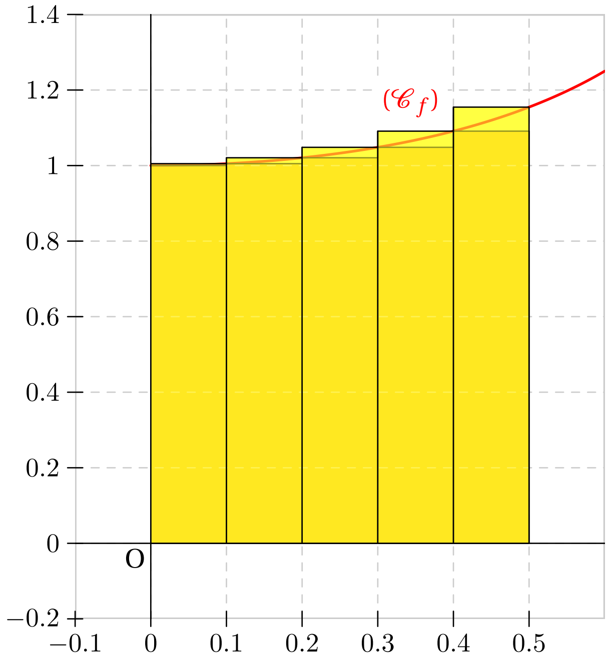
f est la fonction définie sur $[0\ ;\ 5]$ par $f(x) = 2x + 2$.

1) Interpréter géométriquement $I = \displaystyle\int_0^5 f(x)dx$.

2) Avec sa calculatrice, Lucy obtient le résultat 35.
Retrouver ce résultats par le calcul.

3) Calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0\ ;\ 5]$.

Exercice 11



f est la fonction définie sur $\left[0\ ;\ \dfrac{1}{2}\right]$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O\ ;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est notée $(\mathcal{C}_f)$.
$\mathcal{A}$ est l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par $(\mathcal{C}_f)$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \dfrac{1}{2}$.

On subdivise l'intervalle $\left[0\ ;\ \dfrac{1}{2}\right]$ en cinq intervalles d'amplitude $\dfrac{1}{10}$; on note $\mathcal{A}_1$ la somme des aires des rectangles en dessous de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ et $\mathcal{A}_2$ la somme des rectangles au dessus de la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

On considère le programme suivant :

```
import math

def f(x) :
    return 1/math.sqrt(1-x**2)

u = 0
v = 0
for k in range(0,5):
    u = u + 0.1*f(0.1*k)
    v = v + 0.1*f(0.1*(k+1))

print(u)
print(v)
```

1) Donner une interprétation graphique des variables u et v.

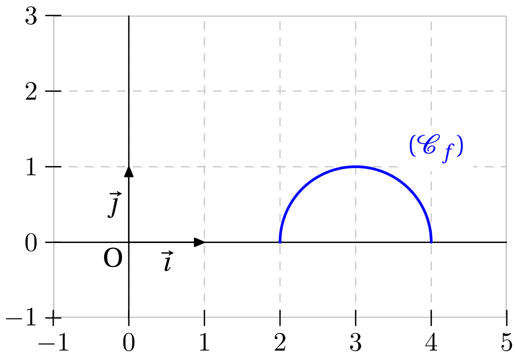
2) Quelles ont les valeurs obtenues pour u et v en fin d'algorithme ? Donner une valeur approchée de u par défaut à 10^{-4} près et une valeur approchée de v par excès à 10^{-4} près.

3) En déduire un encadrement de $\mathcal{A}$.

4) Exprimer $\mathcal{A}$ à l'aide d'une intégrale.

5) Déterminer à la calculatrice une valeur approchée de $\mathcal{A}$.

Exercice 12



On a représenté dans le plan muni d'un repère orthonormé la fonction f définie sur l'intervalle $[2~;~4]$ par $f(x) = \sqrt{-x^2 + 6x - 8}$.

Montrer que $\displaystyle\int_2^4 f(x)dx = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 13

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{|x|}{2} + 1$.

1) Représenter f dans le plan muni d'un repère orthonormé.

2) Interpréter géométriquement, puis calculer les intégrales $I = \displaystyle\int_{-4}^{0} f(x)dx$ et $J = \displaystyle\int_{0}^{4} f(x)dx$.

3) a est un nombre réel positif.
Justifier géométriquement que : $\displaystyle\int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(x)dx$.

Exercice 14

1) Interpréter géométriquement puis calculer $\int_2^4 (x-2)dx$ et $\int_0^2 (-x+2)dx$.

2) En déduire la valeur de $\int_0^4 |x-2|dx$.

3) Quelle est la valeur moyenne de $f(x) = |x-2|$ sur $[0\ ;\ 4]$?

Exercice 15

Interpréter géométriquement puis calculer $\int_{-1}^{5} |3x - 6| dx$.

Exercice 16

On considère la fonction f définie sur $[0\ ;\ 10]$ par $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 3 \\ 9-x & \text{si} \quad 3 < x \leqslant 7 \\ x-5 & \text{si} \quad 7 < x \leqslant 10 \end{cases}$.

1) Tracer la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal.

2) Justifier que f est continue et positive sur $[0\ ;\ 10]$.

3) Calculer $\displaystyle\int_0^{10} f(x)dx$.

4) Déterminer la valeur moyenne de f sur $[0\ ;\ 10]$.

Exercice 17

Calculer les intégrales suivantes et vérifier à la calculatrice.

1) $\displaystyle\int_0^1 \left(x^2+4\right) dx$

2) $\displaystyle\int_2^3 e^{3t} dt$

Exercice 18

Calculer les intégrales suivantes et vérifier à la calculatrice.

1) $\displaystyle\int_1^2 \left(\frac{x}{2}+1\right) dx$

2) $\displaystyle\int_1^e \frac{dx}{x}$

Exercice 19

Calculer les intégrales suivantes et vérifier à la calculatrice.

1) $\displaystyle\int_0^1 \left(x^4 - 4\right) dx$

2) $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x^4} dx$

Exercice 20

Calculer les intégrales suivantes et vérifier à la calculatrice.

1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x)dx$

2) $\displaystyle\int_1^2 e^{2t+1}dt$

Exercice 21

Calculer les intégrales suivantes et vérifier à la calculatrice.

1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{3x+2}$

2) $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{3x+2}dx$

Exercice 22

Calculer les intégrales suivantes et vérifier à la calculatrice.

1) $\displaystyle\int_0^{\ln 3} \frac{e^x}{2e^x+1}dx$

2) $\displaystyle\int_1^2 t\ e^{-t^2}dt$

Exercice 23

Calculer les intégrales suivantes et vérifier à la calculatrice.

1) $\displaystyle\int_0^1 6x\left(x^2-1\right)^2 dx$

2) $\displaystyle\int_1^{e^2} \frac{\ln t}{2t} dt$

Exercice 24

Calculer les intégrales suivantes et vérifier à la calculatrice.

1) $\displaystyle\int_0^2 \frac{4x}{\sqrt{x^2+1}}dx$

2) $\displaystyle\int_{\pi}^{2\pi} \sin(x)\ e^{\cos(x)}dx$

Exercice 25

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x + 2$.

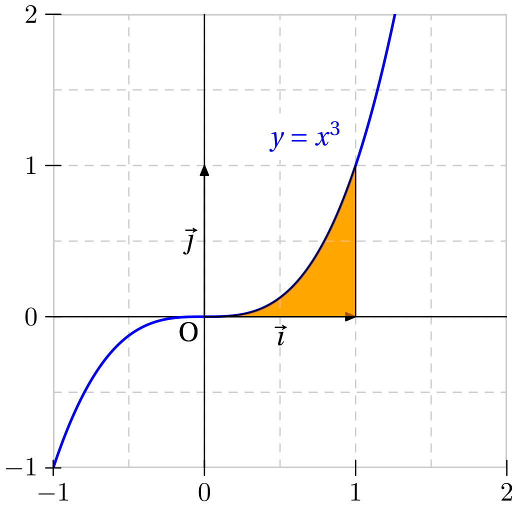
Déterminer la primitive F de f qui s'annule en $a = 2$.

Exercice 26

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{3x}{x^2+1}$.

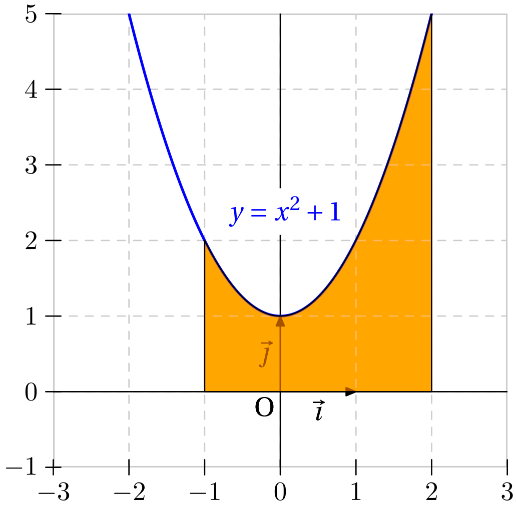
Déterminer la primitive F de f qui s'annule en $a = 3$.

Exercice 27



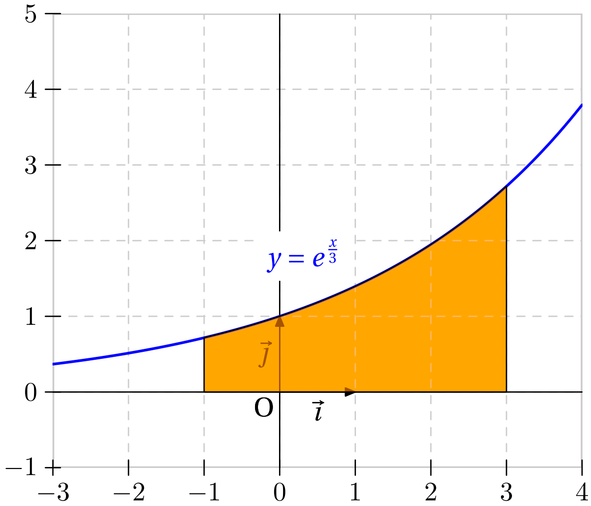
Calculer, en unité d'aire, l'aire du domaine en orange.

Exercice 28



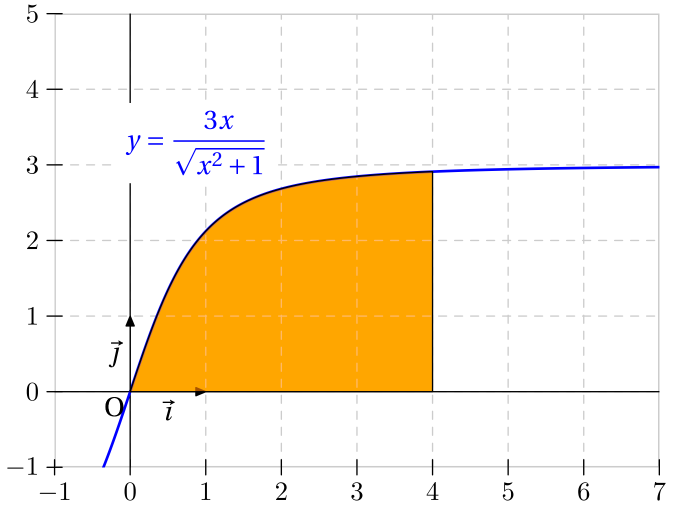
Calculer, en unité d'aire, l'aire du domaine en orange.

Exercice 29



Calculer, en unité d'aire, l'aire du domaine en orange.

Exercice 30



Calculer, en unité d'aire, l'aire du domaine en orange.

Exercice 31

F est la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^x \ln\left(1+t^2\right) dt$.

1) Déterminer $F(0)$.

2) Déterminer le sens de variation de F sur $[0\ ;\ +\infty[$.

3) Déterminer à la calculatrice une valeur approchée de $F(10)$. Interpréter graphiquement cette valeur.

Exercice 32

La fonction f est définie sur l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$ par $f(x)=\dfrac{2x^2+x}{x+1}$.

1) Démontrer que, $\forall x \in]-1\ ;\ +\infty[, \quad f(x)=2x-1+\dfrac{1}{x+1}$.

2) Calculer $I=\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$.

3) Déterminer une valeur approchée de I.

Exercice 33

La fonction f est définie sur l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4x+6}{(x+1)(x+2)(x+3)}$

1) Démontrer que, $\forall x \in]-1\ ;\ +\infty[, \quad f(x) = \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{2}{x+2} - \dfrac{3}{x+3}$.

2) Calculer $I = \displaystyle\int_0^2 f(x)dx$.

Exercice 34

La fonction f est définie sur l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{e^x + 1}$.
On note $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1) Démontrer que, $\forall x \in]-1\ ;\ +\infty[, \quad f(x) = 1 - \dfrac{e^x}{e^x + 1}$.

2) Calculer l'aire du domaine sous la courbe $(\mathcal{C}_f)$ sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$.

Exercice 35

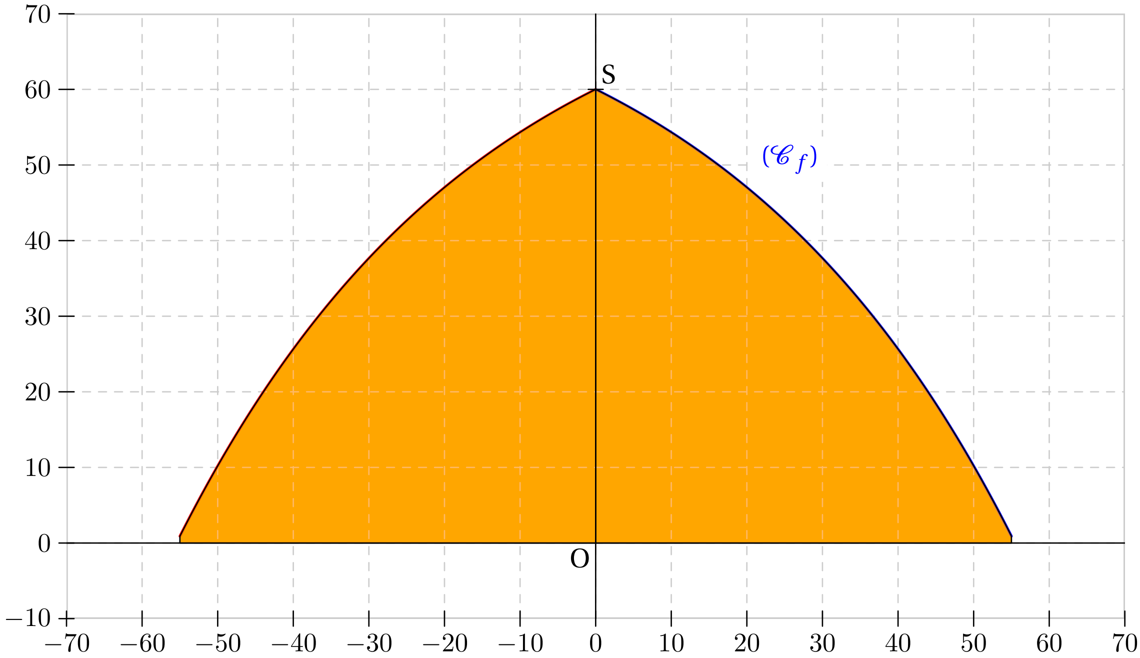
La fonction f est définie sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 2}{(x-1)^2}$.

1) Déterminer les nombres a, b et c tels que, $\forall x \in]-1\ ;\ +\infty[,\quad f(x) = a + \dfrac{b}{x-1} + \dfrac{c}{(x-1)^2}$.

2) Calculer $I = \displaystyle\int_2^4 f(x)dx$.

Exercice 36

Un architecte veut établir les plans d'un hangar pour ballon dirigeable.
La coupe de ce hangar, représentée ci-contre dans le plan muni d'un repère orthonormé, est symétrique par rapport à la droite (OS) et la partie droite est modélisée par la représentation graphique de la fonction f définie sur $[0\ ;\ 55]$ par $f(x) = 80 - 20\,e^{0,025x}$.
L'unité est le mètre.



1) Quelle est la hauteur du hangar en mètres ?

2) Étudier le signe de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ 55]$.

3) L'architecte souhaite calculer l'aire $\mathcal{A}$ de la surface de la façade du hangar en m^2.

  a) Vérifier que $\mathcal{A} = 2\displaystyle\int_0^{55} f(x)dx\ m^2$.

  b) Calculer $\mathcal{A}$ et donner la valeur approchée, arrondie à $10^{-2}\ m^2$ de $\mathcal{A}$.

Exercice 37

On considère la suite de fonctions f_n avec $n \in \mathbb{N}^*$, définies sur $[0\ ;\ 1]$ par $f_n(x) = x\ e^{-nx^2}$ et leurs courbes représentatives $(\mathcal{C}_n)$ dans le plan muni d'un repère orthogonal.

On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx$.

1) Interpréter géométriquement l'intégrale I_n.

2) **a)** À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, créer un curseur n variant de 1 à 30 avec un pas de 1 et construire la courbe $(\mathcal{C}_n)$.

b) Conjecturer le sens de variation de la suite (I_n) et son éventuelle limite.

3) **a)** Calculer I_n.

b) Confirmer ou infirmer les conjectures énoncées à la question **2)b)**.

Exercice 38

f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
Écrire chaque expression à l'aide d'une seule intégrale.

1) $\displaystyle\int_{-4}^{6} f(x)dx + \int_{-5}^{-4} f(x)dx + \int_{6}^{10} f(x)dx$

2) $\displaystyle\int_{10}^{14} f(x)dx - \int_{5}^{0} f(x)dx + \int_{5}^{10} f(x)dx$

Exercice 39

f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
Écrire chaque expression à l'aide d'une seule intégrale.

1) $3\int_1^2 f(x)dx + 5\int_1^2 f(x)dx$

2) $-4\int_3^5 f(x)dx - 5\int_5^3 f(x)dx$

Exercice 40

Déterminer le signe des intégrales.

1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{3x+2}dx$

2) $\displaystyle\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} t\ln t \; dt$

Exercice 41

Déterminer le signe des intégrales.

1) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos(x)\, dx$

2) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} t^2\, e^{-t}\, dt$

Exercice 42

Comparer, sans les calculer, les intégrales I et J.

$I = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx$ et $J = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\,dx$.

Exercice 43

Comparer, sans les calculer, les intégrales I et J.
$I = \displaystyle\int_0^1 e^{x^2}\,dx$ et $J = \displaystyle\int_0^1 e^{x^2+1}\,dx$.

Exercice 44

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

1) Encadrer $f(x)$ pour tout nombre réel x de $[1\ ;\ 2]$.

2) En déduire un encadrement de $\displaystyle\int_1^2 f(x)dx$.

Exercice 45

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-3x^2}$.

1) Encadrer $f(x)$ pour tout nombre réel x de $[-1\ ;\ 2]$.

2) En déduire un encadrement de $\displaystyle\int_{-1}^{2} f(x)dx$.

Exercice 46

On pose $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}dx$ et $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{e^x+1}dx$.

1) Calculer I.

2) Calculer $I + J$.

3) En déduire la valeur de J.

Exercice 47

f est une fonction continue sur l'intervalle $[-2\ ;\ 9]$ dont on donne ci-dessous le tableau de variations.

x	-2		3		6		9
Variations de f	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	2	$\nearrow$	7

1) Déterminer le signe de $\displaystyle\int_{-2}^{9} f(x)dx$.

2) **a)** Donner un encadrement de $f(x)$ pour $x \in [6\ ;\ 9]$.

b) En déduire un encadrement de $\displaystyle\int_{6}^{9} f(x)dx$.

Exercice 48

On considère $K = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$.

1) **a)** Montrer que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\quad \frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{1+x^2} \leqslant 1$.

b) En déduire un encadrement de l'intégrale K.

2) **a)** Démontrer que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\quad 1 - x^2 \leqslant \frac{1}{1+x^2} \leqslant 1 - x^2 + x^4$.

b) En déduire que $\quad \frac{2}{3} \leqslant K \leqslant \frac{13}{15}$.

Exercice 49

On considère :

$$I = \int_0^{\ln 5} \frac{e^x + 4}{e^x + 6}\, dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\ln 5} \frac{2}{e^x + 6}\, dx.$$

1) Calculer $I + J$ et $I - 2J$.

2) En déduire les valeurs de I et J.

Exercice 50

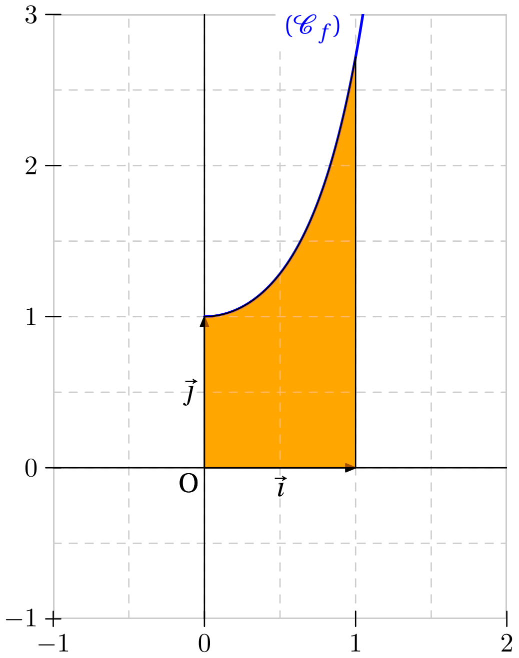
La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \displaystyle\int_0^1 e^{-\frac{t^2}{n}} dt$.

1) Montrer que si $n \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in [0\ ;\ 1]$, $\quad e^{-\frac{1}{n}} \leqslant e^{-\frac{t^2}{n}} \leqslant 1$.

2) En déduire un encadrement de u_n.

3) La suite (u_n) est-elle convergente ? Si oui, déterminer sa limite.

Exercice 51



Pour les besoins d'une agence de design, on a conçu une pièce métallique dont le contour, représenté en bleu sur sur la figure, est modélisé par la représentation graphique de la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ par $f(x) = e^{x^2}$.

L'unité est le cm.

On pose $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)dx$.

1) **a)** Justifier que f est positive et croissante sur $[0\ ;\ 1]$. Interpréter graphiquement I.

b) En déduire que, $\forall x \in [0\ ;\ 1]$, $\quad f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(1) \quad$ et que $\quad 1 \leqslant I \leqslant e$.

2) **a)** On subdivise l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ en deux intervalles de même amplitude. Justifier que :

- $\forall x \in \left[0\ ;\ \dfrac{1}{2}\right], \quad f(0) \leqslant f(x) \leqslant f\left(\dfrac{1}{2}\right)$.
- $\forall x \in \left[\dfrac{1}{2}\ ;\ 1\right], \quad f\left(\dfrac{1}{2}\right) \leqslant f(x) \leqslant f(1)$.

b) En déduire que $\quad \dfrac{1+e^{\frac{1}{4}}}{2} \leqslant I \leqslant \dfrac{e^{\frac{1}{4}}+e}{2}$

3) On généralise le procédé ci-dessus en coupant l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ en n intervalles de même amplitude. Recopier et compléter la fonction en Python **rectangles** permettant d'obtenir l'encadrement de I.

```python
import math

def f(x) :
    return math.exp(x**2)

def rectangles(n) :
    s1 = 0
    s2 = ...
    for i in range(0,n) :
        s1 = s1 + ...
        s2 = ... + (1/n)*f((1+i)/n)
    return ...
```

4) Le cahier des charges indique que l'aire de la pièce métallique doit être comprise entre $1,46\ cm^2$ et $1,47\ cm^2$. La pièce est-elle acceptée ?

Exercice 52

Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une intégration par parties.

1) $\int_0^2 3x\ e^{6x}\ dx$

2) $\int_{-1}^1 2x\ e^{-3x}\ dx$

Exercice 53

Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une intégration par parties.

1) $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{x+1}\,dx$

2) $\displaystyle\int_1^e x\ln x\;dx$

Exercice 54

Soit la fonction f définie sur $[2\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \ln(x-1)$.

Déterminer la primitive F de f telle que $F(2) = 3$.

Exercice 55

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$.

Déterminer la primitive F de f telle que $F(0) = 1$.

Exercice 56

À l'aide de deux intégrations par parties successives, calculer : $I = \displaystyle\int_0^1 x^2 e^x \, dx$.

Exercice 57

À l'aide de deux intégrations par parties successives, calculer : $I = \displaystyle\int_0^{\pi} x^2 \sin(x)\, dx$.

Exercice 58

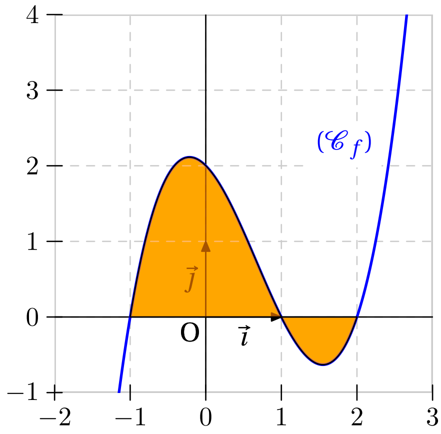
On pose $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \ \sin(x)\ dx$ et $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \ \cos(x)\ dx$.

1) Montrer à l'aide de deux intégrations par parties que $I = 1 + J$ et $J = e^{\frac{\pi}{2}} - I$.

2) En déduire les valeurs de I et de J.

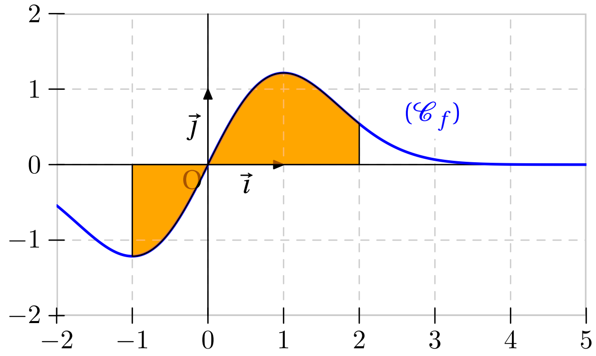
Exercice 59

Soit $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ de courbe représentative $(\mathcal{C}_f)$.

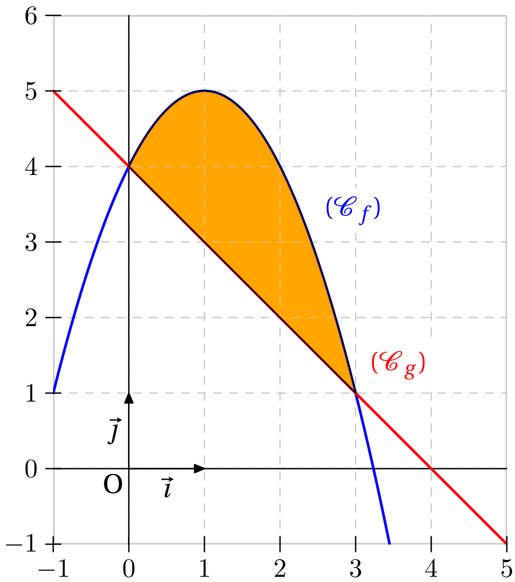


Exercice 60

Soit $f(x) = 2x\,e^{-\frac{x^2}{2}}$ de courbe représentative $(\mathcal{C}_f)$.



Exercice 61



On a tracé dans le plan muni d'un repère orthonormé les courbes représentatives des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 2x + 4$ et $g(x) = -x + 4$.

1) Étudier algébriquement la position relative des courbes $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$.

2) Calculer l'aire du domaine coloré en orange en unités d'aire.

Exercice 62

Soit $f(x) = 2x^2 - 2$.

Calculer la valeur moyenne de f sur $[-2\ ;\ 2]$.

Exercice 63

Soit $f(x) = -3\ e^{-x}$.

Calculer la valeur moyenne de f sur $[0\ ;\ 4]$.

Exercice 64

f et g sont les fonctions définies sur l'intervalle $[-1\ ;\ 1]$ par $f(x) = x^2(x^2-1)$ et $g(x) = x(1-x^2)$.

On note $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ leurs courbes représentatives dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1) Tracer à la calculatrice les courbes $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$.
Conjecturer leur position relative sur l'intervalle $[-1\ ;\ 1]$.

2) **a)** Montrer que, $\forall x \in [-1\ ;\ 1]$: $f(x) - g(x) = x(x-1)(x+1)^2$.

b) Étudier le signe de $f(x) - g(x)$ pour $x \in [-1\ ;\ 1]$.

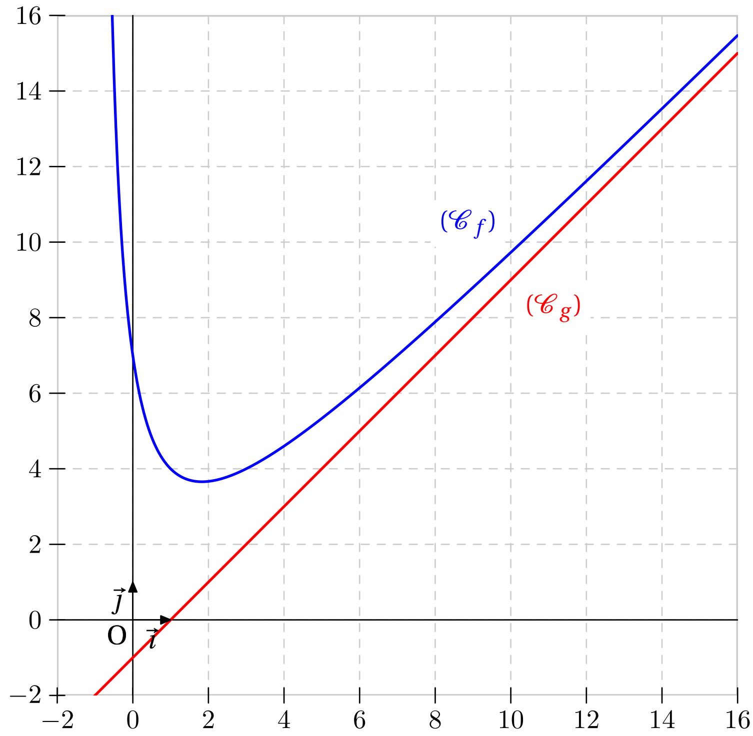
c) Valider ou infirmer les conjectures du **1)**.

3) Calculer l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par les courbes $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$.

Exercice 65

f et g sont deux fonctions définies sur $]-1\ ;\ +\infty[$ par $\quad f(x)=\dfrac{x^2+7}{x+1}\quad$ et $\quad g(x)=x-1$.

On a tracé les courbes représentatives $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ de f et g dans le plan muni d'un repère orthonormé.



1) Conjecturer la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$.

2) **a)** Montrer que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\quad f(x)-g(x)=\dfrac{8}{x+1}$.

b) Valider ou infirmer la conjecture du **1)** et calculer la limite de $f(x)-g(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

3) Pour $\lambda \in [0\ ;\ +\infty[$, on note $\quad I_\lambda=\displaystyle\int_0^\lambda \frac{8}{x+1}dx$.

a) Interpréter géométriquement l'intégrale I_λ.

b) Calculer I_λ.

c) Déterminer la limite de I_λ lorsque λ tend vers $+\infty$. Interpréter ce résultat.

Exercice 66

Une substance médicamenteuse est injectée par voie intraveineuse à un patient.
Dans les heures qui suivent l'injection, la substance est éliminée par les reins.
La concentration de substance (en $mg.L^{-1}$) présente dans le sang à l'instant t (en heures) est modélisée par $C(t) = 10\,e^{-0{,}15t}$ où $0 \leqslant t \leqslant 12$.

1) Calculer la valeur moyenne de C sur $[0\;;\;9]$.

2) En déduire la concentration moyenne de substance médicamenteuse dans le sang du patient pendant les neuf heures qui suivent l'injection.

Exercice 67

Soit la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $u_n = \displaystyle\int_0^1 t^n e^{-t}\,dt$.

1) Déterminer le premier terme de cette suite.

2) Démontrer que pour tout $n \geqslant 1, \quad u_n \geqslant 0$.

3) En utilisant une intégration par parties, montrer que :
$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = -\dfrac{1}{e} + (n+1)u_n$.

4) Déterminer u_2 et u_3.

5) Calculer $I = \displaystyle\int_0^1 \left(x^3 - 2x^2 + x\right) e^{-x}\,dx$.

Exercice 68

Les suites (I_n) et (J_n) sont définies sur $\mathbb{N}$ par :
$I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\, e^{-nx}\, dx$ et $J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\, e^{-nx}\, dx$.

1) Calculer I_0 et J_0.

2) Montrer à l'aide d'une intégration par parties que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, I_n et J_n vérifient :
$I_n + n\, J_n = 1$ et $-nI_n + J_n = e^{-n\frac{\pi}{2}}$.

3) En déduire les expressions de I_n et de J_n en fonction de n.

4) Étudier les limites des suites (I_n) et (J_n).

Exercice 69

f et g sont les fonctions définies sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = x - 5 + \dfrac{10}{(x+1)^2}$ et $g(x) = x - 5$.

On note $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ les courbes représentatives de f et g dans le plan muni d'un repère orthogonal avec $OI = 1\ cm$ et $OJ = 0,5\ cm$.

1) **a)** Étudier la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ et de $(\mathcal{C}_g)$.

b) Étudier la limite de $f(x) - g(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

2) On note, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A}_p$ l'aire du domaine délimité par $(\mathcal{C}_f)$, $(\mathcal{C}_g)$, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = p$.

a) Écrire $\mathcal{A}_p$ à l'aide d'une intégrale.

b) Montrer que $\mathcal{A}_p = 10 - \dfrac{10}{p+1}$ u.a., puis exprimer $\mathcal{A}_p$ en cm^2.

c) Vérifier que $\lim\limits_{p \to +\infty} \mathcal{A}_p = 10$. Donner une interprétation géométrique de ce résultat.

3) Coder en Python une fonction qui renvoie le premier entier p tel que $\mathcal{A}_p > 10 - \alpha$, où α est un paramètre.

Exercice 70

Exercice 71

Exercice 72

Exercice 73

Exercice 74

Exercice 75

Exercice 76

Exercice 77

Exercice 78

Exercice 79

Exercice 80

Exercice 81

Exercice 82

Exercice 83

Exercice 84

Exercice 85

Exercice 86

Exercice 87

Exercice 88

Exercice 89

Exercice 90

Exercice 91

Exercice 92

Exercice 93

Exercice 94

Exercice 95

Exercice 96

Exercice 97

Exercice 98

Exercice 99

Exercice 100