Exercice 1

Déterminer l'ensemble ds primitives de chaque fonction sur l'intervalle I considéré.

1) $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ avec $I = \mathbb{R}$.

2) $f(x) = \cos(x) + \sin(x)$ avec $I = \mathbb{R}$.

3) $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{\sqrt{x}}$ sur $I =]0\ ;\ +\infty[$.

Exercice 2

Déterminer l'ensemble ds primitives de chaque fonction sur l'intervalle I considéré.

1) $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 1$ avec $I = \mathbb{R}$.

2) $f(x) = e^{7+2x} - 1$ avec $I = \mathbb{R}$.

Exercice 3

Dans chaque cas, déterminer la primitive F de f sur l'intervalle I telle que $F(x_0) = y_0$.

1) $f(x) = -2\sin(2x)$ avec $I = \mathbb{R}$, $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$ et $y_0 = 1$.

2) $f(x) = \dfrac{1}{x^2} + 2x - 3$ avec $I =]0\ ;\ +\infty[$, $x_0 = 1$ et $y_0 = 1$.

Exercice 4

Dans chaque cas, déterminer la primitive F de f sur l'intervalle I telle que $F(x_0) = y_0$.

1) $f(x) = -\dfrac{5}{x} + 1$ avec $I =]0\ ;\ +\infty[$, $x_0 = e$ et $y_0 = 2$.

2) $f(x) = e^{3-4x}$ avec $I = \mathbb{R}$, $x_0 = 0$ et $y_0 = 0$.

Exercice 5

Déterminer une primitive de chacune des fonctions sur un intervalle inclus dans son ensemble de définition.

1) $f(x) = 3x^2 - \dfrac{4}{x} + 5$

2) $f(x) = (3x-2)^4$

3) $f(x) = \dfrac{1}{x\ln x}$

Exercice 6

Déterminer une primitive de chacune des fonctions sur un intervalle inclus dans son ensemble de définition.

1) $f(x) = 2x\ e^{x^2+1} - 5$

2) $f(x) = \dfrac{3x^2}{x^3+5}$

3) $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$

Exercice 7

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes sur un intervalle I quelconque de son ensemble de définition.

1) $f(x) = \dfrac{1}{x^2\sqrt{x}}$

2) $f(x) = \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$

Exercice 8

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes sur un intervalle I quelconque de son ensemble de définition.

1) $f(x) = e^x \left(1 + e^x\right)^2$

2) $f(x) = 1 + \tan x$

Exercice 9

La fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sqrt{2+\sin(x)}}$.

Déterminer la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en $\dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 10

On souhaite déterminer la primitive F qui s'annule en 1 de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.

2) Calculer la dérivée de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

3) Conclure.

Exercice 11

1) Déterminer trois primitives différentes de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 6x^2 + 3x - 5$.

2) La courbe représentative d'une fonction h passe par le point $A(-1\ ;\ 0)$.
Sachant que $h'(x) = 2x^2 - 6$, déterminer l'expression de $h(x)$.

Exercice 12

1) Déterminer la primitive F de $f(x) = 3x^2 - 7x + 2$ telle que $F(1) = -1$.

2) Déterminer la primitive G de $g(x) = \sin(x) + \cos(x)$ telle que $G\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Exercice 13

Soit $g(x) = \dfrac{2x^2 - 3x - 4}{x - 2}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_g$ de g.

2) Déterminer les nombres réels a, b et c tels que, pour tout $x \in \mathcal{D}_g$, $\quad g(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-2}$.

3) En déduire les primitives de g sur les intervalles inclus dans $\mathcal{D}_g$.

Exercice 14

Soit $h(x) = \dfrac{e^x - 2}{e^x + 1}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_h$ de h.

2) Déterminer les nombres réels a et b tels que, pour tout $x \in \mathcal{D}_h$, $\quad h(x) = a + b\dfrac{e^x}{e^x + 1}$.

3) En déduire les primitives de h sur les intervalles inclus dans $\mathcal{D}_h$.

Exercice 15

Les fonctions f_1, f_2 et f_3 sont respectivement définies par $f_1(x) = (x-1)\ln(x-1)$, $f_2(x) = \ln(x-1)$ et $f_3(x) = \ln(x+1)$.

1) Déterminer leurs ensembles de définition.

2) Calculer la dérivée de f_1 et en déduire une primitive de la fonction f_2.

3) Déterminer de manière analogue une primitive de la fonction f_3.

4) Proposer, à l'aide des questions précédentes, une primitive sur $]-1\ ;\ +\infty[$ de la fonction g définie par $g(x) = \ln(x^2-1)$.

Exercice 16

Pour tout nombre réel x, on pose $f(x) = (\cos(x))^3 (\sin(x))^4$

1) En utilisant le fait que $(\cos(x))^2 + (\sin(x))^2 = 1$, démontrer que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = u'(\sin(x)) \times \cos(x)$ avec $u(x) = \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7}$.

2) En déduire une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 17

On considère des fonctions polynomiales : $f \ : \ x \longmapsto a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, avec $(a_0 \ ; \ a_1 \ ; \ \cdots \ ; \ a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Pour modéliser en Python une telle fonction, on utilise une liste **P=[a0,a1,...,an]**.

1) **a)** Recopier et compléter la fonction **image** suivante, qui calcule l'image du nombre **x** par la fonction f, donnée sou la forme d'une liste **P** passée en paramètre.

```python
def image(P,x):
    res = 0
    for exp in range(0,len(P)):
        res = ...
    return res
```

b) Tester la fonction avec $f(x) = 1 + 4x + 9x^2$ pour $x = 2$.

2) **a)** Recopier et compléter la fonction **primitive** qui renvoie une liste correspondant à la primitive de f qui prend la valeur b en a.

```python
def primitive(P,a,b):
    primi=[0]
    for exp in range(0,len(P)):
        primi.append(...)
    primi[0] = ...
    return primi
```

b) En déduire la primitive F de $f(x) = 1 + 4x + 9x^2$ telle que $F(1) = 2$.

Exercice 18

Résoudre chaque équation différentielle sur $\mathbb{R}$.

1) $y' = 2y$

2) $\frac{4}{3}y' + y = -1$

Exercice 19

Résoudre chaque équation différentielle sur $\mathbb{R}$.

1) $y' - 2y = 3$

2) $3y' + 5y = 0$

Exercice 20

Déterminer la solution f sur $\mathbb{R}$ telle que $f(2) = e$ de l'équation différentielle $-2y' + 3y = 0$.

Exercice 21

Déterminer la solution f sur $\mathbb{R}$ telle que $f(2) = \dfrac{1}{e}$ de l'équation différentielle $-y' + 0,5y = 0$.

Exercice 22

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + y = -3$.

1) Déterminer une solution évidente sur $\mathbb{R}$ de cette équation.

2) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $y' + y = 0$.

3) En déduire les solutions de l'équation (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 23

1) Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations $5y' = 3y$ et $5y' = -3y$.

2) En déduire les solutions f_1 et f_2 de ces équations différentielles sur $\mathbb{R}$ telles que $f_1'(0) = 1$ et $f_2(0) = 1$.

Exercice 24

Dans chaque cas, déterminer la solution f sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle satisfaisant la condition initiale donnée, puis donner l'allure de sa représentation graphique.

1) $y' = y$ avec $f(0) = 2$.

2) $y' + 0,03y = 5$ avec $f'(0) = 5$.

Exercice 25

Dans chaque cas, déterminer la solution f sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle satisfaisant la condition initiale donnée, puis donner l'allure de sa représentation graphique.

1) $y' = 4y - 3$ avec $f(0) = -1$.

2) $y' = 500 - 0,1y$ avec $f(10) = 0$.

Exercice 26

Dans chaque cas, déterminer la solution f sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle satisfaisant la condition initiale donnée, puis donner l'allure de sa représentation graphique.

1) $y' = 2y + 1$ avec $f(0) = 1$.

2) $y' + 0,005y = -1$ avec $f(0) = 200$.

Exercice 27

Dans chaque cas, déterminer la solution f sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle satisfaisant la condition initiale donnée, puis donner l'allure de sa représentation graphique.

1) $y' = -y + 4$ avec $f(2) = 6$.

2) $y' = 300 - 0,1y$ avec $f(10) = 0$.

Exercice 28

Dans chaque cas, mettre l'équation différentielle sous la forme $y' = ay + b$ où a et b sont des réels, puis la résoudre sur $\mathbb{R}$.

1) $y' + 3y = 1$

2) $y' = 50(y + 1)$

Exercice 29

Dans chaque cas, mettre l'équation différentielle sous la forme $y' = ay + b$ où $a4et$b sont des réels, puis la résoudre sur $\mathbb{R}$.

1) $2y' - 3y + 7 = 0$

2) $y' = 2020\left(\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{5}y\right)$

Exercice 30

Dans chaque cas, mettre l'équation différentielle sous la forme $y' = ay + b$ où a et b sont des réels, puis la résoudre sur $\mathbb{R}$.

1) $4y' - 2y = 1$

2) $y' = \dfrac{1}{10}(100 - y)$

Exercice 31

Dans chaque cas, mettre l'équation différentielle sous la forme $y' = ay + b$ où a et b sont des réels, puis la résoudre sur $\mathbb{R}$.

1) $\sqrt{3}y' = 3y + 4$

2) $3y' - 5y = 2121$

Exercice 32

1) Résoudre l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$ $\quad y' - \ln(3)\, y = 0$.

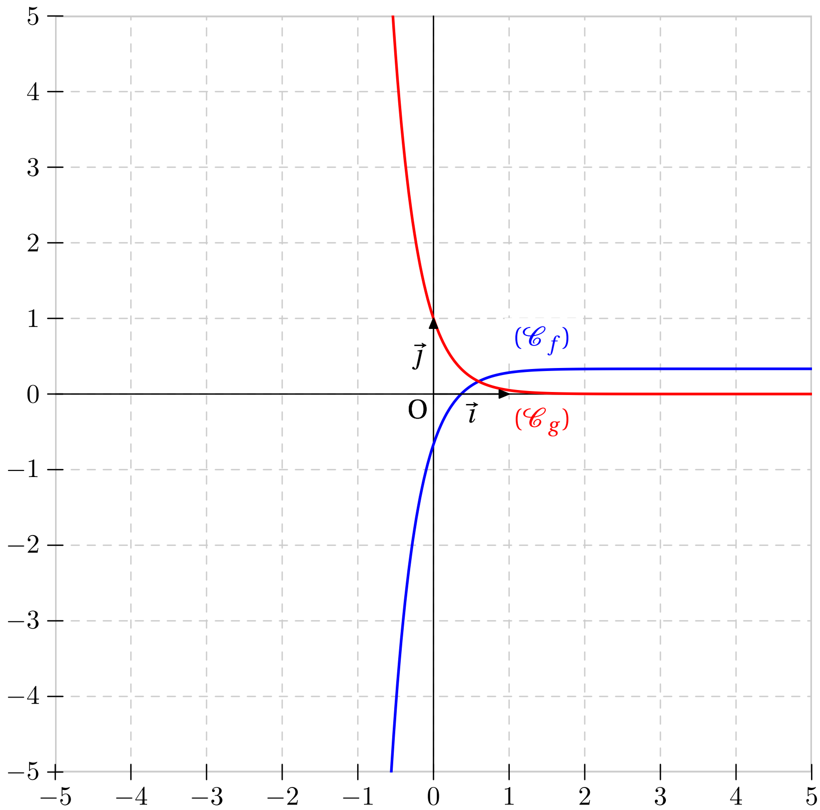
2) En déduire la solution particulière f sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative passe par le point de coordonnées $A(1\ ;\ 3)$.

Exercice 33

On considère les équations différentielles :

- $(E_1) : y' + 3y = 0$
- $(E_2) : y' = 1 - 3y$

On a représenté l'allure des courbes représentatives d'une solution sur $\mathbb{R}$ de chacune de ses équations.



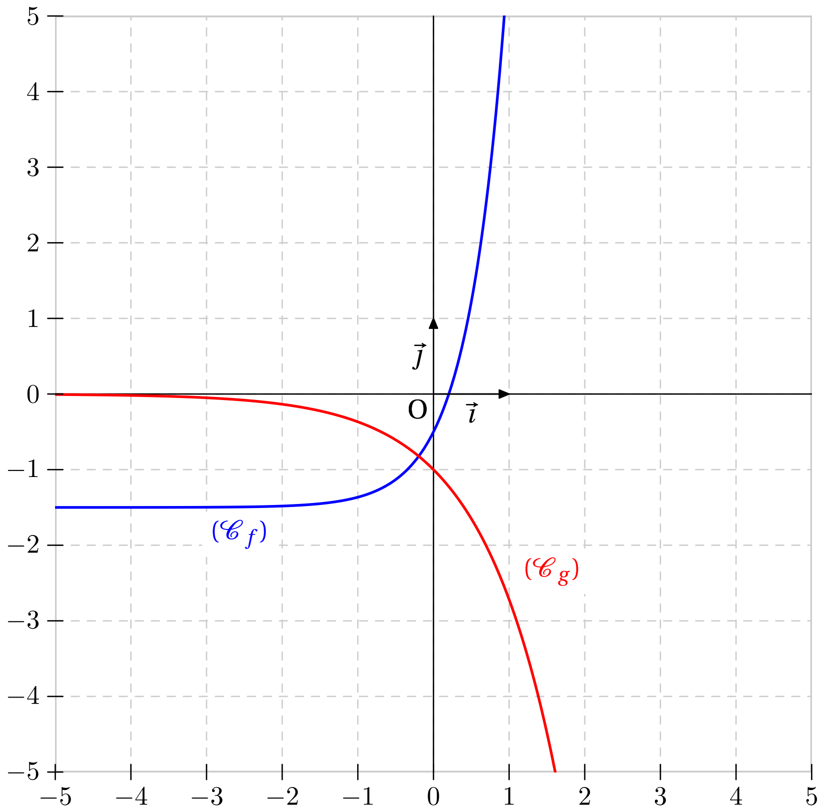
Associer à chaque courbe son équation différentielle. Justifier.

Exercice 34

On considère les équations différentielles :

- $(E_1) : y' - 2y = 3$
- $(E_2) : y' = y$

On a représenté l'allure des courbes représentatives d'une solution sur $\mathbb{R}$ de chacune de ses équations.



Associer à chaque courbe son équation différentielle. Justifier.

Exercice 35

Comme en physique !

1) Déterminer la solution de l'équation différentielle $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \tan(t)$ dont la courbe passe par $A\left(\dfrac{\pi}{4}\ ;\ 1\right)$.

2) Déterminer la solution de l'équation différentielle $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + 3u = -7$ dont la courbe passe par $B\,(-3\ ;\ 1)$.

Exercice 36

On considère l'équation différentielle (E) : $y' = ay + b$ avec a et b donnés et $a < 0$.

1) Si $b = -1$, donner l'allure des courbes représentatives des solutions sur $\mathbb{R}$ de (E).

2) Si, pour une solution f de (E) sur $\mathbb{R}$, on a $f'(0) = 0$, montrer que f est constante sur $\mathbb{R}$.

3) Déterminer la solution f_1 sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) vérifiant les conditions suivantes :
$a = -7$, $b = 3$ et $f_1(0) = 2$.

4) Déterminer la solution f_2 sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) vérifiant les conditions suivantes :
$a = -1$, $b = -1$ et $f_2(0) = -1$.

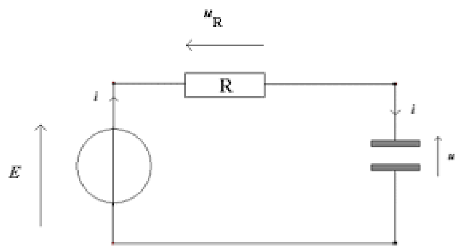
Exercice 37

À l'instant $t = 0$ (où T est exprimé en heures), on injecte dans le sang, par piqûre intraveineuse, une dose de $1,6$ unité d'une substance médicamenteuse. La substance se répartit instantanément dans le sang et est ensuite progressivement éliminée.
On note $Y(t)$ la quantité de substance présente dans le sang à l'instant t.
On modélise le processus d'élimination par une équation différentielle $Y' = -k \times Y$, où k est un nombre déterminé expérimentalement.

1) Montrer que, $\forall t \in [0\ ;\ +\infty[, \quad Y(t) = 1,6e^{-kt}$.

2) En déduire la valeur de k sachant qu'au bout d'une heure la quantité de substance présente dans le sang a diminué de $25\ \%$. On donnera une valeur exacte, ainsi qu'une valeur approchée à 10^{-4} près de k.

Exercice 38



Un condensateur de capacité $C = 20\mu F$ est placé avec une résistance $R = 1\,000\Omega$, dans un circuit électrique RC dont le générateur est une alimentation stabilisée délivrant une tension continue $E = V$.
La charge q du condensateur vérifie l'équation $\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \dfrac{q}{RC} = \dfrac{E}{R}$ et elle est nulle à l'instant $t = 0\ s$.

1) Écrire l'équation vérifiée par q sous la forme $y' = ay + b$. Résoudre cette équation sur $[0\ ;\ +\infty[$ et donner une expression de q en fonction de t.

2) Quelle charge le condensateur tend-il à avoir si on attend suffisamment ? Au bout de combien de temps atteint-il la moitié de cette charge ?

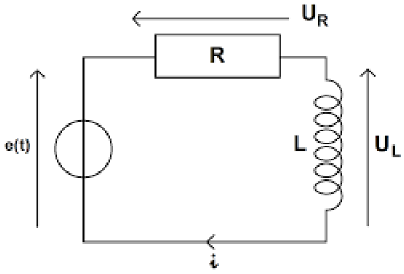
Exercice 39

La vitesse de chute verticale v (en $m.s^{-1}$) d'un objet de masse $m = 2kg$ vérifie l'équation $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g - \dfrac{\gamma}{m}v$, où $g = 9,8m.s^{-2}$ est la norme du champ de pesanteur, $\gamma = 1,96kg.s^{-1}$ le coefficient de frottement et t le temps (en s) écoulé depuis le début de la chute.

1) Écrire l'équation vérifiée par v sous la forme $y' = ay + b$. Résoudre cette équation sur $[0\ ;\ +\infty[$ et donner une expression de v en fonction de t.

2) Quel est le comportement de v lorsque t tend vers $+\infty$? Interpréter dans le contexte.

Exercice 40



L'intensité (en mA) du courant dans un circuit contenant une résistance $R = 150\Omega$ et une bobine d'inductance $L = 200mH$, dont le générateur est une alimentation stabilisée délivrant une tension continue $E = 12V$, vérifie l'équation $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \dfrac{E}{L} - \dfrac{R}{L}i$ avec la condition initiale $i(0) = 0mA$.

1) Écrire l'équation vérifiée par i sous la forme $y' = ay + b$.

2) Résoudre cette équation sur $[0\ ;\ +\infty[$ et donner l'expression de i en fonction de t.

Exercice 41

1) Déterminer la solution particulière affine sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(E) : 2y' + 3y = 6x - 5$.

2) En déduire l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E).

Exercice 42

On considère l'équation différentielle (E) : $y' - 4y = 3e^x$.

1) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation homogène associée (E_0) : $y' - 4y = 0$.

2) Vérifier que la fonction y_0 définie par $y_0(x) = -e^x$ est une solution particulière sur $\mathbb{R}$ de (E).

3) Démontrer qu'une fonction dérivable g définie sur $\mathbb{R}$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $(g - y_0)$ est solution de (E_0).

4) En déduire toutes les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

5) Déterminer la solution h de (E) sur $\mathbb{R}$ vérifiant la condition initiale $h(1) = 0$.

Exercice 43

On considère l'équation différentielle $(E) : y' - 2y = \cos(t)$.

1) Vérifier que la fonction $f \ : \ x \longmapsto -\dfrac{2}{5}\cos(t) + \dfrac{1}{5}\sin(t)$ est une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}$.

2) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation homogène associée $(E_0) : y' - 2y = 0$.

3) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 44

On considère l'équation différentielle (E) : $y' - y = e^x$.

1) Déterminer une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}$, de la forme $h(x)e^x$ où h est une fonction affine.

2) En déduire l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 45

1) Déterminer une expression de la fonction f telle que $g(x) = 3e^{x} + 2e^{-x}$ soit une solution particulière de l'équation différentielle (E) : $5y' + 2y = f(x)$.

2) En déduire la solution sur $\mathbb{R}$ de (E) qui s'annule en 3.

Exercice 46

On définit la fonction v définie par : $\forall x$ß$\mathbb{R}$, $v(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x < 0 \\ e^x & \text{si} \quad x \geqslant 0 \end{cases}$.

1) Montrer que la fonction v est continue sur $\mathbb{R}$.

2) On définit la fonction u définie par $u(x) = \begin{cases} e^x - 1 & \text{si} \quad x < 0 \\ x\, e^x & \text{si} \quad x \geqslant 0 \end{cases}$.

Montrer que u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' - y = v$ avec la condition initiale $u(0) = 0$.

Exercice 47

On cherche à déterminer les fonctions définies et dérivables et à valeur strictement positives sur $\mathbb{R}$, solutions de l'équation différentielle non linéaire (E) : $y' = y \times \ln(y)$.

1) **a)** Montrer que s'il existe une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $y(x) = e^{f(x)}$ soit une solution de (E), alors f est une solution sur $\mathbb{R}$ d'une certaine équation (E'). La résoudre sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que, réciproquement, si f est une solution de (E') sur $\mathbb{R}$, alors $g(x) = e^{f(x)}$ est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

2) En déduire toutes les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$, ainsi que celle qui vaut 9 en $\ln(3)$.

Exercice 48

Exercice 49

Exercice 50