Exercice 1

Soit X deux variables aléatoires indépendantes.
X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(25\ ;\ 0,33)$.
Y suit la loi binomiale $\mathcal{B}(55\ ;\ 0,33)$.

1) Déterminer $p(20 \leqslant X + Y \leqslant 35)$.

2) Déterminer $p(X + Y > 40)$.

Exercice 2

Pour chacune des situations ci-dessous, indiquer si la variable aléatoire S suit une loi binomiale ; justifier.

1) On tire avec remise 3 boules dans une urne contenant 4 boules vertes et 6 boules noirs. Pour chaque tirage, la variable aléatoire X_i vaut 1 si la boule du tirage i est verte, 0 sinon.
On note $S = X_1 + X_2 + X_3$.

2) On prélève sans remise les cinq jetons numérotés de 1 à 5 d'une urne. Y_j est la variable aléatoire qui, à chaque tirage, vaut 1 si le numéro du jeton du j-ième tirage a un numéro pair, et 0 sinon.
On note $S = Y_1 + \cdots + Y_5$.

3) On tire une carte d'une jeu de 52 cartes et on note Z_1 la variable aléatoire qui vaut 1 si cette carte est un valeur, et 0 sinon. On remet la carte dans le jeu et on tire avec remise cinq autres cartes en définissant de même les variables aléatoires Z_2, ..., Z_6.
On note $S = Z_1 + \cdots + Z_6$.

Exercice 3

Chaque vendredi, Serena achète un ticket d'un jeu de hasard pour lequel la probabilité de gagner de l'argent est $0,05$. On note X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si Serena a eu un ticket gagnant la semaine i.

1) On note $S = X_1 + \cdots + X_{52}$. Interpréter S dans le contexte et déterminer sa loi de probabilité.

2) Calculer et interpréter la probabilité de l'événement $\{S > 0\}$.

Exercice 4

1) On lance quatre dés équilibrés à six faces numérotées de 1 à 6 et on compte le nombre de faces "1" obtenues.
On note H la variable aléatoire qui associe le nombre de "1" obtenus.
Justifier que H peut s'écrire comme une somme de variables aléatoires suivant une loi de Bernoulli dont on précisera le paramètre. En déduire la loi de probabilité de H.

2) Déterminer de même la loi de probabilité de la variable aléatoire T comptant le nombre de faces "1" obtenues après le lancer de trois dés équilibrés à quatre faces numérotées de 1 à 4.

3) Comparer les probabilités d'obtenir au moins deux faces "1" lors de chacune des deux expériences aléatoires décrites en **1)** et **2)**.

Exercice 5

Afin de mieux sécuriser les achats en ligne, certaines cartes bancaires ont un cryptogramme dynamique : ce code de sécurité qui figure au dos de la carte change chaque heure de manière "aléatoire" ; chaque cryptogramme est composé de trois chiffres et les combinaisons de trois chiffres identiques comme "111" ou "888" sont exclues.

1) Combien de cryptogrammes différents la carte bancaire peut-elle générer ?

2) Combien de cryptogrammes comportent deux fois le même chiffre ?

3) On note D la variable aléatoire valant 1 si le cryptogramme comporte deux fois le même chiffre, et 0 sinon. Établir la loi de probabilité de la variable aléatoire D.

4) $(D_1, \cdots, D_{24})$ est un échantillon de taille 24 de la variable aléatoire D et $S = D_1 + \cdots + D_{24}$. Calculer $p(S \geqslant 2)$ et interpréter ce résultat.

NB : en réalité, ces cryptogrammes dynamiques sont pseudo-aléatoires, car ils sont déterminés par un algorithme (confidentiel).

Exercice 6

Sur des paquets de cartes à collectionner, il est indiqué que "$20\ \%$ des paquets comportent une et une seule carte rare".

1) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire C qui, à chaque paquet, associe le nombre de cartes rares.

2) Daniel achète 12 paquets : le nombre de cartes rares de ce lot est modélisé par un échantillon de taille 12 de la variable aléatoire C, noté $(C_1, \cdots, C_{12})$.
Expliquer pourquoi il est plausible d'affirmer que les variables formant cet échantillon dont indépendantes.

3) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $L = C_1 + \cdots + C_{12}$.

4) Daniel a-t-il plus de $50\ \%$ de chances d'avoir récupéré 4 cartes rares ?

Exercice 7

Dans un magasin de jardinage, on réalise des semis de tomates. Il est constaté que les semis, plantés dans des pots séparés et cultivés dans les mêmes conditions, survivent au bout de 2 mois dans $78\ \%$ des cas.

1) On note V la variable aléatoire qui, à chaque semis, associe 1 s'il est vivant, et 0 sinon.
Établir la loi de probabilité de V.

2) 500 semis ont été plantés ; on modélise par un échantillon $(V_1, \cdots, V_{500})$ de taille 500 de V, et on note $S = V_1 + \cdots + V_{500}$.
Déterminer la loi de probabilité de S.

3) Calculer la probabilité $p(S > 400)$ et interpréter ce résultat.

Exercice 8

On considère le programme en Python suivant.

```python
import random

def simu_X():
    if random.randint(1,1000) <=421 :
        return 1
    else :
        return 0

def simu_S() :
    s = 0
    for exp in range(210):
        s = s + simu_X()
    return s

def m(n) :
    acc = [ simu_S() for sim in range(n)]
    return sum(acc)/n
```

1) Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X, simulée par la fonction **simu_X**, puis de la variable aléatoire S, simulée par la fonction **simu_S**.

2) Interpréter ce que renvoie la fonction en Python **m**.

3) Après exécution avec $n = 10\,000$, la fonction **m** renvoie $88,043$.
Interpréter cette valeur.

Exercice 9

1) Recopier et compléter les fonctions en Python suivantes afin que la fonction **bino** simule la loi binomiale de paramètres 50 et $0,27$.

```
import random

def bern() :
    if random.randint(1,100) <= ...:
        return ...
    else :
        return 0

def bino () :
    s = 0
    for exp in range(...) :
        s = ...
    return ...
```

2) Recopier et compléter la fonction **echant** afin qu'elle renvoie un échantillon de taille 600 de la variable aléatoire simulée par la fonction **bino**.

```
def echant() :
    liste = ...
    for simu in range(...) :
        liste.append(...)
    return ...
```

3) Coder en Python une fonction **prop** qui renvoie la proportion de réalisations X de **bino** vérifiant $|X-13,5| \leqslant 10$ dans un échantillon de taille 600.

Exercice 10

Alice et Bob ont rédigé chacun un programme afin de simuler une loi binomiale de paramètres 180 et $0,509$.

Programme d'Alice

```python
import random

def simu1() :
    if random.randint(1,100)<=50.9:
        return 1
    else :
        return 0

def Simu1() :
    for k in range(180):
        x = x+simu1()
    return x
```

Programme de Bob

```python
import random

def simu2() :
    if random.randint(1,1000)<=509:
        return 1
    return 0

def Simu2() :
    x = 0
    for exp in range(180):
        x = simu2()
    return x

```

Leurs programmes sont-ils corrects ? Identifier toutes les erreurs.

Exercice 11

Lors de l'achat d'un ticket à 5 euros d'un certain jeu de grattage, la probabilité d'obtenir un ticket gagnant est de $5\ \%$; le joueur gagne alors 80 € (soit 75 € de gain algébrique).
Pablo se demande quelle est la probabilité d'obtenir un gain positif s'il achète un lot de 200 tickets.

1) Coder en Python une fonction **grattage** qui renvoie le gain algébrique pour l'achat d'un ticket.

2) Coder une fonction **simu_lot** qui renvoie le gain algébrique total sur un échantillon de n tickets.

3) Recopier et compléter la fonction **proba** et en déduire une estimation de la probabilité cherchée par Pablo.

```python
def proba() :
    cpt = ...
    for k in range(1000) :
        if simu_lot(...) ... :
            cpt = ...
    return ...
```

4) Pablo pense doubler ses chances d'obtenir un gain positif en doublant le nombre de tickets achetés.
A-t-il raison ?

Exercice 12

$(X_1, \cdots, X_4)$ est un échantillon de taille 4 de la loi de Bernoulli de paramètre $0,15$.

1) Coder en Python une fonction qui simule une variable de cet échantillon.

2) Pour chaque variable aléatoire ci-dessous, coder une fonction en Python qui permet de la simuler en s'appuyant sur la fonction de la question **1)**.

a) $Y = X_1 + X_2 + X_3$

b) $Z = X_1 - X_2 + 2X_3$

c) $P = X_1 + X_2$

d) $T = 4X_1 + X_2 + -X_3 + 2X_4$

Exercice 13

1) La fonction en Python suivante simule une loi de Bernoulli dont le paramètre p dépend des arguments i et j de cette fonction.

```python
import random

def bern(i,j):
    if random.randint(1,i+j) <= i :
        return 1
    else :
        return 0
```

Exprimer p en fonction de i et j.

2) **a)** Une urne contient 8 boules rouges et 10 boules bleues. On prélève au hasard sans remise cinq boules dans cette urne et on compte le nombre de boules rouges.
On simule cette situation, avec la fonction **hg** suivante, qui s'appuie sur la fonction **bern** précédente.

```python

def hg(i,j,k) :
    x = 0
    for exp in range(k) :
        if bern(i,j) == 1 :
            x = x + 1
            i = i - 1
        else :
            j = j - 1
    return x

```

Expliquer le rôle de chacun des arguments i, j et k de cette fonction, et en donner les valeurs pour la situation donnée.

b) Recopier et compléter la fonction **mu** suivante, qui renvoie une estimation de l'espérance de la variable aléatoire simulée par la fonction **hg**, à partir d'un échantillon de taille n.

```python

def mu(i,j,k,n) :
    m = 0
    for simu in range(...) :
        m = ...
    return ...

```

c) Quel appel de la fonction **hg** doit-on faire pour simuler dix tirages sans remise dans une urne contenant 10 boules vertes, 12 boules rouges et 8 boules bleues, et que la fonction renvoie le nombre de boules vertes prélevées ?

Exercice 14

Le tableau ci-dessous donne l'espérance et la variance de trois aléatoires X, Y et Z deux à deux indépendantes.

Variable	X	Y	Z
Espérance	0	-2	1
Variance	3	1	2

Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type des variables aléatoires suivantes.

1) $A = X + Y$

2) $B = X - Z$

3) $C = 2Z$

4) $D = 2Y + 3Z$

Exercice 15

Une variable aléatoire X sur la loi binomiale de paramètres 10 et $0,5$, et une variable aléatoire Y prend ses valeurs entières dans $[\![0 ~;~ 10]\!]$ de manière équiprobable.

1) Justifier que X et Y ont la même espérance.

2) Calculer l'écart type de X et celui de Y.
Interpréter la différence entre ces deux valeurs.

Exercice 16

(B_1, B_2, B_3) est un échantillon de taille 3 de la loi de Bernoulli de paramètre $0,5$. On note $D = 2B_1$, $S = B_2 + B_3$ et U la variable aléatoire qui prend ses valeurs dans $[\![0 ~;~ 2]\!]$ de manière équiprobable.

1) Déterminer les lois des variables D, S et U, et les représenter graphiquement.

2) Comparer les espérances de ces variables aléatoires.

3) Comparer les écarts types de ces variables aléatoires.

Exercice 17

$(X_1, \cdots, X_{20})$ est un échantillon de taille 20 de la loi de Bernoulli de paramètre $0,4$.

Soit la variable aléatoire S définie par $S = X_1 + \cdots + X_{20}$.

1) Déterminer l'espérance de S.

2) Déterminer la variance de S.

Exercice 18

$(X_1, \cdots, X_{15})$ est un échantillon de taille 15 de la variable aléatoire X, qui prend ses valeurs dans $[\![10 \; ; \; 25]\!]$ de manière équiprobable.

Soit la variable aléatoire S définie par $S = X_1 + \cdots + X_{15}$.

1) Déterminer l'espérance de S.

2) Déterminer la variance de S.

Exercice 19

$(X_1, \cdots, X_5)$ est un échantillon de taille 5 de la loi binomiale de paramètres 30 et $0,34$.

Soit la variable aléatoire S définie par $S = X_1 + \cdots + X_5$.

1) Déterminer l'espérance de S.

2) Déterminer la variance de S.

Exercice 20

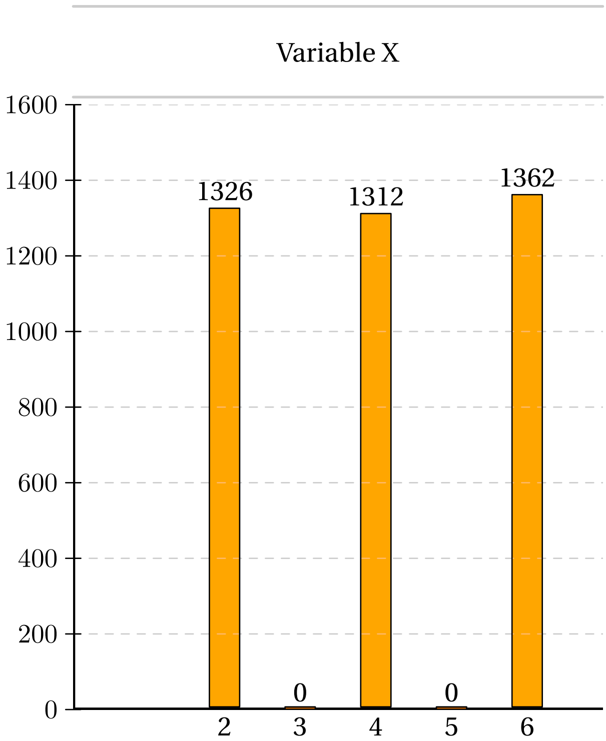
La variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètre 50 et $0,4$.

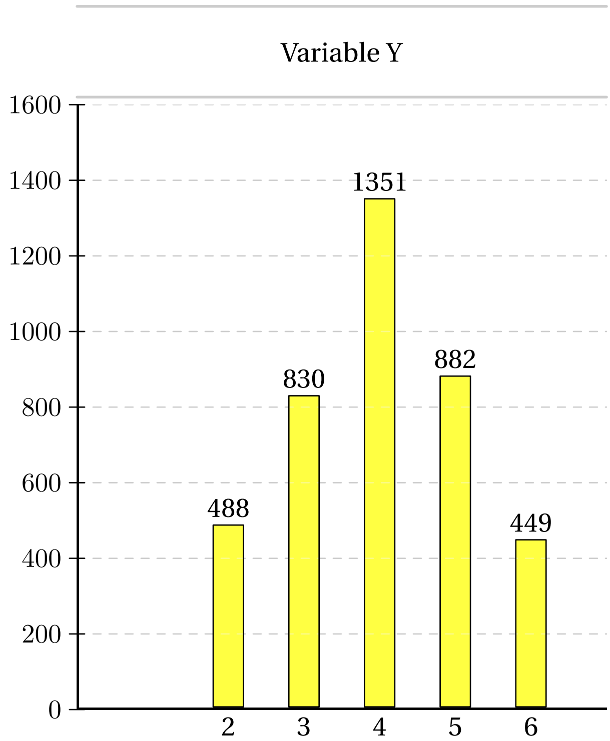
Déterminer m tel que la variable aléatoire $Z = X - m$ ait une espérance nulle.

Exercice 21

Une variable aléatoire U prend ses valeurs de manière équiprobable dans $[\![1\ ;\ 3]\!]$ et (U_1, U_2, U_3) est un échantillon de taille 3 de U. On cherche à comparer les variables aléatoires $2U_3$ et $U_1 + U_2$.

1) Les graphiques ci-dessous présente les résultats de $4\,000$ simulations de ces deux variables aléatoires.





a) Associer X et Y à la variable aléatoire $2U_3$ ou $U_1 + U_2$ correspondante. Justifier.

b) Expliquer pourquoi on peut estimer graphiquement que les variables $2U_3$ et $U_1 + U_2$ ont la même espérance.

c) Laquelle de ces deux variables aléatoires semble avoir l'écart type le plus élevé ?

2) Valider ou corriger les conjectures émises.

Exercice 22

Une guirlande électrique composée de 500 DEF est programmée pour que chaque DEL change de couleur toutes les 5 minutes.

1) Dans cette question, une DEL prend les couleurs bleu, rouge ou vert.

a) Pour une DEL, on définit la variable aléatoire L qui vaut 1 si elle est rouge à un moment donné, et 0 sinon.
Déterminer la loi de probabilité de L.

b) Justifier que l'on peut modéliser le fait que chacune des 500 DEL de la guirlande soit rouge ou non par un échantillon de taille 500 de la loi de L.

c) On note S la variable aléatoire correspondant à la somme des variables aléatoires de l'échantillon de taille 500 de la loi de L.
Calculer et interpréter l'espérance μ de S.

d) Calculer l'écart type σ de S et en déduire la probabilité $p(\mu - 2\sigma \leqslant S \leqslant \mu + 2\sigma)$.
Interpréter ce résultat.

2) Dans cette question, la couleur de la DEL est caractérisée par une longueur d'onde λ (en nm) prise de manière équiprobable dans l'ensemble $[\![400\ ;\ 750]\!]$. On note R la variable aléatoire qui à un moment donné associe la longueur d'onde d'une DEL.
Calculer l'espérance de R et l'interpréter.

Exercice 23

On lance un dé équilibré à six faces et on s'intéresse au numéro de la face supérieure obtenue.

1) Déterminer la loi de probabilité, l'espérance et l'écart type de la variable aléatoire D qui simule cette expérience.

2) On lance 4 fois ce même dé et on note S la somme des quatre numéros des faces supérieures observées. Justifier que S est la somme d'un échantillon de taille 4 de la variable aléatoire D.

3) Entre D et S, quelle variable aléatoire a l'espérance la plus élevée ?

4) Entre D et S, quelle variable aléatoire a l'écart type le plus élevé

Exercice 24

D et U sont deux variables aléatoires indépendantes prenant les valeurs de manière équiprobable dans $[\![0\ ;\ 9]\!]$.

1) Déterminer l'espérance et l'écart type de U.

2) On note $N = 10D + U$.

a) Justifier que N prend ses valeurs dans $[\![0\ ;\ 99]\!]$.

b) Calculer l'espérance et l'écart type de N.

c) La variable aléatoire N a-t-elle la même loi qu'une variable aléatoire X prenant de manière équiprobable dans $[\![0\ ;\ 99]\!]$? Justifier.

Exercice 25

On note le tableau de gain d'un jeu de grattage.

Gain en €	0	2	3	10
Fréquence	$0,5$	$0,3$	$0,15$	$0,05$

Chaque ticket de ce jeu est vendu 2 €.

1) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire G qui à chaque ticket associe son gain algébrique.

2) Calculer l'espérance et la variance de G.

3) Tonie achète un lot de 50 tickets. Quel est le gain algébrique moyen qu'elle peut espérer obtenir ?

4) Comparer l'écart type du gain algébrique d'un ticket et l'écart type du gain algébrique moyen d'un ticket issu du lot de tonie.

Exercice 26

Exercice 27

Exercice 28

Exercice 29

Exercice 30

Exercice 31

Exercice 32

Exercice 33

Exercice 34

Exercice 35

Exercice 36

Exercice 37

Exercice 38

Exercice 39

Exercice 40

Exercice 41

Exercice 42

Exercice 43

Exercice 44

Exercice 45

Exercice 46

Exercice 47

Exercice 48

Exercice 49

Exercice 50