Exercice 1

Une variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres 40 et $0,76$.
On note M_{60} la moyenne d'un échantillon de taille 60 de la loi X.

1) Recopier et compléter le programme en Python suivant afin que la fonction **echant** donne un échantillon de taille 300 de M_{60}.

```python
import random

def simu_X() :
    x = 0
    for e in range(40) :
        alea = random.randint(1,100)
        if alea <= 76 :
            x = x+1
    return x

def simu_M() :
    s = [ ... for i in range( ...)]
    M = ...
    return M

def echant() :
    ech = [ ... for i in range (...)]
    return ech
```

2) recopier et compléter le programme ci-dessous afin que la variable **prop** contienne la proportion de valeurs de v de la liste **ech** renvoyée par la fonction **echant** vérifiant : $|v - E(X)| \leqslant \dfrac{\sigma(X)}{\sqrt{60}}$.

```python
import math

esp = 40 * ...
sig = ...
cpt = 0

for v in echant() :
    if ... <= ... :
        cpt = cpt +1
prop = cpt/300
```

Exercice 2

La variable aléatoire T est simulée par le programme suivant :

```python
import random

def simu_T() :
    t = 0
    while random.randint(1,10) <= 7 and t <= 5:
        t = t+1
    return t
```

1) Coder une fonction **moyenne_T** renvoyant la moyenne d'un échantillon de taille n de la variable T.

2) Estimer $p(T \leqslant 1)$ et $p(M_{60} \leqslant 1)$.

Exercice 3

Anne a rédigé la réponse suivante sur sa copie.

---

a) La variable aléatoire A a pour espérance $75 \times 0,63 = 47,25$ et pour écart type $\sqrt{75 \times 0,63 \times 0,37} = \sqrt{17,4825} \approx 4,18$.
Ainsi, la variable aléatoire M_{90} a pour espérance $47,25$ et pour écart type $\frac{1}{\sqrt{90}}\sqrt{17,4825} \approx 0,44$.

b) Un programme convenable est :

```python
import random

def simu_A() :
    a = 0
    for t in range(75) :
        if random.randint(1,100) <=63 :
            a = a+1
    return a

def simu_M() :
    ech = [simu_A() for i in range(90)]
    return sum(ech)/90

def prop() :
    e = 47.25
    cpt = 0
    for va in range(100) :
        if abs(simu_M()-e) <= 0.44 :
            cpt = cpt+1
    return cpt/100
```

Après exécution, on trouve une proportion proche de $0,72$ de variables M_{90} telles que la valeur $|M_{90} - 47,25|$ est inférieure à $\frac{\sigma(A)}{\sqrt{90}} \approx 0,44$.

---

1) Proposer un énoncé possible pour l'exercice traité par Anne.

2) Expliquer et améliorer la démarche conduite par Anne pour résoudre l'exercice.

Exercice 4

Une variable aléatoire B suit la loi binomiale de paramètres 80 à $0,65$. Elle est simulée par une fonction en Python **simu_B**.

1) Coder la fonction **simu_B**.

2) Recopier et compléter la fonction **simu_B** afin qu'elle simule la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille n de la loi de B.

```
def simu_M(n) :
    ech = [ ... for i in range(...)]
    return ...
```

3) Coder un programme calculant l'écart type d'un échantillon de taille 50 de la variable aléatoire moyenne M_{40} d'un échantillon de taille 40 de la loi B.

4) Compléter le programme pour estimer l'écart entre cet écart type et $\sigma(M_{40})$.

Exercice 5

Les gains d'un ticket de grattage sont modélisés par la variable aléatoire G dont la loi est donnée par :

g_i	0	1	2	10
p_i	$0,7$	$0,2$	$0,06$	$0,04$

1) Quel est le gain moyen d'un ticket ? et l'écart type du gain ?

2) Les tickets sont vendus par lots de 50 auprès des revendeurs. Quel est le gain moyen d'un lot de tickets ?

3) Rédiger une fonction en Python **simu_ticket** qui simule le gain d'un ticket.

4) Rédiger une fonction en Python **simu_lot** qui simule le gain moyen d'un lot de 50 tickets.

5) Recopier et compléter le programme suivant afin que la fonction **s_lot** renvoie l'écart type des gains moyens de 120 lots de 50 tickets.

```python
import math

esp = ...
def s_lot() :
    s = 0
    for t in range(120) :
        s = ...
    return math.sqrt(...)

```

Exercice 6

1) Une variable aléatoire X suit la loi de Bernoulli de paramètre $0,7$ et M_{80} est la moyenne d'un échantillon de taille80 de la loi de X.
Compléter le programme suivant afin que la fonction **pBT** estime la probabilité $p\left(|M_{80} - EX)| \geqslant 0,1\right)$.

```
import random

def simu_M() :
    m = 0
    for k in range(...) :
        if random.randint(1,10) <= 7 :
            m = m+1
    return ...

def pBT() :
    pr = 0
    for exp in range(1000) :
        if abs(simu_M() - ...) >= ... :
            pr = pr+1
    return ...

```

2) Faire le lien avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev en majorant $p\left(|M_{80} - EX)| \geqslant 0,1\right)$.

Exercice 7

Une variable aléatoire A a pour espérance 15 et pour variance 6.

1) Majorer la probabilité $p = p\left(\overline{10 < A < 20}\right)$.

2) Justifier qu'une variable aléatoire X suivant la loi binomiale de paramètres 25 et $0,6$ a pour espérance 15 et pour variance 6.

3) Calculer la probabilité p en supposant que A suit la loi binomiale de paramètres 25 et $0,6$ a pour espérance 15 et pour variance 6.

Exercice 8

Une variable aléatoire Z suit la loi binomiale de paramètres 70 et $0,35$.

1) Calculer l'espérance et la variance de Z.

2) Justifier que $p\left(\overline{20,5 < Z < 28,5}\right) \leqslant \dfrac{15,925}{16}$.

3) Recopier et compléter le programme suivant pour estimer $p\left(\overline{20,5 < Z < 28,5}\right)$.

```
import random

def simu_Z() :
    z = 0
    for exp in range(70) :
        if random.randint(1,100) <= ... :
            z = z+1
    return ...

def pBT(t) :
    pr = 0
    for exp in range(t) :
        if abs(simu_Z() - ...) >= ... :
            pr = pr +1
    return ...
```

4) Comparer l'estimation obtenue et la majoration de $p\left(\overline{20,5 < Z < 28,5}\right)$ déterminée à la question **2)**.

Exercice 9

Un dé équilibré à six faces est lancé n fois.

1) On note M_n la variable aléatoire moyenne des résultats des n lancers. Calculer $E(M_n)$ et $V(M_n)$.

2) Déterminer le plus petit nombre entier n tel que l'inégalité de concentration assure que $p\left(|M_n - 3,5| \geqslant 0,4\right) \leqslant 0,1$.

3) Interpréter la valeur de n déterminée dans le contexte de l'exercice.

Exercice 10

Une urne contient 7 boules rouges et 3 boules vertes. On note F_n la fréquence de boules rouges obtenue après n tirages.

1) Justifier que F_n est la variable moyenne d'un échantillon de taille n de la loi de Bernoulli de paramètre $0,7$.

2) Déterminer le plus petit entier n tel que l'inégalité de concentration assure que la probabilité qu'une réalisation de la variable F_n n'appartienne pas à l'intervalle $[0,65\ ;\ 0,75]$ soit inférieure à $0,05$. On le note k.

3) Estimer $p\left(|F_k - 0,7| \geqslant 0,05\right)$ par simulation.

Exercice 11

Dylan a rédigé la réponse suivante sur sa copie.

---

a) La variable aléatoire B a pour espérance $0,455$ et pour variance $0,455 \times 0,545 = 0,247\,975$.

b) L'inégalité de concentration donne :
$p\left(|M_n - 0,455| \geqslant 0,01\right) \leqslant \dfrac{0,247\,975}{n \times 0,01} = \dfrac{24,7975}{n}$.

c) On cherche n tel que $\dfrac{24,7975}{n} \leqslant 0,1$, donc $\dfrac{n}{24,7975} \geqslant 10$ et donc $n \geqslant 247,975$, soit $n \geqslant 248$.
Pour $n \geqslant 248$, l'inégalité de concentration assure que la probabilité que la variable M_n appartienne à l'intervalle $[0,454\ ;\ 0,456]$ est inférieure à $0,1$.

---

1) Proposer un énoncé possible pour l'exercice traité par Dylan.

2) Identifier et corriger les erreurs dans la démarche de Dylan.

Exercice 12

Dans un moteur de recherche, la saisie de "comment gagner de l'argent" renvoie des sites considérés comme frauduleux : une association estime que c'est le cas pour $72,5~\%$ des résultats de recherche.

1) On modélise par une variable aléatoire C le nombre de sites considérés comme frauduleux sur un échantillon de 400 sites après une telle recherche.
Déterminer la loi de probabilité de C, en supposant que la situation est assimilable à un tirage avec remise.

2) Majorer la probabilité $p\left(|C-290| \geqslant 20\right)$.

3) Sur un échantillon de 400 sites, est-il exact de penser qu'on a plus de $75~\%$ de chances de trouver entre 270 et 310 sites frauduleux ?

Exercice 13

Dans la population française, $52\ \%$ des personnes sont des femmes. On modélise le nombre de femmes dans un échantillon de 135 personnes par une variable aléatoire F suivant la loi binomiale de paramètres 135 et $0,52$.

1) Quel est le nombre moyen de femmes dans un tel échantillon ?

2) On note A l'événement $\left\{\left|\dfrac{F}{135}-0,52\right|\geqslant 0,1\right\}$.
Interpréter l'événement A et calculer sa probabilité.

3) Dans cette question, on suppose que la variable aléatoire F suit la loi binomiale de paramètres n et $0,52$.
Déterminer la plus petite valeur de n telle que l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev assure que :
$p\left(\left|\dfrac{F}{135}-0,52\right|\geqslant 0,1\right)\leqslant 0,05$.
Interpréter ce résultat.

Exercice 14

$7~\%$ des assiettes produites dans une usine présentent un défaut.

1) L'entreprise fabrique un grand nombre d'assiettes : on suppose que le tirage de $n \leqslant 500$ assiettes peut être assimilé à un tirage avec remise.
Expliquer pourquoi l'on peut modéliser le nombre d'assiettes ayant un défaut par une variable aléatoire D_n suivant la loi $\mathcal{B}(n~;~0,07)$.

2) Le commercial voudrait constituer des lots de taille n afin que plus de $98~\%$ des lots aient une proportion d'assiettes défectueuses comprises entre $0,04$ et $0,1$.
Justifier que ce problème revient à cherche n tel que : $p\left(\left|\dfrac{D_n}{n} - 0,07\right| \geqslant 0,03\right) \leqslant 0,02$.

3) Déterminer une valeur de n assurant que :
$p\left(\left|\dfrac{D_n}{n} - 0,07\right| \geqslant 0,03\right) \leqslant 0,02$ à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Exercice 15

La variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{B}(10\ ;\ 0,4)$.

1) Calculer l'espérance et la variance de X.

2) La variable aléatoire moyenne d'un échantillon de la loi de probabilité de X est notée M_n.
Justifier que $p\left(|M_n - 2| \geqslant 1\right) \leqslant \dfrac{2,4}{n}$.

3) Déterminer les valeurs de n telles que $\dfrac{2,4}{n} \leqslant 0,05$.

4) En déduire la plus petite valeur de n telle que l'inégalité de concentration assure que $p\left(|M_n - 2| \geqslant 1\right) \leqslant 0,05$.

Exercice 16

Une association distribue des sachets de graines mellifères. On suppose que la probabilité qu'une graine d'un sachet soit de trèfle blanc est $0,125$.
On note M_N la proportion de graines de trèfle blanc dans un sachet contenant n graines.

1) Justifier que l'on peut modéliser M_n comme moyenne d'un échantillon de taille n de la loi de Bernoulli de paramètre $0,125$.

2) **a)** Majorer la probabilité $p\left(\overline{0,1 < M_n < 0,15}\right)$.

b) En déduire le plus petit nombre entier n tel que l'inégalité de concentration assure que : $p\left(\overline{0,1 < M_n < 0,15}\right) \leqslant 0,1$.

Exercice 17

Exercice 18

Exercice 19

Exercice 20

Exercice 21

Exercice 22

Exercice 23

Exercice 24

Exercice 25

Exercice 26

Exercice 27

Exercice 28

Exercice 29

Exercice 30

Exercice 31

Exercice 32

Exercice 33

Exercice 34

Exercice 35

Exercice 36

Exercice 37

Exercice 38

Exercice 39

Exercice 40

Exercice 41

Exercice 42

Exercice 43

Exercice 44

Exercice 45

Exercice 46

Exercice 47

Exercice 48

Exercice 49

Exercice 50