Exercice 1

Vrai ou faux ?

1) **a)** La limite de la fonction carré en $-\infty$ vaut $-\infty$.

b) La limite de la fonction inverse en $+\infty$ vaut 0.

c) Toute fonction définie sur $\mathbb{R}$ admet une limite en $+\infty$ et en $-\infty$.

2) f est une fonction définie sur un intervalle I, a un nombre réel de I et $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère.

a) Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 5$, alors on peut trouver un nombre réel a tel que $4,99 \leqslant f(x) \leqslant 5,01$ dès que $x < a$.

b) Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -2$, alors $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = -2$.

Exercice 2

Conjecturer chaque limite à l'aide d'un outil numérique et préciser les asymptotes éventuelles aux courbes des fonctions associées.

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2}$

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(3\sqrt{x} - \dfrac{1}{x}\right)$

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+5}{2x^2+4}$

4) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(0,1x^2 + 0,4e^x\right)$

Exercice 3

On a dressé ci-dessous le tableau de variations complet d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		-5		3		$+\infty$
Variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-4	$\nearrow$	2

1) Donner $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2) En déduire les équations des asymptotes éventuelles à la courbe représentative de f.

Exercice 4

On a dressé ci-dessous le tableau de variations complet d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
Variations de f	0	$\nearrow$	5	$\searrow$	3

1) Donner $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2) En déduire les équations des asymptotes éventuelles à la courbe représentative de f.

Exercice 5

1) Conjecturer la limite en $-\infty$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -15x + 10$.

2) Résoudre l'inéquation $f(x) > 1\,000$.

3) Peut-on trouver un nombre réel b tel que si $x < b$ alors $f(x) > 1\,000$? Si oui, proposer une valeur pour b.

4) En généralisant ce raisonnement, conclure sur la limite de f en $-\infty$.

Exercice 6

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0,03x^2 - 150x + 1$.

1) Dresser le tableau de variations de f.

2) Résoudre l'inéquation : $0,03x^2 - 150x + 1 \geqslant 1\,000$.

3) L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ?
"Si $x > 5\,000$, alors $f(x) \in]100\ ;\ +\infty[$."

4) Voici une fonction en Python.

```python
def seuil(A):
    x = 2500
    while 0.03*x**2-150*x+1 < A:
        x = x+1
    return x
```

Que renvoie *seuil(100)* ? *seuil(1000)* ? *seuil(10000)* ?

5) La fonction *seuil* renverra-t-elle une valeur numérique pour toute valeur de A, aussi grande que l'on veuille ?

Exercice 7

1) Conjecturer la limite en $+\infty$ de la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 85x + 15$.

2) Dresser le tableau de variations de f.

3) Peut-on trouver un intervalle I de la forme $[a\ ;\ +\infty[$ tel que, pour tout nombre $x \in I$, on a $f(x) > 10\,000$? Si oui, préciser cet intervalle.

4) Résoudre l'inéquation $f(x) > 10\,000$. L'intervalle donné au **c)** est-il compatible avec celui trouvé ?

Exercice 8

Conjecturer chaque limite à l'aide d'un outil numérique et préciser les asymptotes éventuelles aux courbes des fonctions associées.

1) $\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ x < 5}} \dfrac{1}{x-5}$

2) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \dfrac{9}{x^2-1}$

3) $\lim\limits_{x \to 0} 7\left(e^x - 1\right)$

4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x}{x^2}$

Exercice 9

On a dressé ci-dessous le tableau de variations complet d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Variations de f	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

1) Donner les quatre limites de la fonction f.

2) En déduire les équations des asymptotes éventuelles à la courbe représentative de f.

Exercice 10

On a dressé ci-dessous le tableau de variations complet d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

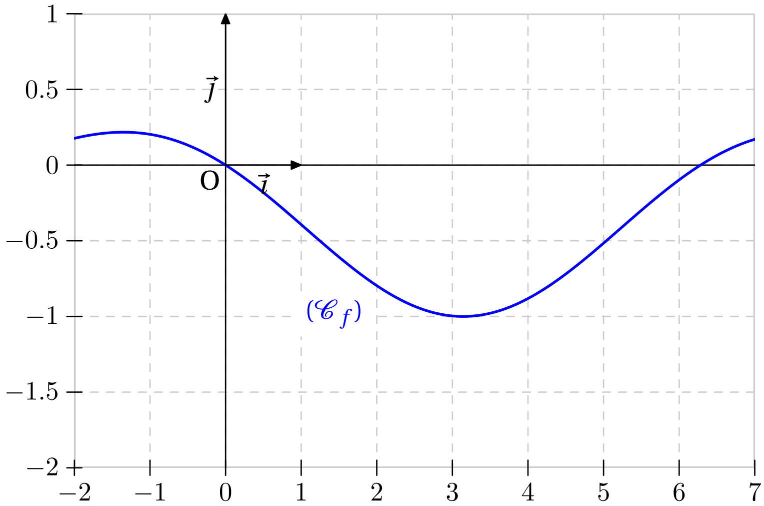
x	$-\infty$	-4	-1	$+\infty$
Variations de f	-1	-5	$+\infty \,\Vert\, +\infty$	0

1) Donner les quatre limites de la fonction f.

2) En déduire les équations des asymptotes éventuelles à la courbe représentative de f.

Exercice 11

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{\pi\}$ par $\quad f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x-\pi}$.
Sa courbe représentative $(\mathcal{C}_f)$ est donnée ci-dessous.



1) Justifier que la fonction f n'est pas définie en π.

2) À partir du graphique ou d'un tableur de valeurs, conjecturer la limite de f en π.

Exercice 12

g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(0) = 0$ et $g(x) = \dfrac{|x|}{x}$ lorsque $x \neq 0$.

1) Déterminer $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} g(x)$.

2) Déterminer $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} g(x)$.

3) La fonction f admet-elle une limite en 0 ?

Exercice 13

h est la fonction définie sur $]2\ ;\ +\infty[$ par : $h(x) = \dfrac{3x-4}{x-2}$.

1) Conjecturer la limite de h en 2.

2) Résoudre l'inéquation $\dfrac{3x-4}{x-2} \geqslant 1\,000$.

3) En déduire le plus grand nombre réel a, arrondi au millième, telle que si $x \in]2\ ;\ a[$, alors $h(x) > 1\,000$.

4) Si l'on fixe un nombre réel $A > 0$, peut-on trouver un nombre réel a tel que si $x \in]2\ ;\ a[$, alors $h(x) > A$? Justifier.

Exercice 14

f est la fonction définie sur $]1\ ;\ 3[$ par : $\quad h(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x-3)}$.

1) Conjecturer la limite de f en 1 par la méthode de votre choix.

2) Résoudre l'inéquation $\dfrac{1}{(x-1)(x-3)} \leqslant -1\,000$.

3) En déduire le plus grand nombre réel a, arrondi au dix-millième, tel que si $x \in]1\ ;\ 2[$, alors $h(x) < -1\,000$.

4) A est un nombre réel strictement positif.
Décrire la démarche pour trouver le plus grand nombre réel a tel que si $x \in]1\ ;\ a[$, alors $h(x) < -A$? Justifier.

Exercice 15

Calculer chaque limite et préciser les équations de asymptotes éventuelles aux courbes des fonctions associées.

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(2x^2 + 3x - 5\right)$

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x-1}$

3) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(e^x + e^{-x}\right)$

4) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

5) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \dfrac{1}{x^2-1}$

Exercice 16

Calculer chaque limite et préciser les équations de asymptotes éventuelles aux courbes des fonctions associées.

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^3 - 125x + 4\right)$

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2\sqrt{x}$

3) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x}{5e^x - 1}$

4) $\lim\limits_{x \to 0} \sin(x)$

5) $\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ x > 5}} \dfrac{x^3 + 1}{|5 - x|}$

Exercice 17

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-2\ ;\ 1\}$ par : $f(x) = \dfrac{x^2+2x-1}{x^2+x-2}$.

Combien d'asymptotes possède la courbe représentative de f ? Déterminer leur(s) équations.

Exercice 18

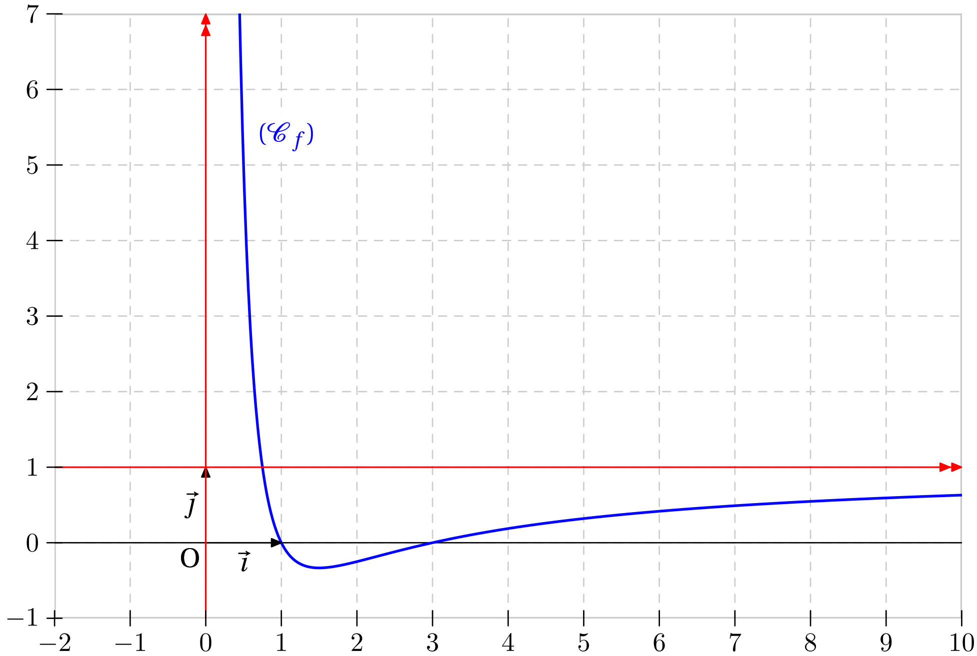
k est la fonction définie pour tout nombre réel x par $k(x) = e^{2x} - 5e^{x} + 3$.

1) En observant que $e^{2x} = e^{x} \times e^{x}$, étudier la limite de k en $-\infty$.

2) Montrer que $k(x) = e^{2x}\left(1 - \dfrac{5}{e^{x}} + \dfrac{3}{e^{2x}}\right)$.

3) En déduire la limite de k en $+\infty$.

Exercice 19



f est une fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$. Sa représentation graphique courbe $(\mathcal{C}_f)$ est donnée ci-contre.
On précise que la courbe $(\mathcal{C}_f)$ ne coupe l'axe des abscisses qu'en deux points, et qu'elle admet l'axe des ordonnées et la droite (Δ), qui est parallèle à l'axe des abscisses, comme asymptotes.

1) À partir de cette représentation graphique :

- **a)** déterminer la limite de f en 0 et en $+\infty$;
- **b)** dresser le tableau de signes de $f(x)$.

2) On admet que, pour tout nombre réel x strictement positif, $f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{x^2}$ où a, b et c sont trois nombres réels.

- **a)** En calculant $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{ax^2 + bx + c}{x^2} \right)$, montrer que $a = 1$.
- **b)** Lire $f(1)$ et $f(3)$ sur le graphique, et en déduire un système d'équations permettant d'obtenir b et c.
- **c)** En déduire une expression de $f(x)$.

Exercice 20

h est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = e^x - 3x$.

1) Déterminer la limite de h en $-\infty$, puis en $+\infty$.

2) La courbe représentative de h admet-elle des asymptotes horizontales ? Si oui, préciser leur(s) équation(s).

Exercice 21

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\, e^{-x}$.
On note $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal.

Justifier tout le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Variations de f			$\frac{1}{e}$		
	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$	0

Exercice 22

g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 1 - x^2\, e^x$.
On note $(\mathcal{C}_g)$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère.

1) Déterminer la limite de g en $+\infty$.

2) Calculer la limite de g en $-\infty$.
Que peut-on en déduire graphiquement ?

Exercice 23

$h(x)$ est la fonction définie sur $]-\infty\ ;\ 0]$ par : $h(x) = x^3 - \cos(x)$.

1) Montrer que, pour tout nombre réel négatif x : $h(x) \leqslant x^3 + 1$.

2) En déduire la limite de h en $-\infty$.

Exercice 24

h est la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{3\}$ par : $h(x) = \dfrac{5\sin(x) - 2x}{x - 3}$.

Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x < 3}} h(x)$.

Exercice 25

h est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = e^x + e^{-x} - 3x - 5$.

1) Montrer que, pour tout nombre réel x : $h(x) = x\left(\dfrac{e^x}{x} - 3\right) + e^{-x} - 5$.

2) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$.

Exercice 26

1) Démontrer que, pour tout nombre réel $x \geqslant 1$: $\frac{1}{2} \leqslant \frac{x}{x+1} \leqslant 1$.

2) En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x\sqrt{x}}{x+1}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{(x+1)\sqrt{x}}$.

Exercice 27

f est une fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ telle que $\forall x \in [0\ ;\ +\infty[, \quad 0 \leqslant f(x) \leqslant \sqrt{x}$.

1) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

2) Déterminer $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

Exercice 28

La fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{\sqrt{9x^2+2x+1}}{x}$.

1) Montrer que, pour tout nombre réel $x \geqslant 0$: $9x^2 \leqslant 9x^2+2x+1 \leqslant (3x+1)^2$.

2) En déduire que, pour tout nombre réel $x > 0$: $3 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{3x+1}{x}$.

3) Calculer la limite de f en $+\infty$.

Exercice 29

h est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 1 - \dfrac{x-1}{e^x}$.

1) Vérifier que, pour tout nombre réel x : $h(x) = 1 - \dfrac{x}{e^x} + \dfrac{1}{e^x}$.

2) Calculer la limite de la fonction h en $+\infty$ et en $-\infty$.

3) En déduire que la courbe représentative de la fonction h admet une asymptote dont on précisera une équation.

Exercice 30

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{3}{2}e^{2x} - 5e^{x} - 2x + 1$.
On note $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère.

1) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

2) Déterminer la limite de f en $-\infty$.

Exercice 31

g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (2x^3 - 4x^2)\, e^{-x}$.

1) Calculer $g'(x)$.

2) Déterminer le signe de $g'(x)$ sur $\mathbb{R}$.

3) Déterminer les limites de la fonction g en $+\infty$ et en $-\infty$ en justifiant soigneusement, et préciser les équations des asymptotes éventuelles à sa courbe représentative.

4) Déterminer les variations de g et dresser le tableau de variations complet de la fonction g.

Exercice 32

Exercice 33

Exercice 34

Exercice 35

Exercice 36

Exercice 37

Exercice 38

Exercice 39

Exercice 40

Exercice 41

Exercice 42

Exercice 43

Exercice 44

Exercice 45

Exercice 46

Exercice 47

Exercice 48

Exercice 49

Exercice 50