Exercice 1

On se place dans un repère orthonormé $(O\ ;\ \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

Calculer $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$.

1) $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-1\\1\\-6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}4\\7\\-2\end{pmatrix}$.

2) $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-\sqrt{5}\\1\\\sqrt{5}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}-\sqrt{5}\\4\\\sqrt{2}\end{pmatrix}$.

Exercice 2

On se place dans un repère orthonormé $(O\ ;\ \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.
On donne les coordonnées de A, B et C :
$A(1\ ;\ 3\ ;\ -5)$ $\quad B(2\ ;\ 6\ ;\ 0)$ $\quad C(-4\ ;\ 1\ ;\ -1)$

Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Exercice 3

On se place dans un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On donne les coordonnées de A, B et C :

$$A\left(\frac{2}{3}\ ;\ 0;\ -2\right) \quad B\left(\frac{1}{2}\ ;\ 0;\ \frac{4}{3}\right) \quad C\left(0\ ;\ 0;\ -\frac{1}{7}\right)$$

Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

Exercice 4

On se place dans un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

$\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - 7\vec{k}$
$\vec{v} = 4\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$

Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Exercice 5

On se place dans un repère orthonormé $(O\,;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$.

$\overrightarrow{u}=4\overrightarrow{i}$
$\overrightarrow{v}=-6\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}-\overrightarrow{k}$

Calculer $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$.

Exercice 6

$SABCD$ est une pyramide telle que la base $ABCD$ est un carré de centre O et de côté $4\ cm$.
$SA = SB = SC = SD = 6\ cm$.
I est le milieu de $[CB]$.

1) Faire un schéma.

2) Calculer :

a) $\overrightarrow{BS} \cdot \overrightarrow{BC}$

b) $\overrightarrow{BS} \cdot \overrightarrow{BD}$

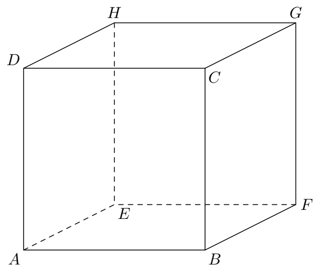
c) $\overrightarrow{SO} \cdot \overrightarrow{SC}$

d) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}$

e) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}$

f) $\overrightarrow{SI} \cdot \overrightarrow{OS}$

Exercice 7



$ABCDEFGH$ est un cube d'arête $5\ cm$.

1) Calculer AF.

2) Calculer AG.

3) Calculer les produits scalaires suivants :

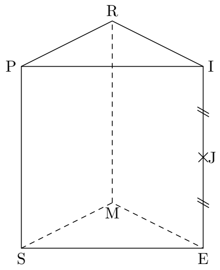
a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

b) $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{GH}$

c) $\overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{EB}$

d) $\overrightarrow{HF} \cdot \overrightarrow{GD}$

Exercice 8



$PRISME$ est un prisme droit dont toutes les arêtes sont de longueur a.
J est le milieu de $[IE]$.
Calculer les produits scalaires suivants en fonction de a.

1) $\overrightarrow{SE} \cdot \overrightarrow{SI}$

2) $\overrightarrow{PS} \cdot \overrightarrow{SR}$

3) $\overrightarrow{SE} \cdot \overrightarrow{SM}$

4) $\overrightarrow{PJ} \cdot \overrightarrow{PI}$

5) $\overrightarrow{SI} \cdot \overrightarrow{SR}$

6) $\overrightarrow{MR} \cdot \overrightarrow{ES}$

Exercice 9

A et B sont deux points de l'espace et I est le milieu de $[AB]$.

1) Montrer que, pour tout point M de l'espace, $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - IA^2$.

2) Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

Exercice 10

On se place dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\,)$.

Calculer la norme des vecteurs suivants : $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\1\\-6\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\7\\-2\end{pmatrix}$.

Exercice 11

On se place dans un repère orthonormé $(O\,;\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

Calculer la norme des vecteurs suivants : $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-\sqrt{5}\\1\\\sqrt{5}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}-\sqrt{5}\\4\\\sqrt{2}\end{pmatrix}$.

Exercice 12

On se place dans un repère orthonormé $(O\ ;\ \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.
On donne les coordonnées de A, B et C :
$A(1\ ;\ 3\ ;\ -5)$ $B(2\ ;\ 6\ ;\ 0)$ $C(-4\ ;\ 1\ ;\ -1)$

1) Calculer AB.

2) Calculer AC.

Exercice 13

On se place dans un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On donne les coordonnées de A, B et C :
$A\left(\frac{2}{3}\ ;\ 0;\ -2\right) \quad B\left(\frac{1}{2}\ ;\ 0;\ \frac{4}{3}\right) \quad C\left(0\ ;\ 0;\ -\frac{1}{7}\right)$

1) Calculer AB.

2) Calculer AC.

Exercice 14

On se place dans un repère orthonormé $(O\ ;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$.

$\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont trois vecteurs :

$\overrightarrow{u}=\dfrac{1}{9}\left(4\overrightarrow{i}-4\overrightarrow{j}+7\overrightarrow{k}\right)$

$\overrightarrow{v}=\dfrac{1}{9}\left(8\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}-4\overrightarrow{k}\right)$

$\overrightarrow{w}=\dfrac{1}{9}\left(-\overrightarrow{i}-8\overrightarrow{j}-4\overrightarrow{k}\right)$

Montrer que $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ forment une base orthonormée.

Exercice 15

On se place dans un repère orthonormé $(O\,;\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

On donne : $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\5\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}-5\\1\\0\end{pmatrix}$.

1) Déterminer un vecteur $\overrightarrow{w}$ tel que $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ forment une base orthogonale.

2) Cette base peut-elle être orthonormée ? Justifier.

Exercice 16

On se place dans un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{i}\,,\,\vec{j}\,,\,\vec{k}\,)$.

1) Recopier et compléter la fonction **pscalaire** suivante qui renvoie le produit scalaire de deux vecteurs dont les coordonnées sont données en paramètres sous la forme de deux listes.

```python
def pscalaire(u,v):
    L = [ ... for i in range(3)]
    return sum(L)

```

2) À l'aide de la fonction **pscalaire**, coder une fonction en Python renvoyant un booléen indiquant si deux vecteurs sont orthogonaux, leurs coordonnées entières étant passées en paramètres.

3) À l'aide de la fonction **pscalaire**, coder une fonction en Python renvoyant la norme d'un vecteur dont les coordonnées sont passées en paramètres.

Exercice 17

On se place dans un repère orthonormé $(O\ ;\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.
On donne les coordonnées de A, B, C et D :
$A(5\ ;\ -3\ ;\ -2)$ $B(7\ ;\ -4\ ;\ -3)$ $C(1\ ;\ 2\ ;\ 3)$ $D(0\ ;\ 1\ ;\ 2)$

1) Les droites (AB) et (CD) sont-elles orthogonales ?

2) Les droites (AB) et (CD) sont-elles perpendiculaires ?

Exercice 18

On se place dans un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On donne les coordonnées de A, B, C, D et E :
$A(2\ ;\ 1\ ;\ 0)$ $B(-3\ ;\ 0\ ;\ 2)$ $C(-1\ ;\ 0\ ;\ 3)$ $D(0\ ;\ 1\ ;\ 1)$ $E(1\ ;\ -8\ ;\ -1)$

1) Montrer que les points A, B et C définissent un plan.

2) Montrer que (ED) est orthogonale à (ABC).

Exercice 19

On se place dans un repère orthonormé $(O\,;\,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$.
Le plan $\mathcal{P}$ est défini par le point $A(3\,;\,-2\,;\,0)$ et par ses vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}=-6\overrightarrow{i}+2\overrightarrow{k}$ et $\overrightarrow{v}=-3\overrightarrow{i}+3\overrightarrow{j}-\overrightarrow{k}$.

1) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{n}=2\overrightarrow{i}+4\overrightarrow{j}+6\overrightarrow{k}$ est normal au plan $\mathcal{P}$.

2) Déterminer un autre vecteur normal au plan $\mathcal{P}$.

Exercice 20

On se place dans un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
$A(0\ ;\ 1\ ;\ -1)$, $B(3\ ;\ -2\ ;\ 0)$ et $C(3\ ;\ -2\ ;\ 2)$ sont des points de l'espace.

1) Montrer que les points A, B et C définissent un plan.

2) Déterminer les coordonnés d'un vecteur normal au plan (ABC).

Exercice 21

On se place dans un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On donne les coordonnées de A, B, C et D :
$A(-5\ ;\ 5\ ;\ -3)$ $B(-8\ ;\ -5\ ;\ -6)$ $C(-2\ ;\ -8\ ;\ -2)$ $D(1\ ;\ 2\ ;\ 1)$

1) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont égaux.

2) Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$.

3) En déduire la nature du quadrilatère $ABCD$.

Exercice 22

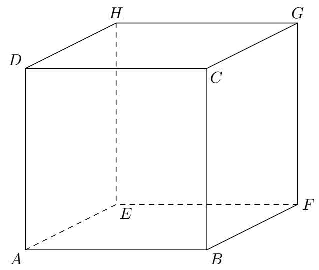
On se place dans un repère orthonormé $(O\,;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$.
$ABCD$ est un tétraèdre régulier d'arête a.

1) Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$.

2) En déduire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$.

3) Que peut-on conclure sur les droites (AB) et (CD) ?

Exercice 23



$ABCDEFGH$ est un cube d'arête a.

1) Calculer $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{ED}$ et $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{EB}$.

2) Que peut-on dire de la droite (AG) et du plan (EBD) ?

Exercice 24

$ABCD$ est un tétraèdre régulier. On note G le centre de gravité du triangle ABC, c'est-à-dire le point tel que $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{0}$.
I et J sont les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[BC]$.

Démontrer que :

1) les droites (AJ) et (BC) sont perpendiculaires ;

2) les droites (DJ) et (BC) sont perpendiculaires ;

3) la droite (BC) est orthogonale au plan (ADJ) ;

4) la droite (AB) est orthogonale au plan (DCI) ;

5) la droite (DG) est orthogonale au plan (ABC).

Exercice 25

On se place dans un repère orthonormé $(O\ ;\ \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

La fonction **pscalaire** renvoie le produit scalaire de deux vecteurs dont les coordonnées sont données en paramètres sous la forme de deux listes.

1) Recopier et compléter la fonction **ortho** ci-dessous, prenant en paramètres les coordonnées de trois vecteurs non nuls de l'espace et indiquant s'ils en constituent une base orthogonale ou non.

```python
def pscalaire(u,v):
    L = [ u[i]*v[i] for i in range(3)]
    return sum(L)

def ortho(u,v,w):
    return pscalaire(...)== ... and pscalaire(...)== ... and pscalaire(...)== ...
```

2) Vérifier que $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}3\\6\\-5\end{pmatrix}$ forment une base orthogonale à l'aide de cette fonction.

3) **a)** Modifier cette fonction pour qu'elle indique si les vecteurs forment une base orthonormée ou non.

b) Vérifier alors que les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ précédents ne forment pas une base orthonormée.

Exercice 26

On se place dans un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On donne les coordonnées de A, B, C et D :
$A(5\ ;\ 1\ ;\ 2)$ $B(3\ ;\ 0\ ;\ 2)$ $C(1\ ;\ -1\ ;\ 1)$ $D(0\ ;\ 4\ ;\ 5)$

1) Justifier que (AB) et (CD) sont non coplanaires.
- **a)** Construire (AB) et (CD) avec un logiciel de géométrie.
- **b)** Placer un point M mobile sur la droite (AB) et un point N mobile sur la droite (CD).
- **c)** Conjecturer la distance minimale MN.

2)
- **a)** Construire le plan $\mathcal{P}$ parallèle à (AB) et contenant (CD), puis les droites orthogonales à $\mathcal{P}$ passant par A et B ; elles coupent respectivement $\mathcal{P}$ en A' et B'.
- **b)** Noter H' l'intersection de $(A'B')$ et (CD).
- **c)** Construire la perpendiculaire à (AB) passant par H' ; elle coupe (AB) en H.
Émettre une conjecture sur la position de (HH') et $\mathcal{P}$, puis celle de (HH') et (CD).

3) Conjecturer la position des points M et N qui minimise MN.

Exercice 27

On se place dans un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
$R(0\ ;\ 2\ ;\ -1)$, $S(1\ ;\ -1\ ;\ 1)$, $T(1\ ;\ -1\ ;\ -2)$ et $U(2\ ;\ -4\ ;\ 0)$ sont des points de l'espace.

1) Quelle est la nature du quadrilatère $RSUT$?

2) Calculer la mesure, approchée au dixième près, des angles de ce quadrilatère.

Exercice 28

On se place dans un repère orthonormé $(O\ ;\ \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.
$A\left(2\ ;\ -10\ ;\ \dfrac{1}{2}\right)$, $B\left(-2\ ;\ -\dfrac{5}{2}\ ;\ -15\right)$ et $C\left(-\dfrac{25}{2}\ ;\ 0\ ;\ -1\right)$ sont des points de l'espace.

1) Déterminer la nature du triangle ABC.

2) Calculer les coordonnées du point I milieu de $[BA]$.

3) Calculer l'aire du triangle ABC.

Exercice 29

On se place dans un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
$M(1\ ;\ 1\ ;\ 1)$, $N(1\ ;\ -2\ ;\ 2)$ et $P(2\ ;\ 0\ ;\ -2)$ sont des points de l'espace.

1) Montrer que le triangle MNP est rectangle.

2) Calculer l'aire de ce triangle.

3) Calculer la distance du point M à la droite (NP).

Exercice 30

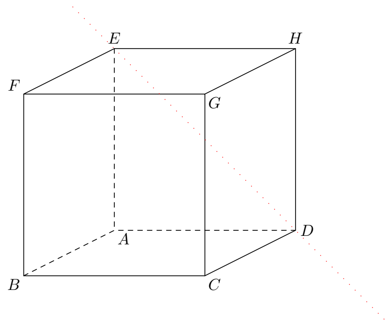
On se place dans un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\,)$.
$M(2\,;\,-1\,;\,0)$, $N(6\,;\,3\,;\,0)$, $P(3\,;\,2\,;\,-1)$ et $Q(5\,;\,0\,;\,1)$ sont des points de l'espace.

1) Montrer que le quadrilatère $MPNQ$ est un losange.

2) En considérant le triangle MQP, calculer la distance du point M à la droite (QP).

3) En déduire l'aire du losange $MPNQ$.

Exercice 31



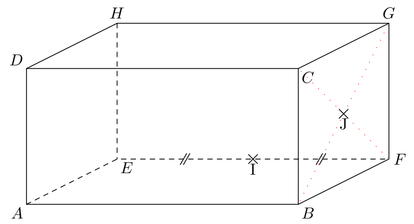
$ABCDFGH$ est un cube d'arête $1\ cm$.

1) Déterminer la nature du triangle BDE.

2) En déduire les coordonnées du projeté orthogonal du point B sur la droite (DE) dans le repère orthonormé $(A\ ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

3) Calculer la distance du point B à la droite (DE).

Exercice 32



$ABCDEFGH$ est un pavé droit tel que $AB = 5\ cm$, $AD = 3\ cm$ et $AE = 2\ cm$.
I est le milieu de $[EF]$ et J est le centre de la face $BCGF$.

1) Calculer $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IJ}$, puis IA et IJ.

2) En déduire une mesure, au degré près, de l'angle $\widehat{JIA}$.

Exercice 33

On se place dans un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
$A\left(1\ ;\ -\sqrt{3}\ ;\ 0\right)$, $B\left(1\ ;\ \sqrt{3}\ ;\ 0\right)$, $C\left(-2\ ;\ 0\ ;\ 0\right)$ et $D\left(0\ ;\ 0\ ;\ 2\sqrt{2}\right)$. sont des points de l'espace.

1) Montrer que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

2) Montrer que $ABCD$ est un tétraèdre régulier.

3) **a)** Calculer les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC.

b) En déduire la distance du point D au plan (ABC).

4) Calculer le volume du tétraèdre $ABCD$.

Exercice 34

1) Recopier et compléter la fonction **d** qui renvoie la distance entre deux points A et B de l'espace dont les coordonnées (dans un repère orthonormé) sont données en paramètres sous la forme de deux listes.

```
import math

def d(A,B):
    L = [... for i in range(3)]
    return math.sqrt(sum(L))

```

2) La fonction **pscalaire** renvoie le produit scalaire de deux vecteurs dont les coordonnées sont données en paramètres sous la forme de deux listes.

```

def pscalaire(u,v):
    L = [ u[i]*v[i] for i in range(3)]
    return sum(L)

```

Utiliser cette fonction pour coder une fonction **angle** qui renvoie la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$ en fonction des coordonnées des trois points A, B et C données en paramètres sous forme de listes.

3) Tester les fonctions **d** et **angle** avec les points $A(0\ ;\ 3\ ;\ 4)$, $B(1\ ;\ -1\ ;\ -1)$ et $C(2\ ;\ 0\ ;\ 2)$: calculer les longueurs des côtés du triangle ABC, ainsi que les mesures de ses trois angles, arrondies au degré près.

Exercice 35

$ABCDEFGH$ est un pavé droit tel que $AB = 5\ cm$, $AD = 4\ cm$ et $AE = 3\ cm$.
On note O le milieu de $[BH]$.

1) Démontrer que O est le milieu de $[EC]$.

2) Justifier que le repère $\left(A\ ;\ \frac{1}{5}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}\right)$ est un repère orthonormé de l'espace.

3) Calculer :

  a) $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OE}$;

  b) OB et OE.

4) En déduire une mesure de l'angle $\widehat{BOE}$ au degré près.

Exercice 36

Exercice 37

Exercice 38

Exercice 39

Exercice 40

Exercice 41

Exercice 42

Exercice 43

Exercice 44

Exercice 45

Exercice 46

Exercice 47

Exercice 48

Exercice 49

Exercice 50