1 Notion de matrice

1.1 Matrice de dimensions $m \times n$

Définition

Une matrice de **dimensions** $m \times n$ est un tableau de nombres comprenant m **lignes** et n **colonnes**.

Ainsi, la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice de dimensions 2×3.

De même, la matrice $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice de dimensions $\cdots \times \cdots$.

Vocabulaire

Si $m = n$, on dit que la matrice est **carrée d'ordre** m.

Ainsi, la matrice $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée d'ordre 3.

De même, la matrice $D = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée d'ordre $\cdots$.

Pour faire référence à un coefficient de la matrice, on utilise des **indices**, le premier désignant la ligne et le second la colonne.

Dans la matrice $E = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, on a $e_{11} = 1$, $e_{12} = 3$, $e_{21} = 4$, $e_{22} = 5$, $e_{31} = 0$ et $e_{32} = -1$.

De même, dans la matrice $F = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 8 \end{pmatrix}$, on a $f_{21} = \cdots$, et $f_{\ldots} = 0$.

1.2 Matrices Identités

Définition

La **matrice identité** d'ordre n est notée I_n.
c'est une matrice carrée d'ordre n dont tous les coefficients sont nuls saufs ceux de la diagonale qui valent 1.

Par exemple, la matrice identité d'ordre 3 est $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

De même, la matrice identité d'ordre 2 est $I_2 = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}$.

1.3 Transposée d'une matrice

Définition

La **matrice transposée** d'une matrice A d'ordre $m \times n$ est la matrice noté ${}^tA$ d'ordre $n \times m$ obtenue en permutant les lignes et les colonnes.

Ainsi, la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ a pour transposée ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$.

De même, la matrice $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$ a pour transposée ${}^tB = \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \end{pmatrix}$.

Vocabulaire

Soit A une matrice carrée. Si ${}^tA = A$, A est une **matrice symétrique**.

Ainsi, la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & -2 \\ 4 & -2 & 7 \end{pmatrix}$ est symétrique. On a $a_{ij} = a_{ji}$.

Vocabulaire

Soit A une matrice carrée. Si ${}^tA = -A$, A est une **matrice asymétrique**.

Ainsi, la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 5 \\ 1 & -5 & 0 \end{pmatrix}$ est symétrique. On a $b_{ij} = -b_{ji}$.

2 Premières opérations sur les matrices

2.1 Addition de deux matrices

L'addition de deux matrices A et B n'est possible que lorsque les deux matrices ont les mêmes dimensions. Dans ce cas, la somme C des deux matrices a pour coefficient la somme des coefficients de A et B :

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Ainsi pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, on a $C = A + B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

2.2 Multiplication d'un réel par une matrice

La multiplication d'un réel k par une matrice A donne une matrice $C = kA$ telle que

$$c_{ij} = ka_{ij}$$

Ainsi, pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, on a $2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \\ 2 & 8 & 0 \end{pmatrix}$.

En particulier, pour $k = -1$, on obtient la matrice $-A$ qui est la matrice opposée de A.

Ainsi, pour $B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, on a $-B = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

3 Produit de matrices

3.1 Faisabilité

Le produit de matrices $A \times B$ existe si et seulement le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.
Soit A une matrice $n \times p$ et B une matrice $p \times q$.
Alors, la matrice $C = A \times B$ est une matrice $n \times q$.

Attention : le produit de matrices n'est pas **commutatif** : $A \times B \neq B \times A$.

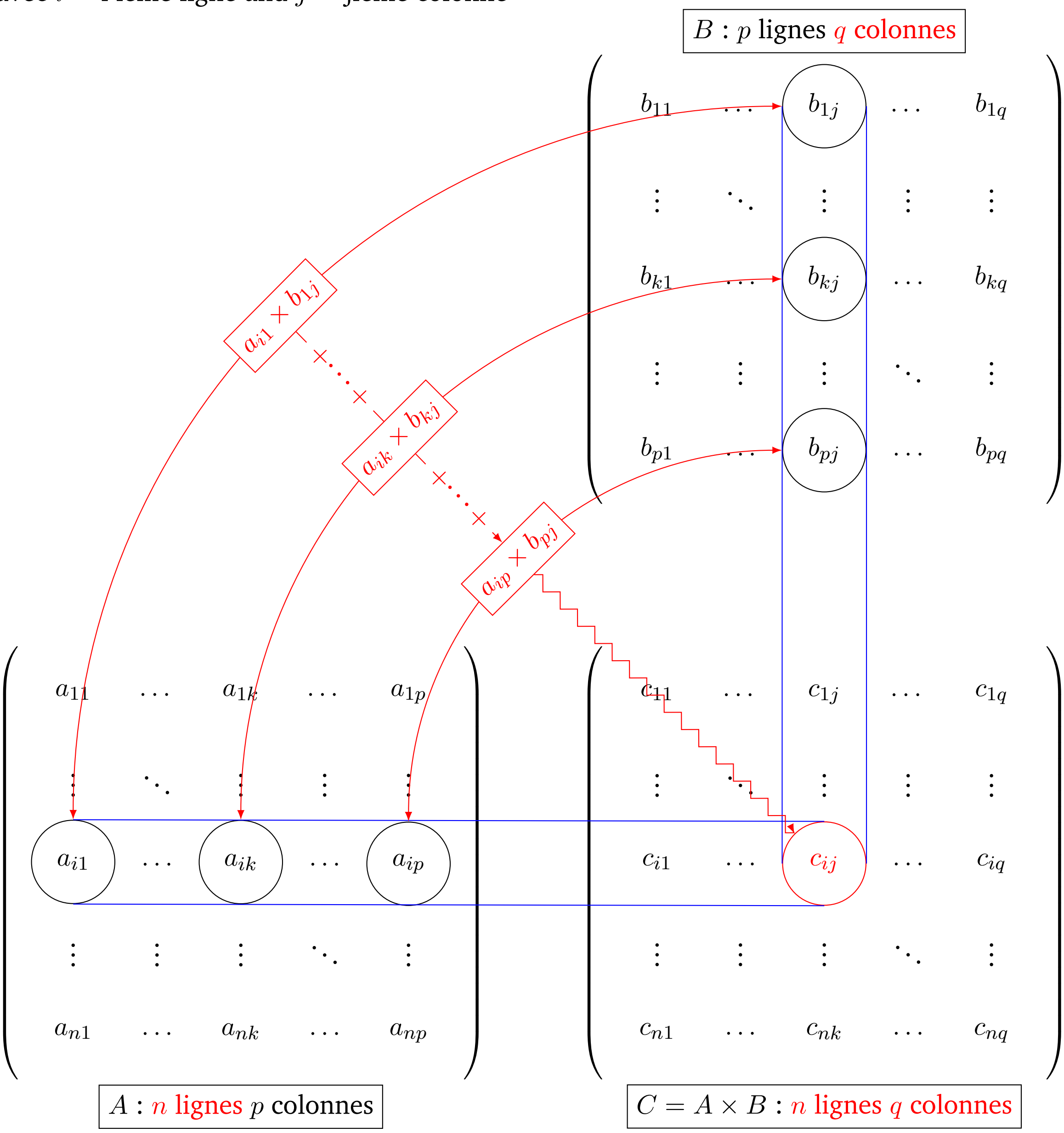
Prenons l'exemple suivant.
Soit A une matrice 2×3.
Soit B une matrice 3×4.
Alors, la matrice $C = A \times B$ est une matrice 2×4.
De plus, le produit $B \times A$ n'existe même pas.

Reprenons dans un autre exemple.
Soit A une matrice 4×5.
Soit B une matrice 5×1.
Alors, la matrice $C = A \times B$ est une matrice $\cdots \times \cdots$.

3.2 Détail du calcul

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

avec i = i ième ligne and j = jième colonne



3.3 Exemple

Prenons $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 9 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

On a $C = A \times B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 9 & 4 \end{pmatrix}$

Prenons $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

On a $C = A \times B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Prenons $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et calculons M^2.

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 5 & 2 & 10 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

On a $M^2 = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 10 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Attention : M^n n'est possible que si M est une matrice carrée.

3.4 Multiplication d'une matrice par une matrice identité

Propriété

Le produit d'une matrice A de dimensions $m \times n$ par une matrice identité est égale à A :

$$I_m \times A = A \times I_n = A.$$

Prenons $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

On a bien $I_2 \times A = A$.

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

On a bien $A \times I_3 = A$.

3.5 Matrice inverse d'une matrice carrée

Soit A une matrice carrée d'ordre n.
La **matrice inverse** de A, si elle existe, est notée A^{-1} et est telle que :

$$A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I_n.$$

Ainsi, prenons $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

On pourra vérifier que $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{12} & -\frac{7}{12} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{12} & \frac{11}{12} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Attention : la matrice inverse peut ne peut pas exister même si la matrice est non nulle !

3.6 Systèmes d'équations et équations matricielles

On peut remplacer tout système d'équations linéaires par une équation matricielle $AX = B$.
La solution X de cette équation, si elle existe, est :

$$X = A^{-1}B.$$

Soit le système $\begin{cases} 2x + 3y - 4z = 0 \\ x + y - z = 3 \\ 5x - y + 2z = 11 \end{cases}$.

On aura : $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 11 \end{pmatrix}$.

Soit le système $\begin{cases} a + 2b = 3 \\ 3a - 5 = 4 \end{cases}$.

On aura : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

4 Déterminant d'une matrice

4.1 Définition

Le déterminant d'une matrice carrée A est un nombre (ou une fonction) obtenu par des règles spécifiques.
On le note : $det(A)$ ou $|A|$.

4.2 Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 2

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Le déterminant de A est : $|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$.

Ainsi, pour $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$, on a $|B| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 10 = 2$.

De même, pour $C = \begin{pmatrix} \cos x & \sin s \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}$, on a $|C| = \begin{vmatrix} \cos x & \sin s \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

4.3 Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 3

Le déterminant d'une matrice carrée d'ordre3 peut être calculé de différentes manières. On présentera ici la **règle de Sarrus**.
Le principe consiste à réécrire sous la matrice les deux premières lignes.
Le déterminant est la somme 3 des diagonales vers le bas diminuée de la somme des 3 diagonales vers le haut.

Ainsi, prenons $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, on a le tableau $\begin{matrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{matrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = [(3 \times 2 \times 4) + (1 \times 1 \times 1) + (1 \times 2 \times 3)] - [(1 \times 2 \times 1) + (3 \times 1 \times 3) + (4 \times 2 \times 1)]$$

$|A| = (24 + 1 + 6) - (2 + 9 + 8) = 31 - 19 = 12$.

Ainsi, prenons $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a le tableau $\begin{matrix} 4 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \end{matrix}$

$$|B| = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = [(4 \times 2 \times 1) + (5 \times 0 \times 2) + (3 \times 1 \times 1)] - [(2 \times 2 \times 3) + (1 \times 0 \times 4) + (1 \times 1 \times 5)]$$

$|B| = (8 + 0 + 3) - (12 + 0 + 5) = 11 - 17 = -6.$

4.4 Premières propriétés

Propriété

Le déterminant d'une matrice et de sa transposée sont égaux :

$$det(^tA) = det(A)$$

Vérifions avec la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Alors, $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 10 = -7.$

Pour la transposée, on a $^tA = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Alors, $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 10 = -7.$

On a bien $det(^tA) = det(A)$.

Propriété

Si une ligne ou une colonne d'une matrice est composée uniquement de zéros, alors le déterminant est nul.

Prenons par exemple la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \\ 8 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Alors, $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \\ 8 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0.$

De même, prenons la matrice $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 8 & 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$. Alors, $|B| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 8 & 4 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0.$

Propriété

Si on intervertit deux lignes ou deux colonnes, on change le signe du déterminant.

Vérifions avec la matrice $A = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. Alors, $|A| = \begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 35 - 24 = 11.$

En intervertissant les colonnes, on obtient la matrice $B = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$. Alors, $|B| = \begin{vmatrix} 8 & 7 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 24 - 35 = -11.$

Propriété

Si deux lignes ou deux colonnes sont proportionnelles, le déterminant est nulle.

Prenons par exemple la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 10 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. On a le tableau $\begin{matrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 10 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{matrix}$

Alors, $|A| = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 10 & 2 & 4 \end{vmatrix} = (40 + 4 + 30) - (40 + 30 + 4) = 0$.

Propriété

Si on ajoute à une ligne (respectivement une colonne) le produit d'une autre ligne (resp. une colonne), on ne change pas le déterminant.

Prenons par exemple la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. On a le tableau $\begin{matrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{matrix}$

Alors, $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (8 + 0 + 5) - (60 + 2 + 0) = -49$.

En ajoutant à la première ligne le double de la deuxième, on obtient la matrice B.

$B = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 5 \\ 0 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. On a le tableau $\begin{matrix} 2 & 9 & 5 \\ 0 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \\ 2 & 9 & 5 \\ 0 & 4 & 1 \end{matrix}$

Alors, $|B| = \begin{vmatrix} 2 & 9 & 5 \\ 0 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (8 + 0 + 45) - (100 + 2 + 0) = -49$.

Propriété

Si on multiplie toute une ligne ou toute une colonne par un coefficient k, le déterminant est multiplié par k.

Vérifions avec la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Alors, $|A| = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 15 - 2 = 13$.

Alors, pour la matrice $B = \begin{pmatrix} 50 & 20 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Alors, $|B| = \begin{vmatrix} 50 & 20 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 150 - 20 = 130$.

On a bien $det(B) = 10\ det(A)$.

4.5 Déterminant et matrice inverse

Propriété

Soit A et B deux matrices carrées de même ordre. Alors,

$$det(AB) = det(A) \times det(B).$$

Prenons $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 13 & 9 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

On a $C = A \times B = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 13 & 9 \end{pmatrix}$.

$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 3 = 7.$

$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 6 = -6.$

$|C| = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 13 & 9 \end{vmatrix} = 36 - 78 = -42.$

On a bien : $det(AB) = det(A) \times det(B)$.

Propriété

Soit A une matrice carrée.
Si $det(A) \neq 0$, alors A possède une matrice inverse. On dira que A est **inversible**.
Si $det(A) = 0$, on dira que A est **singulière** ou non inversible.

Propriété

Soit A une matrice carrée inversible. Alors,

$$det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$$

Prenons $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$. A l'aide d'un outil informatique, on trouve, $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix}$.

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 6 = -8.$

$|A^{-1}| = \begin{vmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \end{vmatrix} = -\frac{1}{32} - \frac{3}{32} = -\frac{4}{32} = -\frac{1}{8}.$

On a bien : $det(A^{-1}) = \dfrac{1}{det(A)}$.

4.6 Déterminant de matrices particulières

Propriété

Soit I_n une matrice identité d'ordre n. Alors,

$$det(I_n) = 1.$$

Vérifions pour $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1.$

Propriété

Une **matrice diagonale** est matrice ayant tous ces coefficients nuls sauf ceux de la diagonale.
Son déterminant est égale au produit de ces coefficients.

Prenons $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Alors, $|D| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -12.$

Propriété

Une **matrice triangulaire** est matrice ayant tous ces coefficients d'un côté de la diagonale qui sont nuls..
Son déterminant est égale au produit des coefficients de la diagonale.

Prenons $E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 & 0 \\ 8 & 7 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. Alors, $|E| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 & 0 \\ 8 & 7 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = -50.$

Propriété

Soit A une matrice carrée d'ordre n et k un coefficient donné. Alors,

$$det(kA) = k^n \ det(A).$$

Vérifions avec la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. Alors, $|A| = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 20 - 6 = 14.$

Prenons la matrice $B = 10\ A = \begin{pmatrix} 40 & 20 \\ 30 & 50 \end{pmatrix}$. Alors, $|B| = \begin{vmatrix} 40 & 20 \\ 30 & 50 \end{vmatrix} = 2\,000 - 600 = 1\,400.$

On a bien : $det(B) = 10^2\ det(A)$.

5 Calcul matriciel avec Xcas

5.1 Initialisation de matrices

Dans Xcas une matrice s'écrit entre crochets.
Les coefficients de chaque ligne sont entre crochets.
Le séparateur des coefficients et des lignes et la virgule.

$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$ s'écrit :

```
A:=[[3,2],[7,5]]
```

Le vecteur colonne $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$ s'écrit :

```
B:=[[5],[7],[3]]
```

Le vecteur ligne $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ s'écrit :

```
C:=[[3,2,1]]
```

5.2 Opération sur les matrices matrices

Le déterminant d'une matrice A s'écrit :

```
det(A)
```

L'inverse d'une matrice A s'écrit :

```
A^(-1)
```

Les opérateurs classiques sur les matrices s'écrivent de façon intuitive :

```
A+B
A-B
A*B
A+2B
```

Table des matières

1 Notion de matrice **1**
1.1 Matrice de dimensions $m \times n$ . . . 1
1.2 Matrices Identités . . . 2
1.3 Transposée d'une matrice . . . 2

2 Premières opérations sur les matrices **3**
2.1 Addition de deux matrices . . . 3
2.2 Multiplication d'un réel par une matrice . . . 3

3 Produit de matrices **3**
3.1 Faisabilité . . . 3
3.2 Détail du calcul . . . 4
3.3 Exemple . . . 5
3.4 Multiplication d'une matrice par une matrice identité . . . 6
3.5 Matrice inverse d'une matrice carrée . . . 6
3.6 Systèmes d'équations et équations matricielles . . . 7

4 Déterminant d'une matrice **8**
4.1 Définition . . . 8
4.2 Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 2 . . . 8
4.3 Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 3 . . . 8
4.4 Premières propriétés . . . 9
4.5 Déterminant et matrice inverse . . . 11
4.6 Déterminant de matrices particulières . . . 12

5 Calcul matriciel avec Xcas **13**
5.1 Initialisation de matrices . . . 13
5.2 Opération sur les matrices matrices . . . 13