



centroappunti.it

CORSO LUIGI EINAUDI, 55/B - TORINO

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 2596A

ANNO: 2025

A P P U N T I

STUDENTE: Buccioni Luca

**MATERIA: Relazioni ed Esercitazioni di Aeroelasticità- Prof.
Petrolo**

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTI E NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

Indice

1	Esercitazione 1 - Equazioni del moto per un sistema 1 DOF	4
1.1	Esercizio a	4
1.1.1	Punto 1	4
1.1.2	Punto 2	8
2	Esercitazione 2 - Equazioni del moto di un sistema 2 DOF	11
2.1	Esercizio a	11
2.2	Esercizio b	13
2.2.1	Punto 1	13
2.2.2	Punto 2	13
2.2.3	Punto 3	14
2.3	Esercizio c	15
2.3.1	Punto 1	16
2.3.2	Punto 2	17
2.4	Esercizio d	17
2.4.1	Punto 1	17
2.4.2	Punto 2	18
2.4.3	Punto 3	19
2.4.4	Punto 4	19
2.4.5	Punto 5	20
3	Esercitazione 3 - Stabilità statica aeroelastica	23
3.1	Esercizio a - Analisi di divergenza con 1 DOF	23
3.1.1	Punto 1	24
3.1.2	Punto 2	24
3.1.3	Punto 3	26
3.1.4	Punto 4	27
3.1.5	Punto 5	27
3.1.6	Punto 6	28
3.2	Esercizio b - Analisi di divergenza con 2 DOF	29
3.2.1	Punto 1	29
3.2.2	Punto 2	31
4	Esercitazione 4 - Sistema aeroelastico 2 DOF con aerodinamica stazionaria e quasi-stazionaria e p-method	34
4.1	Esercizio a - Radici del p-method con aerodinamica stazionaria	35
4.1.1	Punto 1	35
4.1.2	Punto 2	37

4.1.3	Punto 3	37
4.1.4	Punto 4	38
5	Esercitazione 5 - Sistema aeroelastico 2 DOF con aerodinamica stazionaria e quasi-stazionaria, p-method, e risposta nel tempo	40
5.1	Esercizio a - Radici del p-method con aerodinamica stazionaria	41
5.1.1	Punto 1	41
5.1.2	Punto 2	42
5.1.3	Punto 3	45
5.2	Esercizio b - Radici del p-method con aerodinamica quasi-stazionaria	46
5.2.1	Punto 1	47
5.2.2	Punto 2	47
5.2.3	Punto 3	50
5.2.4	Punto 4	51
6	Esercitazione 6 - Sistema aeroelastico 2 DOF con aerodinamica di Theodorsen e Flutter tramite il pk-Method	53
6.1	Esercizio a - Aerodinamica instazionaria con Theodorsen	53
6.1.1	Punto 1	54
6.1.2	Punto 2	55
6.1.3	Punto 3	59
6.2	Esercizio b - Rateo di decadimento	61
6.3	Esercizio c - Influenza dei parametri di design e del livello di volo sulle condizioni di flutter	62
6.3.1	Punto 1	62
6.3.2	Punto 2	63
6.3.3	Punto 3	65
7	Esercitazione 7 - Dinamica strutturale e risposta statica usando il FEM	68
7.1	Esercizio a - Analisi statica e dinamica di un'ala in materiale isotropo	69
7.1.1	Punto 1	69
7.1.2	Punto 2	70
7.2	Esercizio b - Analisi statica e dinamica di un'ala in materiale composito	73
7.2.1	Punto 1	74
7.2.2	Punto 2	77
8	Esercitazione 8 - Risposte dinamiche nel dominio della frequenza e del tempo	83
8.1	Esercizio a - Analisi nel dominio del tempo	83
8.1.1	Punto 1	83
8.1.2	Punto 2	85
8.1.3	Punto 3	87
8.2	Esercizio b - Analisi nel dominio della frequenza	88
8.2.1	Punto 1	88
8.2.2	Punto 2	89
8.2.3	Punto 3	89

9	Esercitazione 9 - Risposta aeroelastica statica utilizzando il FEM	92
9.1	Esercizio a - Analisi aeroelastica di un'ala in materiale isotropo	92
9.1.1	Punto 1	93
9.2	Esercizio b - Analisi aeroelastica di un'ala in materiale composito	95
9.2.1	Punto 1	95
10	Esercitazione 10 - Analisi di flutter utilizzando il FEM	97
10.1	Analisi di flutter di un'ala in materiale isotropo	97
10.1.1	Punto 1	98
10.1.2	Punto 2	100
10.2	Esercizio b - Analisi di flutter di un'ala in materiale composito	102
10.2.1	Punto 1	102
10.2.2	Laminazione -75°	104
10.2.3	Laminazione -60°	105
10.2.4	Laminazione -45°	107
10.2.5	Laminazione -30°	108
10.2.6	Laminazione -15°	110
10.2.7	Laminazione 0°	112
10.2.8	Laminazione 15°	112
10.2.9	Laminazione 30°	114
10.2.10	Laminazione 45°	116
10.2.11	Laminazione 60°	118
10.2.12	Laminazione 75°	119
10.2.13	Laminazione 90°	121
11	Esercitazione 11 - Aeroservoelasticità	124
11.1	Punto 1	124
11.1.1	$K_{dv1} = -4$	124
11.1.2	$K_{dv1} = -2$	125
11.1.3	$K_{dv1} = 0$	125
11.1.4	$K_{dv1} = 0.5$	126
11.2	Punto 2	127
11.2.1	$K_v = -0.02$	127
11.2.2	$K_v = -0.01$	128
11.2.3	$K_v = 0$	129
11.2.4	$K_v = 0.005$	130
11.3	Punto 3	131
11.3.1	$K_v = -0.02$	132
11.3.2	$K_v = -0.01$	133
11.3.3	$K_v = 0$	134
11.3.4	$K_v = 0.005$	135
11.4	Punto 4	136
11.4.1	Primo caso	136
11.4.2	Secondo caso	137

Esercitazione 1 - Equazioni del moto per un sistema 1 DOF

1.1 Esercizio a

Si considera la seguente equazione differenziale del secondo ordine:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (1.1)$$

dove m è la massa del sistema, c è lo smorzamento, k è la rigidità, x è il grado di libertà.

1.1.1 Punto 1

Impostando $m = 2$, $k = 14$, $c = 0.4$ si chiede di calcolare:

- il polinomio caratteristico e gli autovalori;
- la frequenza naturale del sistema (f_n , Hz);
- la parte reale e immaginaria dell'autovalore;
- la frequenza del sistema (f , Hz);

e di descrivere il tipo di moto. Si chiede, inoltre, di verificare i risultati utilizzando il codice MATLAB fornito. Infine, si chiede di svolgere gli stessi passaggi con (m, c, k) : $(10, 0, 2)$, $(21, -0.1, 4)$, $(4, 0.2, 3)$.

Partendo dall'equazione 1.1 si impone la soluzione esponenziale, si calcolano le sue derivate e si inseriscono nell'equazione precedente.

$$\begin{aligned} x &= \bar{x}e^{\lambda t} \\ \dot{x} &= \lambda \bar{x}e^{\lambda t} \\ \ddot{x} &= \lambda^2 \bar{x}e^{\lambda t} \\ m\lambda^2 \bar{x}e^{\lambda t} + c\lambda \bar{x}e^{\lambda t} + k\bar{x}e^{\lambda t} &= 0 \end{aligned}$$

Raccogliendo la quantità $\bar{x}e^{\lambda t}$ si ha:

$$(m\lambda^2 + c\lambda + k) \bar{x}e^{\lambda t} = 0$$

La soluzione si trova ponendo:

$$(m\lambda^2 + c\lambda + k) = 0$$

che rappresenta il **polinomio caratteristico**.

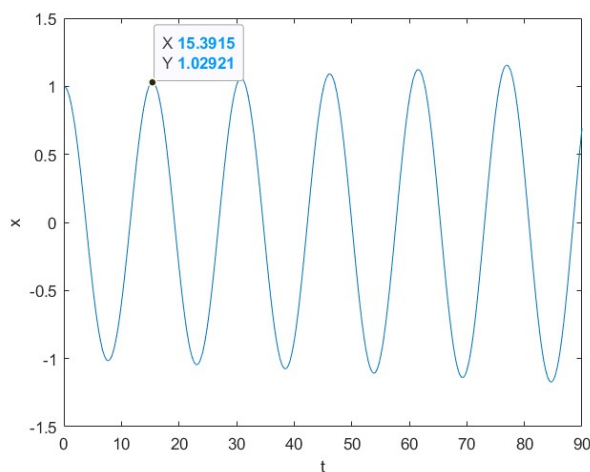


Figura 1.3: Andamento della risposta in funzione del tempo

Dalla figura 1.3 si nota come il periodo sia circa $T = 15.3915s$ e quindi la frequenza è $f = \frac{1}{T} = 0.06497Hz$. La pulsazione è $\omega = \lambda_i = 2\pi f = 0.40822 \frac{rad}{s}$. I risultati sono verificati.

Caso: $m = 4$, $k = 3$, $c = 0.2$

- frequenza naturale: $f_n = 0.13783Hz$;
- parte reale e immaginaria dell'autovalore: $-0.025 \pm 0.86566i$;
- frequenza del sistema: $f = 0.13777Hz$.

Dal valore degli autovalori si nota come la parte reale sia negativa e sia presente una parte immaginaria. Si tratta quindi di un moto periodico in cui l'ampiezza delle oscillazioni diminuisce.

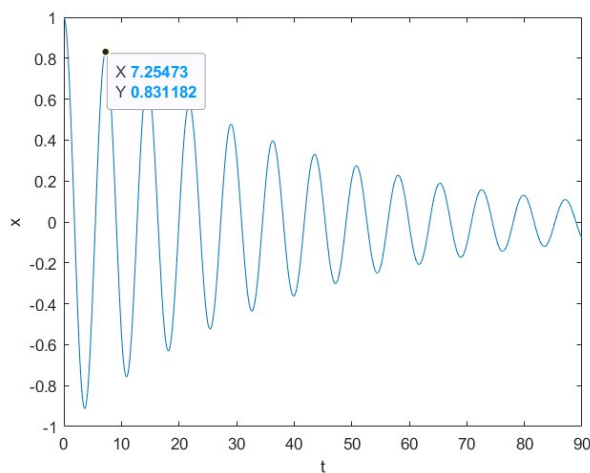


Figura 1.4: Andamento della risposta in funzione del tempo

Dalle figure 1.5 e 1.6 è possibile notare come cambia il valore della parte reale e immaginaria al variare di k_a . In particolare, si hanno le seguenti zone:

- $0 \leq k_a < 0.4$: parte reale negativa e parte immaginaria diversa da zero $\rightarrow$ risposta armonica smorzata;
- $k_a \approx 0.4$: parte reale nulla e parte immaginaria diversa da zero $\rightarrow$ risposta puramente armonica (con opportuno valore di c_a e m_a);
- $0.4 < k_a < 1$: parte reale positiva e parte immaginaria diversa da zero $\rightarrow$ risposta armonica amplificata;
- $1 \leq k_a \leq 2$: parte immaginaria uguale a zero $\rightarrow$ risposta aperiodica caratterizzata da due valori reali della soluzione, uno positivo e uno negativo.

Seconda richiesta

Si chiede di trovare il valore di k_a con cui si ottiene una soluzione puramente armonica. Per avere una soluzione armonica si deve avere un valore della parte reale dell'autovalore pari a zero. Si scrive quindi l'equazione delle radici dell'equazione 1.2:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(c - c_a) \pm \sqrt{(c - c_a)^2 - 4(m - m_a)(k - k_a)}}{2(m - m_a)}$$

e si impone uguale a zero il termine all'esterno delle radici:

$$\lambda_r = \frac{-(c - c_a)}{2(m - m_a)}$$

Si ha quindi che:

$$c - c_a = 0$$

Per analizzare in che punto della discretizzazione del dominio di c_a , compreso tra 0 e 0.3, si ha un valore simile a c si divide il dominio in 1001 punti, come in MATLAB, e si scrive la seguente formula:

$$c_a = 0 + (x - 1) \frac{0.3}{1000} = c$$

si trova un valore di x pari a 201 quindi, prendendo la componente del vettore numero 201, si avranno $k_a = 0.4$, che coincide con il valore trovato nel punto precedente, $m_a = 0.1$ e $c_a = 0.06$. Per il calcolo della frequenza è necessario calcolare il valore della parte immaginaria dell'autovalore inserendo i valori appena trovati nella seguente formula:

$$\lambda_i = \frac{\sqrt{(c - c_a)^2 - 4(m - m_a)(k - k_a)}}{2(m - m_a)}$$

Il valore della frequenza è quindi:

$$f = \frac{\lambda_i}{2\pi} = 0.0624 \text{ Hz}$$

Per verificare che i calcoli siano giusti si utilizza il codice Es1a1.m.

Esercitazione 2 - Equazioni del moto di un sistema 2 DOF

Nel corso di questa esercitazione si considererà la sezione tipica mostrata in figura 2.1. In particolare:

- P è il centro di taglio. C è il centro di massa. $x_\theta = e - a$. La corda, c , è $2b$.
- h e θ sono i gradi di libertà rispettivamente traslazionale verticale e rotazionale. k_h e k_θ sono le rigidezze delle molle associate ai due gradi di libertà.
- m è la massa della struttura. I_P è il momento d'inerzia rispetto al polo P. $I_P = I_C + mb^2x_\theta^2$.

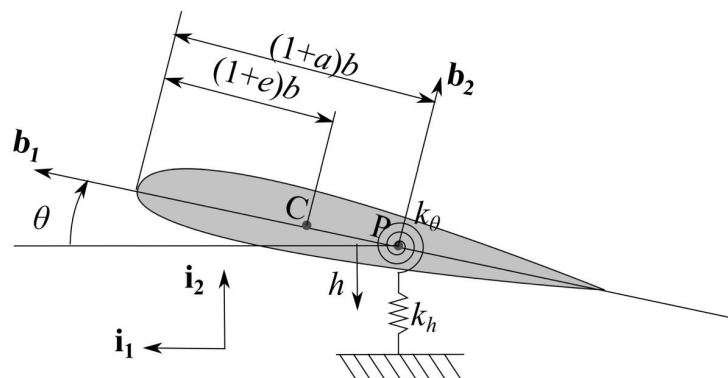


Figura 2.1: Sezione tipica

2.1 Esercizio a

Si chiede di dimostrare che le equazioni del moto della sezione tipica sono le seguenti:

$$m(\ddot{h} + bx_\theta\ddot{\theta}) + k_h h = 0$$

$$I_P\ddot{\theta} + mbx_\theta\ddot{h} + k_\theta\theta = 0$$

Per dimostrare le precedenti equazioni si utilizza l'equazione di Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i$$

2.2 Esercizio b

Si considera una sezione tipica avente i seguenti parametri:

- Corda, $c = 0.25m$.
- $k_h = 500 \frac{N}{m}$, $k_\theta = 4000 Nm$.
- $m = 4Kg$.
- $I_P = 0.4Kg m^2$.
- $e = 0$, $a = 0$.

2.2.1 Punto 1

Si chiede di riscrivere le equazioni del moto come

$$M\ddot{x} + Kx = 0$$

con $x = (h, \theta)^T$ e $\ddot{x} = (\ddot{h}, \ddot{\theta})^T$. Si scrivono le matrici M e K .

$$M = \begin{bmatrix} m & mbx_\theta \\ mbx_\theta & I_P \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} k_h & 0 \\ 0 & k_\theta \end{bmatrix}$$

Le equazioni scritte in forma matriciale saranno quindi:

$$\begin{bmatrix} m & mbx_\theta \\ mbx_\theta & I_P \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{h} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} k_h & 0 \\ 0 & k_\theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} h \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2.2.2 Punto 2

Si chiede di assumere una soluzione di tipo armonico ($h = \bar{h}e^{i\omega t}$, $\theta = \bar{\theta}e^{i\omega t} \rightarrow x = \bar{x}e^{i\omega t}$) e di dimostrare che $\omega_h = \sqrt{\frac{k_h}{m}}$ e $\omega_\theta = \sqrt{\frac{k_\theta}{I_P}}$.

Si parte sostituendo nella prima equazione i valori di h e $\ddot{h}$.

$$h = \bar{h}e^{i\omega t}$$

$$\dot{h} = i\omega\bar{h}e^{i\omega t}$$

$$\ddot{h} = -\omega^2\bar{h}e^{i\omega t}$$

Si ha quindi:

$$-\omega^2\bar{h}e^{i\omega t}m + \bar{h}e^{i\omega t}k_h = 0$$

Raccogliendo $\bar{h}e^{i\omega t}$ si trova:

$$\bar{h}e^{i\omega t}(-\omega^2m + k_h) = 0$$

e ponendo pari a zero il termine all'interno delle parentesi:

$$-\omega^2m + k_h = 0$$

Condizioni iniziali: $h(t=0), \theta(t=0) = (0, 0.1)$

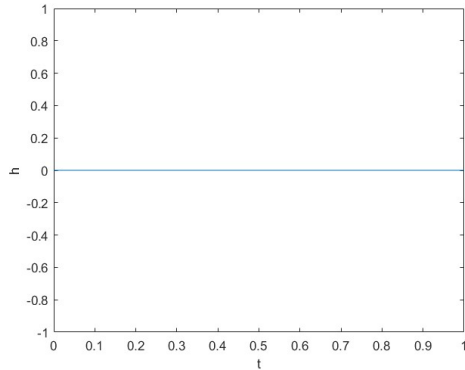


Figura 2.4: $h(t=0) = 0$

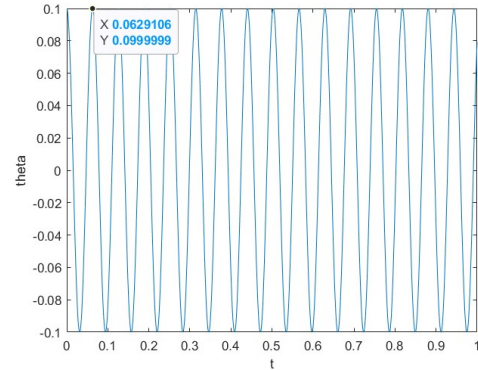


Figura 2.5: $\theta(t=0) = 0.1$

Le considerazioni sono simili al caso precedente ma in questo caso non si avrà una risposta in h e si avrà una risposta in θ .

Calcolando il periodo dalla 2.5 si può ricavare la frequenza e la pulsazione, $\omega_k = 2\pi f = 2\pi \frac{1}{T} = 99.8748 \frac{rad}{s}$ che verifica il calcolo svolto al punto precedente.

Condizioni iniziali: $h(t=0), \theta(t=0) = (0.1, 0.1)$

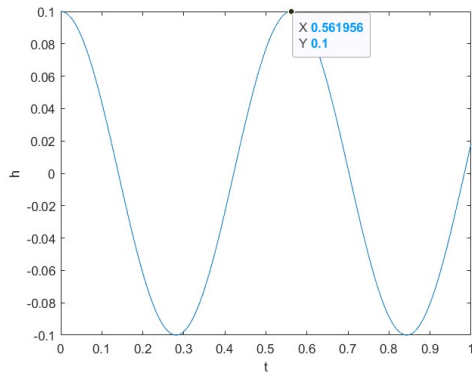


Figura 2.6: $h(t=0) = 0.1$

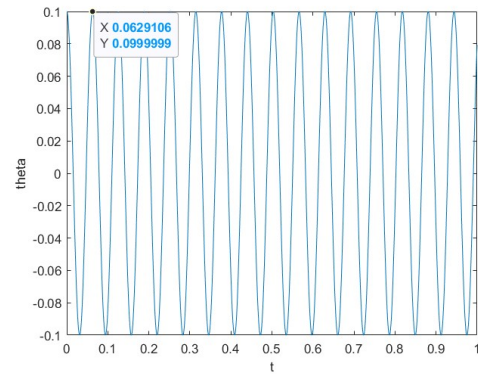


Figura 2.7: $\theta(t=0) = 0.1$

Essendo i due moti disaccoppiati si trovano gli stessi risultati visti nei due casi precedenti.

2.3 Esercizio c

Si considera una sezione tipica avente i seguenti parametri:

2.3.2 Punto 2

Si chiede di valutare, utilizzando MATLAB, la risposta nel tempo con le seguenti condizioni iniziali: $(h(t=0), \theta(t=0)) = (0.1, 0.1)$.

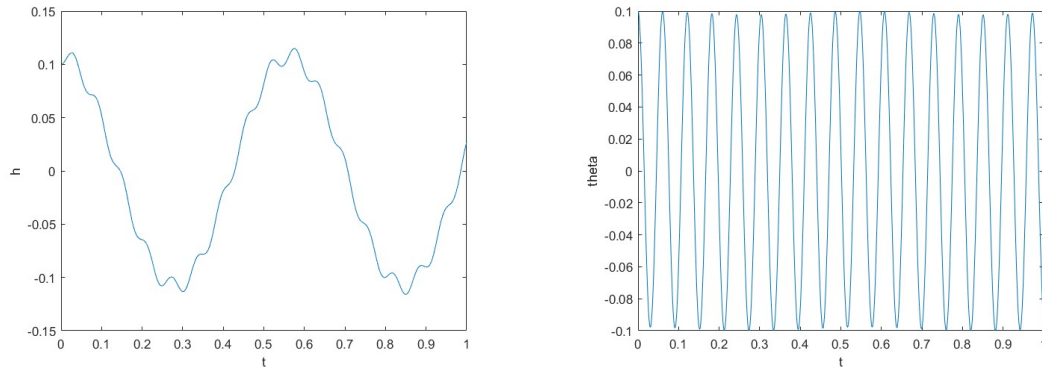


Figura 2.8: $h(t=0), \theta(t=0) = (0.1, 0.1)$

Come si osserva dalle figure riportate le due equazioni risultano accoppiate a causa del termine x_θ che in questo caso è diverso da zero essendo $x_\theta = 0.65$.

2.4 Esercizio d

Le equazioni del moto della sezione tipica con i termini di smorzamento e aerodinamici sono le seguenti:

$$m(\ddot{h} + bx_\theta\ddot{\theta}) + (c_h - c_{ha})\dot{h} + (k_h - k_{ha})h = 0$$

$$I_P\ddot{\theta} + mbx_\theta\ddot{h} + (c_\theta - c_{\theta a})\dot{\theta} + (k_\theta - k_{\theta a})\theta = 0$$

Si considera una sezione tipica avente:

- $c_h = 0.25 \frac{Ns}{m}$.
- $c_\theta = 0.01 Nms$.
- $e = 0, a = 0$.

2.4.1 Punto 1

Si chiede di riscrivere le equazioni del moto come:

$$M\ddot{x} + (C - C_a)\dot{x} + (K - K_a)x = 0$$

con $x = (h, \theta)^T$, $\dot{x} = (\dot{h}, \dot{\theta})^T$ e $\ddot{x} = (\ddot{h}, \ddot{\theta})^T$.

Si scrivono le matrici M , C , C_a , K e K_a .

$$M = \begin{bmatrix} m & mbx_\theta \\ mbx_\theta & I_P \end{bmatrix}$$

2.4.3 Punto 3

Si richiede di valutare, attraverso MATLAB, la parte reale e immaginaria degli autovalori utilizzando i seguenti range:

- $0 \leq k_{ha} \leq 400$;
- $0 \leq k_{\theta a} \leq 4000$;
- $0 \leq c_{ha} \leq 0.4$;
- $0 \leq c_{\theta a} \leq 0.05$.

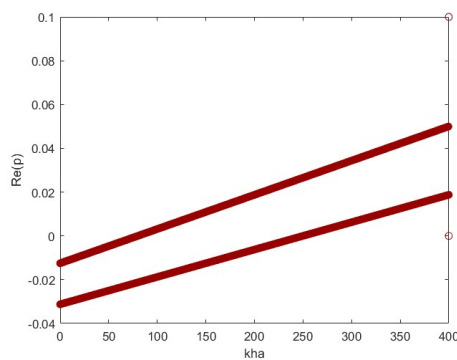


Figura 2.9: Parte reale

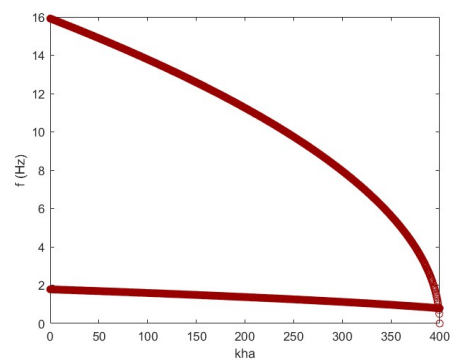


Figura 2.10: Frequenza

In entrambi i grafici i punti superiori appartengono a θ mentre quelli inferiori a h . Dalla figura 2.9 si nota come entrambe le parti reali sono negative (moto smorzato) e successivamente, per due valori diversi di k_{ha} , diventano positive (moto divergente). Dalla figura 2.10 si nota come il valore di entrambe le curve diminuisce all'aumentare di k_{ha} fino a coincidere per valori leggermente inferiori di $k_{ha} = 400$.

2.4.4 Punto 4

Si chiede di verificare i risultati del punto 2 utilizzando MATLAB.

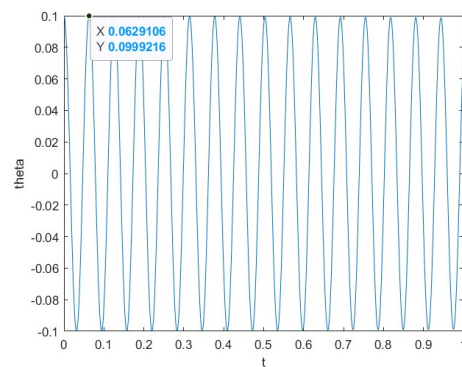
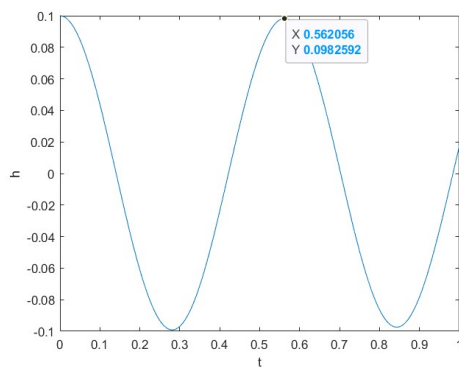


Figura 2.11: Risposta nel tempo dei due gradi di libertà

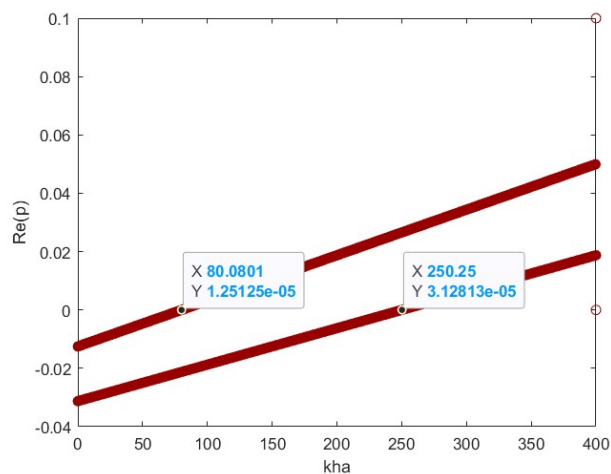
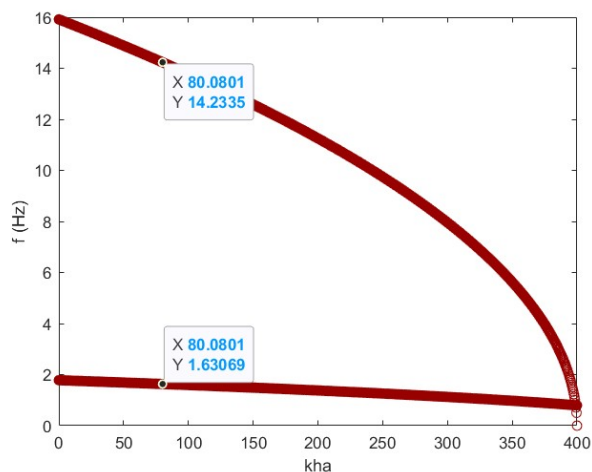


Figura 2.12: Valori di k_{ha} per cui il moto diventa divergente

Essendo $x_\theta < x_h$ si prende lui come valore. I valori delle varie grandezze saranno (considerando la componente 201):

- $k_{ha} = 80.0801 \frac{N}{m}$;
- $k_{\theta a} = 800.8008 Nm$;
- $c_{ha} = 0.0801 \frac{Ns}{m}$
- $c_{\theta a} = 0.0100 Nms$.



Le frequenze saranno pari a:

- $f_h = 1.63069 Hz$;

Esercitazione 3 - Stabilità statica aeroelastica

3.1 Esercizio a - Analisi di divergenza con 1 DOF

Si considera un generico profilo (figura 3.1) avente una molla torsionale posizionata nel centro di taglio e con le seguenti caratteristiche:

- corda c pari a $0.5m$, con $c = 2b$;
- centro aerodinamico posizionato a $x_{ac} = 0.25 \cdot c$;
- U velocità del flusso libero e α angolo di attacco;
- coefficiente C_{L_α} uguale a 2π ;
- lunghezza dell'ala considerata unitaria quindi la superficie è $S = 1 \cdot c = c$;
- il modulo di taglio G si considera uguale a $28.077GPa$.

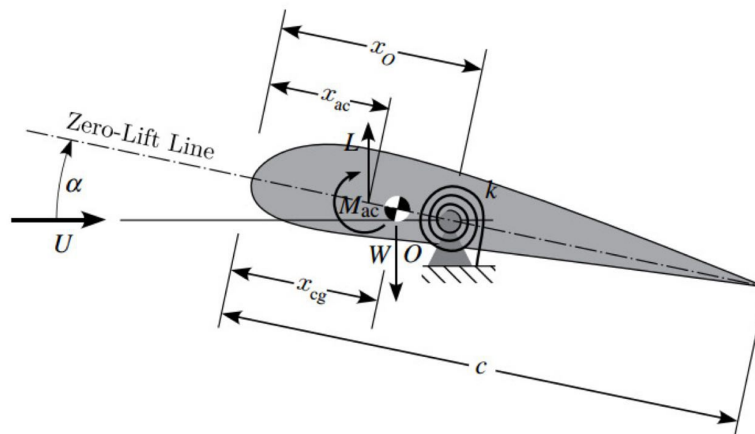


Figura 3.1: Profilo con 1 DOF

Caso: $x_0 = 0.5 \cdot c$

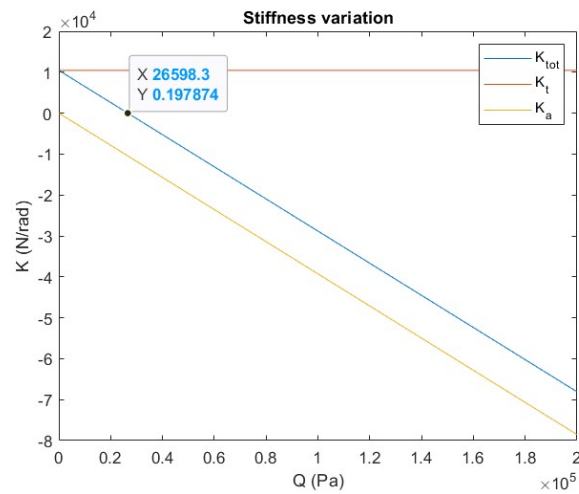


Figura 3.3: $x_0 = 0.5 \cdot c$

Dal grafico si nota come la rigidezza totale si annulli per un valore di pressione dinamica di $Q \approx 2.66 \cdot 10^4 Pa$.

Caso: $x_0 = 0.7 \cdot c$

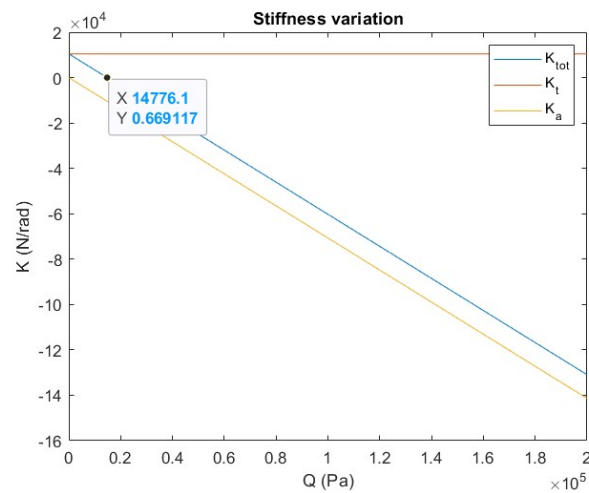


Figura 3.4: $x_0 = 0.7 \cdot c$

Dal grafico si nota come la rigidezza totale si annulli per un valore di pressione dinamica di $Q \approx 1.48 \cdot 10^4 Pa$.

Dai grafici si nota come all'aumentare della distanza tra il centro di taglio e il centro aerodinamico la pressione di divergenza diminuisca. Questo comportamento è naturale in quanto sta

3.1.4 Punto 4

Si chiede di valutare l'effetto che ha la variazione di densità sulla velocità di divergenza nell'intervallo $0.1 \leq \rho \leq 1.225$ e con $x_0 = 0.5 \cdot c$.

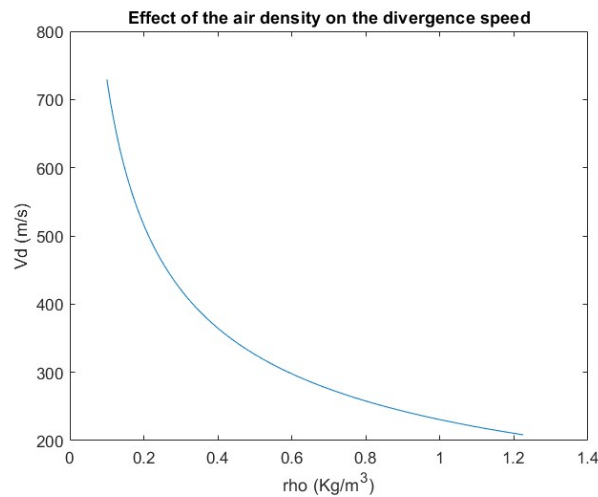


Figura 3.5: Velocità di divergenza in funzione della densità

Come si vede all'aumentare della densità diminuisce la velocità di divergenza. Analizzando la formula della velocità di divergenza si capisce il motivo di questo comportamento, infatti si sa che:

$$U_D = \sqrt{\frac{2k}{\rho S C_{L_\alpha} (x_0 - x_{ac})}}$$

quindi la velocità di divergenza è proporzionale a:

$$U_D \propto \sqrt{\frac{1}{\rho}}$$

e ciò comporta che un aumento di densità generi una diminuzione di velocità di divergenza e viceversa.

3.1.5 Punto 5

Si chiede di valutare l'effetto che ha la variazione di rigidità torsionale sulla velocità di divergenza nell'intervallo $k|_{L=20m} \leq k \leq k|_{L=2m}$ e con $x_0 = 0.5 \cdot c$.

Dal grafico si nota che all'aumentare del valore di x_0 la velocità di divergenza diminuisce. Questo avviene poiché si ha:

$$U_D \propto \sqrt{\frac{1}{(x_0 - x_{ac})}}$$

Per valori di x_0 che tendono a $0.25 \cdot c$ si ha che la velocità di divergenza tende ad infinito poiché a quella coordinata è presente il centro aerodinamico. Ciò che accade fisicamente quando il valore di x_0 aumenta è che, come detto precedentemente, aumenta il braccio di applicazione della portanza rispetto al centro di taglio con conseguente aumento del momento torcente.

3.2 Esercizio b - Analisi di divergenza con 2 DOF

Si considera un generico profilo (figura 3.8) avente due molle lineari: la prima con rigidezza k_1 posizionata al bordo di attacco, la seconda con rigidezza k_2 posizionata al bordo di fuga e con le seguenti caratteristiche:

- corda c pari a $0.5m$;
- centro aerodinamico posizionato a $x_{ac} = 0.25 \cdot c$;
- U velocità del flusso libero e α angolo di attacco;
- coefficiente C_{L_α} uguale a 2π ;
- lunghezza dell'ala considerata unitaria quindi la superficie è $S = 1 \cdot c = c$;

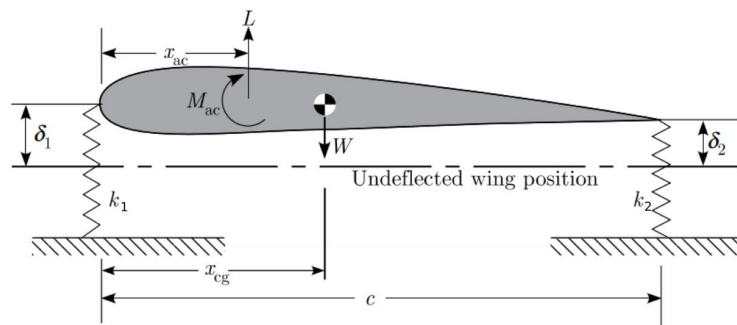


Figura 3.8: Profilo con 2 DOF

3.2.1 Punto 1

Si chiede di valutare la velocità di divergenza e la posizione del centro di taglio considerando una densità del flusso pari a $0.875 \frac{kg}{m^3}$ e le due rigidezze k_1 e k_2 pari a $1000 \frac{N}{m}$.

3.2.2 Punto 2

Si chiede di valutare la velocità di divergenza e la posizione del centro di taglio considerando una densità del flusso di $0.875 \frac{kg}{m^3}$ e i valori di rigidità delle molle riportati nella figura 3.9.

k_1 (N/m)	k_2 (N/m)
1300	435
1300	700
1300	1400
1300	2800
1300	5600
1300	8000
1300	10000
1300	20000

Figura 3.9: Valori di rigidità

Per il calcolo della velocità di divergenza e della posizione del centro di taglio si utilizzeranno le formule già descritte precedentemente che vengono riportate nuovamente qui di seguito:

$$x_0 = \frac{k_2}{k_1 + k_2} c$$

$$U_D = \sqrt{\frac{2k_1 c x_0}{\rho S C_{L_\alpha} (x_0 - x_{ac})}}$$

Caso: $k_1 = 1300 \frac{N}{m}$, $k_2 = 435 \frac{N}{m}$

- Posizione centro di taglio: $x_0 = 0.1254m$
- Velocità di divergenza: $U_D = 405.6788 \frac{m}{s}$

Caso: $k_1 = 1300 \frac{N}{m}$, $k_2 = 700 \frac{N}{m}$

- Posizione centro di taglio: $x_0 = 0.1750m$
- Velocità di divergenza: $U_D = 40.6843 \frac{m}{s}$

Caso: $k_1 = 1300 \frac{N}{m}$, $k_2 = 1400 \frac{N}{m}$

- Posizione centro di taglio: $x_0 = 0.2593m$
- Velocità di divergenza: $U_D = 30.2195 \frac{m}{s}$

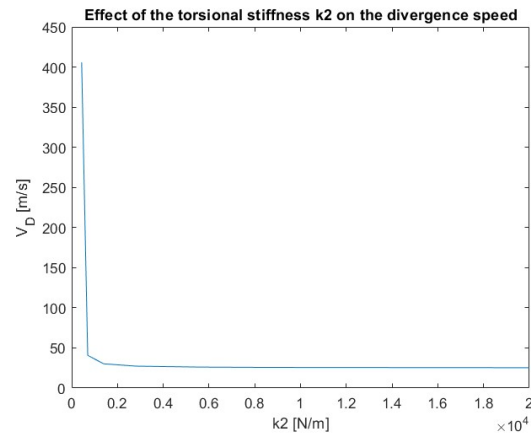


Figura 3.11: Andamento di V_D al variare di k_2

Si osserva come all'aumentare del valore di k_2 si ha un allontanamento del centro di taglio con conseguente diminuzione della velocità di divergenza. Per il caso $k_1 = 1300 \frac{N}{m}$, $k_2 = 435 \frac{N}{m}$ il valore della velocità di divergenza è molto alto poiché la x_0 si trova molto vicino al centro aerodinamico x_{ac} .

4.1 Esercizio a - Radici del p-method con aerodinamica stazionaria

4.1.1 Punto 1

Sotto l'assunzione di aerodinamica stazionaria si chiede di dimostrare che le equazioni del moto della sezione tipica sono le seguenti:

$$m \left(\ddot{h} + b x_\theta \ddot{\theta} \right) + k_h h = -L$$

$$I_P \ddot{\theta} + m b x_\theta \ddot{h} + k_\theta \theta = b \left(\frac{1}{2} + a \right) L$$

con $L = 2\pi\rho_\infty b U^2 \theta$ e $M_{AC} = 0$.

Per ricavare le equazioni del moto si utilizza l'equazione di Lagrange, è quindi necessario esplicitare le espressioni dell'energia potenziale e cinetica.

Per l'energia potenziale si ha (trascurando il contributo dato dal peso della sezione):

$$P = \frac{1}{2} k_h h^2 + \frac{1}{2} k_\theta \theta^2$$

Per ricavare l'energia cinetica è necessario stabilire la velocità del punto C in funzione dei gradi di libertà che si hanno a disposizione (h, θ) .

La velocità indotta da θ ha due componenti:

1. verticale $V_\theta^v = V_\theta \cos \theta$;
2. orizzontale $V_\theta^o = V_\theta \sin \theta$.

Introducendo l'ipotesi di linearità e trascurando la componente orizzontale si trova un valore di V_θ pari a:

$$V_\theta = \dot{\theta} [(1+a)b - (1+e)b] = \dot{\theta} [(a-e)b] = -x_\theta b \dot{\theta}$$

La velocità indotta da h è semplicemente:

$$V_h = -\dot{h}$$

dove il segno negativo è dovuto al fatto che nella figura 4.1 h è diretto verso il basso.

La velocità del punto C sarà dunque:

$$V_C = V_h + V_\theta = -\dot{h} - x_\theta b \dot{\theta}$$

da cui si può ricavare l'energia cinetica.

$$E_K = \frac{1}{2} m V_C^2 + \frac{1}{2} I_C \dot{\theta}^2$$

Svolgendo i calcoli si arriva a:

$$E_K = \frac{1}{2} m \dot{h}^2 + m x_\theta b \dot{h} \dot{\theta} + \frac{1}{2} (m x_\theta^2 b^2 + I_C) \dot{\theta}^2$$

Sapendo che $I_P = m x_\theta^2 b^2 + I_C$ si ha:

$$E_K = \frac{1}{2} m \dot{h}^2 + m x_\theta b \dot{h} \dot{\theta} + \frac{1}{2} I_P \dot{\theta}^2$$

4.1.2 Punto 2

Si chiede di riscrivere le equazioni del moto come:

$$M\ddot{x} + (K - K_a)x = 0$$

con $x = (h, \theta)^T$.

Introducendo il modello di aerodinamica stazionaria all'interno delle equazioni del moto si ha:

$$m(\ddot{h} + bx_\theta\ddot{\theta}) + k_h h = -2\pi\rho_\infty bU^2\theta$$

$$I_P\ddot{\theta} + mbx_\theta\ddot{h} + k_\theta\theta = b\left(\frac{1}{2} + a\right)2\pi\rho_\infty bU^2\theta$$

Poiché tutto ciò che è a destra dell'uguale è moltiplicato per uno dei gradi di libertà si possono portare a sinistra trovando:

$$m(\ddot{h} + bx_\theta\ddot{\theta}) + k_h h + 2\pi\rho_\infty bU^2\theta = 0$$

$$I_P\ddot{\theta} + mbx_\theta\ddot{h} + k_\theta\theta - b\left(\frac{1}{2} + a\right)2\pi\rho_\infty bU^2\theta = 0$$

Scrivendole in forma matriciale si ha:

$$\begin{bmatrix} m & mbx_\theta \\ mbx_\theta & I_P \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{h} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_h & 2\pi\rho_\infty bU^2 \\ 0 & k_\theta - b\left(\frac{1}{2} + a\right)2\pi\rho_\infty bU^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

dove:

$$M = \begin{bmatrix} m & mbx_\theta \\ mbx_\theta & I_P \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} k_h & 0 \\ 0 & k_\theta \end{bmatrix}$$

$$K_a = \begin{bmatrix} 0 & -2\pi\rho_\infty bU^2 \\ 0 & b\left(\frac{1}{2} + a\right)2\pi\rho_\infty bU^2 \end{bmatrix}$$

4.1.3 Punto 3

Si chiede si assumere una soluzione esponenziale

$$h = \bar{h}e^{\lambda t}$$

$$\theta = \bar{\theta}e^{\lambda t}$$

e di riscrivere le equazioni del moto.

Si calcolano le derivate della soluzione esponenziale:

$$\dot{h} = \lambda\bar{h}e^{\lambda t}$$

$$\ddot{h} = \lambda^2\bar{h}e^{\lambda t}$$

$$\dot{\theta} = \lambda\bar{\theta}e^{\lambda t}$$

$$\ddot{\theta} = \lambda^2\bar{\theta}e^{\lambda t}$$

Seconda equazione

Si considera la seconda delle ultime due equazioni del Punto 3.

Per prima cosa si divide l'equazione per $e^{\lambda t}$ e per mU^2 :

$$\frac{\bar{h}\lambda^2 b x_\theta}{U^2} + \frac{\bar{\theta} I_P \lambda^2}{mU^2} + \frac{\bar{\theta} k_\theta}{mU^2} - \frac{\bar{\theta} b^2 \left(\frac{1}{2} + a\right) 2\pi\rho_\infty}{m} = 0$$

Raccogliendo $\frac{\bar{h}}{b}$ nel primo addendo e sostituendo $k_h = \omega_h^2 m$, $k_\theta = \omega_\theta^2 I_P$ si ha:

$$\frac{\bar{h}}{b} \frac{\lambda^2 b^2 x_\theta}{U^2} + \bar{\theta} \frac{I_P \lambda^2}{mU^2} + \bar{\theta} \frac{\omega_\theta^2 I_P}{mU^2} - \bar{\theta} \frac{b^2 \left(\frac{1}{2} + a\right) 2\pi\rho_\infty}{m} = 0$$

Essendo $\frac{\lambda^2 b^2}{U^2} = p^2$, $\frac{I_P \lambda^2}{mU^2} = r^2 p^2$, $\frac{\omega_\theta^2 I_P}{mU^2} = \left(\frac{r}{V}\right)^2$ e $\frac{b^2 \pi \rho_\infty}{m} = \frac{1}{\mu}$ si ha:

$$\frac{\bar{h}}{b} x_\theta p^2 + \bar{\theta} r^2 p^2 + \bar{\theta} \left(\frac{r}{V}\right)^2 - \bar{\theta} \left(\frac{1}{2} + a\right) \frac{2}{\mu} = 0$$

Scrivendo le equazioni in forma matriciale si ottiene:

$$\begin{bmatrix} p^2 + \left(\frac{\sigma}{V}\right)^2 & x_\theta p^2 + \frac{2}{\mu} \\ x_\theta p^2 & r^2 p^2 + \left(\frac{r}{V}\right)^2 - \frac{2}{\mu} \left(a + \frac{1}{2}\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{h} \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

5.1 Esercizio a - Radici del p-method con aerodinamica stazionaria

5.1.1 Punto 1

Si chiede, sotto l'ipotesi di aerodinamica stazionaria ($L = 2\pi\rho_\infty bU^2\theta$, $M_{AC} = 0$), di calcolare gli autovalori e le frequenze del sistema per i seguenti due set di input:

1. $(a, e, c, f_h, f_\theta, m, I_P, \rho_\infty, U) = (-0.3, -0.1, 0.5, 3, 15, 5, 0.1, 0.788, 5)$;
2. $(a, e, c, f_h, f_\theta, m, I_P, \rho_\infty, U) = (-0.2, -0.1, 0.5, 3, 15, 5, 0.1, 0.788, 80)$.

Si riporta il sistema trovato nell'esercitazione precedente:

$$\begin{bmatrix} p^2 + \left(\frac{\sigma}{V}\right)^2 & x_\theta p^2 + \frac{2}{\mu} \\ x_\theta p^2 & r^2 p^2 + \left(\frac{r}{V}\right)^2 - \frac{2}{\mu} \left(a + \frac{1}{2}\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{h} \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Per il calcolo degli autovalori si deve calcolare il determinante della matrice e porlo pari a zero. Si ha:

$$\det[-] = \left(p^2 + \left(\frac{\sigma}{V}\right)^2\right) \cdot \left(r^2 p^2 + \left(\frac{r}{V}\right)^2 - \frac{2}{\mu} \left(a + \frac{1}{2}\right)\right) - \left(x_\theta p^2 + \frac{2}{\mu}\right) \cdot (x_\theta p^2) = 0$$

Svolgendo i calcoli si trova:

$$r^2 p^4 + \left(\frac{r}{V}\right)^2 p^2 - \frac{2}{\mu} \left(a + \frac{1}{2}\right) p^2 + r^2 p^2 \left(\frac{\sigma}{V}\right)^2 + \left(\frac{r}{V}\right)^2 \left(\frac{\sigma}{V}\right)^2 - \frac{2}{\mu} \left(a + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{\sigma}{V}\right)^2 - x_\theta^2 p^4 - \frac{2}{\mu} x_\theta p^2 = 0$$

Raccogliendo:

$$(r^2 - x_\theta^2) p^4 + \left(\left(\frac{r}{V}\right)^2 - \frac{2}{\mu} \left(a + \frac{1}{2}\right) + r^2 \left(\frac{\sigma}{V}\right)^2 - \frac{2}{\mu} x_\theta\right) p^2 + \left(\left(\frac{r}{V}\right)^2 \left(\frac{\sigma}{V}\right)^2 - \frac{2}{\mu} \left(a + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{\sigma}{V}\right)^2\right) = 0$$

Si introducono i termini A, B e C per alleggerire la notazione:

$$A = (r^2 - x_\theta^2)$$

$$B = \left(\left(\frac{r}{V}\right)^2 - \frac{2}{\mu} \left(a + \frac{1}{2}\right) + r^2 \left(\frac{\sigma}{V}\right)^2 - \frac{2}{\mu} x_\theta\right)$$

$$C = \left(\left(\frac{r}{V}\right)^2 \left(\frac{\sigma}{V}\right)^2 - \frac{2}{\mu} \left(a + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{\sigma}{V}\right)^2\right)$$

È possibile quindi scrivere l'equazione nel seguente modo:

$$Ap^4 + Bp^2 + C = 0$$

Le soluzioni dell'equazione biquadratica sono quindi:

$$p_{1,2,3,4} = \pm \sqrt{\frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}}$$

Caso $(a, e, c, f_h, f_\theta, m, I_P, \rho_\infty, U) = (-0.3, -0.1, 0.5, 3, 15, 5, 0.1, 0.788, 5)$

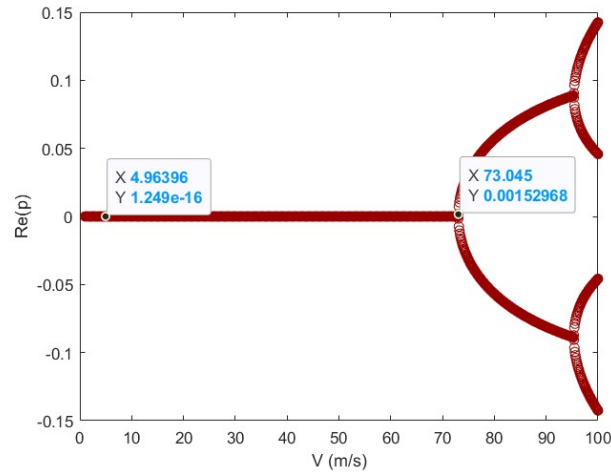


Figura 5.2: Grafico parte reale autovalore al variare della velocità

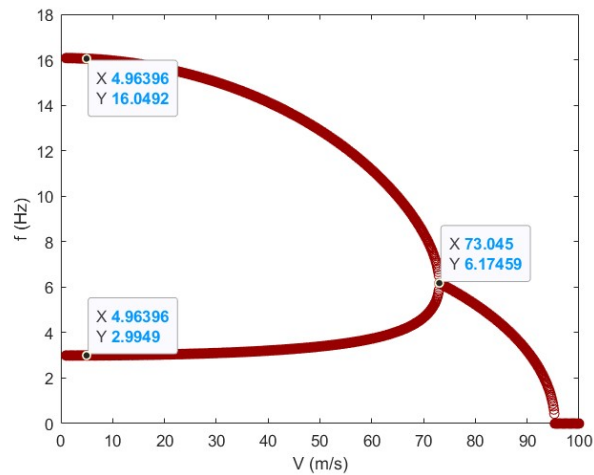


Figura 5.3: Grafico frequenza al variare della velocità

I risultati che si ottengono dalle figure 5.2 e 5.3 confermano i risultati ottenuti precedentemente. La velocità di flutter è individuata dall'ascissa in cui la parte reale passa da un valore nullo ad un valore maggiore di zero ed al tempo stesso la frequenza è diversa da zero. Si ha quindi:

$$V_{flutter} \approx 73 \frac{m}{s}$$

$$f_{flutter} \approx 6.17 Hz$$

5.1.3 Punto 3

Si chiede di verificare che la velocità di flutter sia corretta attraverso la risposta nel tempo utilizzando MATLAB.

Si analizzerà prima una velocità leggermente superiore alla velocità di flutter quindi ci si aspetta che entrambi i gradi di libertà divergano essendo le equazioni accoppiate, poi una velocità leggermente inferiore alla velocità di flutter e quindi ci si aspetta un andamento convergente.

Caso $(a, e, c, f_h, f_\theta, m, I_P, \rho_\infty, U) = (-0.3, -0.1, 0.5, 3, 15, 5, 0.1, 0.788, 5)$

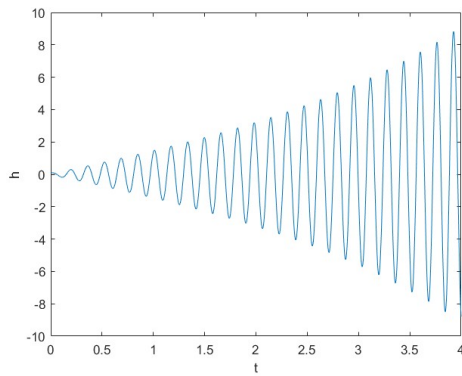


Figura 5.6: Andamento di h nel tempo

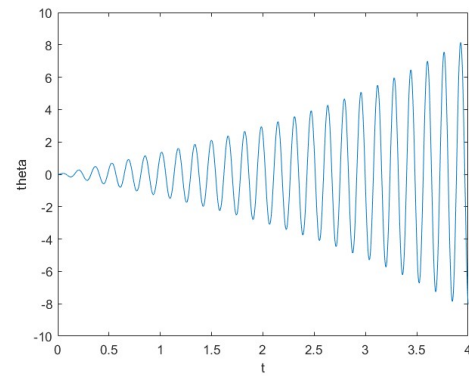


Figura 5.7: Andamento di θ nel tempo

Dalle figure 5.6 e 5.7 si nota come prendendo come velocità di flutter $V_{flutter} = 73.045 \frac{m}{s}$ entrambi gli andamenti siano divergenti.

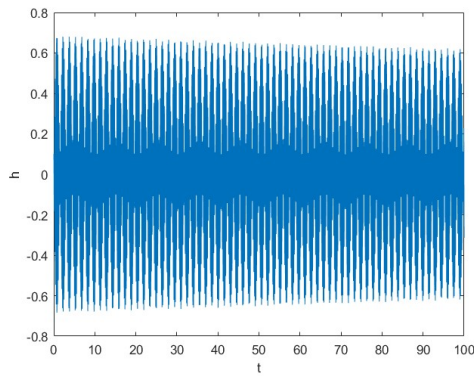


Figura 5.8: Andamento di h nel tempo

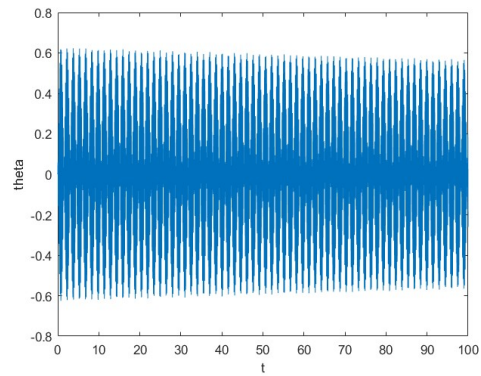


Figura 5.9: Andamento di θ nel tempo

Dalle figure 5.8 e 5.9 si nota come prendendo come velocità di flutter $V_{flutter} = 72.9459 \frac{m}{s}$ entrambi gli andamenti siano convergenti.

La velocità di flutter trovata precedentemente è stata quindi verificata.

$$I_P \ddot{\theta} + m b x_\theta \ddot{h} + k_\theta \theta = b \left(\frac{1}{2} + a \right) L$$

Si assume la seguente portanza:

$$L = 2\pi\rho_\infty b U \left[U\theta + \dot{h} - b \left(\frac{1}{2} + a \right) \dot{\theta} \right]$$

5.2.1 Punto 1

Si chiede di riscrivere le equazioni del moto come:

$$M\ddot{x} - C_a\dot{x} + (K - K_a)x = 0$$

dove $x = (h, \theta)^T$.

Per prima cosa si sostituisce l'espressione di L all'interno delle equazioni del moto:

$$\begin{aligned} m \left(\ddot{h} + b x_\theta \ddot{\theta} \right) + k_h h &= -2\pi\rho_\infty b U \left[U\theta + \dot{h} - b \left(\frac{1}{2} + a \right) \dot{\theta} \right] \\ I_P \ddot{\theta} + m b x_\theta \ddot{h} + k_\theta \theta &= \left(\frac{1}{2} + a \right) 2\pi\rho_\infty b^2 U \left[U\theta + \dot{h} - b \left(\frac{1}{2} + a \right) \dot{\theta} \right] \end{aligned}$$

È possibile a questo punto, portando tutti i termini alla sinistra dell'uguale, scrivere le equazioni in forma matriciale.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} m & m b x_\theta \\ m b x_\theta & I_P \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{h} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} -2\pi\rho_\infty U b & 2\pi\rho_\infty U b^2 \left(\frac{1}{2} + a \right) \\ 2\pi\rho_\infty U b^2 \left(\frac{1}{2} + a \right) & -2\pi\rho_\infty U b^3 \left(\frac{1}{2} + a \right)^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{h} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} k_h & 2\pi\rho_\infty U^2 b \\ 0 & k_\theta - 2\pi\rho_\infty U^2 b^2 \left(\frac{1}{2} + a \right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h \\ \theta \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

dove:

$$\begin{aligned} M &= \begin{bmatrix} m & m b x_\theta \\ m b x_\theta & I_P \end{bmatrix} \\ C_a &= \begin{bmatrix} -2\pi\rho_\infty U b & 2\pi\rho_\infty U b^2 \left(\frac{1}{2} + a \right) \\ 2\pi\rho_\infty U b^2 \left(\frac{1}{2} + a \right) & -2\pi\rho_\infty U b^3 \left(\frac{1}{2} + a \right)^2 \end{bmatrix} \\ K &= \begin{bmatrix} k_h & 0 \\ 0 & k_\theta \end{bmatrix} \\ K_a &= \begin{bmatrix} 0 & -2\pi\rho_\infty U^2 b \\ 0 & 2\pi\rho_\infty U^2 b^2 \left(\frac{1}{2} + a \right) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

5.2.2 Punto 2

Si chiede di calcolare gli autovalori e le frequenze del sistema per $(a, e, c, f_h, f_\theta, m, I_P, \rho_\infty, U) = (-0.3, -0.1, 0.5, 3, 15, 5, 0.1, 0.788, 30)$.

Si assume la soluzione esponenziale:

$$\begin{aligned} h &= \bar{h} e^{\lambda t} \\ \theta &= \bar{\theta} e^{\lambda t} \end{aligned}$$

Seconda equazione

Per prima cosa si divide l'equazione per $e^{\lambda t}$ e per mU^2 :

$$\frac{I_P \lambda^2 \bar{\theta}}{mU^2} + \frac{bx_\theta \lambda^2 \bar{h}}{U^2} + \frac{k_\theta \bar{\theta}}{mU^2} - \frac{\left(\frac{1}{2} + a\right) 2\pi\rho_\infty b^2 \bar{\theta}}{m} - \frac{\left(\frac{1}{2} + a\right) 2\pi\rho_\infty b^2 \lambda \bar{h}}{mU} + \frac{\left(\frac{1}{2} + a\right)^2 2\pi\rho_\infty b^3 \lambda \bar{\theta}}{mU} = 0$$

Raccogliendo $\frac{\bar{h}}{b}$ dove possibile e sostituendo $k_\theta = \omega_\theta^2 I_P$ si ha:

$$\frac{I_P \lambda^2}{mU^2} \bar{\theta} + \frac{b^2 x_\theta \lambda^2}{U^2} \frac{\bar{h}}{b} + \frac{\omega_\theta^2 I_P}{mU^2} \bar{\theta} - \frac{\left(\frac{1}{2} + a\right) 2\pi\rho_\infty b^2}{m} \bar{\theta} - \frac{\left(\frac{1}{2} + a\right) 2\pi\rho_\infty b^3 \lambda}{mU} \frac{\bar{h}}{b} + \frac{\left(\frac{1}{2} + a\right)^2 2\pi\rho_\infty b^3 \lambda}{mU} \bar{\theta} = 0$$

Sostituendo le quantità adimensionali si ottiene:

$$r^2 p^2 \bar{\theta} + p^2 x_\theta \frac{\bar{h}}{b} + \left(\frac{r}{V}\right)^2 \bar{\theta} - \left(\frac{1}{2} + a\right) \frac{2}{\mu} \bar{\theta} - \left(\frac{1}{2} + a\right) \frac{2p}{\mu} \frac{\bar{h}}{b} + \left(\frac{1}{2} + a\right)^2 \frac{2p}{\mu} \bar{\theta} = 0$$

Scrivendo le equazioni in forma matriciale si ottiene:

$$\begin{bmatrix} p^2 + \left(\frac{\sigma}{V}\right)^2 + \frac{2p}{\mu} & p^2 x_\theta + \frac{2}{\mu} - \frac{2p}{\mu} \left(\frac{1}{2} + a\right) \\ p^2 x_\theta - \left(\frac{1}{2} + a\right) \frac{2p}{\mu} & r^2 p^2 + \left(\frac{r}{V}\right)^2 - \left(\frac{1}{2} + a\right) \frac{2}{\mu} + \left(\frac{1}{2} + a\right)^2 \frac{2p}{\mu} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\bar{h}}{b} \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Per il calcolo degli autovalori si deve calcolare il determinante della matrice e porlo pari a zero. Si ha:

$$\begin{aligned} \det[-] &= r^2 p^4 + \left(\frac{r}{V}\right)^2 p^2 - \left(\frac{1}{2} + a\right) \frac{2p^2}{\mu} + \left(\frac{1}{2} + a\right)^2 \frac{2p^3}{\mu} + r^2 p^2 \left(\frac{\sigma}{V}\right)^2 + \frac{(r\sigma)^2}{V^4} + \\ &- \left(\frac{1}{2} + a\right) \frac{2}{\mu} \left(\frac{\sigma}{V}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} + a\right)^2 \frac{2p}{\mu} \left(\frac{\sigma}{V}\right)^2 + \frac{2r^2 p^3}{\mu} + \left(\frac{r}{V}\right)^2 \frac{2p}{\mu} - \left(\frac{1}{2} + a\right) \frac{4p}{\mu^2} + \\ &+ \left(\frac{1}{2} + a\right)^2 \left(\frac{2p}{\mu}\right)^2 - (p^2 x_\theta)^2 + \left(\frac{1}{2} + a\right) \frac{2p^3}{\mu} x_\theta - p^2 x_\theta \frac{2}{\mu} + \left(\frac{1}{2} + a\right) \frac{4p}{\mu^2} + \\ &+ x_\theta \frac{2p^3}{\mu} \left(\frac{1}{2} + a\right) - \left(\frac{1}{2} + a\right)^2 \left(\frac{2p}{\mu}\right)^2 = 0 \end{aligned}$$

Si raccolgono i termini in p^4 , p^3 , p^2 e p :

$$\begin{aligned} &p^4 (r^2 - x_\theta^2) + p^3 \left[\left(\frac{1}{2} + a\right)^2 \frac{2}{\mu} + \frac{2r^2}{\mu} + \left(\frac{1}{2} + a\right) \frac{4x_\theta}{\mu} \right] + \\ &+ p^2 \left[\left(\frac{r}{V}\right)^2 - \left(\frac{1}{2} + a\right) \frac{2}{\mu} + r^2 \left(\frac{\sigma}{V}\right)^2 - x_\theta \frac{2}{\mu} \right] + p \left[\left(\frac{1}{2} + a\right)^2 \frac{2}{\mu} \left(\frac{\sigma}{V}\right)^2 + \left(\frac{r}{V}\right)^2 \frac{2}{\mu} \right] + \\ &\frac{(r\sigma)^2}{V^4} - \left(\frac{1}{2} + a\right) \frac{2}{\mu} \left(\frac{\sigma}{V}\right)^2 = 0 \end{aligned}$$

Si introducono i termini A, B, C, D ed E per alleggerire la notazione:

$$A = (r^2 - x_\theta^2)$$

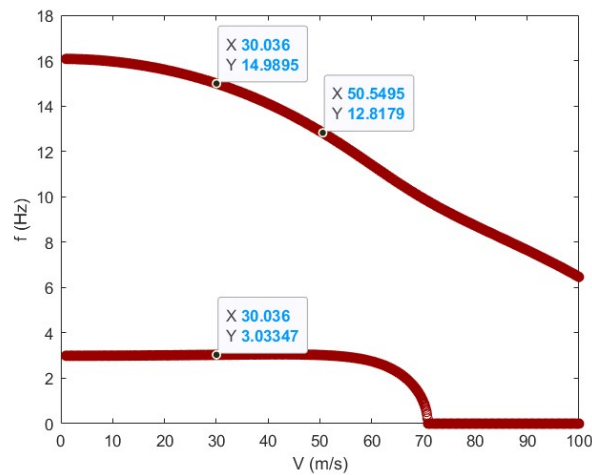


Figura 5.15: Grafico frequenza al variare della velocità

I risultati che si ottengono dalle figure 5.14 e 5.15 confermano i risultati ottenuti precedentemente. La velocità di flutter è individuata dall'ascissa in cui la parte reale di una coppia di autovalori passa da un valore negativo ad un valore positivo ed al tempo stesso la frequenza è diversa da zero. La frequenza di flutter è quella associata all'autovalore che ha parte reale circa zero. Si ha quindi:

$$V_{flutter} \approx 50.54 \frac{m}{s}$$

$$f_{flutter} \approx 12.82 Hz$$

5.2.4 Punto 4

Si chiede di verificare che la velocità di flutter sia corretta attraverso la risposta nel tempo utilizzando MATLAB.

Come per l'esercizio precedente si prende sia una velocità leggermente superiore alla velocità di flutter sia una leggermente inferiore.

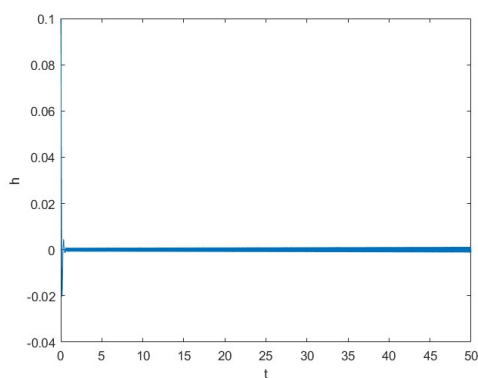


Figura 5.16: Andamento di h nel tempo

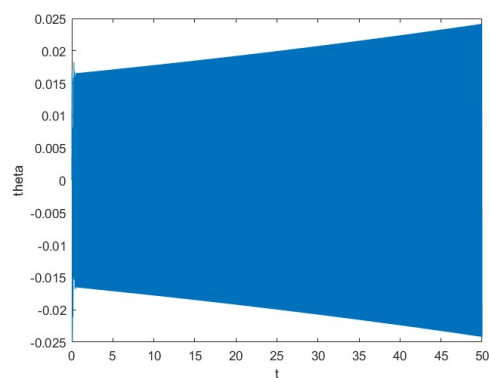


Figura 5.17: Andamento di θ nel tempo

Esercitazione 6 - Sistema aeroelastico 2 DOF con aerodinamica di Theodorsen e Flutter tramite il pk-Method

6.1 Esercizio a - Aerodinamica instazionaria con Theodorsen

Si considera la stessa sezione tipica analizzata nella precedente esercitazione di cui si riportano le caratteristiche:

- P è il centro di taglio. C è il centro di massa. Q è il centro aerodinamico. T è il punto al terzo quarto della corda. $x_\theta = e - a$. La corda, c , è $2b$.
- h e θ sono i gradi di libertà rispettivamente di traslazione verticale e beccheggio. k_h e k_θ sono i valori delle rigidezze delle molle. ω_h e ω_θ sono le frequenze naturali disaccoppiate a velocità dell'aria nulla. U è la velocità dell'aria.
- m è la massa della struttura. I_P è il momento d'inerzia rispetto a P . I_C è il momento d'inerzia rispetto a C , ossia $I_P = I_C + mb^2$.

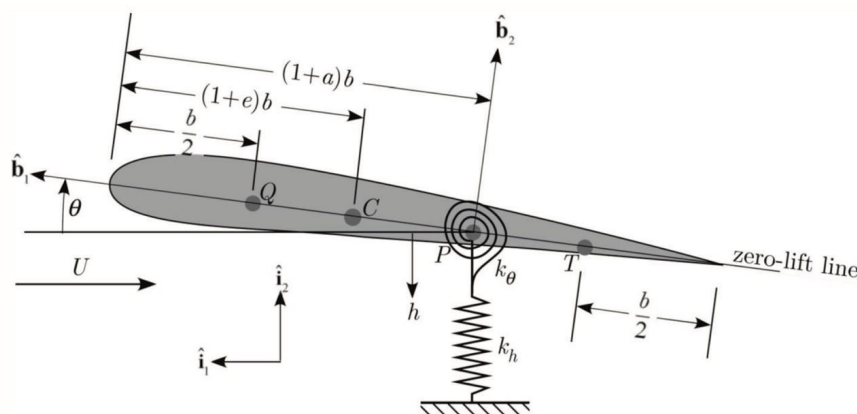


Figura 6.1: Sezione tipica

Riscrivendole in forma matriciale:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} m + \pi\rho_\infty b^2 & mbx_\theta - \pi\rho_\infty b^3 a \\ mbx_\theta - \left(\frac{1}{2} + a\right) \pi\rho_\infty b^3 + \frac{\pi\rho_\infty b^3}{2} & I_P + \left(\frac{1}{2} + a\right) \pi\rho_\infty b^4 a + \pi\rho_\infty b^4 \left(\frac{1}{8} - \frac{a}{2}\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{h} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \\ & - \begin{bmatrix} -2\pi\rho_\infty bUC(k) & -2\pi\rho_\infty UC(k) b^2 \left(\frac{1}{2} - a\right) - \pi\rho_\infty b^2 U \\ \left(\frac{1}{2} + a\right) 2\pi\rho_\infty b^2 UC(k) & \left(\frac{1}{2} + a\right) 2\pi\rho_\infty b^3 UC(k) \left(\frac{1}{2} - a\right) + \left(\frac{1}{2} + a\right) \pi\rho_\infty b^3 U - \pi\rho_\infty b^3 U \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{h} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} + \\ & + \begin{bmatrix} k_h & 2\pi\rho_\infty bC(k) U^2 \\ 0 & k_\theta - \left(\frac{1}{2} + a\right) 2\pi\rho_\infty b^2 C(k) U^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

dove:

$$\begin{aligned} M &= \begin{bmatrix} m & mbx_\theta \\ mbx_\theta & I_P \end{bmatrix} \\ M_a &= \begin{bmatrix} -\pi\rho_\infty b^2 & \pi\rho_\infty b^3 a \\ \left(\frac{1}{2} + a\right) \pi\rho_\infty b^3 - \frac{\pi\rho_\infty b^3}{2} & -\left(\frac{1}{2} + a\right) \pi\rho_\infty b^4 a - \pi\rho_\infty b^4 \left(\frac{1}{8} - \frac{a}{2}\right) \end{bmatrix} \\ C_a &= \begin{bmatrix} -2\pi\rho_\infty bUC(k) & -2\pi\rho_\infty UC(k) b^2 \left(\frac{1}{2} - a\right) - \pi\rho_\infty b^2 U \\ \left(\frac{1}{2} + a\right) 2\pi\rho_\infty b^2 UC(k) & \left(\frac{1}{2} + a\right) 2\pi\rho_\infty b^3 UC(k) \left(\frac{1}{2} - a\right) + \left(\frac{1}{2} + a\right) \pi\rho_\infty b^3 U - \pi\rho_\infty b^3 U \end{bmatrix} \\ K &= \begin{bmatrix} k_h & 0 \\ 0 & k_\theta \end{bmatrix} \\ K_a &= \begin{bmatrix} 0 & -2\pi\rho_\infty bC(k) U^2 \\ 0 & \left(\frac{1}{2} + a\right) 2\pi\rho_\infty b^2 C(k) U^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

6.1.2 Punto 2

Si chiede di dimostrare che il determinante del pk-Method, utilizzando l'aerodinamica di Theodorsen, è il seguente:

$$\begin{vmatrix} p^2 + \left(\frac{\sigma}{V}\right)^2 - \frac{k^2}{\mu} + \frac{2ikC(k)}{\mu} & \frac{p^2 \mu x_\theta + k(i+ak) + (2+ik(1-2a))C(k)}{\mu} \\ \frac{p^2 \mu x_\theta + ak^2 - ik(1+2a)C(k)}{\mu} & \frac{8\mu r^2 \left(p^2 + \frac{1}{V^2}\right) + 4i(1+2a)(2i-k(1-2a))C(k) - k(k-4i+8a(i+ak))}{8\mu} \end{vmatrix}$$

Prima equazione

Si considera la seguente equazione:

$$\begin{aligned} m\ddot{h} + mbx_\theta\ddot{\theta} + k_h h &= -2\pi\rho_\infty bC(k) U^2 \theta - 2\pi\rho_\infty bUC(k) \dot{h} - 2\pi\rho_\infty UC(k) b^2 \left(\frac{1}{2} - a\right) \dot{\theta} + \\ & - \pi\rho_\infty b^2 \ddot{h} - \pi\rho_\infty b^2 U \dot{\theta} + \pi\rho_\infty b^3 a \ddot{\theta} \end{aligned}$$

Il pk-method prevede di imporre una soluzione puramente armonica per i termini aerodinamici ($x = \bar{x}e^{i\omega t}$) mentre una soluzione del tipo $x = \bar{x}e^{\lambda t}$ per i termini strutturali. Per i termini strutturali si andranno quindi a sostituire le seguenti soluzioni:

$$\begin{aligned} h &= \bar{h}e^{\lambda t} \\ \dot{h} &= \lambda \bar{h}e^{\lambda t} \\ \ddot{h} &= \lambda^2 \bar{h}e^{\lambda t} \end{aligned}$$

$$\frac{2\pi\rho_{\infty}b^3UC(k)i\omega}{mU^2} = \frac{2\pi\rho_{\infty}b^3C(k)i\omega}{mU} = \frac{2C(k)ik}{\mu}$$

$$\frac{\pi\rho_{\infty}b^4\omega^2}{mU^2} = \frac{k^2}{\mu}$$

Analizzando i termini che moltiplicano $\bar{\theta}$ si ha:

$$\frac{mb^2x_{\theta}\lambda^2}{mU^2} = \frac{b^2x_{\theta}\lambda^2}{U^2} = p^2x_{\theta}$$

$$\frac{[2\pi\rho_{\infty}b^2U^2 + 2\pi\rho_{\infty}b^3U(\frac{1}{2} - a)i\omega]C(k)}{mU^2} = \frac{(2 + ik(1 - 2a))C(k)}{\mu}$$

$$\frac{\pi\rho_{\infty}b^3Ui\omega + \pi\rho_{\infty}b^4a\omega^2}{mU^2} = \frac{ki + ak^2}{\mu} = \frac{k(1 + ak)}{\mu}$$

L'equazione si può quindi riscrivere nel seguente modo:

$$\frac{\bar{h}}{b} \left[p^2 + \left(\frac{\sigma}{V} \right)^2 + \frac{2C(k)ik}{\mu} - \frac{k^2}{\mu} \right] + \bar{\theta} \frac{p^2x_{\theta}\mu + (2 + ik(1 - 2a))C(k) + k(1 + ak)}{\mu} = 0$$

Seconda equazione

Si considera la seguente equazione:

$$I_P\ddot{\theta} + mbx_{\theta}\ddot{h} + k_{\theta}\theta = b \left(\frac{1}{2} + a \right) \left\{ 2\pi\rho_{\infty}bUC(k) \left[U\theta + \dot{h} + b \left(\frac{1}{2} - a \right) \dot{\theta} \right] + \pi\rho_{\infty}b^2 \left(\ddot{h} + U\dot{\theta} - ba\ddot{\theta} \right) \right\} +$$

$$-\pi\rho_{\infty}b^3 \left[\frac{\ddot{h}}{2} + U\dot{\theta} + b \left(\frac{1}{8} - \frac{a}{2} \right) \ddot{\theta} \right]$$

Come per la prima equazione si sostituiscono le seguenti soluzioni per i termini strutturali:

$$h = \bar{h}e^{\lambda t}$$

$$\dot{h} = \lambda\bar{h}e^{\lambda t}$$

$$\ddot{h} = \lambda^2\bar{h}e^{\lambda t}$$

$$\theta = \bar{\theta}e^{\lambda t}$$

$$\dot{\theta} = \lambda\bar{\theta}e^{\lambda t}$$

$$\ddot{\theta} = \lambda^2\bar{\theta}e^{\lambda t}$$

Mentre per i termini aerodinamici:

$$h = \bar{h}e^{i\omega t}$$

$$\dot{h} = i\omega\bar{h}e^{i\omega t}$$

$$\ddot{h} = -\omega^2\bar{h}e^{i\omega t}$$

$$\theta = \bar{\theta}e^{i\omega t}$$

$$\dot{\theta} = i\omega\bar{\theta}e^{i\omega t}$$

$$\ddot{\theta} = -\omega^2\bar{\theta}e^{i\omega t}$$

$$\frac{(\frac{1}{2} + a) 2\pi\rho_{\infty} b^3 U C(k) i\omega}{mU^2} = \frac{(\frac{1}{2} + a) 2\pi\rho_{\infty} b^3 C(k) i\omega}{mU} = \frac{ik(1+2a)C(k)}{\mu}$$

$$\frac{(\frac{1}{2} + a) \pi\rho_{\infty} b^4 \omega^2 - \frac{\pi\rho_{\infty} b^4 \omega^2}{2}}{mU^2} = \frac{a\pi\rho_{\infty} b^4 \omega^2}{mU^2} = \frac{ak^2}{\mu}$$

Analizzando i termini che moltiplicano $\bar{\theta}$ si ha:

$$\frac{I_P \lambda^2 + k_{\theta}}{mU^2} = \frac{I_P \lambda^2 + I_P \omega_{\theta}^2}{mU^2} = \frac{I_P}{mb^2} \left(\frac{\lambda^2 b^2}{U^2} + \frac{b^2 \omega_{\theta}^2}{U^2} \right) = r^2 \left(p^2 + \frac{1}{V^2} \right)$$

$$\frac{-(\frac{1}{2} + a) 2\pi\rho_{\infty} b^2 U^2 C(k) [1 + \frac{b}{U} (\frac{1}{2} - a) i\omega]}{mU^2} = \frac{-(\frac{1}{2} + a) 2\pi\rho_{\infty} b^2 C(k) [1 + (\frac{1}{2} - a) ik]}{m}$$

$$= \frac{(\frac{1}{2} + a) C(k) [-2 - (1 - 2a) ik]}{\mu} = \frac{\frac{1}{2} i (1 + 2a) C(k) [2i - (1 - 2a) k]}{\mu}$$

$$\frac{-(\frac{1}{2} + a) \pi\rho_{\infty} b^3 (Ui\omega + ba\omega^2) + \pi\rho_{\infty} b^3 [Ui\omega - b(\frac{1}{8} - \frac{a}{2}) \omega^2]}{mU^2} =$$

$$= \frac{\pi\rho_{\infty} b^3 \left[(-\frac{1}{2} - a) (Ui\omega + ba\omega^2) + Ui\omega - \frac{b\omega^2}{8} + \frac{ba\omega^2}{2} \right]}{mU^2} =$$

$$= \frac{b\omega \left[\frac{1}{2} Ui - aUi - ba^2\omega - \frac{b\omega}{8} \right]}{\mu U^2} = \frac{k}{\mu} \left[\frac{1}{2} i - ai - \frac{ba^2\omega}{U} - \frac{b\omega}{8U} \right] = -\frac{8k}{\mu} [k - 4i + 8a(i + ak)]$$

L'equazione si può quindi riscrivere nel seguente modo:

$$\frac{\bar{h} p^2 x_{\theta} \mu - ik(1+2a)C(k) + ak^2}{b} +$$

$$+ \bar{\theta} \frac{r^2 (p^2 + \frac{1}{V^2}) 8\mu + 4i(1+2a)C(k)[2i - (1-2a)k] - k[k - 4i + 8a(i + ak)]}{8\mu} = 0$$

Scrivendo le due equazioni adimensionali ricavate in forma matriciale si ottiene:

$$\begin{bmatrix} p^2 + \left(\frac{\sigma}{V}\right)^2 - \frac{k^2}{\mu} + \frac{2ikC(k)}{\mu} & \frac{p^2 \mu x_{\theta} + k(i+ak) + (2+ik(1-2a))C(k)}{\mu} \\ \frac{p^2 \mu x_{\theta} + ak^2 - ik(1+2a)C(k)}{\mu} & \frac{8\mu r^2 (p^2 + \frac{1}{V^2}) + 4i(1+2a)(2i - k(1-2a))C(k) - k(k - 4i + 8a(i + ak))}{8\mu} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\bar{h}}{\bar{\theta}} \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

6.1.3 Punto 3

Si chiede, utilizzando MATLAB, di confrontare le condizioni di flutter calcolate nell'esercizio b dell'esercitazione 5 con il modello utilizzato in questa esercitazione.

I dati da utilizzare sono i seguenti:

$$(a, e, c, f_h, f_{\theta}, m, I_P, \rho_{\infty}) = (-0.3, -0.1, 0.5, 3, 15, 5, 0.1, 0.788)$$

Dalla figura 6.3 si nota come la frequenza ridotta del flutter sia¹ $k \approx 0.177$ e quindi essendo $\omega = k \frac{U}{b}$ si ha:

$$\omega_{flutter} \approx 55.54 \frac{rad}{s} \rightarrow f_{flutter} = \frac{\omega_{flutter}}{2\pi} \approx 8.84 Hz$$

La frequenza di flutter risulta essere inferiore rispetto al caso quasi-stazionario ($12.82 Hz$). Il metodo quasi-stazionario risulta quindi essere più conservativo.

6.2 Esercizio b - Rateo di decadimento

Si chiede di dimostrare che l'autovalore adimensionale (p) può essere definito come:

$$p = \gamma k + ik$$

dove γ è il rateo di decadimento delle oscillazioni, ossia:

$$\gamma = \frac{1}{2\pi} \log \frac{X_{t+T}}{X_t}$$

Si esplicitano X_t e X_{t+T} :

$$\begin{aligned} X_t &= \bar{x} e^{\lambda_R t} \cos(\omega t + \phi) \\ X_{t+T} &= \bar{x} e^{\lambda_R (t+T)} \cos(\omega (t+T) + \phi) \end{aligned}$$

Si scrive il rapporto $\frac{X_{t+T}}{X_t}$:

$$\frac{X_{t+T}}{X_t} = \frac{\bar{x} e^{\lambda_R (t+T)} \cos(\omega (t+T) + \phi)}{\bar{x} e^{\lambda_R t} \cos(\omega t + \phi)} = e^{\lambda_R T} \frac{\cos(\omega (t+T) + \phi)}{\cos(\omega t + \phi)} = e^{\lambda_R T} \frac{\cos(\omega t + \omega T + \phi)}{\cos(\omega t + \phi)}$$

Essendo $T = \frac{2\pi}{\omega}$ si ha:

$$\frac{X_{t+T}}{X_t} = e^{\lambda_R T} \frac{\cos(\omega t + 2\pi + \phi)}{\cos(\omega t + \phi)}$$

Poiché $\cos(a) = \cos(a + 2\pi)$ allora:

$$\frac{X_{t+T}}{X_t} = e^{\lambda_R T}$$

Sostituendo all'interno della formula di γ :

$$\gamma = \frac{1}{2\pi} \log \frac{X_{t+T}}{X_t} = \frac{\lambda_R T}{2\pi} = \frac{\lambda_R}{\omega}$$

Sapendo che $p = \frac{\lambda b}{U}$ si esplicita λ :

$$p = \frac{b}{U} (\lambda_R + i\omega) = \frac{b}{U} \lambda_R + i \frac{\omega b}{U} = \frac{b\omega}{U} \lambda_R + i \frac{\omega b}{U} = \gamma k + ik$$

¹tramite il codice MATLAB fornito si è visto quale autovalore ha la parte reale prossima allo zero nella condizione di flutter

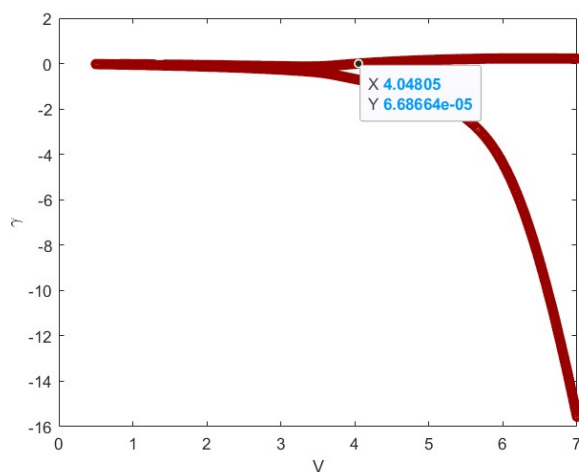


Figura 6.5: Andamento di γ al variare della velocità per $\mu = 40$

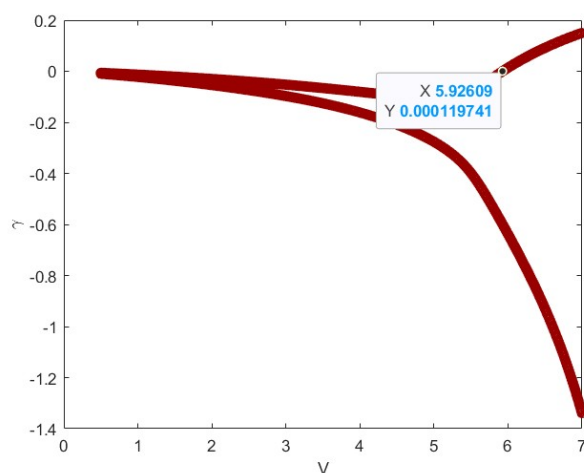


Figura 6.6: Andamento di γ al variare della velocità per $\mu = 90$

Dai grafici sopra riportati si deduce che un aumento di μ comporta un aumento di velocità di flutter. Ciò significa che un aumento di massa o una diminuzione di quota fanno sì che la velocità di flutter aumenti.

6.3.2 Punto 2

Si chiede di valutare l'influenza di σ .
Si utilizzano i seguenti dati:

- $\mu = 10$;
- $r = 0.5$;

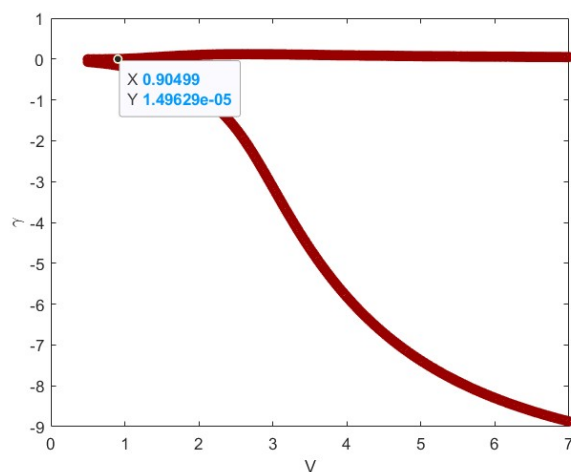


Figura 6.9: Andamento di γ al variare della velocità per $\sigma = 0.9$

Dai grafici sopra riportati si deduce che un aumento di σ comporta una diminuzione di velocità di flutter. Ciò significa che la struttura tende ad andare in instabilità prima quando le frequenze flessionali e torsionali si avvicinano.

6.3.3 Punto 3

Si chiede di valutare l'influenza della posizione del centro di massa.

Si utilizzano i seguenti dati:

- $\mu = 10$;
- $\sigma = \frac{1}{3}$;
- $r = 0.5$;
- $a = 0.0$;
- $e = [-0.15, 0, 0.15]$.

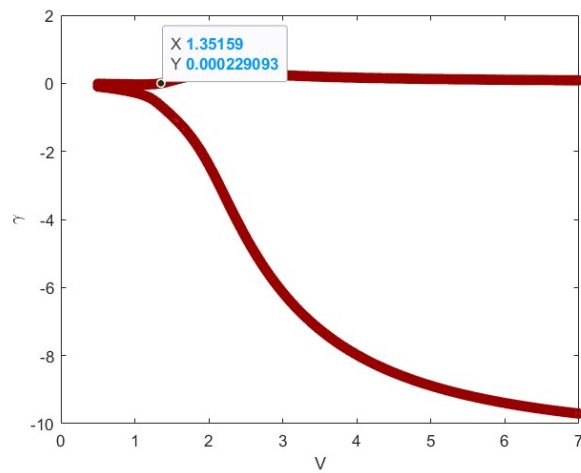


Figura 6.12: Andamento di γ al variare della velocità per $e = 0.15$

Avendo fissato l'asse elastico a metà della corda si vede come lo spostamento del centro di massa da una zona anteriore al centro di taglio ad una zona posteriore comporti una diminuzione della velocità di flutter.

7.1 Esercizio a - Analisi statica e dinamica di un'ala in materiale isotropo

Si considera un materiale isotropo con le seguenti proprietà:

- $E = 73.8 GPa$;
- $\nu = 0.33$;
- $\rho = 2768 \frac{kg}{m^3}$.

Si usano 10 elementi B4 e si imposta un modello di Taylor del quarto ordine (TE4).

7.1.1 Punto 1

Si considera un'ala di lunghezza $L = 0.305m$. Si chiede di valutare la risposta statica dell'ala caricata con una pressione uniforme di $1000 Pa$.

I dati forniti vengono inseriti all'interno del software *MUL2_PROGRAM* e si seleziona l'analisi 101 (analisi statica). Il risultato grafico¹, ottenuto tramite il software *ParaView*, è mostrato nella figura 7.2.

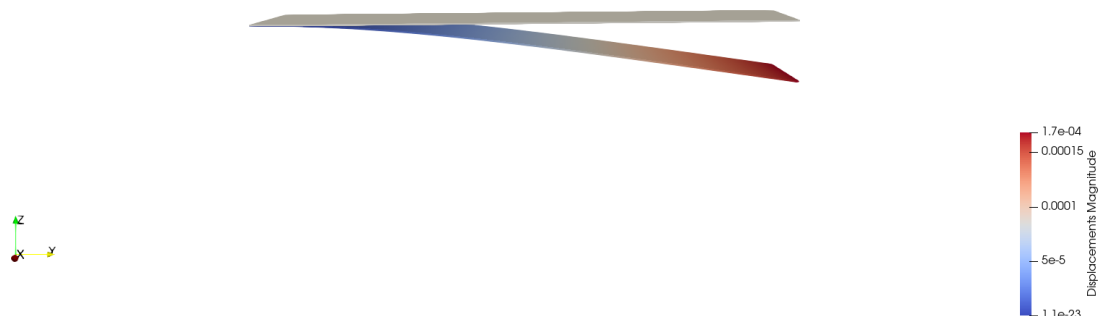


Figura 7.2: Risposta statica

Analizzando i dati presenti nel file "POST_POINT.dat" si ottengono i seguenti valori di spostamento verticale (direzione z) al tip:

Punto	Spostamento verticale [m]
Punto 1	-0.167795809E-03
Punto 2	-0.167828199E-03
Punto 3	-0.167795809E-03

Tabella 7.1: Spostamenti al tip alare

Gli spostamenti dei punti analizzati in direzione x e y risultano trascurabili.

¹Visti i piccoli spostamenti è stato necessario utilizzare un adeguato valore di fattore di scala

Si tratta del primo modo torsionale rispetto a y.
La sua frequenza naturale è di $f_n = 0.7321 \cdot 10^2 Hz$.

Quarto modo

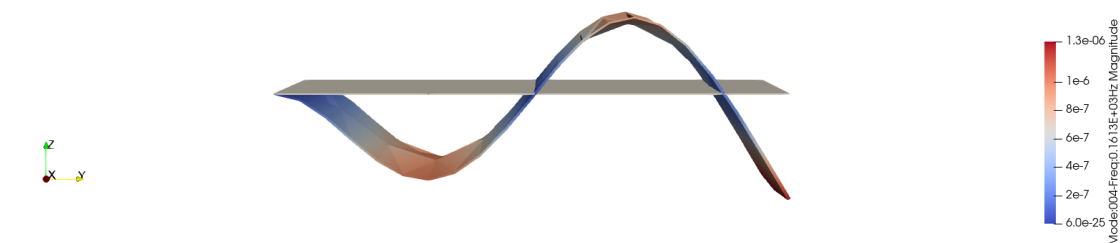


Figura 7.6: Quarto modo

Si tratta del terzo modo flessionale rispetto a x.
La sua frequenza naturale è di $f_n = 0.1613 \cdot 10^3 Hz$.

Quinto modo

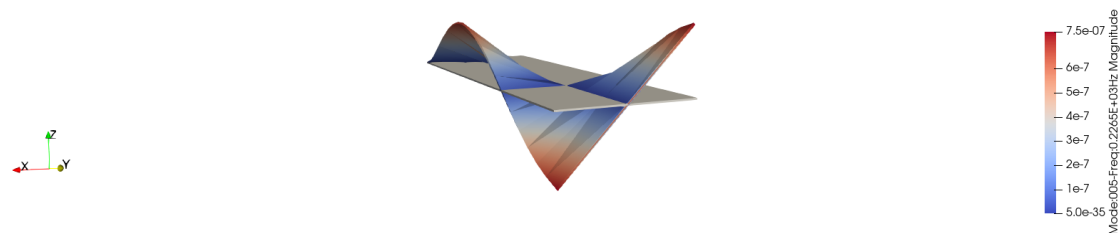


Figura 7.7: Quinto modo

Si tratta del secondo modo torsionale rispetto a y.
La sua frequenza naturale è di $f_n = 0.2265 \cdot 10^3 Hz$.

Sesto modo

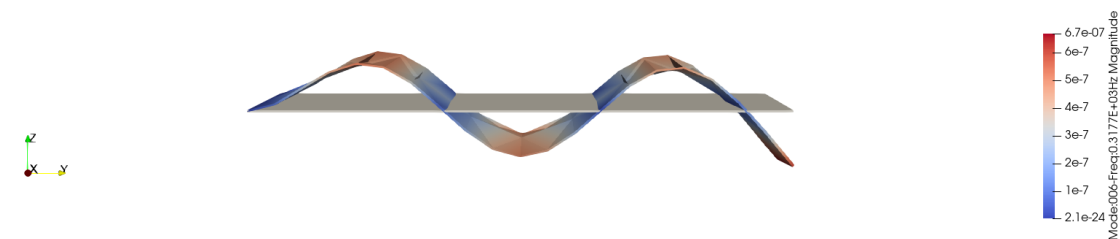


Figura 7.8: Sesto modo

Si tratta del quarto modo torsionale rispetto a y.
La sua frequenza naturale è di $f_n = 0.6014 \cdot 10^3 Hz$.

Decimo modo

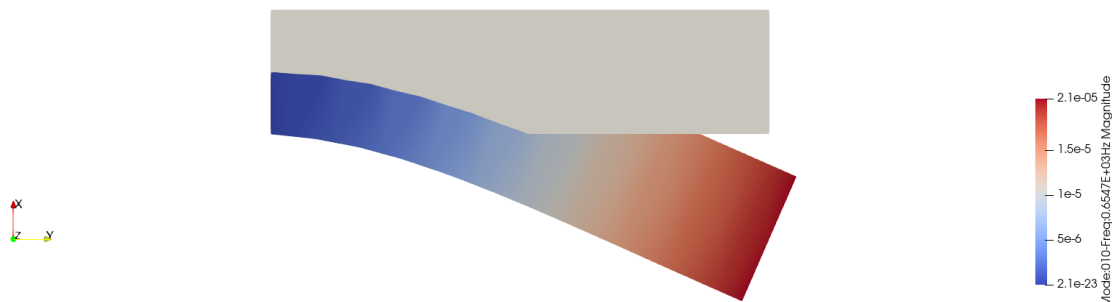


Figura 7.12: Decimo modo

Si tratta del primo modo flessionale rispetto a z.
La sua frequenza naturale è di $f_n = 0.6547 \cdot 10^3 Hz$.
Diagrammando le frequenze al variare nel modo si ottiene quanto mostrato nella figura 7.13.

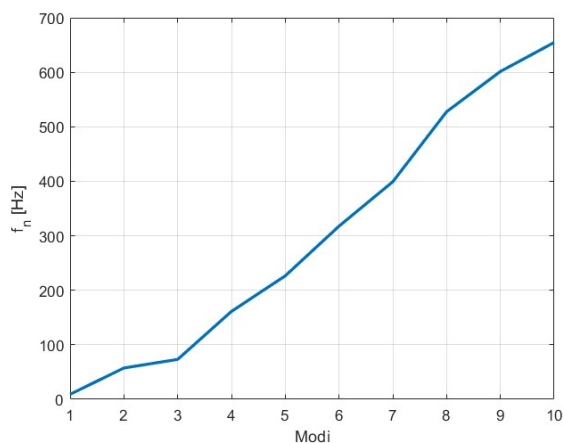


Figura 7.13: Andamento frequenze dei primi 10 modi

7.2 Esercizio b - Analisi statica e dinamica di un'ala in materiale composito

Si considera un materiale ortotropo con le seguenti proprietà:

- $E_L = 30.5 GPa$;
- $E_T = E_Z = 10 GPa$;

Laminazione -45°

Punto	Spostamento verticale [m]
Punto 1	-0.991437635E-03
Punto 2	-0.959330525E-03
Punto 3	-0.926745407E-03

Tabella 7.3: Spostamenti al tip alare

$$\theta = -0.04877^\circ$$

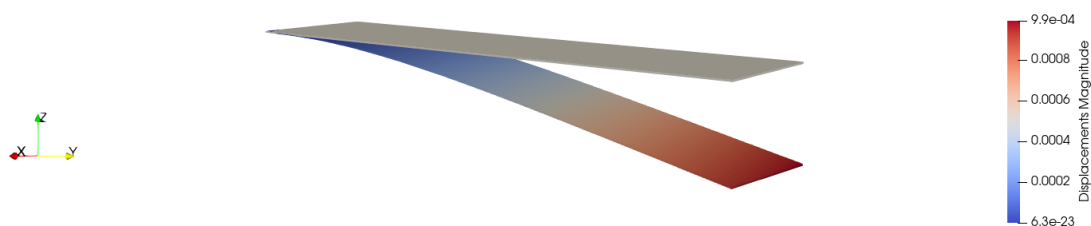


Figura 7.15: Risposta statica laminazione -45°

Laminazione 0°

Punto	Spostamento verticale [m]
Punto 1	-0.421362502E-03
Punto 2	-0.421432999E-03
Punto 3	-0.421362502E-03

Tabella 7.4: Spostamenti al tip alare

$$\theta = 0^\circ$$

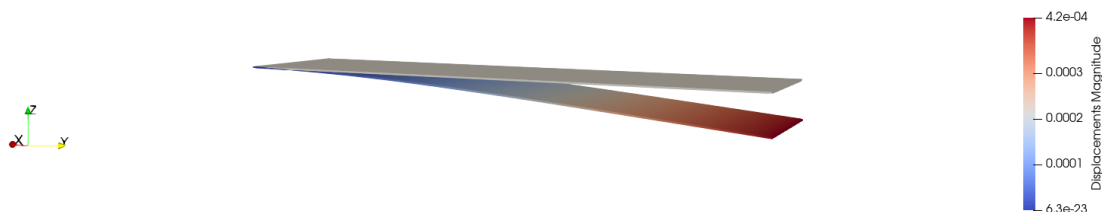


Figura 7.16: Risposta statica laminazione 0°

- nei casi con fibre a -90° , 0° e 90° si ha una flessione pura;
- con la laminazione a 0° si hanno gli spostamenti al tip inferiori;
- con laminazioni a $\pm 90^\circ$ si hanno gli spostamenti al tip maggiori;
- con laminazioni a $\pm 45^\circ$ si ha un accoppiamento tra flessione e torsione.

7.2.2 Punto 2

Si chiede di valutare le prime cinque frequenze naturali considerando i seguenti angoli di laminazione:

- 0° ;
- 45° ;
- 90° .

Laminazione 0°

- Primo modo

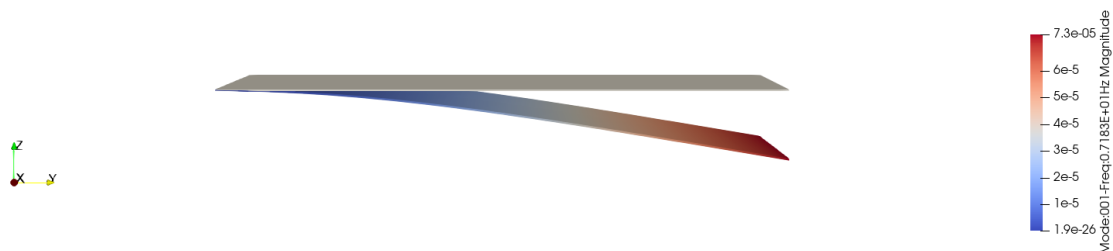


Figura 7.19: Primo modo

Si tratta del primo modo flessionale rispetto a x.
La sua frequenza naturale è di $f_n = 0.7183 \cdot 10^1 Hz$.

- Secondo modo

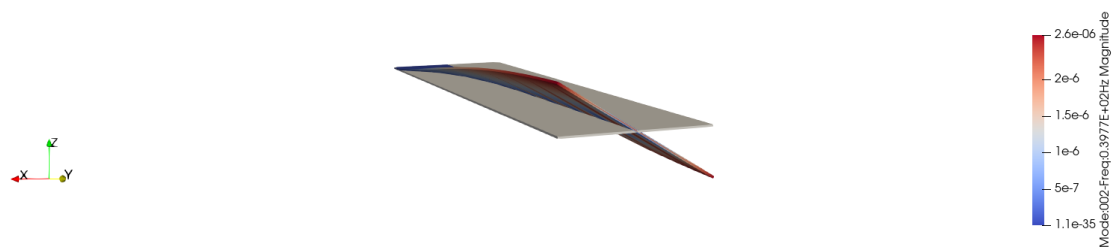


Figura 7.20: Secondo modo

Si tratta del primo modo torsionale rispetto a y.
La sua frequenza naturale è di $f_n = 0.3977 \cdot 10^2 Hz$.

Laminazione 45°

- Primo modo

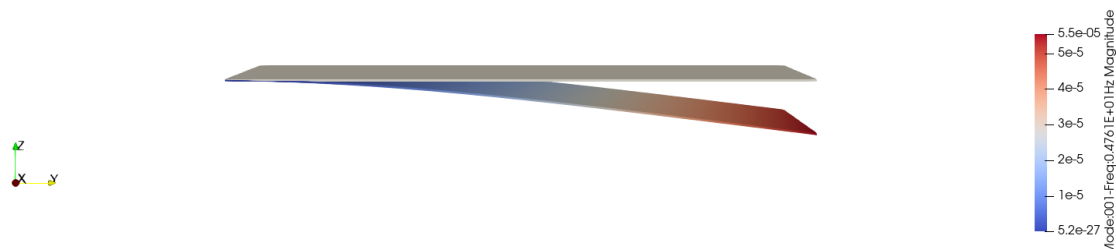


Figura 7.24: Primo modo

Si tratta del primo modo flessionale rispetto a x. È presente una piccola torsione dell'ala al tip. La sua frequenza naturale è di $f_n = 0.4761 \cdot 10^1 Hz$.

- Secondo modo

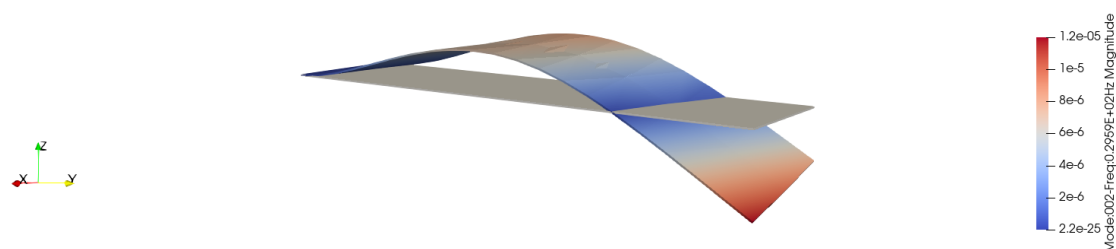


Figura 7.25: Secondo modo

Si tratta del secondo modo flessionale rispetto a x. Anche in questo caso è presente un certo grado di accoppiamento flessio-torsionale.

La sua frequenza naturale è di $f_n = 0.2959 \cdot 10^2 Hz$.

- Terzo modo

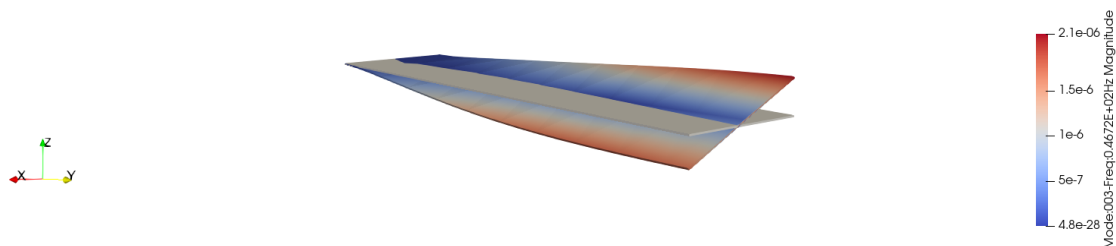


Figura 7.26: Terzo modo

Si tratta del primo modo torsionale rispetto a y. Presenza di accoppiamento flessio-torsionale. La sua frequenza naturale è di $f_n = 0.4672 \cdot 10^2 Hz$.

- Secondo modo

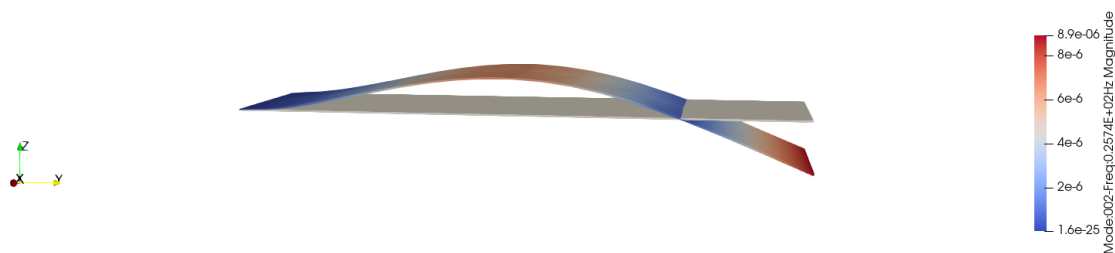


Figura 7.30: Secondo modo

Si tratta del secondo modo flessionale rispetto a x.
La sua frequenza naturale è di $f_n = 0.2574 \cdot 10^2 Hz$.

- Terzo modo

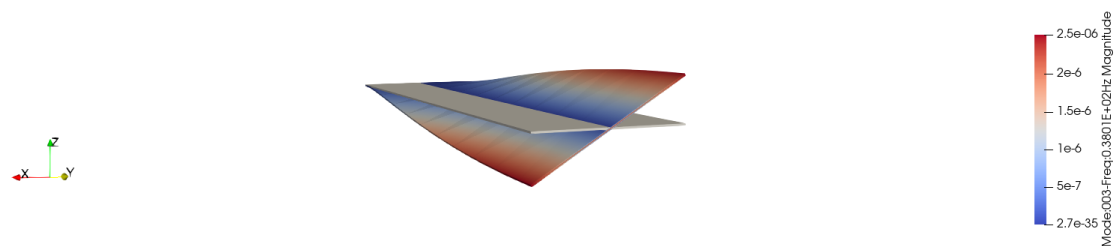


Figura 7.31: Terzo modo

Si tratta del primo modo torsionale rispetto a y.
La sua frequenza naturale è di $f_n = 0.3801 \cdot 10^2 Hz$.

- Quarto modo

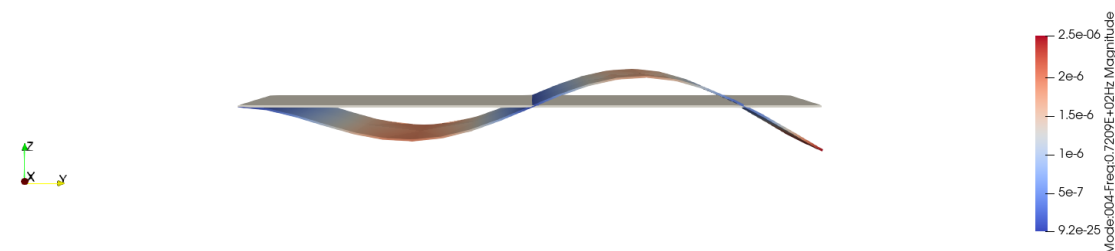


Figura 7.32: Quarto modo

Si tratta del terzo modo flessionale rispetto a x.
La sua frequenza naturale è di $f_n = 0.7209 \cdot 10^2 Hz$.

Esercitazione 8 - Risposte dinamiche nel dominio della frequenza e del tempo

I seguenti esempi numerici mirano a mostrare gli effetti di alcuni parametri sulle risposte di un velivolo rigido sottoposto a raffiche discrete e continue. Verranno utilizzati due modelli matematici per descrivere la cinematica dell'aeromobile, considerando prima solo il grado di libertà del moto verticale e poi sia il grado di libertà del moto verticale sia il grado di libertà del beccheggio.

8.1 Esercizio a - Analisi nel dominio del tempo

8.1.1 Punto 1

Partendo dalle equazioni del moto e degli incrementi di portanza dovuti alla raffica si chiede di trovare le espressioni delle derivate per il modello ad un grado di libertà (heave) e per il modello a due gradi di libertà (heave/pitch).

Modello ad un grado di libertà

Immaginando che il profilo alare venga investito da una raffica ed assumendo che la variazione di angolo di incidenza sia piccola ($\dot{z}_c, w_g \ll V$) si può scrivere:

$$\Delta\alpha_g = \frac{\dot{z}_c + w_g}{V}$$

L'aumento di angolo di incidenza fa sì che ci sia un aumento di portanza pari a:

$$\Delta L = \frac{1}{2}\rho V^2 S_w a_w \left(\frac{w_g + \dot{z}_c}{V} \right) = \frac{1}{2}\rho V S_w a_w (w_g + \dot{z}_c)$$

L'equazione di equilibrio sarà dunque:

$$\begin{aligned} m\ddot{z}_c = -\Delta L &\Rightarrow m\ddot{z}_c = -\frac{1}{2}\rho V S_w a_w (w_g + \dot{z}_c) \Rightarrow m\ddot{z}_c + \frac{1}{2}\rho V S_w a_w \dot{z}_c = -\frac{1}{2}\rho V S_w a_w w_g \Rightarrow \\ &\Rightarrow m\ddot{z}_c + z_{\dot{z}}\dot{z}_c = z_{gw}w_g \Rightarrow m\ddot{z}_c + \Delta L_z = -\Delta L_g \end{aligned}$$

Dove ΔL_z rappresenta la risposta del velivolo, ΔL_g è dovuto alla raffica e dove $z_{\dot{z}}$ e z_{gw} sono le derivate aerodinamiche che hanno la seguente struttura:

$$z_{\dot{z}} = \frac{1}{2}\rho V S_w a_w$$