



centroappunti.it

CORSO LUIGI EINAUDI, 55/B - TORINO

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 2591A

ANNO: 2025

A P P U N T I

STUDENTE: Andrea Forno

**MATERIA: Modellazione Numerica e Tecniche di Simulazione -
Prof. Brischetto**

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTI E NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.

Sommario

1. Strutture multistrato e accoppiamenti campi fisici	6
2. Materiali e laminazioni tipiche in campo aerospaziale.....	7
3. Modellazione 3D, 2D e 1D numerica e analitica: significato generale	12
4. Visione di insieme sulle teorie e i modelli	13
5. Legge di Hooke generalizzata, materiali anisotropi, ortotropi e isotropi. Equazioni costitutive 3D, passaggio da sistema di riferimento materiale a sistema di riferimento struttura.....	15
6. Effetti e complicazioni derivanti dalle strutture multistrato: anisotropia nel piano e trasversale, effetti zigzag, continuità interlaminare, C _{z0} requirements, condizioni di equilibrio e congruenza.....	20
7. Teorie classiche 2D, Love First Approximation Theories (LFATs), Love Second Approximation Theories (LSATs), assunzioni di Cauchy-Poisson-Kirchhoff-Love per shell sottili, Classical Lamination Theory (CLT) basata su ipotesi di Kirchhoff, First order Shear Deformation Theory (FSDT) basata su ipotesi di Reissner-Mindlin	22
7.2 Poisson Locking	24
8. Alcuni esempi di Higher Order Theories (HOTs), teoria del secondo ordine con inestensibilità trasversale, teoria del terzo ordine con inestensibilità trasversale (Vlasov-Reddy Theory).....	27
9. Equazioni di governo per CLT e FSDT	28
9.2 Considerazioni sul Fattore di Correzione al Taglio K	32
10. Modelli strutturali ESL e LW, teorie ZigZag physically o kinematic based.....	33
10.1 Layer-Wise Model	34
10.2 Come creare un modello strutturale 2D analitico	35
11. Teorie classiche e avanzate 1D, modelli trave e asta. Modello trave di Eulero-Bernoulli a confronto con modello trave di Timoshenko.	39
12. Equazioni costitutive 3D per problemi multicampo.....	41
13. Geometria, relazioni geometriche ed equazioni 3D di equilibrio per gusci in coordinate miste curvilinee ortogonali, casi particolari di gusci cilindrici e piastre.....	46
13.1 Geometria	46
13.2 Relazioni Geometriche	47
13.3 Equazioni di equilibrio	50
14. Sviluppo di un modello shell 3D esatto per analisi statiche e di vibrazioni libere. Considerazioni su alcuni risultati	52
14.1 Analisi Statica.....	58
14.2 Comparazione tra 3D esatto e 2D Fem.....	62
14.2.1 Piastra isotropa uno strato.....	62
14.2.2 Cilindro con due strati isotropi	63
14.2.3 Cilindro Sandwich con pelle isotropa (Al) e cuore in PVC.....	64
14.2.4 Cylindrical Bending di una piastra isotropa ad uno strato.....	65
14.2.5 Cylindrical bending in una piastra in composito 90°/0°/90°/0°	66
14.2.6 Cylindrical bending in un guscio in composito cilindrico 90°/0°/90°	66
14.2.7 Piastra isotropa con uno strato.....	67

14.2.8 Piastra a due strati isotropi.....	67
14.2.9 Cilindro isotropo con 3 strati.....	68
14.2.10 Pannello sandwich cilindrico.....	68
14.2.11 Guscio sferico con 3 strati	69
14.2.12 Pannelli FGM	69
14.2.13 Considerazioni	70
15. Modelli 2D agli spostamenti e modelli 2D misti: PVD vs. RMVT.....	70
16. Analisi igro-termo-elastiche di strutture multistrato, modelli 2D e 3D	72
16.1 Problema della conduzione di calore.....	76
16.3 Analogie e differenze dei modelli termo-elastici.....	78
16.4 Analisi Igro-Elastica di strutture multistrato.....	79
16.5 Esempi di soluzione.....	79
16.5.1 Cilindro isotropo con due strati in Al e Ti	80
16.5.2 Piastra mono-strato isotropa in titanio.....	81
16.5.3 Pannello sandwich cilindrico pelle di Al e dentro in PVC	81
16.5.4 Pannello sandwich cilindrico in FGM con $p=2$	82
16.5.5 Pannello sandwich cilindrico in FGM con $p=1$	83
16.6 Analisi accoppiate.....	84
16.6.1 Step per ottenere un modello termo-meccanico disaccoppiato/parzialmente accoppiato 2D.....	85
16.6.2 Step per ottenere un modello termo-meccanico accoppiato 2D	87
17. Principi dei lavori virtuali: spostamenti e lavori virtuali, operatore variazionale ed equazioni di Eulero, Principle of Virtual Displacements (PVD).	90
17.2 Lemma fondamentale del calcolo variazionale	92
17.3 Principio dei lavori virtuali.....	93
17.3.1 Principio di minimo dell'energia potenziale totale.....	95
17.4 Metodi variazionali.....	96
17.4.1 Metodo di Ritz.....	97
17.4.2 Metodo dei Residui Pesati	99
17.4.3 Metodo di Galerkin.....	100
17.4.4 Metodo dei minimi quadrati	101
17.4.5 Metodo di collocazione	101
17.4.6 Conclusioni.....	101
18. Equazioni dell'elasticità. Equazioni, teoremi e metodi di soluzione di sistemi discreti. Forma generale del principio di Hamilton	102
18.1 Vibrazioni longitudinali di un asta.....	105
18.2 Vibrazioni di una membrana.....	106
18.3 Corda vibrante	107
18.4 Onde elastiche 3D.....	107
18.4.1 Onde di espansione.....	107

18.4.2 Onde di distorsione	108
18.5 Equazioni, Teoremi e metodi di soluzione per sistemi discretizzati	108
18.5.1 Un esempio	110
18.6 Lavoro di deformazione e energia elastica	117
18.7 Principi variazionali	118
18.7.1 Principio di stazionarietà dell'energia potenziale totale	118
18.7.2 Principio di minimo dell'energia potenziale totale	119
18.7.3 Principio variazionale di Reissner	121
18.7.4 Principio variazionale di Hu-Washitsu	122
18.7.5 Principi variazionali duali	123

1. Strutture multistrato e accoppiamenti campi fisici

Piastre e Gusci multistrato sono strutture bidimensionali create sovrapponendo diversi strati finché non si arriva allo spessore desiderato. Essendo strutture 2D hanno la caratteristica che una delle dimensioni è più piccola rispetto alle altre due e di solito si tratta dello spessore.

Generalmente i materiali differiscono tra uno strato ed un altro delle piastre o dei gusci ma possono essere:

- Strati omogenei e isotropi
- strati di composito rinforzato con fibre
- Functionally Graded Materials, utilizzati come le strutture multistrato ma senza avere il problema del distacco degli strati vicini
- Configurazioni Sandwich con all'interno schiuma o honeycomb

I carichi a cui piastre e gusci possono essere sottoposti sono:

- Carichi meccanici statici e dinamici
- Carichi termici
- Carichi igroscopici quindi dettati dall'umidità
- Carichi elettrici
- Carichi magnetici

Il problema degli ultimi due carichi è che sono complicati da calcolare in quanto sono carichi di campo.

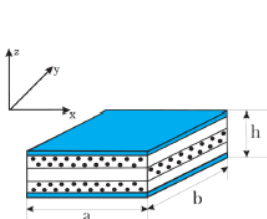
Le **Strutture Tipiche** che considereremo sono quelle che permettono una soluzione analitica quindi:

- Piastre multistrato rettilinee
- Pannelli multistrato sferici caratterizzati da avere 2 raggi di curvatura, R_α e R_β , diversi da 0 e uguali.
- Pannelli multistrato cilindrici caratterizzati da avere R_β infinito
- Cilindri multistrato caratterizzati da avere R_β infinito ed essere chiuso

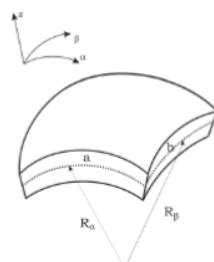
In particolare studiando il caso di pannello sferico, con delle approssimazioni, passeremo agli altri due.

In generale le curvature possono variare punto per punto quindi la soluzione non è studiabile in modo analitico se non in alcuni particolari casi come questi.

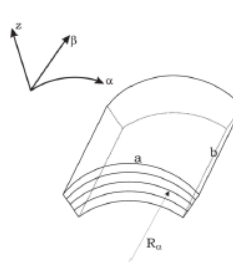
❖ Multilayered plates



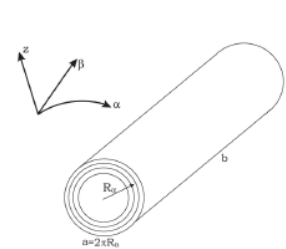
❖ Multilayered spherical panels



❖ Multilayered cylindrical panels



❖ Multilayered cylinders



In tutti i casi si può notare che il Sistema di Riferimento è ortogonale misto perché ho due coordinate curvilinee, α e β , e Z che è rettilineo.

I **materiali** che considereremo saranno differenti:

- Materiali omogenei rappresentati solitamente da Titanio e Alluminio
- Materiali compositi che sono divisibili in 3 categorie: Compositi Fibrosi, Compositi Particellari e Compositi Laminati
- Materiali Sandwich in cui ho due facce rigide che racchiudono un cuore meno rigido
- Functionally Graded Materials in cui una delle caratteristiche (Elasticità, Proprietà Termiche...) varia in una direzione in modo graduale grazie alla variazione di frazione in volume dei costituenti in

direzione delle direzione considerata (Es. Spessore). Sono molto usati perché permettono di eliminare gli stress dovuti a discontinuità.

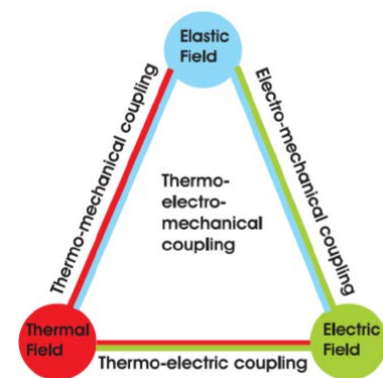
E' importante sapere che:

- Omogeneità: proprietà del punto quindi se vario il punto del materiale le proprietà non cambiano se è omogeneo e variano se è non omogeneo
- Isotropia: proprietà della direzione quindi avrò che se fissato un punto le caratteristiche non variano in qualsiasi direzione vado allora sarà isotropo e varrà che E e γ sono costanti e definiscono il materiale permettendo di trovare anche $G=E/2(1+\gamma)$. Se le proprietà variano con la direzione il materiale si dirà Ortotropo e in questo caso per calcolare E_{xy} e G_{xy} in tutte le direzioni dovremmo fare più prove sperimentali che sono invece molto più semplici per il materiale isotropo perché li basta fare una prova a trazione.

I modelli che considereremo terranno conto dei 4 campi più importanti ovvero quello Termico, Elastico, Igrometrico ed Elettrico ma ci saranno modelli che permetteranno di calcolarli come incognite del modello e altri che invece li imporranno dall'esterno.

Le possibili interazioni sono:

- Problema a 3 campi in cui ho accoppiamento Elettro-Termo-Meccanico
- Problema a 2 campi in cui ho accoppiamento Elettro-Meccanico, Termo-Meccanico o Termo-Elettrico
- Problema a 1 campo in cui non ho accoppiamenti ma sono un campo agente.



Un esempio sono i materiali **Piezoelettrici** che sono molto importanti perché si deformano se sottoposti ad un campo elettrico o generano un campo elettrico se è applicata una deformazione, grazie a questo possono essere usati sia come sensori che come attuatori

2. Materiali e laminazioni tipiche in campo aerospaziale

Leghe Metalliche sono create con l'unione di più elementi di cui almeno uno è un metallo. Esistono in generale leghe sostituzionali e interstiziali. Quando si fa una lega si nota che le caratteristiche fisiche del materiale come E e G non variano, quello che varia sono le caratteristiche meccaniche ovvero la rottura o la σ_{yld} .

Le più comuni sono quelle di Titanio e di Alluminio.

Le leghe di Alluminio costituiscono adesso circa il 60% dei materiali usati per la costruzione dei velivoli. A partire dall'alluminio si creano leghe per fusione o per lavoro a freddo che sono identificate con dei codici a seconda del tipo di elemento che viene messo all'interno.

Major Alloying Element	Wrought	Cast
None (99% + Aluminium)	1XXX	1XXX0
Copper	2XXX	2XXX0
Manganese	3XXX	
Silicon	4XXX	4XXX0
Magnesium	5XXX	5XXX0
Magnesium +Silicon	6XXX	6XXX0
Zinc	7XXX	7XXX0
Lithium	8XXX	
Unused		9XXX0

Oss. Quando scrivo $\sigma = C * \epsilon$ allora C è la **MATRICE DEI COEFFICIENTI** non è la **MATRICE DI RIGIDEZZA**.

Nel caso di compositi C è trovabile analiticamente solo per fibre a 0 e 90° altrimenti si trova numericamente.

Quando si scrivono le equazioni costitutive di una lamina dobbiamo considerare due ipotesi che vengono sempre fatte:

- La lamina è continua quindi non sono presenti vuoti all'interno
- La lamina è formata da materiali elastici

Grazie a queste ipotesi si può scrivere una legge di Hooke anche per i compositi.

Il più grande svantaggio nell'utilizzo dei compositi è che essi sono sottoposti ai problemi di Delaminazione e Debonding che sono metodi di rottura aggiuntivi da considerare.

La Legge di Hooke generalizzata per un materiale anisotropo è:

$$\sigma_i = C_{ij} \epsilon_j$$

dove gli stress, i coefficienti elastici e le deformazioni sono riferiti al sistema di riferimento x_1, x_2, x_3 che ha:

- x_1 parallelo alle fibre
- x_2 perpendicolare alle fibre nel piano
- x_3 perpendicolare alle fibre fuori dal piano

questo sistema di riferimento dovrà poi essere legato al sistema di riferimento generale della struttura per vedere l'effetto delle fibre.

Per un composito rinforzato con fibre possiamo scrivere la regola della miscela:

$$\begin{aligned} E_f &= \text{modulus of the fiber}, & E_m &= \text{modulus of the matrix}, \\ \nu_f &= \text{Poisson's ratio of the fiber}, & \nu_m &= \text{Poisson's ratio of the matrix}, \\ v_f &= \text{fiber volume fraction}, & v_m &= \text{matrix volume fraction}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_1 &= E_f v_f + E_m v_m, & \nu_{12} &= \nu_f v_f + \nu_m v_m, \\ E_2 &= \frac{E_f E_m}{E_f v_m + E_m v_f}, & G_{12} &= \frac{G_f G_m}{G_f v_m + G_m v_f}, \end{aligned}$$

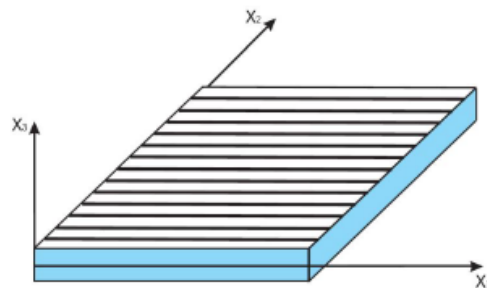
Questa permette di calcolare le grandezze che ci interessano.

Possiamo poi calcolare il modulo a taglio per la singola fibra o la matrice:

$$G_f = \frac{E_f}{2(1 + \nu_f)}, \quad G_m = \frac{E_m}{2(1 + \nu_m)}.$$

Se invece il materiale è Ortotropo, come detto precedentemente, dovremmo calcolare tutte le grandezze ovvero: $E_1, E_2, E_3, G_{12}, G_{13}, G_{23}, \nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}$ facendo 3 prove sperimentali a trazione e 3 a taglio.

Dalla tabella sottostante possiamo notare che molti dei compositi, che sono a partire dalla 4° riga in poi, sono ortotropi mentre i materiali puri possono essere considerati isotropi.



Le problematiche principali di questi tipi di materiali sono:

- Processi di produzione
- Modellizzazione del materiale
- Modellizzazione di strutture con all'interno questi materiali perché c'è il problema che la matrice C diventa funzione di Z .

Abbiamo visto che la caratterizzazione del materiale non è semplice. Per farla si possono usare diversi metodi:

- Regola della Miscela: è un'estensione della regola della miscela che conosciamo per i materiali compositi
- 3D phases micromechanical models
- Voronoi Cell Finite Element Method (VCFEM)

Ci sono anche metodi stocastici più complessi.

I **materiali Piezoelettrici** funzionano grazie all'effetto piezoelettrico che è in grado di convertire energia meccanica ed elettrica in modo lineare in entrambe le direzioni.

In particolare parleremo di Effetto Piezoelettrico Diretto quando il materiale genera corrente elettrica a causa dell'applicazione di uno stress, questo è molto utile per fare dei sensori.

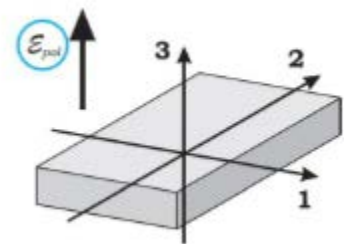
Parleremo di Effetto Piezoelettrico Inverso quando il materiale crea delle forze a causa della presenza di corrente elettrica, questo è molto utile per fare degli attuatori.

Le applicazioni sono molteplici:

- Smorzatore di vibrazioni in modo attivo usando i piezoelettrici sia come sensori per rilevarle che come attuatori per smorzarle.
- Adattamento della forma delle superfici aerodinamiche ovvero ali capaci di modificare la propria forma in funzione delle condizioni esterne per avere sempre la massima efficienza → UTOPIA
- Controllo attivo di fenomeni aeroelastici.
- Monitoraggio dello stato di salute del velivolo utilizzandoli come sensori per capire se una cricca si sta aprendo o meno o come attuatori per controllarla.

I materiali piezoelettrici devono essere prima attivati con un campo di polarizzazione, in base alla direzione di questo campo le caratteristiche dei materiali varieranno.

Noi faremo come esempio un materiale attivato in direzione 3 come in figura.



Per i materiali piezoelettrici ci sono poi coefficienti che legano il campo elettrico alla deformazione e alla tensione applicata come possiamo vedere in tabella:

piezoelectric coefficient	converse effect	direct effect
a	$\sigma = a^T \mathcal{D}$	$\mathcal{E} = a \epsilon$
d	$\epsilon = d^T \mathcal{E}$	$\mathcal{D} = d \sigma$
b	$\epsilon = b^T \mathcal{D}$	$\mathcal{E} = b \sigma$
e	$\sigma = e^T \mathcal{E}$	$\mathcal{D} = e \epsilon$

D = spostamento elettrico

Per quanto riguarda la polarizzazione in direzione 3 che abbiamo considerato la matrice d sarà:

$$d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{24} & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

I **problemi bidimensionali** sono tipici di strutture in cui una delle dimensioni ha meno importanza quindi piastre e gusci. In questo caso solitamente lo spessore ha meno importanza rispetto alle altre due direzioni nel piano ovvero x, y o α, β .

Questa approssimazione è tanto più vera tanto vale che $h \ll a, b$.

Abbiamo visto che il campo di spostamento in questo caso è:

$$\mathbf{u} = F_i(z) \mathbf{u}_i(x, y)$$

Se il pannello ha una curvatura in una direzione del piano o in due direzioni del piano si usa un sistema di riferimento ortogonale curvilineo e possiamo scrivere:

$$\mathbf{u} = F_i(z) \mathbf{u}_i(\alpha, \beta)$$

I **problemi unidimensionali** sono tipici di strutture come aste e travi dove due dimensioni, solitamente quelle della sezione, sono trascurabili rispetto alla lunghezza. Questa approssimazione è tanto più valida quanto $a, b \ll l$.

Il campo di spostamento può essere scritto come:

$$\mathbf{u} = F_i(x, y) \mathbf{u}_i(z)$$

A questo punto, indipendentemente dal tipo di struttura l'equazione deve essere risolta e nel farlo possiamo ottenere:

- Soluzione Esatta
- Soluzione Numerica con metodi agli elementi finiti (FEM) o il metodo delle differenze finite generalizzate (GDQM)

La Soluzione Esatta è valida solitamente solo sotto alcune ipotesi che riguardano:

- materiali: possono essere solo isotropi o ortotropi con angoli di 0° e 90° .
- geometrie: solo piastre e gusci che abbiamo visto prima.
- carichi: solitamente vengono considerati solo carichi armonici.
- condizioni al contorno: solitamente viene considerato solo il pannello semplicemente appoggiato.

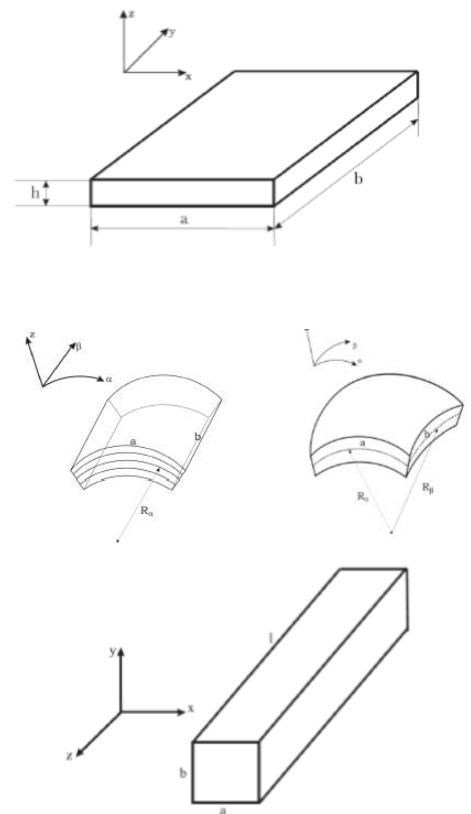
La Soluzione Numerica non presenta queste limitazioni ma ha il problema che darà un risultato approssimato e quindi accurato della soluzione esatta, inoltre può andare incontro a problemi di natura numerica.

Quello che viene fatto è quindi di utilizzare la Soluzione Numerica per la maggior parte delle applicazioni ingegneristiche ma validare il modello usato numericamente con la Soluzione Esatta.

4. Visione di insieme sulle teorie e i modelli

I modelli 2D o 3D che possiamo usare per piastre e gusci possono essere sviluppati come:

- **Modelli a Strato Unico Equivalente** (Equivalent Single Layer) in cui ho una piastra a N strati che sono condensati in un unico strato equivalente, avrò quindi un modello per l'intero multistrato e una rigidezza complessiva del sistema
- **Layer Wise Models** in cui per ogni strato scrivo una formulazione della piastra (ES Kirchhoff) e quindi ogni strato avrà la sua matrice di rigidezza. Il problema è che gli strati devono essere tra di loro continui e deve esserci congruenza e equilibrio all'interfaccia.



Negli **approcci asintotici** si definisce un parametro di perturbazione δ che di solito è il rapporto tra spessore e lunghezza caratteristica (h/a), le equazioni di governo 3D sono espanse in termini di δ . Per esempio le equazioni di equilibrio possono essere scritte:

$$\mathbf{E}_{\Sigma} \approx \mathbf{E}_{\Sigma}^1 \delta^{p_1} + \mathbf{E}_{\Sigma}^2 \delta^{p_2} + \dots + \mathbf{E}_{\Sigma}^N \delta^{p_N},$$

Dove le p sono in genere dei numeri reali.

Il vantaggio maggiore di questo approccio è che permette di fare un'approssimazione consistente perché tutti i termini hanno lo stesso ordine di grandezza siccome dipendono tutti da δ . Ottengo la soluzione 3D se δ tende a 0.

L'introduzione di approcci asintotici a strutture multistrato però introduce alcune difficoltà, per esempio per tenere conto dell'anisotropia dei materiali compositi sia nel piano che in direzione dello spessore dobbiamo introdurre alcuni parametri meccanici.

Gli **approcci assiomatici** sono quelli più usati e i più popolari per creare teorie 2D perché eliminano molte problematiche. In questi casi il campo di spostamenti o di tensioni possono essere scritti come:

$$f(\alpha, \beta, z) = f_1(\alpha, \beta)F_1(z) + f_2(\alpha, \beta)F_2(z) + \dots + f_N(\alpha, \beta)F_N(z)$$

In questo modo elimino la dipendenza da z perché la metto in F e avrò solo 2 incognite.

La generica funzione f può rappresentare:

- Il vettore degli spostamenti $\mathbf{u}=(u,v,w)$ nel caso della formulazione agli spostamenti
- Il vettore delle deformazioni ϵ nel caso della formulazione alla deformazione
- Il vettore degli stress σ nel caso della formulazione agli stress
- Sia \mathbf{u} che componenti di σ nel caso delle formulazioni miste

Possiamo introdurre diverse formulazioni variazionali in funzione della formulazione che scegliamo. Per esempio:

- La formulazione agli spostamenti è basata sul Principio degli Spostamenti Virtuali (PVD)
- Le formulazioni miste possono usare il Reissner's Mixed Variational Theorem (RMVT).

Nella prima formulazione alla fine ottengo:

$$[\mathbf{K}]\{\mathbf{u}\}=\{\mathbf{F}\}$$

Dove \mathbf{K} lo calcolo e \mathbf{F} lo so quindi l'unica incognita sono gli spostamenti \mathbf{u} .

Nella seconda formulazione (con il modello misto) ottengo:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{u\sigma} \\ \mathbf{K}_{\sigma u} & \mathbf{K}_{\sigma\sigma} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \sigma_N \end{pmatrix} = \mathbf{F}$$

Notiamo che in questo caso la matrice non è solo di rigidità perché il blocco \mathbf{K}_{uu} lega gli spostamenti ma i blocchi $\mathbf{K}_{u\sigma}$ e $\mathbf{K}_{\sigma u}$ legano spostamenti e tensioni.

5. Legge di Hooke generalizzata, materiali anisotropi, ortotropi e isotropi. Equazioni costitutive 3D, passaggio da sistema di riferimento materiale a sistema di riferimento struttura

La **legge di Hooke generalizzata** è un'equazione costitutiva che caratterizza il singolo materiale e la sua reazione ai carichi applicati.

Considerando la notazione matriciale l'equazione precedente può essere scritta come:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \sigma_1^0 \\ \sigma_2^0 \\ \sigma_3^0 \\ \sigma_4^0 \\ \sigma_5^0 \\ \sigma_6^0 \end{Bmatrix}$$

Come abbiamo già detto i termini misti (C_{ij}) sono uguali tra di loro perché stiamo considerando un materiale elastico quindi abbiamo 21 coefficienti di rigidezza indipendenti.

A questo punto consideriamo diversi materiali con piani di simmetria diversi.

I **materiali monoclini** fanno sì che i coefficienti elastici in un punto hanno lo stesso valore per ogni coppia di coordinate. A causa di questo abbiamo che: $C_{14} = 0$, $C_{15} = 0$, $C_{24} = 0$, $C_{25} = 0$, $C_{34} = 0$, $C_{35} = 0$, $C_{46} = 0$, $C_{56} = 0$.

Quindi i coefficienti C indipendenti diventano solo 13 e la matrice è:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \end{Bmatrix}$$

I **materiali ortotropi** hanno 3 piani di simmetria mutualmente ortogonali quindi il numero di coefficienti elastici indipendenti è 9, la matrice che consideriamo è.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \end{Bmatrix}$$

Un esempio di materiali ortotropo è il materiali composito. Notiamo che in questi tipi di materiali le componenti normali di tensione sono legati solo a deformazione in direzione normale e le componenti tangenziali di tensione sono legate solo a deformazioni tangenziali quindi non c'è nessuna componente mista.

Per caratterizzare il materiali dobbiamo conoscere il valore delle 9 costanti ingegneristiche che ottengo in genere con 3 prove a trazione e 3 prove a taglio, queste sono:

$$E_1, E_2, E_3, G_{23}, G_{13}, G_{12}, \nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23},$$

Se passo alla notazione a singolo indice posso scrivere la matrice T che mi fa passare dal materiale alla piastra come:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\phi & \sin^2\phi & 0 & 0 & 0 & -\sin 2\phi \\ \sin^2\phi & \cos^2\phi & 0 & 0 & 0 & \sin 2\phi \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ \sin\phi\cos\phi & -\sin\phi\cos\phi & 0 & 0 & 0 & \cos^2\phi - \sin^2\phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}$$

La matrice R che mi fa passare dalla piastra al materiale è invece:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\phi & \sin^2\phi & 0 & 0 & 0 & \sin 2\phi \\ \sin^2\phi & \cos^2\phi & 0 & 0 & 0 & -\sin 2\phi \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ -\sin\phi\cos\phi & \sin\phi\cos\phi & 0 & 0 & 0 & \cos^2\phi - \sin^2\phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}$$

In forma compatta posso scrivere il tutto come:

$$\{\sigma\}_p = [T]\{\sigma\}_m, \quad \{\sigma\}_m = [R]\{\sigma\}_p.$$

La stessa procedura per cambiare sistema di riferimento può essere applicata alle componenti di deformazione ma quello che otterrò sarà:

$$\{\epsilon\}_p = [R]^T\{\epsilon\}_m, \quad \{\epsilon\}_m = [T]^T\{\epsilon\}_p.$$

Possiamo definire la matrice Q di rigidezza in funzione della matrice T e C perché tutto è nello stesso sistema di riferimento:

$$[Q] = [T][C][T]^T$$

In caso di materiale Ortotropo le relazioni nel sistema di coordinate del problema sono:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & 0 & 0 & Q_{16} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{23} & 0 & 0 & Q_{26} \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} & 0 & 0 & Q_{36} \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & Q_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{45} & Q_{55} & 0 \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{36} & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

Notiamo che cambiando sistemi di riferimento nascono delle grandezze come Q_{16} , Q_{26} , Q_{36} che invece la matrice di un materiale ortotropo non dovrebbe avere ma che permettono la nascita di accoppiamenti tra componenti di taglio e componenti normali che sono molto importanti perché permettono di avere un GDL in più nella progettazione con materiali compositi in quanto scegliendo la stacking sequence si riesce ad avere gli accoppiamenti voluti.

E' quindi importante soddisfare i requisiti $Cz0$ per non avere problemi con l'effetto zigzag e la discontinuità interlaminare per cui si usano:

- Formulazioni agli spostamenti in cui le incognite sono gli spostamenti a cui quindi posso imporre le condizioni $Cz0$ che ci interessano, queste hanno il problema che gli stress sono derivati dagli spostamenti quindi non è detto che vengano continui
- Formulazioni miste in cui le incognite sono alcuni spostamenti e alcune tensioni (normali) per cui ad esse posso imporre le condizioni $Cz0$

Notiamo che in generale per le piastre vale che:

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = f(u(z)) \quad \text{it is } C_z^0$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = f(v(z)) \quad \text{it is } C_z^0$$

$$\epsilon_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = f(u(z), v(z)) \quad \text{it is } C_z^0$$

$$\epsilon_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad \text{it isn't } C_z^0$$

$$\epsilon_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad \text{it isn't } C_z^0$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \quad \text{it isn't } C_z^0$$

Notiamo che $u(z)$ e $v(z)$ sono continue in z quindi vale la condizione $Cz0$ e anche ϵ_{xx} , ϵ_{yy} , ϵ_{xy} sono continue.

Invece le deformazioni trasversali sono derivate in z quindi le ϵ_{yz} , ϵ_{xz} , ϵ_{zz} non sono continue in z quindi non soddisfano le condizioni $Cz0$.

A questo punto posso mettere le ϵ trovate all'interno delle equazioni costitutive e ottenere:

$$\sigma_{xx}^k = C_{11}^k \epsilon_{xx}^k + C_{12}^k \epsilon_{yy}^k + C_{13}^k \epsilon_{zz}^k$$

$$\sigma_{yy}^k = C_{21}^k \epsilon_{xx}^k + C_{22}^k \epsilon_{yy}^k + C_{23}^k \epsilon_{zz}^k$$

$$\sigma_{xy}^k = C_{66}^k \epsilon_{xy}^k$$

$$\sigma_{yz}^k = C_{44}^k \epsilon_{yz}^k$$

$$\sigma_{xz}^k = C_{55}^k \epsilon_{xz}^k$$

$$\sigma_{zz}^k = C_{13}^k \epsilon_{xx}^k + C_{23}^k \epsilon_{yy}^k + C_{33}^k \epsilon_{zz}^k$$

Notiamo che, come detto prima, gli stress nel piano possono essere discontinui mentre quelli trasversi al piano devono essere continui.

Il problema è che le C_{xy} variano da strato a strato quindi sono discontinui da strato a strato, ogni volta poi li si moltiplica per delle ϵ che in generale sono discontinue. Se riesco a calcolare bene il prodotto tra questi due elementi discontinui riuscirei, in linea teorica, a ottenere delle σ continue tra strato e strato.

In verità, come abbiamo detto, avere le σ sul piano (σ_{xx} , σ_{xy} , σ_{yy}) discontinue va bene perché la fisica del problema è

quella.

Per quanto riguarda invece σ_{xz} , σ_{yz} , σ_{zz} fuori dal piano se il modello è molto accurato le discontinuità di ϵ e C riescono a compensarsi ma nel 90% dei casi questo non avviene anche perché abbiamo termini come σ_{zz} che hanno 3 termini da compensare per fare sì che sia il tutto continuo quindi che sono complicati da avere continui.

Si può notare che le teorie classiche, come quelle basate sulle ipotesi di Cauchy-Poisson-Kirchhoff-Love, o quelle di Reissner-Mindlin, soddisfano la condizione di continuità interlaminare per gli spostamenti ma non la forma a zigzag. Per questo motivo risultano essere inappropriate per lo studio di strutture multistrato. In questo caso l'utilizzo di modelli 3D o modelli 2D migliori è necessario.

Possiamo calcolare le deformazioni e ottenere:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial z} + \frac{\partial w_0}{\partial x} = 0$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial z} + \frac{\partial w_0}{\partial y} = 0$$

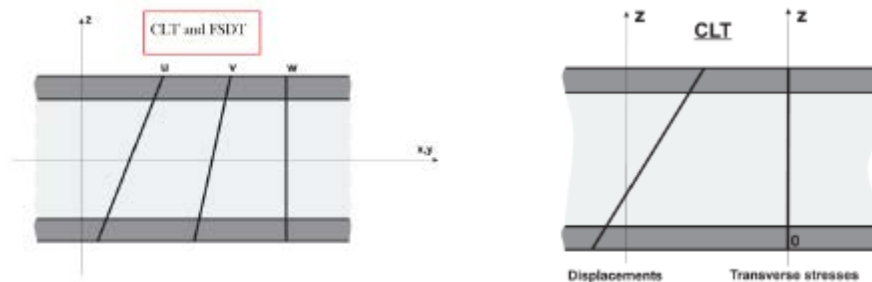
Notiamo che i primi due elementi sono lineari in Z quindi saranno delle rette tra top e bottom che faranno errori più o meno grandi a seconda di quanto è spesso il multistrato.

Notiamo che in direzione dello spessore non c'è deformazione.

Si può notare che gli scorrimenti dovute al taglio sono lineari in Z e solamente presenti in direzione xy ma nelle facce perpendicolari a x e y invece sono nulli, questo è giusto perché devono rimanere perpendicolari alla superficie media.

Non considerare lo scorrimento a taglio è un'ipotesi che va bene solo se la piastra è molto sottile e monostrato, altrimenti lo scorrimento è da considerare.

Possiamo vedere dalla figura come appaiono spostamenti e carichi calcolati con il modello CLT considerato



First order Shear Deformation Theory (FSDT)

In questo caso si considerano solo le prime due ipotesi di Kirchhoff, la terza è rimossa quindi le normali non devono per forza rimanere perpendicolari alla superficie media dopo la deformazione, questo permette di introdurre lo scorrimento a taglio infatti γ_{xz} e γ_{yz} sono inclusi nella teoria.

FSDT è la teoria di Reissner-Mindlin estesa alle strutture multistrato.

Il campo di spostamenti considerato in questa teoria è:

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) + z\Phi_x(x, y),$$

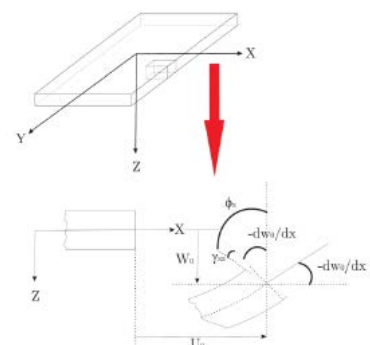
$$v(x, y, z) = v_0(x, y) + z\Phi_y(x, y),$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y).$$

Questo è spiegato nella figura a fianco dalla quale si nota che:

- w_0 è costante quindi, come nella CLT, tutti i punti si muovono della stessa entità
- La superficie che si deforma rimane rettilinea ma non è più perpendicolare alla superficie media perché ruota di γ_{xz} e γ_{yz}

Introducendo il taglio avrò 2 GDL in più quindi avremo in totale 5 GDL.



$$\begin{aligned}\tilde{C}_{11} &= \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, & \tilde{C}_{12} &= \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, & \tilde{C}_{13} &= C_{13}, \\ \tilde{C}_{22} &= \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, & \tilde{C}_{23} &= C_{23}, & \tilde{C}_{33} &= C_{33}, \\ \tilde{C}_{44} &= C_{44} = G_{23}, & \tilde{C}_{55} &= C_{55} = G_{13}, & \tilde{C}_{66} &= C_{66} = G_{12}.\end{aligned}$$

Abbiamo detto che per creare le teorie che usiamo possiamo fare assunzioni su deformazioni o stress nel piano, vediamo cosa cambia:

- Imporre le condizioni sulle **deformazioni del piano** (Plane Strain Assumptions) vuol dire partire dalla matrice della legge di Hooke generalizzata che vediamo in figura che è una 6x6 ed considerare solo i contributi legati a σ_{xx} , σ_{xy} , σ_{yy} per cui la matrice diventa una 3x3.
- Imporre le condizioni sugli **stress del piano** (Plane Stress Assumptions) vuol dire imporre $\sigma_{zz}=0$, questo permette di ottenere una nuova equazione per ϵ_{zz} che posso sostituire nelle equazioni di σ_{xx} e σ_{yy} che ricavo dalla legge di hooke generalizzata e ottenere i

Constitutive equations for a general isotropic material:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{xy} \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{zz} = C_{13} \epsilon_{xx} + C_{23} \epsilon_{yy} + C_{33} \epsilon_{zz} = 0 \quad \longrightarrow \quad \epsilon_{zz} = -\frac{C_{13}}{C_{33}} \epsilon_{xx} - \frac{C_{23}}{C_{33}} \epsilon_{yy} \quad \text{coefficienti elastici ridotti}$$

Le condizioni sugli stress del piano fanno sì che l'equazione costitutiva diventi:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_{11} & \tilde{C}_{12} & 0 \\ \tilde{C}_{12} & \tilde{C}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{C}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{xy} \end{bmatrix} \quad \text{with } \tilde{C}_{11} = C_{11} - \frac{C_{13}^2}{C_{33}}, \tilde{C}_{12} = C_{12} - \frac{C_{13}C_{23}}{C_{33}}, \tilde{C}_{22} = C_{22} - \frac{C_{23}^2}{C_{33}}, \tilde{C}_{66} = C_{66}.$$

Questo è quello che ottengo se considero una teoria CLT ma se considerassi la teoria FSDT allora imponendo le stesse condizioni otterrei matrici 5x5 e i coefficienti elastici ridotti imponendo $\sigma_{zz}=0$.

Possiamo vedere un esempio della presenza del fenomeno del Poisson Locking usando prima la teoria CLT e poi la teoria FSDT:

- ▷ One isotropic layered plate (simply supported) with transverse mechanical loading applied at the top (bi-sinusoidal). Poisson ratio $\nu=0.34$, transverse displacement $\tilde{w} = w \frac{100Eh^3}{qa^4}$ at midsurface for different values of thickness ratio a/h :

a/h	$CLT_{\epsilon_{zz}}$	Err%	$CLT_{\sigma_{zz}}$	Err%	3D
2	2.0010	66.7	2.7238	54.7	6.0107
4	2.0009	44.3	2.7238	24.2	3.5958
10	2.0009	30.2	2.7238	4.94	2.8655
100	2.0009	26.5	2.7238	0.05	2.7252
1000	2.0009	26.5	2.7238	0.00	2.7238

$CLT_{\epsilon_{zz}}$: Classical Lamination Theory with classical constitutive equations (only plane strain). $CLT_{\sigma_{zz}}$: Classical Lamination Theory with plane stress constitutive equations.

Sottolineiamo che il caso è analitico, per dimostrare che il fenomeno del Poisson Locking non è dovuto a fenomeni di tipo numerico.

Quello che si nota è che con la teoria CLT nonostante la piastra diventi sempre più sottile comunque l'errore sulle ϵ non va a zero se uso le **condizioni di deformazioni nel piano** mentre va a zero se uso le **condizioni di stress nel piano** ovvero impongo che $\sigma_{zz}=0$.

Quindi il sistema di equazioni costitutive con coefficienti elastici ridotti possono essere riscritte:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \tilde{Q}_{11}\varepsilon_{xx} + \tilde{Q}_{12}\varepsilon_{yy} \\ \sigma_{yy} &= \tilde{Q}_{12}\varepsilon_{xx} + \tilde{Q}_{22}\varepsilon_{yy} \\ \sigma_{yz} &= \tilde{Q}_{44}\gamma_{yz} \\ \sigma_{xz} &= \tilde{Q}_{55}\gamma_{xz} \\ \sigma_{xy} &= \tilde{Q}_{66}\gamma_{xy}\end{aligned}$$

Per spiegare perché il fenomeno del Poisson Locking accade possiamo prendere per esempio la teoria CLT in cui vediamo che lo stress nel piano ε_{xx} è lineare con lo spessore e può essere scritto:

$$\varepsilon_{xx}^G = \frac{\partial u}{\partial x} = u_{0,x} - z w_{0,xx}$$

Per quanto riguarda invece lo stress in direzione dello spessore ε_{zz} notiamo che è uguale a zero infatti:

$$\varepsilon_{zz}^G = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Ma se calcolassimo ε_{zz} usando invece la fisica del problema quindi la definizione di coefficiente di Poisson ν vediamo che:

$$\varepsilon_{zz}^v \propto \nu \varepsilon_{xx}^G$$

Notiamo quindi che c'è una discrepanza perché se calcoliamo ε_{zz} usando la teoria CLT otteniamo un valore diverso che se lo calcoliamo usando la fisica del problema ovvero il Poisson. Questa discrepanza genera il fenomeno del Poisson Locking.

Può essere eliminata imponendo $\sigma_{zz}=0$ perché in quel modo sto forzando ε_{zz}^G ad essere lineare e quindi si ricollega alla fisica del problema.

Possiamo notare che se aumento il grado del problema non ho più questo problema perché ε_{zz}^G non la ricavo più come derivata di una funzione costante ma di funzioni di grado superiore e quindi non si annulla più, inoltre si può vedere che se ν tende a 0 il fenomeno scompare perché vale che $\varepsilon_{zz}^G = 0 = \varepsilon_{zz}^{\text{Reale}}$ quindi non c'è più nessuna discrepanza.

8. Alcuni esempi di Higher Order Theories (HOTs), teoria del secondo ordine con inestensibilità trasversale, teoria del terzo ordine con inestensibilità trasversale (Vlasov-Reddy Theory).

Esistono una serie di teorie di ordine superiore che, mantenendo $w=0$ migliorano le equazioni di u e v quindi anche il comportamento a taglio migliora perché passa da $\gamma=\text{cost}$ a lineare, quadratica... Il problema è che sono sempre teorie Equivalent Single Layer e questo fa sì che ci sia il problema dell'effetto a zigzag.

Alcuni esempi sono:

Second order theory with transverse inextensibility (7 degrees of freedom in z)

L'andamento degli spostamenti è:

$$\begin{aligned}u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\Phi_x(x, y) + z^2\Psi_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\Phi_y(x, y) + z^2\Psi_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y)\end{aligned}$$

Notiamo che abbiamo 7 GDL ma otterremo delle γ_{xz} e γ_{yz} lineari che migliorano il comportamento a taglio.

A questo punto possiamo ricavare:

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} dz$$

In-plane force resultants per unit of length

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} z dz$$

Moment resultants per unit of length

$$\begin{Bmatrix} \hat{N}_{nn} \\ \hat{N}_{ns} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \hat{\sigma}_{nn} \\ \hat{\sigma}_{ns} \end{Bmatrix} dz$$

Force resultants per unit of length on the boundary

$$\begin{Bmatrix} \hat{M}_{nn} \\ \hat{M}_{ns} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \hat{\sigma}_{nn} \\ \hat{\sigma}_{ns} \end{Bmatrix} z dz$$

Moment resultants per unit of length on the boundary

$$\begin{Bmatrix} I_0 \\ I_1 \\ I_2 \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \end{Bmatrix} \rho_0 dz$$

Mass moments of inertia resultants

$$\hat{Q}_n = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \hat{\sigma}_{nz} dz$$

Transverse force resultants per unit of length

Se poi sostituisco δU , δV , δK con queste grandezze all'interno del PLV e integro per parti posso ricavare gli spostamenti che notiamo in questo caso essere 3 perché la teoria CLT ha 3 incognite.

$$\begin{aligned} \delta u_0 : \quad & \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = I_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} - I_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \\ \delta v_0 : \quad & \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} = I_0 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} - I_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \\ \delta w_0 : \quad & \frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} + \mathcal{N}(w_0) + q = I_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \\ & - I_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) + I_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

Notiamo che dipendono da N_{xx} , N_{yy} , N_{xy} e M_{xx} , M_{yy} , M_{xy} che sono calcolabili usando la matrice di rigidità. Possiamo anche introdurre le matrici A,B,D che rappresentano:

- A rigidità assiale
- B rigidità flessionale
- D rigidità agli effetti accoppiati di flessione e trazione

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{Q}_{ij}(1, z, z^2) dz$$

Alla fine ottengo:

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(1)} \\ \varepsilon_{yy}^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(1)} \\ \varepsilon_{yy}^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix}$$

Membrane strains

Bending strains

Riassunto in:

$$\begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B] & [D] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\varepsilon^0\} \\ \{\varepsilon^1\} \end{Bmatrix}$$

➤ Membrane strains
➤ Bending strains

Come prima anche in questo caso introduco le matrici A,B,D con in aggiunta i termini che dipendono dallo scorrimento a taglio:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^{(0)} \\ \gamma_{xz}^{(0)} \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = K \begin{bmatrix} A_{44} & A_{45} \\ A_{45} & A_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^{(0)} \\ \gamma_{xz}^{(0)} \end{Bmatrix}$$

Dove K è il fattore di correzione del taglio che è dovuto al fatto che il taglio non è costante e le matrici A₄₅, A₄₄, A₅₅ sono legate anche esse allo scorrimento a taglio.

Otengo alla fine le equazioni costitutive che possono essere scritte in forma compatta come:

$$\begin{bmatrix} \{N\} \\ \{Q\} \\ \{M\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [A][0][B] \\ [0][A_s][0] \\ [B][0][D] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\mathcal{E}^{(0)}\} \\ \{\mathcal{E}_s^{(0)}\} \\ \{\mathcal{E}^{(1)}\} \end{bmatrix}$$

Notiamo che rispetto al caso CLT il caso FSDT ha dei termini aggiuntivi dovuti al taglio ma le equazioni sono formalmente le stesse solo con 5 incognite. Anche in questo caso posso sviluppare il prodotto matriciale e ottenere le 5 equazioni funzioni di A,B,D e degli spostamenti sostituendo a ϵ le equazioni degli spostamenti derivate in modo opportuno.

In generale, **sia per le FSDT che per le CLT** l'utilizzo delle matrici A,B e D che hanno un significato fisico può essere omesso perché le teorie successive utilizzano matrici di rigidezza generiche anche se non per forza con termini collegati ad un significato fisico.

Questo fa sì che in generale si possano scrivere le equazioni geometriche come:

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} = u_{0,x} - zw_{0,xx} & \epsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} = u_{0,x} + z\Phi_{x,x} & \text{FSDT} \\ \epsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} = v_{0,y} - zw_{0,yy} & \epsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} = v_{0,y} + z\Phi_{y,y} & \text{CLT} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = (u_{0,y} + v_{0,x}) - 2zw_{0,xy} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = (u_{0,y} + v_{0,x}) + z(\Phi_{x,y} + \Phi_{y,x}) \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = w_{0,y} + \Phi_y \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = w_{0,x} + \Phi_x \end{aligned}$$

Da esse le relazioni costitutive sono:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} & 0 & 0 \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & Q_{45} \\ 0 & 0 & 0 & Q_{45} & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix}$$

Posso ricavare le equazioni di governo sostituendo le equazioni costitutive nella soluzione geometrica come fatto le altre volte e ottenere:

$K=5/6$ vale per una sezione omogenea e isotropa ma se cambiano la geometria, i carichi o la laminazione il valore di K da usare è diverso. In generale però usare $K=5/6$ come prima approssimazione va sempre bene perché essendo <1 migliora il risultato.

Si può poi notare che se mettiamo $K=\infty$ posso passare dalla soluzione FSDT fatta normalmente da Nastran alla CLT perché sto intrinsecamente dicendo che le γ sono nulle.

10. Modelli strutturali ESL e LW, teorie ZigZag physically o kinematic based

Di solito si aggiungono termini quadratici e cubici (z^2 o z^3) al modello degli spostamenti per migliorare la soluzione del modello.

In particolare quello che può essere fatto è.

- Aggiungere elementi a u e v per migliorare l'approssimazione del taglio e svincolarsi dal fenomeno del Poisson Locking
- Aggiungere elementi a w per non avere più ε_{zz} nulla ma che assume un valore variabile

Facendo così, come abbiamo detto, ci si svincola dal concetto delle matrici A , B , D e si ottengono generiche matrici di rigidezza.

Aumentando l'accuratezza dei termini in u, v e w però non si risolve il problema dello studio dell'effetto Zig Zag perché comunque stiamo studiando sempre la piastra con un modello Equivalent Single Layer.

Per introdurre l'effetto ZigZag dobbiamo considerare due tipologie di teorie:

- **Kinematic-based ZigZag Theories** che in genere sono teorie molto semplici da sviluppare e implementare in cui si impone una forma dell'effetto ZigZag, quindi vengono solitamente utilizzate ma per alcuni schemi di laminazione, carichi o condizioni al contorno possono dare dei problemi.
- **Physically Based ZigZag Theories** che sono più complicate delle precedenti ma avendo un approccio al problema più legato alla sua fisica sono più generali e hanno un range di applicazione più elevato.

Le **Kinematic-based ZigZag Theories** sono teorie in cui alle equazioni cinematiche degli spostamenti aggiungo un'equazione che introduce l'effetto ZigZag. Un esempio tipico di questo è l'aggiunta della funzione ZigZag di Muramaki che è definita come:

$$Z(z) = (-1)^k \zeta_k$$

Dove $\zeta_k = (2z_k)/h_k$ con z_k che è la coordinata nello spessore e h_k è lo spessore dello strato. Questa funzione è lineare a tratti nella coordinata z_k dello spessore, ha ampiezza unitaria per ogni strato e la derivata assume segni opposti in strati adiacenti. Quindi ho tante rette che variano inclinazione strato su strato.

Abbiamo che quindi l'ultimo termine delle equazioni degli spostamenti è la funzione di Muramaki, gli spostamenti posso scriverli:

$$\begin{aligned} u &= F_0 u_0 + F_1 u_1 + \dots + F_N u_N + F_Z u_Z \\ v &= F_0 v_0 + F_1 v_1 + \dots + F_N v_N + F_Z v_Z \\ w &= F_0 w_0 + F_1 w_1 + \dots + F_N w_N + F_Z w_Z \end{aligned}$$

In questo modo vediamo che l'effetto ZigZag lo introduco con solo 3 GDL in più e costa molto poco ma va in difficoltà in alcuni casi come abbiamo visto.

La **Physically Based ZigZag Theories** si basa su aggiungere delle ipotesi fisiche sulla continuità degli spostamenti e degli stress in direzione trasversale e il rapporto tra stress trasversali e spostamenti.

Quello che si ottiene dal punto di vista delle matrici di rigidezza e che esse risultano parzialmente sommate.

10.2 Come creare un modello strutturale 2D analitico

I passi per creare un modello degli spostamenti 2D sono 4:

1. Creare un opportuno modello variazionale degli spostamenti
2. Sostituire le equazioni costitutive appropriate
3. Sostituire le relazioni geometriche appropriate
4. Sostituire un appropriato modello cinetico

Alla fine arrivo a scrivere le equazioni che possono avere:

- Soluzione analitica ottenuta sostituendo le soluzioni armoniche e integrando per parti per ottenere una soluzione in forma chiusa
- Soluzione numerica sostituendo le funzioni di forma nel piano nel caso degli elementi finiti

Quindi:

Step 1: Principio dei lavori virtuali

In generale vale che:

$$\int_V (\delta \epsilon_{pG}^T \sigma_{pC} + \delta \epsilon_{nG}^T \sigma_{nC}) dV = -\delta L^{in} + \delta L^e$$

Nel caso di una piastra o guscio multistrato:

$$\sum_{k=1}^{N_l} \left\{ \int_{\Omega_k} \int_{A_k} (\delta \epsilon_{pG}^{kT} \sigma_{pC}^k + \delta \epsilon_{nG}^{kT} \sigma_{nC}^k) d\Omega_k dz_k \right\} = -\sum_{k=1}^{N_l} \delta L_{in}^k + \sum_{k=1}^{N_l} \delta L_e^k$$

Dove:

- ▷ N_l is the number of layers, Ω_k and A_k are in-plane and thickness integration domains, respectively
- ▷ δL_{in}^k and δL_e^k are the inertial and external virtual works at the k^{th} -layer level
- ▷ The subscripts n and p in stresses and strains indicate out-plane and in-plane components
- ▷ Superscript k indicates the layer and the superscript T the transpose
- ▷ Subscript G indicates the geometrical relations and C the constitutive ones

Step 2: Equazioni Costitutive

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx}^k \\ \sigma_{yy}^k \\ \sigma_{xy}^k \\ \sigma_{xz}^k \\ \sigma_{yz}^k \\ \sigma_{zz}^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11}^k & Q_{12}^k & Q_{16}^k & 0 & 0 & Q_{13}^k \\ Q_{12}^k & Q_{22}^k & Q_{26}^k & 0 & 0 & Q_{23}^k \\ Q_{16}^k & Q_{26}^k & Q_{66}^k & 0 & 0 & Q_{36}^k \\ 0 & 0 & 0 & Q_{55}^k & Q_{45}^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{45}^k & Q_{44}^k & 0 \\ Q_{13}^k & Q_{23}^k & Q_{36}^k & 0 & 0 & Q_{33}^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{xx}^k \\ \epsilon_{yy}^k \\ \gamma_{xy}^k \\ \gamma_{xz}^k \\ \gamma_{yz}^k \\ \epsilon_{zz}^k \end{bmatrix}$$

Se $\vartheta=0$ o $\vartheta=90$ ho che $Q_{45}=0$ e $Q_{13}=Q_{23}=Q_{36}=0$ e quindi posso ricavare le soluzioni in modo analitico.

Posso anche scriverle:

$$\begin{bmatrix} \sigma_p^k \\ \sigma_n^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{pp}^k & Q_{pn}^k \\ Q_{np}^k & Q_{nn}^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_p^k \\ \epsilon_n^k \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \sigma_{pC}^k &= Q_{pp}^k \epsilon_{pG}^k + Q_{pn}^k \epsilon_{nG}^k \\ \sigma_{nC}^k &= Q_{np}^k \epsilon_{pG}^k + Q_{nn}^k \epsilon_{nG}^k \end{aligned}$$

Notiamo che:

$$K^{k\tau s} = \int_{A_k} \left\{ -D_p^T (Q_{pp}^k F_\tau F_s D_p + Q_{pn}^k F_\tau F_s D_{n\Omega} + Q_{pn}^k F_\tau D_{nz} F_s) \right. \\ \left. - D_{n\Omega}^T (Q_{np}^k F_\tau F_s D_p + Q_{nn}^k F_\tau F_s D_{n\Omega} + Q_{nn}^k F_\tau D_{nz} F_s) \right. \\ \left. + D_{nz}^T F_\tau (Q_{np}^k F_s D_p + Q_{nn}^k F_s D_{n\Omega} + Q_{nn}^k D_{nz} F_s) \right\} dz$$

Dove compaiono dei termini che integrati in z diventano dei numeri, questi li definisco con E e sono:

$$E_{k\tau s} = \int_{A_k} F_\tau F_s dz_k \quad E_{k\tau_z s} = \int_{A_k} F_{\tau,z} F_s dz_k \quad E_{k\tau s_z} = \int_{A_k} F_\tau F_{s,z} dz_k \quad E_{k\tau_z s_z} = \int_{A_k} F_{\tau,z} F_{s,z} dz_k$$

Se scrivo l'equazione componente per componente ottengo:

$$\begin{aligned} K_{uu}^{k\tau s} &= (-Q_{11}^k \partial_{xx} - 2Q_{16}^k \partial_x \partial_y - Q_{66}^k \partial_{yy}) E_{k\tau s} + Q_{55}^k E_{k\tau_z s_z} \\ K_{uv}^{k\tau s} &= (-Q_{16}^k \partial_{xx} - (Q_{12}^k + Q_{66}^k) \partial_x \partial_y - Q_{26}^k \partial_{yy}) E_{k\tau s} + Q_{45}^k E_{k\tau_z s_z} \\ K_{uw}^{k\tau s} &= (Q_{55}^k \partial_x + Q_{45}^k \partial_y) E_{k\tau_z s} - (Q_{13}^k \partial_x + Q_{36}^k \partial_y) E_{k\tau s_z} \\ K_{vu}^{k\tau s} &= (-Q_{16}^k \partial_{xx} - (Q_{12}^k + Q_{66}^k) \partial_x \partial_y - Q_{26}^k \partial_{yy}) E_{k\tau s} + Q_{45}^k E_{k\tau_z s_z} \\ K_{vv}^{k\tau s} &= (-Q_{66}^k \partial_{xx} - 2Q_{26}^k \partial_x \partial_y - Q_{22}^k \partial_{yy}) E_{k\tau s} + Q_{44}^k E_{k\tau_z s_z} \\ K_{vw}^{k\tau s} &= (Q_{45}^k \partial_x + Q_{44}^k \partial_y) E_{k\tau_z s} - (Q_{36}^k \partial_x + Q_{23}^k \partial_y) E_{k\tau s_z} \\ K_{wu}^{k\tau s} &= (Q_{13}^k \partial_x + Q_{36}^k \partial_y) E_{k\tau_z s} - (Q_{55}^k \partial_x + Q_{45}^k \partial_y) E_{k\tau s_z} \\ K_{wv}^{k\tau s} &= (Q_{36}^k \partial_x + Q_{23}^k \partial_y) E_{k\tau_z s} - (Q_{45}^k \partial_x + Q_{44}^k \partial_y) E_{k\tau s_z} \\ K_{ww}^{k\tau s} &= (-Q_{55}^k \partial_{xx} - 2Q_{45}^k \partial_x \partial_y - Q_{44}^k \partial_{yy}) E_{k\tau s} + Q_{33}^k E_{k\tau_z s_z} \end{aligned}$$

Questo sarà moltiplicato per uno spostamento u che posso scrivere in forma armonica come:

$$u = U \cos(\bar{\alpha}x) \cdot \sin(\bar{\beta}y)$$

dove $\bar{\alpha} = m\pi/a$ e $\bar{\beta} = n\pi/b$ con m e n che sono l'ordine della semionda

Di questa u io farò le derivate in x e y e mi rimarranno dei seni e dei coseni che devo poter raccogliere, posso raccogliergli solo se $\theta = 0$ o $\theta = 90$ altrimenti non riesco e i termini Q_{45} e Q_{15} diventano diversi da 0 e io non posso trovare la soluzione analitica.

Per ottenere la soluzione analitica si suppongono piastre e gusci semplicemente appoggiati e variabili di tipo armonico e otteniamo:

$$\begin{aligned} u_\tau &= \hat{u}_\tau \cos(\alpha x) \sin(\beta y) \\ v_\tau &= \hat{v}_\tau \sin(\alpha x) \cos(\beta y) \\ w_\tau &= \hat{w}_\tau \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \end{aligned}$$

Con α e β quelli di prima.

Se invece risolvessi il tutto usando l'analisi FEM al posto di quella analitica come fatto adesso avrei che $u_i = N_i \cdot p_i$ dove p_i è la funzione di forma. Quindi con il FEM trovo gli spostamenti del nodo ma io devo essere in grado di calcolare lo spostamento in qualsiasi punto della piastra, anche che si trova ad una data distanza dal nodo ma con lo spostamento sul del nodo riesco a fare tutto.

Quando uso l'analitico invece ho una forma di spostamento che dipende da x e y quindi mi basta sostituire e trovare lo spostamento nel punto di coordinate x e y che voglio.

Questo è importante perché quando confronto FEM e analitico devo farlo nello stesso punto.

Inoltre quando faccio l'analisi Modale con FEM è facile perché in un colpo solo calcola autovalori e rispettivi autovettori e conosco sia la frequenza che al forma di tanti modi di vibrare, se faccio l'analisi

11. Teorie classiche e avanzate 1D, modelli trave e asta. Modello trave di Eulero-Bernoulli a confronto con modello trave di Timoshenko.

Se dobbiamo fare il modello 1D abbiamo più scelte. I codici commerciali usano il modello di Timoshenko per le aste quando si seleziona BEAM come un elemento finito 1D ma esistono altri modelli possibili come il modello SPRING (Molla) e TRUSS (Asta) per modellizzare un elemento 1D.

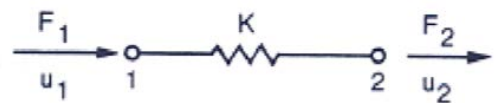
Elemento finito SPRING

E' un elemento finito 1D che ha 2 nodi, in ogni nodo ci sono forze e spostamenti.

$$F=ku$$

Dove:

- K = rigidezza assiale che decido io
- F = forza applicata lungo la molla
- u = spostamento lungo l'asse della molla



Dal modello si ottiene questa matrice:

$$\begin{Bmatrix} F_i \\ F_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{ii} & -K_{ij} \\ -K_{ji} & K_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix}$$

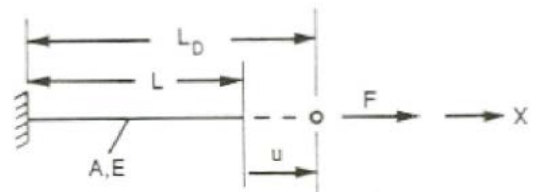
Elemento Finito TRUSS

Anche in questo caso si tratta di un elemento finito 1D avente 2 nodi, in ogni nodo ci sono forze e spostamenti.

$$F=ku$$

Dove:

- K = rigidezza assiale che è data dalle proprietà elastiche del materiale e dalle proprietà geometriche dell'elemento
- F = forza applicata lungo l'elemento
- u = spostamento lungo l'asse dell'elemento



Dobbiamo quindi trovare K e per farlo scriviamo:

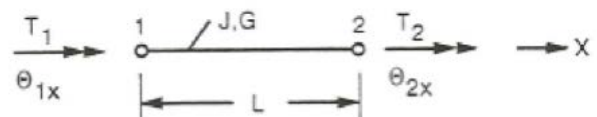
$$\sigma = E\varepsilon \quad \varepsilon = \frac{L_D - L}{L} = \frac{u}{L} \quad \sigma = E\varepsilon = \frac{F}{A} = E \frac{u}{L} \quad F = \frac{EA}{L}u$$

Da cui ricaviamo che il modello usa come matrici:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

Elemento Finito a TORSIONE

Anche in questo caso ho un elemento finito 1D che però tiene conto della torsione dell'asta.



Notiamo che è sempre un elemento 1D perché tutto è scritto in funzione della lunghezza e le altre dimensioni le esprimo con integrali che diventano i momenti di inerzia.

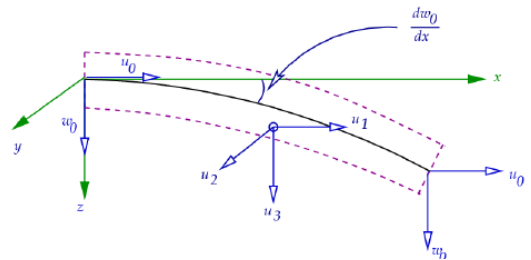
Teoria della trave di Eulero-Bernoulli

Esiste una forte analogia con il modello piastra di Kirchhoff perché le ipotesi sono le stesse ma traslate su una trave che quindi avrà:

- Sezione che rimane perpendicolare alla superficie media nella deformata, il che significa che la rigidezza a taglio è infinita
- Sezione che rimane rettilinea
- Spostamento in z è costante e uguale in tutti i punti

Da queste ipotesi deriva il modello di spostamento che è:

$$\begin{aligned} u_1 &= u_0(x) - z \frac{dw_0}{dx} \\ u_2 &= 0 \\ u_3 &= w_0(x) \end{aligned}$$

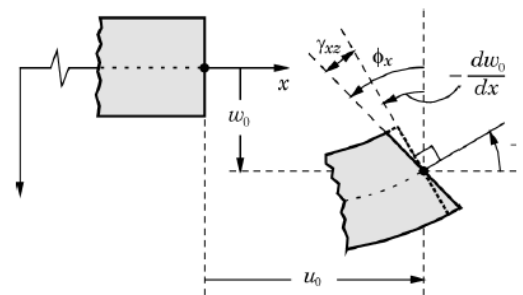


Teoria della trave di Timoshenko

In questo caso c'è una forte analogia con il modello piastra di Reissner-Mindlin perché le ipotesi sono le stesse ma, come prima, traslate sulla trave. Quindi avremo che, rispetto alla teoria della trave di Eulero-Bernoulli, sarà tolta l'ipotesi sulla perpendicolarità della sezione che permetterà di avere scorrimenti a taglio.

Il modello di spostamento sarà:

$$\begin{aligned} u_1 &= u_0(x) - z \phi_x(x) \\ u_2 &= 0 \\ u_3 &= w_0(x) \end{aligned}$$



Così come successo con le piastre c'è la possibilità di creare modelli trave più precisi per quanto riguarda la previsione degli scorrimenti a taglio aggiungendo termini di ordine superiore al modello di spostamento.

12. Equazioni costitutive 3D per problemi multicampo

Anche in questo caso vogliamo calcolare le equazioni geometriche e di equilibrio al fine di ricavare le equazioni del modello 3D generale che poi specializzerò per i gusci sferici, aggiungeremo però i **carichi termici** e i **carichi igroscopici**.

Equazioni costitutive per un'analisi termo-meccanica delle piastre

L'accoppiamento tra il campo meccanico e termico possono essere determinate usando la funzione dell'energia libera di Gibbs G e la densità di Entalpia termodinamica H .

$$\begin{aligned} G(\epsilon_{ij}, \theta) &= \sigma_{ij} \epsilon_{ij} - \eta \theta, & \text{Dove:} \\ H(\epsilon_{ij}, \theta, \vartheta_i) &= G(\epsilon_{ij}, \theta) - F(\vartheta_i), & \eta \text{ è la variazione di entropia per unità di volume} \\ & & \vartheta \text{ è la sovratemperatura rispetto alla temperatura di riferimento } T_0 \end{aligned}$$

$$\lambda^k = Q^k \alpha^k = \begin{Bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ 0 \\ 0 \\ \lambda_6 \end{Bmatrix}^k \quad \text{Lega la T e le } \epsilon \text{ perché } \alpha \text{ è il vettore dei coefficienti di dilatazione termica.}$$

$$\alpha^k = \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}^k \quad Q^k = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & 0 & 0 & Q_{16} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{23} & 0 & 0 & Q_{26} \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} & 0 & 0 & Q_{36} \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & Q_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{45} & Q_{55} & 0 \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{36} & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}^k$$

$$\kappa^k = \begin{bmatrix} \kappa_{11} & \kappa_{12} & 0 \\ \kappa_{12} & \kappa_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_{33} \end{bmatrix}^k \quad \text{Matrice dei coefficienti di conduttività}$$

Equazioni costitutive per l'analisi elasto-termo-igroscopica delle piastra

Nel caso di analisi elasto-termo-igroscopica di una piastra multistrato la componente della deformazione ϵ è data come una somma algebrica tra:

- ϵ_U = parte elastica della deformazione
- ϵ_θ = parte termica della deformazione
- ϵ_M = parte igroscopica della deformazione

$$\epsilon^k = (\epsilon_{\alpha\alpha}^k \epsilon_{\beta\beta}^k \epsilon_{zz}^k \gamma_{\beta z}^k \gamma_{\alpha z}^k \gamma_{\alpha\beta}^k)^T = \epsilon_u^k + \epsilon_\theta^k + \epsilon_M^k$$

Notiamo che poi c'è un comportamento analogo tra campo termico e igroscopico infatti si vede che:

$$\epsilon_M^k = (\epsilon_{\alpha\alpha M}^k \epsilon_{\beta\beta M}^k \epsilon_{zz M}^k \gamma_{\beta z M}^k \gamma_{\alpha z M}^k \gamma_{\alpha\beta M}^k)^T = -\beta^k \mathcal{M}^k$$

quindi la parte igroscopica della deformazione è data da un coefficiente di dilatazione igroscopica · contenuto di umidità (calcolato in percentuale o numero) da considerare.

Dove il contenuto di umidità è un numero adimensionale che può essere fornito come numero o percentuale ed è definito come:

$$\mathcal{M} = \frac{W - W_d}{W_d} \times (100) = \frac{W_d + W_c - W_d}{W_d} \times (100) = \frac{W_c}{W_d} \times (100)$$

Dove:

- W_C è la massa dell'umidità
- W_D è la massa del materiale secco
- $W_{\text{tot Materiale}} = W_C + W_D$

Data la concentrazione di umidità c , il volume V , la densità del materiale secco ρ_d possiamo scrivere un'altra formula per determinare \mathcal{M} :

$$W_c = \int_V c dV \quad W_d = \int_V \rho_d dV \quad \Rightarrow \quad \mathcal{M} = \frac{c V}{\rho_d V} \times (100) = \frac{c}{\rho_d} \times (100)$$

Se raggruppiamo il coefficiente di espansione dovuta all'umidità possiamo ottenere un vettore 6x1:

$$\beta^k = (\beta_{11}^k \beta_{22}^k \beta_{33}^k 0 0 \beta_{12}^k)^T$$

Combinando le equazioni precedenti è possibile ottenere un'equazione generale per i componenti di deformazione per un'analisi elasto-termo-igroscopica che è:

$$\epsilon^k = \epsilon_u^k - \alpha^k \theta^k - \beta^k \mathcal{M}^k$$

Se poi questi termini li sostituisco nella legge di Hooke in un sistema di riferimento (α, β, z) posso ricavare σ .

I termini diversi sono quelli legati al campo elettrico quindi:

$$\varepsilon^k = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}^k \quad \text{Matrice di Permittività Dielettrica}$$

$$\kappa^k = \begin{bmatrix} \kappa_{11} & \kappa_{12} & 0 \\ \kappa_{12} & \kappa_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_{33} \end{bmatrix}^k \quad \text{Matrice di conducibilità Elettrica}$$

$$e^k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & e_{14} & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{24} & e_{25} & 0 \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & 0 & 0 & e_{36} \end{bmatrix}^k \quad \text{Matrice dei Coefficienti PiezoElettrici}$$

Anche in questo caso posso dividere tutto in variabili dovute alle equazioni costitutive (indicate con C) e variabili dovute alla geometri (indicate con G) e poi separare le componenti nel piano (p) e fuori dal piano (n). Da questo ricavo:

$$\begin{aligned} \sigma_{pC}^k &= Q_{pp}^k \epsilon_{pG}^k + Q_{pn}^k \epsilon_{nG}^k - e_{pp}^{kT} \mathcal{E}_{pG}^k - e_{np}^{kT} \mathcal{E}_{nG}^k - \lambda_p^k \theta^k, \\ \sigma_{nC}^k &= Q_{np}^k \epsilon_{pG}^k + Q_{nn}^k \epsilon_{nG}^k - e_{pn}^{kT} \mathcal{E}_{pG}^k - e_{nn}^{kT} \mathcal{E}_{nG}^k - \lambda_n^k \theta^k, \\ \mathcal{D}_{pC}^k &= e_{pp}^k \epsilon_{pG}^k + e_{pn}^k \epsilon_{nG}^k + \varepsilon_{pp}^k \mathcal{E}_{pG}^k + \varepsilon_{pn}^k \mathcal{E}_{nG}^k + p_p^k \theta^k, \\ \mathcal{D}_{nC}^k &= e_{np}^k \epsilon_{pG}^k + e_{nn}^k \epsilon_{nG}^k + \varepsilon_{np}^k \mathcal{E}_{pG}^k + \varepsilon_{nn}^k \mathcal{E}_{nG}^k + p_n^k \theta^k, \\ \eta_C^k &= \lambda_p^{kT} \epsilon_{pG}^k + \lambda_n^{kT} \epsilon_{nG}^k + p_p^{kT} \mathcal{E}_{pG}^k + p_n^{kT} \mathcal{E}_{nG}^k + \chi^k \theta^k, \\ h_p^k &= \kappa_{pp}^k \vartheta_{pG}^k + \kappa_{pn}^k \vartheta_{nG}^k, \\ h_n^k &= \kappa_{np}^k \vartheta_{pG}^k + \kappa_{nn}^k \vartheta_{nG}^k. \end{aligned}$$

Dove le Q,e,ε,λ,p sono tutti elementi delle matrici viste prima che hanno lo stesso significato.

Analizzati questi casi ci basta eliminare delle parti per analizzare casi più piccoli come:

- **Caso Meccanico** in cui tolgo tutti i termini tranne quelli meccanici
- **Caso Elettro-Meccanico** in cui tolgo i termini termici dal caso elettro-termo-meccanico
- **Caso Termo-Meccanico** in cui tolgo i termini elettrici dal caso elettro-termo-meccanico

Oss.

Possiamo notare che nei modelli Parzialmente Accoppiati o Disaccoppiati mi servono solo le prime due equazioni del **caso termo-meccanico** (indicate a destra) perché una è per la Temperatura e l'altra per lo Spostamento MA non introduco nessun coefficiente K di accoppiamento.

Quindi quando studio il sistema Disaccoppiato devo risolvere:

$$[K][u] = P_9$$

Se il sistema è Accoppiato devo risolvere:

$$\begin{bmatrix} K_{uu} & K_{u9} \\ K_{9u} & K_{99} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ 9 \end{Bmatrix} = P$$

Perché ci sono tutti i termini di accoppiamento tra temperatura e spostamento

$$\begin{aligned} \sigma_{pC}^k &= Q_{pp}^k \epsilon_{pG}^k + Q_{pn}^k \epsilon_{nG}^k - \lambda_p^k \theta^k, \\ \sigma_{nC}^k &= Q_{np}^k \epsilon_{pG}^k + Q_{nn}^k \epsilon_{nG}^k - \lambda_n^k \theta^k, \\ \eta_C^k &= \lambda_p^{kT} \epsilon_{pG}^k + \lambda_n^{kT} \epsilon_{nG}^k + \chi^k \theta^k, \\ h_p^k &= \kappa_{pp}^k \vartheta_{pG}^k + \kappa_{pn}^k \vartheta_{nG}^k, \\ h_n^k &= \kappa_{np}^k \vartheta_{pG}^k + \kappa_{nn}^k \vartheta_{nG}^k. \end{aligned}$$

Notiamo che se $\chi=90^\circ$ allora viene che il prodotto scalare è nullo come deve essere.

$$\frac{\vec{r}_{,\alpha}}{A} \cdot \frac{\vec{r}_{,\beta}}{B} = \cos \chi$$

I versori sono poi indicati:

$$\frac{\vec{r}_{,\alpha}}{A} = \hat{i}_\alpha, \quad \frac{\vec{r}_{,\beta}}{B} = \hat{i}_\beta, \quad \hat{i}_n = \frac{\hat{i}_\alpha \times \hat{i}_\beta}{\sin \chi}$$

Dove il terzo versore deve essere perpendicolare al piano creato da \hat{i}_α e \hat{i}_β per cui viene messo il prodotto vettoriale ma non è detto che sia perpendicolare ad entrambi, questo succede solo se $\sin \chi=1$ che infatti si ha per $\chi=90^\circ$.

Per definire le superfici si usano due forme quadratiche:

Prima forma quadratica

Se consideriamo due punti (α, β) e $(\alpha+d\alpha, \beta+d\beta)$ arbitrariamente vicini uno rispetto all'altro e tutti e due presenti sulla superficie l'incremento del vettore r nel muoversi da uno all'altro è:

$$d\vec{r} = \vec{r}_{,\alpha}d\alpha + \vec{r}_{,\beta}d\beta$$

Se consideriamo tutte le equazioni precedenti possiamo poi ricavare il quadrato della lunghezza dell'arco:

$$d\vec{r} \cdot d\vec{r} = ds^2 = A^2 d\alpha^2 + 2AB \cos \chi d\alpha d\beta + B^2 d\beta^2$$

che notiamo ha anche il termine in mezzo perché non è detto che $\chi=90^\circ$.

Questa forma determina la lunghezza infinitesimale, l'angolo tra le curve, l'area della superficie... quindi determina la **geometria intrinseca** della superficie MA non la superficie stessa.

Seconda forma quadratica

L'idea è definire un vettore perpendicolare alla superficie e uno parallelo per determinare la superficie curva. Definiamo \hat{t} come il vettore tangente alla curva:

$$\hat{t} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{r}_{,\alpha} \frac{d\alpha}{ds} + \vec{r}_{,\beta} \frac{d\beta}{ds}$$

La derivata di questo vettore è:

$$\frac{d\hat{t}}{ds} = \frac{\hat{N}}{\rho}$$

Dove $1/\rho$ è la curvatura della curva e N è il versore della normale alla curva.

Da qua possiamo ricavare l'espressione della seconda forma quadratica che è:

$$Ld\alpha^2 + 2Md\alpha d\beta + Nd\beta^2$$

Dove L, N, M sono coefficienti della forma mentre α e β sono le curvature considerate costanti. Possiamo quindi dire che:

$$\frac{1}{R_\alpha} = -\frac{L}{A^2}, \quad \frac{1}{R_\beta} = -\frac{N}{B^2}$$

Quando A, B, R_α e R_β sono dati posso determinare univocamente una curva.

13.2 Relazioni Geometriche

Fino ad adesso abbiamo sempre visto relazioni del tipo $\epsilon=[D]u$.

$$e_i = \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left(\frac{U_i}{\sqrt{g_i}} \right) + \frac{1}{2g_i} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial g_i}{\partial \alpha_k} \frac{U_k}{\sqrt{g_k}}, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{\sqrt{g_i g_j}} \left[g_i \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left(\frac{U_i}{\sqrt{g_i}} \right) + g_j \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left(\frac{U_j}{\sqrt{g_j}} \right) \right], \quad i, j = 1, 2, 3 \quad i \neq j,$$

Dove consideriamo che $H_\alpha = \sqrt{g_1}$ e $H_\beta = \sqrt{g_2}$.

Se faccio tutte le sostituzioni ottengo:

$$e_\alpha = \frac{1}{(1+z/R_\alpha)} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{v}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} + \frac{w}{R_\alpha} \right),$$

$$e_\beta = \frac{1}{(1+z/R_\beta)} \left(\frac{u}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} + \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{w}{R_\beta} \right),$$

$$e_z = \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{A(1+z/R_\alpha)}{B(1+z/R_\beta)} \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\frac{u}{A(1+z/R_\alpha)} \right] + \frac{B(1+z/R_\beta)}{A(1+z/R_\alpha)} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\frac{v}{B(1+z/R_\beta)} \right]$$

$$\gamma_{\alpha z} = \frac{1}{A(1+z/R_\alpha)} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + A(1+z/R_\alpha) \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{u}{A(1+z/R_\alpha)} \right],$$

$$\gamma_{\beta z} = \frac{1}{B(1+z/R_\beta)} \frac{\partial w}{\partial \beta} + B(1+z/R_\beta) \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{v}{B(1+z/R_\beta)} \right].$$

Notiamo che le deformazioni sono più complicate di quelle ottenute per la piastra perché nascono dei termini accoppiati tra la rigidità data dalla curvatura e quella che avevo sulla piastra.

Es

In e_α ho il termine di $du/d\alpha$ che avevo nella piastra ma gli altri sono accoppiati.

Se consideriamo queste equazioni geometriche e introduciamo l'ipotesi che, oltre ad avere raggio di curvatura costante come tutti i gusci, anche che $R_\alpha = R_\beta$ otteniamo le equazioni per il **guscio sferico**. In questo caso vale che $A=B=1$ e $e_\alpha = \epsilon_{\alpha\alpha}$ $e_\beta = \epsilon_{\beta\beta}$ $e_z = \epsilon_{zz}$ quindi:

$$\epsilon_{\alpha\alpha}^k = \frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial u^k}{\partial \alpha} + \frac{w^k}{H_\alpha R_\alpha},$$

$$\epsilon_{\beta\beta}^k = \frac{1}{H_\beta} \frac{\partial v^k}{\partial \beta} + \frac{w^k}{H_\beta R_\beta},$$

$$\epsilon_{zz}^k = \frac{\partial w^k}{\partial z},$$

$$\gamma_{\alpha\beta}^k = \frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial v^k}{\partial \alpha} + \frac{1}{H_\beta} \frac{\partial u^k}{\partial \beta},$$

$$\gamma_{\alpha z}^k = \frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial w^k}{\partial \alpha} + \frac{\partial u^k}{\partial z} - \frac{u^k}{H_\alpha R_\alpha},$$

$$\gamma_{\beta z}^k = \frac{1}{H_\beta} \frac{\partial w^k}{\partial \beta} + \frac{\partial v^k}{\partial z} - \frac{v^k}{H_\beta R_\beta},$$

Dove possiamo vedere che: $H_\alpha = (1 + \frac{z}{R_\alpha}) = (1 + \frac{\tilde{z} - h/2}{R_\alpha})$, $H_\beta = (1 + \frac{z}{R_\beta}) = (1 + \frac{\tilde{z} - h/2}{R_\beta})$, $H_z = 1$,

Notiamo che le equazioni generali per il **guscio sferico** degenerano nelle equazioni generali per il **guscio cilindrico** se R_α o R_β sono infiniti e degenerano nelle equazioni per le **piastre** se sia R_α che R_β sono infiniti.

Possiamo quindi scrivere le relazioni per il **guscio cilindrico** come:

$$\epsilon_{\alpha\alpha}^k = \frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial u^k}{\partial \alpha} + \frac{w^k}{H_\alpha R_\alpha}, \quad \gamma_{\alpha\beta}^k = \frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial v^k}{\partial \alpha} + \frac{\partial u^k}{\partial \beta},$$

$$\epsilon_{\beta\beta}^k = \frac{\partial v^k}{\partial \beta}, \quad \gamma_{\alpha z}^k = \frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial w^k}{\partial \alpha} + \frac{\partial u^k}{\partial z} - \frac{u^k}{H_\alpha R_\alpha},$$

$$\epsilon_{zz}^k = \frac{\partial w^k}{\partial z}, \quad \gamma_{\beta z}^k = \frac{\partial w^k}{\partial \beta} + \frac{\partial v^k}{\partial z}.$$

Dove i simboli rappresentati sono:

ξ_1, ξ_2	coordinates in middle surface of shell
ξ	coordinate normal to middle surface
$\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{n}$	unit vectors in directions of ξ_1, ξ_2, ξ
$A_1, A_2, \alpha_1, \alpha_2$	parameters in linear element (equations (2) and (3))
R_1, R_2	principal radii of curvature
\bar{U}	displacement vector ($\bar{U} = U_1\bar{e}_1 + U_2\bar{e}_2 + W\bar{n}$)
\bar{F}	body-force vector ($\bar{F} = F_1\bar{e}_1 + F_2\bar{e}_2 + F_3\bar{n}$)
$\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_\xi$	components of direct strain
$\gamma_{12}, \gamma_{1\xi}, \gamma_{2\xi}$	components of shearing strain
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_\xi$	components of direct stress
$\tau_{12}, \tau_{1\xi}, \tau_{2\xi}$	components of shearing stress

Da questo sistema di 3 equazioni di equilibrio per i gusci sferici possiamo fare delle considerazioni:

➤ $a_1=a_2$ nella terza equazione perché il raggio di curvatura è costante

$$\cdot) H_\alpha = \left(1 + \frac{\xi}{R_1}\right); H_\beta = \left(1 + \frac{\xi}{R_2}\right); R_1=R_\alpha; R_2=R_\beta;$$

$$\cdot) \sigma_1=\sigma_{\alpha\alpha}; \sigma_2=\sigma_{\beta\beta}; \sigma_\xi=\sigma_{zz}; \tau_{12}=\sigma_{\alpha\beta}; \tau_{1\xi}=\sigma_{\alpha z}; \tau_{2\xi}=\sigma_{\beta z}$$

Questo perché $A=B=1$ per i gusci sferici quindi in H_α e H_β non c'è più.

Possiamo quindi riassumere le equazioni di equilibrio per un **guscio sferico** in:

$$\begin{aligned} H_\beta \frac{\partial \sigma_{\alpha\alpha}^k}{\partial \alpha} + H_\alpha \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}^k}{\partial \beta} + H_\alpha H_\beta \frac{\partial \sigma_{\alpha z}^k}{\partial z} + \left(\frac{2H_\beta}{R_\alpha} + \frac{H_\alpha}{R_\beta}\right) \sigma_{\alpha z}^k &= \rho^k H_\alpha H_\beta \ddot{u}^k, \\ H_\beta \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}^k}{\partial \alpha} + H_\alpha \frac{\partial \sigma_{\beta\beta}^k}{\partial \beta} + H_\alpha H_\beta \frac{\partial \sigma_{\beta z}^k}{\partial z} + \left(\frac{2H_\alpha}{R_\beta} + \frac{H_\beta}{R_\alpha}\right) \sigma_{\beta z}^k &= \rho^k H_\alpha H_\beta \ddot{v}^k, \\ H_\beta \frac{\partial \sigma_{\alpha z}^k}{\partial \alpha} + H_\alpha \frac{\partial \sigma_{\beta z}^k}{\partial \beta} + H_\alpha H_\beta \frac{\partial \sigma_{zz}^k}{\partial z} - \frac{H_\beta}{R_\alpha} \sigma_{\alpha\alpha}^k - \frac{H_\alpha}{R_\beta} \sigma_{\beta\beta}^k + \left(\frac{H_\beta}{R_\alpha} + \frac{H_\alpha}{R_\beta}\right) \sigma_{zz}^k &= \rho^k H_\alpha H_\beta \ddot{w}^k, \end{aligned}$$

Notiamo che ci sono i termini aggiuntivi puramente geometrici, a destra ci sono le forze inerziali che sono scritte come densità·volume·accelerazione dove il volume lo definisco moltiplicando H_α e H_β . Anche in questo caso nei codici si utilizzano le curvature al posto di R_α e R_β .

Se mettiamo che R_α o R_β vanno ad infinito che corrisponde ad avere $H_\alpha=1$ o $H_\beta=1$ ottengo le equazioni per il **guscio cilindrico**

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{\alpha\alpha}^k}{\partial \alpha} + H_\alpha \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}^k}{\partial \beta} + H_\alpha \frac{\partial \sigma_{\alpha z}^k}{\partial z} + \frac{2}{R_\alpha} \sigma_{\alpha z}^k &= \rho^k H_\alpha \ddot{u}^k, \\ \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}^k}{\partial \alpha} + H_\alpha \frac{\partial \sigma_{\beta\beta}^k}{\partial \beta} + H_\alpha \frac{\partial \sigma_{\beta z}^k}{\partial z} + \frac{1}{R_\alpha} \sigma_{\beta z}^k &= \rho^k H_\alpha \ddot{v}^k, \\ \frac{\partial \sigma_{\alpha z}^k}{\partial \alpha} + H_\alpha \frac{\partial \sigma_{\beta z}^k}{\partial \beta} + H_\alpha \frac{\partial \sigma_{zz}^k}{\partial z} - \frac{1}{R_\alpha} \sigma_{\alpha\alpha}^k + \frac{1}{R_\alpha} \sigma_{zz}^k &= \rho^k H_\alpha \ddot{w}^k. \end{aligned}$$

Se poi introduco le ipotesi che sia R_α che R_β vanno ad infinito ottengo le equazioni della **piastra** che conosco. Notiamo che sono 3 equazioni in 6 incognite che posso risolvere se uso la legge di Hooke che mi permette di scrivere tutto in funzione degli spostamenti e passare da 6 a 3 incognite.

Possiamo scrivere le equazioni di equilibrio e otteniamo:

$$\begin{aligned} H_\beta \frac{\partial \sigma_{\alpha\alpha k}}{\partial \alpha} + H_\alpha \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta k}}{\partial \beta} + H_\alpha H_\beta \frac{\partial \sigma_{\alpha z k}}{\partial z} + \left(\frac{2H_\beta}{R_\alpha} + \frac{H_\alpha}{R_\beta} \right) \sigma_{\alpha z k} &= \rho_k(z) H_\alpha H_\beta \ddot{u}_k, \\ H_\beta \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta k}}{\partial \alpha} + H_\alpha \frac{\partial \sigma_{\beta\beta k}}{\partial \beta} + H_\alpha H_\beta \frac{\partial \sigma_{\beta z k}}{\partial z} + \left(\frac{2H_\alpha}{R_\beta} + \frac{H_\beta}{R_\alpha} \right) \sigma_{\beta z k} &= \rho_k(z) H_\alpha H_\beta \ddot{v}_k, \\ H_\beta \frac{\partial \sigma_{\alpha z k}}{\partial \alpha} + H_\alpha \frac{\partial \sigma_{\beta z k}}{\partial \beta} + H_\alpha H_\beta \frac{\partial \sigma_{zz k}}{\partial z} - \frac{H_\beta}{R_\alpha} \sigma_{\alpha\alpha k} - \frac{H_\alpha}{R_\beta} \sigma_{\beta\beta k} + \left(\frac{H_\beta}{R_\alpha} + \frac{H_\alpha}{R_\beta} \right) \sigma_{zz k} &= \rho_k(z) H_\alpha H_\beta \ddot{w}_k \end{aligned}$$

Se sostituiamo all'interno delle equazioni di equilibrio le relazioni costitutive e geometriche abbiamo otteniamo le 3 equazioni di equilibrio nelle 3 direzioni:

1° equazione

$$\begin{aligned} &\left(-\frac{H_\beta C_{55k}(z)}{H_\alpha R_\alpha^2} - \frac{C_{55k}(z)}{R_\alpha R_\beta} \right) u_k + \left(\frac{C_{55k}(z) H_\beta}{R_\alpha} + \frac{C_{55k}(z) H_\alpha}{R_\beta} \right) u_{k,z} + \left(\frac{C_{11k}(z) H_\beta}{H_\alpha} \right) u_{k,\alpha\alpha} + \\ &\left(\frac{C_{66k}(z) H_\alpha}{H_\beta} \right) u_{k,\beta\beta} + \left(C_{55k}(z) H_\alpha H_\beta \right) u_{k,zz} + \left(C_{12k}(z) + C_{66k}(z) \right) v_{k,\alpha\beta} + \left(\frac{C_{11k}(z) H_\beta}{H_\alpha R_\alpha} + \frac{C_{12k}(z)}{R_\beta} + \right. \\ &\left. \frac{C_{55k}(z) H_\beta}{H_\alpha R_\alpha} + \frac{C_{55k}(z)}{R_\beta} \right) w_{k,\alpha} + \left(C_{13k}(z) H_\beta + C_{55k}(z) H_\beta \right) w_{k,\alpha z} = \rho_k(z) H_\alpha H_\beta \ddot{u}_k, \end{aligned}$$

2° equazione

$$\begin{aligned} &\left(-\frac{H_\alpha C_{44k}(z)}{H_\beta R_\beta^2} - \frac{C_{44k}(z)}{R_\alpha R_\beta} \right) v_k + \left(\frac{C_{44k}(z) H_\alpha}{R_\beta} + \frac{C_{44k}(z) H_\beta}{R_\alpha} \right) v_{k,z} + \left(\frac{C_{66k}(z) H_\beta}{H_\alpha} \right) v_{k,\alpha\alpha} + \\ &\left(\frac{C_{22k}(z) H_\alpha}{H_\beta} \right) v_{k,\beta\beta} + \left(C_{44k}(z) H_\alpha H_\beta \right) v_{k,zz} + \left(C_{12k}(z) + C_{66k}(z) \right) u_{k,\alpha\beta} + \left(\frac{C_{44k}(z) H_\alpha}{H_\beta R_\beta} + \frac{C_{44k}(z)}{R_\alpha} + \right. \\ &\left. \frac{C_{22k}(z) H_\alpha}{H_\beta R_\beta} + \frac{C_{12k}(z)}{R_\alpha} \right) w_{k,\beta} + \left(C_{44k}(z) H_\alpha + C_{23k}(z) H_\alpha \right) w_{k,\beta z} = \rho_k(z) H_\alpha H_\beta \ddot{v}_k, \end{aligned}$$

3° equazione

$$\begin{aligned} &\left(\frac{C_{13k}(z)}{R_\alpha R_\beta} + \frac{C_{23k}(z)}{R_\alpha R_\beta} - \frac{C_{11k}(z) H_\beta}{H_\alpha R_\alpha^2} - \frac{2C_{12k}(z)}{R_\alpha R_\beta} - \frac{C_{22k}(z) H_\alpha}{H_\beta R_\beta^2} \right) w_k + \left(-\frac{C_{55k}(z) H_\beta}{H_\alpha R_\alpha} + \frac{C_{13k}(z)}{R_\beta} - \right. \\ &\left. \frac{C_{11k}(z) H_\beta}{H_\alpha R_\alpha} - \frac{C_{12k}(z)}{R_\beta} \right) u_{k,\alpha} + \left(-\frac{C_{44k}(z) H_\alpha}{H_\beta R_\beta} + \frac{C_{23k}(z)}{R_\alpha} - \frac{C_{22k}(z) H_\alpha}{H_\beta R_\beta} - \frac{C_{12k}(z)}{R_\alpha} \right) v_{k,\beta} + \\ &\left(\frac{C_{33k}(z) H_\beta}{R_\alpha} + \frac{C_{33k}(z) H_\alpha}{R_\beta} \right) w_{k,z} + \left(C_{55k}(z) H_\beta + C_{13k}(z) H_\beta \right) u_{k,\alpha z} + \left(C_{44k}(z) H_\alpha + C_{23k}(z) H_\alpha \right) v_{k,\beta z} + \\ &\left(\frac{C_{55k}(z) H_\beta}{H_\alpha} \right) w_{k,\alpha\alpha} + \left(\frac{C_{44k}(z) H_\alpha}{H_\beta} \right) w_{k,\beta\beta} + \left(C_{33k}(z) H_\alpha H_\beta \right) w_{k,zz} = \rho_k(z) H_\alpha H_\beta \ddot{w}_k. \end{aligned}$$

Queste sono equazioni differenziali a coefficienti NON costanti perché notiamo che H_α e H_β sono $f(z)$ così come i coefficienti C . Per ottenere delle equazioni ai coefficienti costanti che si possano risolvere ogni strato k è diviso in l strati matematici dove si considerano i coefficienti C costanti e dove H_α e H_β sono facilmente calcolabili nello strato mediano per ogni strato matematico.

Facendo così ottengo la forma chiusa dell'equazione ipotizzando:

- Piastra o guscio semplicemente appoggiati
- Forma armonica della soluzione

$$u_j(\alpha, \beta, z) = U_j(z) e^{i\omega t} \cos(\bar{\alpha}\alpha) \sin(\bar{\beta}\beta), \quad \text{Dove } \bar{\alpha} = m\pi/a \quad \bar{\beta} = m\pi/b$$

$$v_j(\alpha, \beta, z) = V_j(z) e^{i\omega t} \sin(\bar{\alpha}\alpha) \cos(\bar{\beta}\beta),$$

$$w_j(\alpha, \beta, z) = W_j(z) e^{i\omega t} \sin(\bar{\alpha}\alpha) \sin(\bar{\beta}\beta),$$

L'alternanza di seni e coseni in questo modo è data dal fatto che la piastra è semplicemente appoggiata e funziona perché se mi metto ad $\alpha=0$ allora avrei $v=0$ e $w=0$ e soddisfo il fatto che sia semplicemente appoggiata su quel lato, lo stesso vale per $\beta=0$ sostituendo $w=0$ e $u=0$.

Avere un campo di spostamenti definito in questo modo fa sì che lo spostamento sarà massimo a metà del lato.

Di fatto è come se stessi considerando un modello misto perché ricavo sia gli spostamenti che le sue derivate.

Applicando il ragionamento al sistema di equazioni differenziali precedente arriviamo a:

$$\begin{bmatrix} A_{6j} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{12j} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{19j} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{6j} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{12j} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{19j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_j \\ V_j \\ W_j \\ U'_j \\ V'_j \\ W'_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & A_{6j} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{12j} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{19j} \\ -A_{1j} & -A_{2j} & -A_{3j} & -A_{4j} & 0 & -A_{5j} \\ -A_{7j} & -A_{8j} & -A_{9j} & 0 & -A_{10j} & -A_{11j} \\ -A_{13j} & -A_{14j} & -A_{15j} & -A_{16j} & -A_{17j} & -A_{18j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_j \\ V_j \\ W_j \\ U'_j \\ V'_j \\ W'_j \end{bmatrix}$$

Che può essere sintetizzato in:

$$D_j \frac{\partial U_j}{\partial z} = A_j U_j$$

Dove:

$$\frac{\partial U_j}{\partial z} = U_j' \text{ and } U_j = [U_j \ V_j \ W_j \ U_j' \ V_j' \ W_j'].$$

possiamo scrivere, rimaneggiando l'equazione che:

$$\begin{aligned} D_j U_j' &= A_j U_j, \\ U_j' &= D_j^{-1} A_j U_j, \quad \text{with } A_j^* = D_j^{-1} A_j. \\ U_j' &= A_j^* U_j, \end{aligned}$$

In caso di geometria piana quindi con raggio di curvatura R_α e R_β infiniti abbiamo che alcuni coefficienti A sono nulli, questi poi variano da geometria a geometria.

La soluzione dell'ultima equazione differenziale può essere trovata con il **Metodo della Matrice Esponenziale** in cui:

$$U_j(z_j) = \exp(A_j^* z_j) U_j(0)$$

Dove z_j è lo spessore di ogni strato dal bottom al top. La Matrice Esponenziale è calcolata con $z_j = h_j$ per ogni strato j come:

$$A_j^{**} = \exp(A_j^* h_j) = I + A_j^* h_j + \frac{A_j^{*2}}{2!} h_j^2 + \frac{A_j^{*3}}{3!} h_j^3 + \dots + \frac{A_j^{*N}}{N!} h_j^N$$

Dove il numero di termini dello sviluppo da considerare lo decido in base allo spessore dello strato h_j , in genere se lo spessore è piccolo ci si ferma al termine con h^2 , altrimenti si aggiunge qualche termine ma si è notato che fermandomi a h^2 si riesce a calcolare quasi sempre tutto.

Se considero $j = N_{\text{layer}}$ allora la matrice di trasferimento T sarà grande $N-1$ perché essa contiene tutti i collegamenti tra gli strati precedenti ($j-1$) e successivi (j), essa è calcolata imponendo la continuità interlaminare in termini di equilibrio e congruenza tra tutti gli strati.

$$\begin{aligned} u_j^b &= u_{j-1}^t, \quad v_j^b = v_{j-1}^t, \quad w_j^b = w_{j-1}^t, & \text{b=bottom} \\ \sigma_{zzj}^b &= \sigma_{zzj-1}^t, \quad \sigma_{\alpha zj}^b = \sigma_{\alpha zj-1}^t, \quad \sigma_{\beta zj}^b = \sigma_{\beta zj-1}^t, & \text{t=top} \end{aligned}$$

Per trovare le equazioni di continuità devo prendere le equazioni costitutive che sono ottenute dalla legge di Hooke imponendo le relazioni geometriche del guscio e poi imporre che quello che succede al top di uno strato è uguale a quello che succede al bottom di quello precedente.

Facendo così la continuità per lo stress trasversale $\sigma_{\alpha z}$ è data da:

$$\begin{aligned}
\sigma_{zz} = \sigma_{\alpha z} = \sigma_{\beta z} &= 0 \quad \text{for} \quad z = -h/2, +h/2 \quad \text{or} \quad \tilde{z} = 0, h, \\
w = v = 0, \quad \sigma_{\alpha\alpha} &= 0 \quad \text{for} \quad \alpha = 0, a, \\
w = u = 0, \quad \sigma_{\beta\beta} &= 0 \quad \text{for} \quad \beta = 0, b.
\end{aligned}$$

Le condizioni al contorno date dalle ultime due equazioni sono identicamente soddisfatte dal campo di spostamenti scritto in forma armonica come abbiamo fatto per trovare la soluzione analitica.

Sostituendo le forme armoniche degli spostamenti abbiamo che per ogni strato:

$$\begin{aligned}
\sigma_{zzj}(\tilde{z}) &= -\bar{\alpha} \frac{C_{13j}}{H_\alpha(\tilde{z})} U_j + \frac{C_{13j}}{H_\alpha(\tilde{z}) R_\alpha} W_j - \bar{\beta} \frac{C_{23j}}{H_\beta(\tilde{z})} V_j + \frac{C_{23j}}{H_\beta(\tilde{z}) R_\beta} W_j + C_{33j} W_{j,z}, \\
\sigma_{\beta zj}(\tilde{z}) &= \bar{\beta} \frac{C_{44j}}{H_\beta(\tilde{z})} W_j + C_{44j} V_{j,z} - \frac{C_{44j}}{H_\beta(\tilde{z}) R_\beta} V_j, \\
\sigma_{\alpha zj}(\tilde{z}) &= \bar{\alpha} \frac{C_{55j}}{H_\alpha(\tilde{z})} W_j + C_{55j} U_{j,z} - \frac{C_{55j}}{H_\alpha(\tilde{z}) R_\alpha} U_j,
\end{aligned}$$

Possiamo poi calcolarle per il bottom del primo strato e il top dell'ultimo per calcolare le condizioni al contorno che devono essere rispettate:

$$\begin{aligned}
\sigma_{zzN_L}^t &= -\bar{\alpha} \frac{C_{13N_L}}{H_\alpha^t} U_{N_L}^t + \frac{C_{13N_L}}{H_\alpha^t R_\alpha} W_{N_L}^t - \bar{\beta} \frac{C_{23N_L}}{H_\beta^t} V_{N_L}^t + \frac{C_{23N_L}}{H_\beta^t R_\beta} W_{N_L}^t + C_{33N_L} W_{N_L,z}^t = 0, \\
\sigma_{\beta zN_L}^t &= \bar{\beta} \frac{C_{44N_L}}{H_\beta^t} W_{N_L}^t + C_{44N_L} V_{N_L,z}^t - \frac{C_{44N_L}}{H_\beta^t R_\beta} V_{N_L}^t = 0, \\
\sigma_{\alpha zN_L}^t &= \bar{\alpha} \frac{C_{55N_L}}{H_\alpha^t} W_{N_L}^t + C_{55N_L} U_{N_L,z}^t - \frac{C_{55N_L}}{H_\alpha^t R_\alpha} U_{N_L}^t = 0, \\
\sigma_{zz1}^b &= -\bar{\alpha} \frac{C_{131}}{H_\alpha^b} U_1^b + \frac{C_{131}}{H_\alpha^b R_\alpha} W_1^b - \bar{\beta} \frac{C_{231}}{H_\beta^b} V_1^b + \frac{C_{231}}{H_\beta^b R_\beta} W_1^b + C_{331} W_{1,z}^b = 0, \\
\sigma_{\beta z1}^b &= \bar{\beta} \frac{C_{441}}{H_\beta^b} W_1^b + C_{441} V_{1,z}^b - \frac{C_{441}}{H_\beta^b R_\beta} V_1^b = 0, \\
\sigma_{\alpha z1}^b &= \bar{\alpha} \frac{C_{551}}{H_\alpha^b} W_1^b + C_{551} U_{1,z}^b - \frac{C_{551}}{H_\alpha^b R_\alpha} U_1^b = 0.
\end{aligned}$$

Queste possono essere anche scritte in forma matriciale come:

$$\begin{bmatrix}
-\bar{\alpha} \frac{C_{13N_L}}{H_\alpha^t} & -\bar{\beta} \frac{C_{23N_L}}{H_\beta^t} & (\frac{C_{13N_L}}{H_\alpha^t R_\alpha} + \frac{C_{23N_L}}{H_\beta^t R_\beta}) & 0 & 0 & C_{33N_L} \\
0 & -\frac{C_{44N_L}}{H_\beta^t R_\beta} & \bar{\beta} \frac{C_{44N_L}}{H_\beta^t} & 0 & C_{44N_L} & 0 \\
-\frac{C_{55N_L}}{H_\alpha^t R_\alpha} & 0 & \bar{\alpha} \frac{C_{55N_L}}{H_\alpha^t} & C_{55N_L} & 0 & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
U_{N_L}(h_{N_L}) \\
V_{N_L}(h_{N_L}) \\
W_{N_L}(h_{N_L}) \\
U'_{N_L}(h_{N_L}) \\
V'_{N_L}(h_{N_L}) \\
W'_{N_L}(h_{N_L})
\end{bmatrix}
= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}
-\bar{\alpha} \frac{C_{131}}{H_\alpha^b} & -\bar{\beta} \frac{C_{231}}{H_\beta^b} & (\frac{C_{131}}{H_\alpha^b R_\alpha} + \frac{C_{231}}{H_\beta^b R_\beta}) & 0 & 0 & C_{331} \\
0 & -\frac{C_{441}}{H_\beta^b R_\beta} & \bar{\beta} \frac{C_{441}}{H_\beta^b} & 0 & C_{441} & 0 \\
-\frac{C_{551}}{H_\alpha^b R_\alpha} & 0 & \bar{\alpha} \frac{C_{551}}{H_\alpha^b} & C_{551} & 0 & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
U_1(0) \\
V_1(0) \\
W_1(0) \\
U'_1(0) \\
V'_1(0) \\
W'_1(0)
\end{bmatrix}
= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

In forma compatta le equazioni che esprimono le condizioni di free stress al top e al bottom dell'intero guscio le scrivo come:

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_{N_L}(h_{N_L}) \mathbf{U}_{N_L}(h_{N_L}) &= 0, \\
\mathbf{B}_1(0) \mathbf{U}_1(0) &= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\alpha\alpha}^k &= C_{11}^k \epsilon_{\alpha\alpha}^k + C_{12}^k \epsilon_{\beta\beta}^k + C_{13}^k \epsilon_{zz}^k + C_{16}^k \gamma_{\alpha\beta}^k, & \sigma_{\beta z}^k &= C_{44}^k \gamma_{\beta z}^k + C_{45}^k \gamma_{\alpha z}^k, \\
\sigma_{\beta\beta}^k &= C_{12}^k \epsilon_{\alpha\alpha}^k + C_{22}^k \epsilon_{\beta\beta}^k + C_{23}^k \epsilon_{zz}^k + C_{26}^k \gamma_{\alpha\beta}^k, & \sigma_{\alpha z}^k &= C_{45}^k \gamma_{\beta z}^k + C_{55}^k \gamma_{\alpha z}^k, \\
\sigma_{zz}^k &= C_{13}^k \epsilon_{\alpha\alpha}^k + C_{23}^k \epsilon_{\beta\beta}^k + C_{33}^k \epsilon_{zz}^k + C_{36}^k \gamma_{\alpha\beta}^k, & \sigma_{\alpha\beta}^k &= C_{16}^k \epsilon_{\alpha\alpha}^k + C_{26}^k \epsilon_{\beta\beta}^k + C_{36}^k \epsilon_{zz}^k + C_{66}^k \gamma_{\alpha\beta}^k.
\end{aligned}$$

Una forma chiusa delle equazioni di equilibrio per i gusci è ottenuta solo quando per ogni strato C_{16} , C_{26} , C_{36} , C_{45} sono pari a zero.

Sostituendo le relazioni geometriche nelle equazioni costitutive ottengo:

$$\begin{aligned}
\sigma_{\alpha\alpha}^k &= \frac{C_{11}^k}{H_\alpha} u_{,\alpha}^k + \frac{C_{11}^k}{H_\alpha R_\alpha} w^k + \frac{C_{12}^k}{H_\beta} v_{,\beta}^k + \frac{C_{12}^k}{H_\beta R_\beta} w^k + C_{13}^k w_{,z}^k, & \sigma_{\beta z}^k &= \frac{C_{44}^k}{H_\beta} w_{,\beta}^k + C_{44}^k v_{,z}^k - \frac{C_{44}^k}{H_\beta R_\beta} v^k, \\
\sigma_{\beta\beta}^k &= \frac{C_{12}^k}{H_\alpha} u_{,\alpha}^k + \frac{C_{12}^k}{H_\alpha R_\alpha} w^k + \frac{C_{22}^k}{H_\beta} v_{,\beta}^k + \frac{C_{22}^k}{H_\beta R_\beta} w^k + C_{23}^k w_{,z}^k, & \sigma_{\alpha z}^k &= \frac{C_{55}^k}{H_\alpha} w_{,\alpha}^k + C_{55}^k u_{,z}^k - \frac{C_{55}^k}{H_\alpha R_\alpha} u^k, \\
\sigma_{zz}^k &= \frac{C_{13}^k}{H_\alpha} u_{,\alpha}^k + \frac{C_{13}^k}{H_\alpha R_\alpha} w^k + \frac{C_{23}^k}{H_\beta} v_{,\beta}^k + \frac{C_{23}^k}{H_\beta R_\beta} w^k + C_{33}^k w_{,z}^k, & \sigma_{\alpha\beta}^k &= \frac{C_{66}^k}{H_\alpha} v_{,\alpha}^k + \frac{C_{66}^k}{H_\beta} u_{,\beta}^k.
\end{aligned}$$

Le equazioni indefinite di equilibrio scritte per l'analisi statica quindi senza forze di inerzia e carico applicato per i gusci sferici sono:

$$\begin{aligned}
H_\beta(z) \frac{\partial \sigma_{\alpha\alpha}^k}{\partial \alpha} + H_\alpha(z) \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}^k}{\partial \beta} + H_\alpha(z) H_\beta(z) \frac{\partial \sigma_{\alpha z}^k}{\partial z} + \left(\frac{2H_\beta(z)}{R_\alpha} + \frac{H_\alpha(z)}{R_\beta} \right) \sigma_{\alpha z}^k &= 0, \\
H_\beta(z) \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}^k}{\partial \alpha} + H_\alpha(z) \frac{\partial \sigma_{\beta\beta}^k}{\partial \beta} + H_\alpha(z) H_\beta(z) \frac{\partial \sigma_{\beta z}^k}{\partial z} + \left(\frac{2H_\alpha(z)}{R_\beta} + \frac{H_\beta(z)}{R_\alpha} \right) \sigma_{\beta z}^k &= 0, \\
H_\beta(z) \frac{\partial \sigma_{\alpha z}^k}{\partial \alpha} + H_\alpha(z) \frac{\partial \sigma_{\beta z}^k}{\partial \beta} + H_\alpha(z) H_\beta(z) \frac{\partial \sigma_{zz}^k}{\partial z} - \frac{H_\beta(z)}{R_\alpha} \sigma_{\alpha\alpha}^k - \frac{H_\alpha(z)}{R_\beta} \sigma_{\beta\beta}^k + \left(\frac{H_\beta(z)}{R_\alpha} + \frac{H_\alpha(z)}{R_\beta} \right) \sigma_{zz}^k &= 0,
\end{aligned}$$

Da esse sostituendo le relazioni costitutive e geometriche ottengo le 3 equazioni indefinite di equilibrio:

1° equazione

$$\begin{aligned}
&\left(-\frac{H_\beta C_{55k}(z)}{H_\alpha R_\alpha^2} - \frac{C_{55k}(z)}{R_\alpha R_\beta} \right) u_k + \left(\frac{C_{55k}(z) H_\beta}{R_\alpha} + \frac{C_{55k}(z) H_\alpha}{R_\beta} \right) u_{k,z} + \left(\frac{C_{11k}(z) H_\beta}{H_\alpha} \right) u_{k,\alpha\alpha} + \\
&\left(\frac{C_{66k}(z) H_\alpha}{H_\beta} \right) u_{k,\beta\beta} + \left(C_{55k}(z) H_\alpha H_\beta \right) u_{k,zz} + \left(C_{12k}(z) + C_{66k}(z) \right) v_{k,\alpha\beta} + \left(\frac{C_{11k}(z) H_\beta}{H_\alpha R_\alpha} + \frac{C_{12k}(z)}{R_\beta} + \right. \\
&\left. \frac{C_{55k}(z) H_\beta}{H_\alpha R_\alpha} + \frac{C_{55k}(z)}{R_\alpha} \right) w_{k,\alpha} + \left(C_{13k}(z) H_\beta + C_{55k}(z) H_\beta \right) w_{k,\alpha z} = \rho_k(z) H_\alpha H_\beta \ddot{u}_k,
\end{aligned}$$

2° equazione

$$\begin{aligned}
&\left(-\frac{H_\alpha C_{44k}(z)}{H_\beta R_\beta^2} - \frac{C_{44k}(z)}{R_\alpha R_\beta} \right) v_k + \left(\frac{C_{44k}(z) H_\alpha}{R_\beta} + \frac{C_{44k}(z) H_\beta}{R_\alpha} \right) v_{k,z} + \left(\frac{C_{66k}(z) H_\beta}{H_\alpha} \right) v_{k,\alpha\alpha} + \\
&\left(\frac{C_{22k}(z) H_\alpha}{H_\beta} \right) v_{k,\beta\beta} + \left(C_{44k}(z) H_\alpha H_\beta \right) v_{k,zz} + \left(C_{12k}(z) + C_{66k}(z) \right) u_{k,\alpha\beta} + \left(\frac{C_{44k}(z) H_\alpha}{H_\beta R_\beta} + \frac{C_{44k}(z)}{R_\alpha} + \right. \\
&\left. \frac{C_{22k}(z) H_\alpha}{H_\beta R_\beta} + \frac{C_{12k}(z)}{R_\alpha} \right) w_{k,\beta} + \left(C_{44k}(z) H_\alpha + C_{23k}(z) H_\alpha \right) w_{k,\beta z} = \rho_k(z) H_\alpha H_\beta \ddot{v}_k,
\end{aligned}$$

3° equazione

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{C_{13k}(z)}{R_\alpha R_\beta} + \frac{C_{23k}(z)}{R_\alpha R_\beta} - \frac{C_{11k}(z) H_\beta}{H_\alpha R_\alpha^2} - \frac{2C_{12k}(z)}{R_\alpha R_\beta} - \frac{C_{22k}(z) H_\alpha}{H_\beta R_\beta^2} \right) w_k + \left(-\frac{C_{55k}(z) H_\beta}{H_\alpha R_\alpha} + \frac{C_{13k}(z)}{R_\beta} - \right. \\
&\left. \frac{C_{11k}(z) H_\beta}{H_\alpha R_\alpha} - \frac{C_{12k}(z)}{R_\beta} \right) u_{k,\alpha} + \left(-\frac{C_{44k}(z) H_\alpha}{H_\beta R_\beta} + \frac{C_{23k}(z)}{R_\alpha} - \frac{C_{22k}(z) H_\alpha}{H_\beta R_\beta} - \frac{C_{12k}(z)}{R_\alpha} \right) v_{k,\beta} + \\
&\left(\frac{C_{33k}(z) H_\beta}{R_\alpha} + \frac{C_{33k}(z) H_\alpha}{R_\beta} \right) w_{k,z} + \left(C_{55k}(z) H_\beta + C_{13k}(z) H_\beta \right) u_{k,\alpha z} + \left(C_{44k}(z) H_\alpha + C_{23k}(z) H_\alpha \right) v_{k,\beta z} + \\
&\left(C_{55k}(z) \frac{H_\beta}{H_\alpha} \right) w_{k,\alpha\alpha} + \left(C_{44k}(z) \frac{H_\alpha}{H_\beta} \right) w_{k,\beta\beta} + \left(C_{33k}(z) H_\alpha H_\beta \right) w_{k,zz} = \rho_k(z) H_\alpha H_\beta \ddot{w}_k.
\end{aligned}$$

E si ottengono le equazioni per la continuità degli stress trasversali $\sigma_{\alpha z}$, $\sigma_{\beta z}$, σ_{zz} e quelle di equilibrio degli spostamenti tra top e bottom degli strati adiacenti.

Da queste configurazioni arriviamo a scrivere le relazioni tra gli spostamenti del bottom dello strato j e del top dello strato j-1 che sono:

$$\begin{bmatrix} U \\ V \\ W \\ U' \\ V' \\ W' \end{bmatrix}_b^j = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ T_1 & 0 & T_2 & T_3 & 0 & 0 \\ 0 & T_4 & T_5 & 0 & T_6 & 0 \\ T_7 & T_8 & T_9 & 0 & 0 & T_{10} \end{bmatrix}^{j-1,j} \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \\ U' \\ V' \\ W' \end{bmatrix}_t^{j-1}$$

Come prima quindi si introduce la matrice T per ogni interfaccia. Introducendo anche la matrice A** che lega top e bottom dello strato j:

$$U^j(h^j) = A^{j**} U^j(0)$$

possiamo legare top dell'ultimo strato con bottom del primo e in generale tutti gli strati tra di loro.

Quello che **cambia rispetto al caso di analisi modale** è che le strutture sono semplicemente appoggiate ma non sono con carichi applicati nulli per cui:

$$\begin{aligned} w = v = 0, \quad \sigma_{\alpha\alpha} = 0 \quad \text{for} \quad \alpha = 0, a, \\ w = u = 0, \quad \sigma_{\beta\beta} = 0 \quad \text{for} \quad \beta = 0, b, \\ \sigma_{zz} = p_z, \quad \sigma_{\alpha z} = p_\alpha, \quad \sigma_{\beta z} = p_\beta \quad \text{for} \quad z = -h/2, +h/2 \quad \text{or} \quad \tilde{z} = 0, h, \end{aligned}$$

Dobbiamo quindi imporre le condizioni di carico all'ultimo e al primo strato usando le equazioni di equilibrio dove M identifica l'ultimo strato:

$$\begin{aligned} \sigma_{zzt}^M &= -\bar{\alpha} \frac{C_{13}^M}{H_{\alpha t}} U_t^M + \frac{C_{13}^M}{H_{\alpha t} R_\alpha} W_t^M - \bar{\beta} \frac{C_{23}^M}{H_{\beta t}} V_t^M + \frac{C_{23}^M}{H_{\beta t} R_\beta} W_t^M + C_{33}^M W_{t,z}^M = P_{zt}^M \\ \sigma_{\beta zt}^M &= \bar{\beta} \frac{C_{44}^M}{H_{\beta t}} W_t^M + C_{44}^M V_{t,z}^M - \frac{C_{44}^M}{H_{\beta t} R_\beta} V_t^M = P_{\beta t}^M, \\ \sigma_{\alpha zt}^M &= \bar{\alpha} \frac{C_{55}^M}{H_{\alpha t}} W_t^M + C_{55}^M U_{t,z}^M - \frac{C_{55}^M}{H_{\alpha t} R_\alpha} U_t^M = P_{\alpha t}^M, \\ \sigma_{zzb}^1 &= -\bar{\alpha} \frac{C_{13}^1}{H_{\alpha b}} U_b^1 + \frac{C_{13}^1}{H_{\alpha b} R_\alpha} W_b^1 - \bar{\beta} \frac{C_{23}^1}{H_{\beta b}} V_b^1 + \frac{C_{23}^1}{H_{\beta b} R_\beta} W_b^1 + C_{33}^1 W_{b,z}^1 = P_{zb}^1, \\ \sigma_{\beta zb}^1 &= \bar{\beta} \frac{C_{44}^1}{H_{\beta b}} W_b^1 + C_{44}^1 V_{b,z}^1 - \frac{C_{44}^1}{H_{\beta b} R_\beta} V_b^1 = P_{\beta b}^1, \\ \sigma_{\alpha zb}^1 &= \bar{\alpha} \frac{C_{55}^1}{H_{\alpha b}} W_b^1 + C_{55}^1 U_{b,z}^1 - \frac{C_{55}^1}{H_{\alpha b} R_\alpha} U_b^1 = P_{\alpha b}^1. \end{aligned}$$

Queste possono anche essere scritte in forma matriciale e in forma compatta come:

$$\begin{aligned} B^M(h^M) H_m U^1(0) &= P_t^M, \\ B^1(0) U^1(0) &= P_b^1, \end{aligned}$$

Dove M e 1 rappresentano rispettivamente l'ultimo e il primo strato:

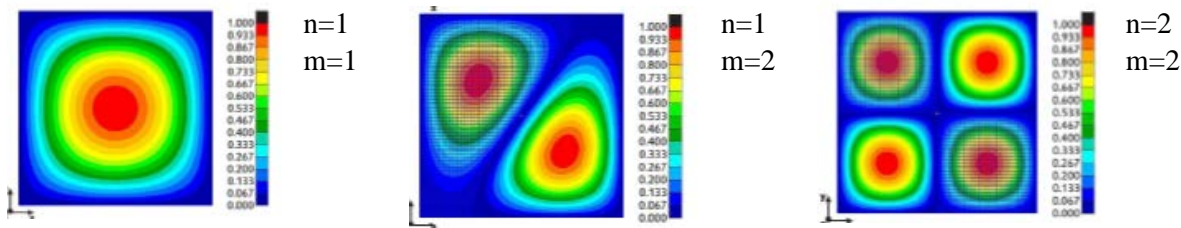
$$P_t^M = \begin{bmatrix} P_{zt}^M \\ P_{\beta t}^M \\ P_{\alpha t}^M \end{bmatrix}, \quad P_b^1 = \begin{bmatrix} P_{zb}^1 \\ P_{\beta b}^1 \\ P_{\alpha b}^1 \end{bmatrix}$$

Notiamo che:

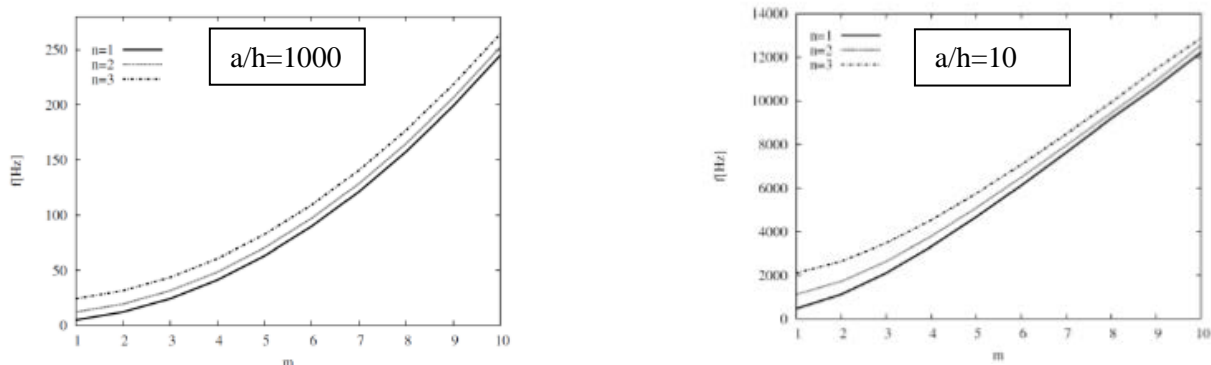
- Se $m,n=n,m$ allora i risultati con analisi fatti sia con analisi FEM che analitica sono uguali per i due casi
- Se a/h cresce comincio a fare errori più grandi perché il modello FEM usa il modello FSDT che ha come ipotesi che la piastra sia sottile e se essa non è più rispettata perché a/h è grande allora fa degli errori
- I casi che vediamo in cui è indicato che $w=0$ sono dei modi di vibrare membranali per cui la piastra si muove solo nel piano e infatti l'errore con il modello FSDT è molto piccolo.

Per ottenere questi risultati il calcolo che è stato fatto è di fare l'analisi modale delle varie piastre per valori di spessore diverso richiedendo le prime 10 frequenze di vibrazione, poi per ognuna di esse dalla deformata e dal numero di semionde nelle due direzioni principali posso ricavare n e m che metto nel modello analitico 3D per calcolare le frequenze anche con esso.

Per esempio:



Possiamo vedere che:



All'aumentare sia di m che di n la frequenza cresce in tutti i casi questo perché se n o m crescono vuol dire che in una direzione ho più semionde nello stesso spazio di conseguenza la frequenza deve per forza crescere.

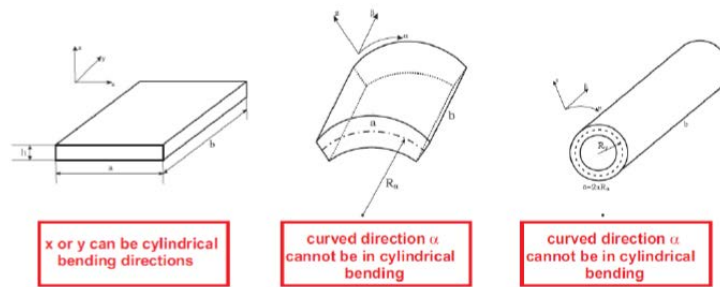
14.2.2 Cilindro con due strati isotropi

2D FE	3D	Mode	m,n	$\Delta(\%)$	$R_{\alpha}/h=100$									
		$R_{\alpha}/h=1000$			10.76	10.76	I	10,1	0.00					
3.518	3.518	I	18,1	0.00	11.64	11.65	I	12,1	-0.09	40.33	40.39	I	4,1	-0.15
3.538	3.540	I	20,1	-0.06	12.78	12.77	I	8,1	0.08	52.56	52.79	I	6,1	-0.44
3.810	3.812	I	22,1	-0.05	14.31	14.33	I	14,1	-0.14	56.83	56.76	I	2,1	0.12
3.835	3.834	I	16,1	0.03	18.05	18.07	I	16,1	-0.11	56.91	56.99	I(w=0)	2,0	-0.14
4.259	4.263	I	24,1	-0.09	18.93	18.92	I	6,1	0.05	82.46	82.61	I	8,1	-0.18
4.585	4.583	I	14,1	0.04	21.81	21.86	I	14,2	-0.23	89.08	87.89	I	4,2	1.35
4.837	4.841	I	26,1	-0.08	22.53	22.56	I	18,1	-0.13	90.19	89.32	I	0,1	0.97
5.511	5.516	I	28,1	-0.09	22.96	22.97	I	12,2	-0.04	91.56	91.32	II(w=0)	0,1	0.26
5.920	5.917	I	12,1	0.05	23.12	23.20	I	16,2	-0.34	95.68	95.04	I	6,2	0.67
6.265	6.271	I	30,1	-0.10						96.93	95.00	I	2,2	2.03

In questo caso:

n è nella direzione dell'altezza del cilindro mentre m è nella direzione della circonferenza

Facciamo adesso il confronto di altre 3 geometrie.



Notiamo che non è presente il pannello sferico perché siamo interessati all'analisi del **Cylindrical Bending** che si ha quando uno tra m e n è nullo in modo da avere la semisinusoide solo in una direzione e nell'altra direzione invece non si ha nessuno spostamento.

In questo contesto il guscio sferico non ha senso di essere trattato perché anche se metto $m=0$ e $n=0$ comunque è presente già una curvatura in entrambe le direzioni.

14.2.4 Cylindrical Bending di una piastra isotropa ad uno strato

Se consideriamo solo il primo modo che ottengo per ogni coppia di m e n e confronto i risultati del caso 3D e del FEM vedo che alcuni modi di vibrare con il FEM non ci sono, questo non è dovuto ad inesattezze del codice ma al fatto che se impongo alcune condizioni al contorno come per esempio che su tutti e 4 i lati $w=0$ alcuni modi di vibrare non si instaurano mai nel FEM perché dovrebbero staccarsi i lati

Es.

Il modo con $n=0$ e $m=1$ è fatto come nella figura a destra ma se metto che $w=0$ in tutti i lati con i codici FEM non lo troverò mai.



Per trovare questi modi anche con i codici FEM devo variare le condizioni di vincolo e mettere $w=0$ a due a due sui lati.

a/h=100						
m,n	Mode	3D Exact	2D FE	2D FE(C.B.)	2D GDQ	2D GDQ(C.B.)
0,1	I	24.27	-	23.68	-	23.67
1,0	I	24.27	-	23.68	-	23.67
1,1	I	48.52	48.53	-	48.53	-
0,2	I	97.02	-	95.68	-	95.67
2,0	I	97.02	-	95.68	-	95.67
1,2	I	121.2	121.3	-	121.2	-
2,1	I	121.2	121.3	-	121.2	-
2,2	I	193.9	194.0	-	193.9	-
0,3	I	218.1	-	216.0	-	216.0
3,0	I	218.1	-	216.0	-	216.0
1,3	I	242.3	242.7	-	242.3	-
3,1	I	242.3	242.7	-	242.3	-
2,3	I	314.8	315.1	-	314.8	-
3,2	I	314.8	315.1	-	314.8	-
0,4	I	387.3	-	384.2	-	384.3
4,0	I	387.3	-	384.2	-	384.3
1,4	I	411.4	412.6	-	411.4	-
4,1	I	411.4	412.6	-	411.4	-

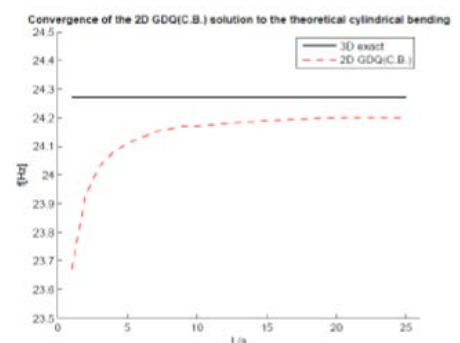
a/h=20						
m,n	Mode	3D Exact	2D FE	2D FE(C.B.)	2D GDQ	2D GDQ(C.B.)
0,1	I	120.8	-	117.7	-	117.8
1,0	I	120.8	-	117.7	-	117.8
1,1	I	240.6	241.0	-	240.6	-
0,2	I	477.2	-	469.7	-	470.0
2,0	I	477.2	-	469.7	-	470.0
1,2	I	594.0	596.6	-	594.0	-
2,1	I	594.0	596.6	-	594.0	-
2,2	I	938.9	944.7	-	939.0	-
0,3	I	1052	-	1039	-	1041
3,0	I	1052	-	1039	-	1041
1,3	I	1164	1174	-	1164	-
3,1	I	1164	1174	-	1164	-
2,3	I	1496	1511	-	1496	-
3,2	I	1496	1511	-	1496	-
0,1	II (w=0)	1583	1584	-	1583	-
1,0	II (w=0)	1583	1584	-	1583	-
0,4	I	1821	-	1789	-	1805
4,0	I	1821	-	1789	-	1805

Table 1: Isotropic one-layered plate. Analytical 3D vs. 2D numerical models. Frequency f in Hz.

Notiamo che però se il modo in questione è un modo planare come nel caso del modo per $(n,m)=(0,1)$ o $(1,0)$ del caso a $a/h=20$, anche se faccio un'analisi FEM con i 4 lati con $w=0$ lo trovo nonostante sia un cylindrical bending.

Nei casi in cui questo non avviene dovrei modificare il modello.

Vediamo adesso cosa succede se aumento la lunghezza della piastra nella figura a destra.

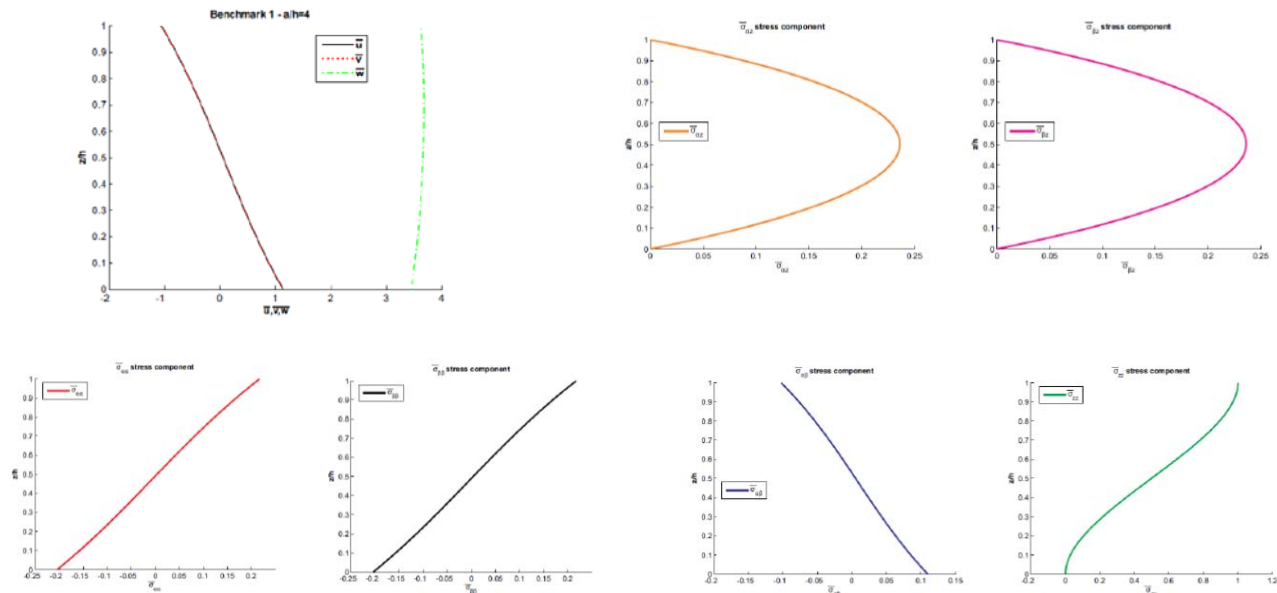


Consideriamo i risultati di spostamento adimensionalizzati.

14.2.7 Piastra isotropa con uno strato

Siccome è monostrato notiamo che non abbiamo l'effetto ZigZag ma l'effetto dello spessore che aumenta gli errori rispetto alla FSDT è sempre presente.

Se diagrammiamo gli spostamenti e i carichi abbiamo che:

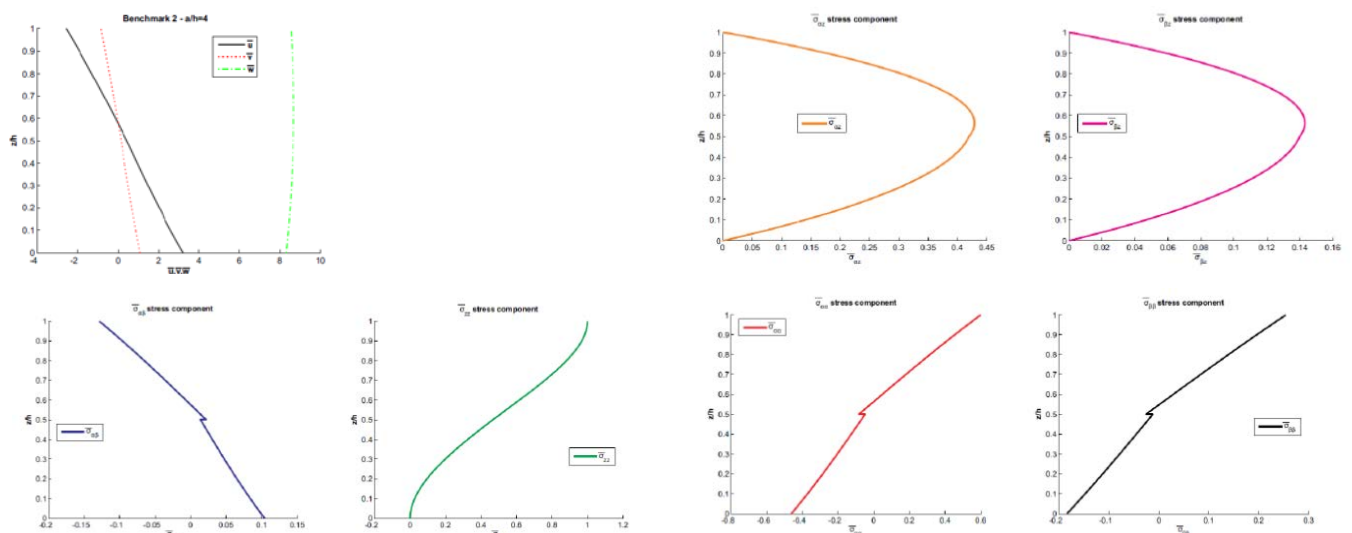


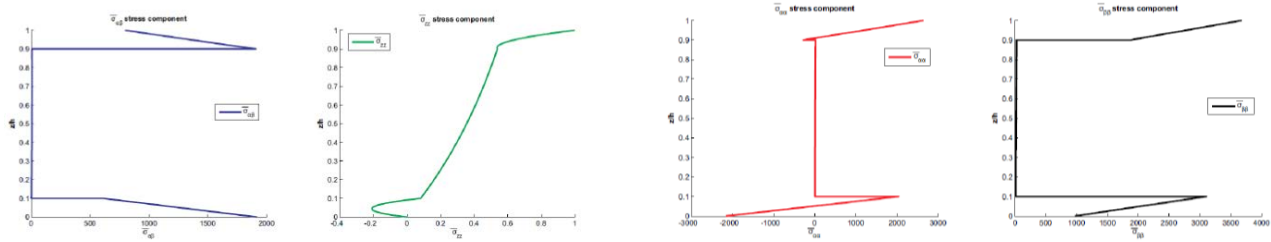
Notiamo che:

- siccome lo spessore è grande rispetto alla dimensione della piastra allora lo spostamento w non è costante come dovrebbe essere secondo la FSDT ed inoltre gli spostamenti u e v non sono lineari.
- σ_{xz} e σ_{yz} vanno da 0 a 0 perché non ho p_x e p_y e c'è il tipico andamento di σ che a metà ha il valore massimo e poi si comporta come una campana
- σ_{xy} è un po' positivo e un po' negativo quindi le fibre sono un po' compresse e un po' tese
- σ_{zz} non è calcolabile con la FSDT perché è molto variabile mentre secondo la FSDT dovrebbe rimanere costante

14.2.8 Piastra a due strati isotropi

In questo caso vediamo che i grafici sono:



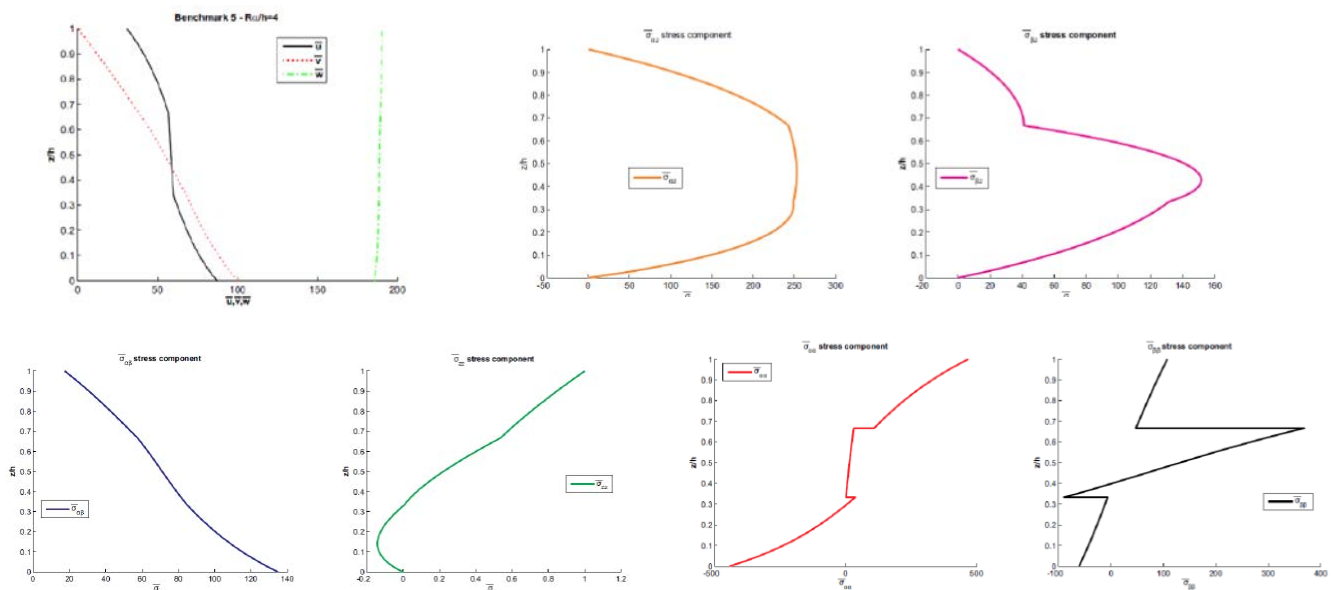


Notiamo che:

- $\sigma_{\alpha Z}$ e $\sigma_{\beta Z}$ variano molto tra pelli e cuore ma notiamo che l'andamento non è simmetrico perché vediamo che le condizioni di carico al top e al bottom sono diverse e poi ho il cuore spesso e soffice che distribuisce il carico
- $\sigma_{\sigma\beta}$ e σ_{ZZ} hanno delle discontinuità perché il cuore è soffice e quindi i carichi di taglio sono piccoli
- $\sigma_{\alpha\alpha}$ e $\sigma_{\beta\beta}$ hanno delle discontinuità perché ho dei carichi da una parte e dall'altra no

14.2.11 Guscio sferico con 3 strati

Gli andamenti sono:



Notiamo che:

- $\sigma_{\alpha Z}$ e $\sigma_{\beta Z}$ hanno delle variazioni di pendenza quando cambio strato
- $\sigma_{\sigma\beta}$ viene continua
- $\sigma_{\alpha\alpha}$ e $\sigma_{\beta\beta}$ sono discontinue

14.2.12 Pannelli FGM

Vediamo che usando materiali FGM che posso usare sia per metterli dentro ad un pannello sandwich che facendo dei pannelli che passano gradualmente da una caratteristica all'altra notiamo che le considerazioni che posso fare sono le stesse per cui:

- Se il materiale è isotropo l'andamento è sempre continuo.
- Nei pannelli sandwich grazie ai materiali FGM non c'è l'effetto ZigZag.
- Se i carichi sono gli stessi a top e bottom allora l'andamento delle $\sigma_{\alpha Z}$ e $\sigma_{\beta Z}$ è simmetrico, altrimenti no.
- Se ho un materiale composito ho delle discontinuità alle interfacce

First step: Reissner Mixed Variational Theorem (RMVT)

In general

$$\int_V (\delta \epsilon_{pG}^T \sigma_{pC} + \delta \epsilon_{nG}^T \sigma_{nM} + \delta \sigma_{nM}^T (\epsilon_{nG} - \epsilon_{nC})) dV = -\delta L^{in} + \delta L^e$$

In case of a multilayered plate or shell:

$$\sum_{k=1}^{N_l} \left\{ \int_{\Omega_k} \int_{A_k} (\delta \epsilon_{pG}^{kT} \sigma_{pC}^k + \delta \epsilon_{nG}^{kT} \sigma_{nM}^k + \delta \sigma_{nM}^{kT} (\epsilon_{nG}^k - \epsilon_{nC}^k)) d\Omega_k dz_k \right\} = \sum_{k=1}^{N_l} (-\delta L_{in}^k + \delta L_e^k)$$

- ▷ δL_{in}^k and δL_e^k are the inertial and external work of a k^{th} layer
- ▷ The subscripts n and p in stresses and strains indicate out-plane and in-plane components
- ▷ Superscript k indicates the layer and the superscript T the transpose
- ▷ Subscript G indicates the geometrical relations, C the constitutive ones, M means that the variable is assumed (modelled)

Second step: Constitutive equations

Constitutive equations for PVD model were:

$$\begin{aligned} \sigma_{pC}^k &= Q_{pp}^k \epsilon_{pG}^k + Q_{pn}^k \epsilon_{nG}^k & \sigma_{pC}^k &= Q_{pp}^k \epsilon_{pG}^k + Q_{pn}^k \epsilon_{nC}^k \\ \sigma_{nC}^k &= Q_{np}^k \epsilon_{pG}^k + Q_{nn}^k \epsilon_{nG}^k & \sigma_{nC}^k &= Q_{np}^k \epsilon_{pG}^k + Q_{nn}^k \epsilon_{nC}^k \end{aligned}$$

In case of RMVT:

$$\begin{aligned} \sigma_{pC}^k &= \hat{Q}_{pp}^k \epsilon_{pG}^k + \hat{Q}_{pn}^k \sigma_{nM}^k \\ \epsilon_{nC}^k &= \hat{Q}_{np}^k \epsilon_{pG}^k + \hat{Q}_{nn}^k \sigma_{nM}^k \end{aligned}$$

with:

$$\begin{aligned} \hat{Q}_{pp}^k &= Q_{pp}^k - Q_{pn}^k Q_{nn}^{-1k} Q_{np}^k & \hat{Q}_{pn}^k &= Q_{pn}^k Q_{nn}^{-1k} \\ \hat{Q}_{np}^k &= -Q_{nn}^{-1k} Q_{np}^k & \hat{Q}_{nn}^k &= Q_{nn}^{-1k} \end{aligned}$$

Third step: Geometrical relations

Geometrical relations are substituted where the subscript G appears (example for the plate geometry):

$$\epsilon_{pG}^k = [\epsilon_{xx}^k, \epsilon_{yy}^k, \gamma_{xy}^k]^T = D_p \mathbf{u}^k \quad \epsilon_{nG}^k = [\gamma_{xz}^k, \gamma_{yz}^k, \epsilon_{zz}^k]^T = (D_{n\Omega} + D_{nz}) \mathbf{u}^k$$

$$D_p = \begin{bmatrix} \partial_x & 0 & 0 \\ 0 & \partial_y & 0 \\ \partial_y & \partial_x & 0 \end{bmatrix} \quad D_{n\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \partial_x \\ 0 & 0 & \partial_y \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad D_{nz} = \begin{bmatrix} \partial_z & 0 & 0 \\ 0 & \partial_z & 0 \\ 0 & 0 & \partial_z \end{bmatrix}$$

Fourth step: 2D ESL, LW or ZZ models

$$\delta \mathbf{u}^k(x, y, z) = F_s(z) \delta \mathbf{u}_s^k(x, y) \quad \mathbf{u}^k(x, y, z) = F_\tau(z) \mathbf{u}_\tau^k(x, y)$$

$$\delta \sigma_{nM}^k(x, y, z) = F_s(z) \delta \sigma_{nMs}^k(x, y) \quad \sigma_n^k(x, y, z) = F_\tau(z) \sigma_{nM\tau}^k(x, y)$$

Facendo tutte le sostituzioni abbiamo che:

$$\left(\begin{array}{cc} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{u\sigma} \\ \mathbf{K}_{\sigma u} & \mathbf{K}_{\sigma\sigma} \end{array} \right) \left\{ \begin{array}{c} u \\ v \\ w \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zz} \end{array} \right\} = \{ \mathbf{p}^i \} + \{ \mathbf{p}^e \} \quad \left(\begin{array}{cc} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{u\sigma} \\ \mathbf{K}_{\sigma u} & \mathbf{K}_{\sigma\sigma} \end{array} \right) \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\sigma} \end{array} \right\} = \{ \mathbf{p}^i \} + \{ \mathbf{p}^e \}$$

Notiamo che K è un matrice 3x3, le incognite sono u e le σ perché è un modello misto, le variabili \mathbf{K}_{uu} , $\mathbf{K}_{u\sigma}$, $\mathbf{K}_{\sigma u}$, $\mathbf{K}_{\sigma\sigma}$ non sono delle matrici di rigidità.

Questo modello è bello perché mi permette di calcolare direttamente la σ_{zz} che è bello.

Dove i termini C_{16} , C_{26} , C_{36} , C_{45} sono nulli perché stiamo considerando un caso ortotropo con angoli pari a 0° o 90° .

A partire dalla matrice C posso definire λ_i che sono i Coefficienti di Accoppiamento Termomeccanico i quali legano C e μ :

$$\begin{aligned}\lambda_\alpha^k &= C_{11}^k \mu_\alpha^k + C_{12}^k \mu_\beta^k + C_{13}^k \mu_z^k, \\ \lambda_\beta^k &= C_{12}^k \mu_\alpha^k + C_{22}^k \mu_\beta^k + C_{23}^k \mu_z^k, \\ \lambda_z^k &= C_{13}^k \mu_\alpha^k + C_{23}^k \mu_\beta^k + C_{33}^k \mu_z^k.\end{aligned}$$

A questo punto impongo la soluzione armonica per avere la soluzione in forma chiusa, notiamo che la scrivo sia per i tre spostamenti ma anche per la T che notiamo avere due funzioni seno e quindi si comporta come la w , avrà di conseguenza sempre un massimo nel centro della piastra.

$$\begin{aligned}u^k(\alpha, \beta, z) &= U^k(z) \cos(\bar{\alpha}\alpha) \sin(\bar{\beta}\beta), \\ v^k(\alpha, \beta, z) &= V^k(z) \sin(\bar{\alpha}\alpha) \cos(\bar{\beta}\beta), \\ w^k(\alpha, \beta, z) &= W^k(z) \sin(\bar{\alpha}\alpha) \sin(\bar{\beta}\beta), \\ \theta^k(\alpha, \beta, z) &= \Theta^k(z) \sin(\bar{\alpha}\alpha) \sin(\bar{\beta}\beta)\end{aligned}$$

Sostituendo questo nelle equazioni costitutive ottengo un sistema di equazioni differenziali del 2° ordine con dentro gli spostamenti, la temperatura e le derivate in Z , è quindi un sistema di Z anche perché devo poterlo collegare agli FGM.

Alla fine arrivo quindi alle stesse equazioni che avevo nel caso non ci fosse un accoppiamento termomeccanico ma ad esse sono aggiunti dei termini che dipendono da J e da Θ o le sue derivate che rappresentano le variazioni di temperatura e i flussi di calore (le derivate).

$$\begin{aligned}A_1^k(z)U^k + A_2^k(z)V^k + A_3^k(z)W^k + A_4^k(z)U_{,z}^k + A_5^k(z)W_{,z}^k + A_6^k(z)U_{,zz}^k + J_1^k(z)\Theta^k &= 0, \\ A_7^k(z)U^k + A_8^k(z)V^k + A_9^k(z)W^k + A_{10}^k(z)V_{,z}^k + A_{11}^k(z)W_{,z}^k + A_{12}^k(z)V_{,zz}^k + J_2^k(z)\Theta^k &= 0, \\ A_{13}^k(z)U^k + A_{14}^k(z)V^k + A_{15}^k(z)W^k + A_{16}^k(z)U_{,z}^k + A_{17}^k(z)V_{,z}^k + A_{18}^k(z)W_{,z}^k + A_{19}^k(z)W_{,zz}^k + \\ J_3^k(z)\Theta_{,z}^k + J_4^k(z)\Theta^k &= 0.\end{aligned}$$

Anche in questo caso devo trasformare questo sistema in un sistema di equazioni differenziali a coefficienti costanti, per farlo introduco le interfacce matematiche e poi devo diminuirne di uno l'ordine di derivazione facendolo diventare un sistema di equazioni differenziali del primo ordine e per farlo devo raddoppiare il numero di variabili.

Dopo la divisione in interfacce matematiche il sistema è:

$$\begin{aligned}A_1^j U^j + A_2^j V^j + A_3^j W^j + A_4^j U_{,z}^j + A_5^j W_{,z}^j + A_6^j U_{,zz}^j + J_1^j \Theta^j &= 0, \\ A_7^j U^j + A_8^j V^j + A_9^j W^j + A_{10}^j V_{,z}^j + A_{11}^j W_{,z}^j + A_{12}^j V_{,zz}^j + J_2^j \Theta^j &= 0, \\ A_{13}^j U^j + A_{14}^j V^j + A_{15}^j W^j + A_{16}^j U_{,z}^j + A_{17}^j V_{,z}^j + A_{18}^j W_{,z}^j + A_{19}^j W_{,zz}^j + J_3^j \Theta_{,z}^j + J_4^j \Theta^j &= 0.\end{aligned}$$

Dove notiamo che Θ e $\Theta_{,z}$ li sto considerando come se fossero dei carichi esterni, sono dei termini noti da dover mettere.

Dopo aver introdotto le nuove variabili per diminuire il grado del problema abbiamo che posso scrivere le equazioni in modo matriciale come:

$$\begin{bmatrix} A_6^j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{12}^j & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{19}^j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_6^j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{12}^j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{19}^j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^j \\ V^j \\ W^j \\ U_{,z}^j \\ V_{,z}^j \\ W_{,z}^j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & A_6^j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{12}^j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{19}^j \\ -A_1^j & -A_2^j & -A_3^j & -A_4^j & 0 & -A_5^j \\ -A_7^j & -A_8^j & -A_9^j & 0 & -A_{10}^j & -A_{11}^j \\ -A_{13}^j & -A_{14}^j & -A_{15}^j & -A_{16}^j & -A_{17}^j & -A_{18}^j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^j \\ V^j \\ W^j \\ U_{,z}^j \\ V_{,z}^j \\ W_{,z}^j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -J_1^j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -J_2^j & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -J_3^j & -J_4^j & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta^j \\ \Theta_{,z}^j \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Possiamo notare che nella continuità di σ_{zz} c'è anche la temperatura ϑ perché fa parte dell'equazione di equilibrio in Z.

Imponendo la continuità degli spostamenti e dei carichi alle interfacce arrivo a scrivere che:

$$\begin{bmatrix} U \\ V \\ W \\ U' \\ V' \\ W' \end{bmatrix}_b^j = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ T_1 & 0 & T_2 & T_3 & 0 & 0 \\ 0 & T_4 & T_5 & 0 & T_6 & 0 \\ T_7 & T_8 & T_9 & 0 & 0 & T_{10} \end{bmatrix}^{j-1,j} \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \\ U' \\ V' \\ W' \end{bmatrix}_t^{j-1} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ T_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{j-1,j} \begin{bmatrix} \Theta \\ \Theta' \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_t^{j-1}$$

Dove compare T_{11} che è il termine moltiplicativo di ϑ , questo è l'unico termine in più della continuità interlaminare.

Posso scrivere l'equazione in modo più compatto come:

$$U_b^j = T_U^{j-1,j} U_t^{j-1} + (T_\Theta^{j-1,j} \Theta_t^{j-1})$$

A questo punto impongo, come nel caso precedente, le condizioni al contorno che noto anche in questo caso essere soddisfatte automaticamente per quanto riguarda gli spostamenti. Per quanto riguarda i carichi imporrò che quelli meccanici sono nulli all'estremità per cui rimane solo la variazione di T.

$$\begin{aligned} w = v = 0, \quad \sigma_{\alpha\alpha} = 0 \quad \text{for} \quad \alpha = 0, a, \quad & B_t^M U_t^M = P_t^M = 0, \\ w = u = 0, \quad \sigma_{\beta\beta} = 0 \quad \text{for} \quad \beta = 0, b. \quad & B_b^1 U_b^1 = P_b^1 = 0, \end{aligned}$$

Alla fine ottengo che gli spostamenti sono:

$$\begin{aligned} U_t^M = & \left(A^{**M} T_U^{M-1,M} A^{**M-1} T_U^{M-2,M-1} \dots A^{**2} T_U^{1,2} A^{**1} \right) U_b^1 + \\ & \left(A^{**M} T_U^{M-1,M} A^{**M-1} \dots A^{**2} T_U^{1,2} J^{**1} + \right. \\ & A^{**M} T_U^{M-1,M} A^{**M-1} \dots A^{**3} T_U^{2,3} J^{**2} + \\ & \vdots \\ & A^{**M} T_U^{M-1,M} J^{**M-1} + \\ & J^{**M} + \\ & A^{**M} T_U^{M-1,M} A^{**M} \dots A^{**2} T_\Theta^{1,2} \Theta_t^1 + \\ & A^{**M} T_U^{M-1,M} A^{**M} \dots A^{**3} T_\Theta^{2,3} \Theta_t^2 + \\ & \vdots \\ & A^{**M} T_U^{M-1,M} A^{**M-1} T_\Theta^{M-2,M-1} \Theta_t^{M-2} + \\ & \left. A^{**M} T_\Theta^{M-1,M} \Theta_t^{M-1} \right). \end{aligned}$$

Dove posso notare che la prima riga è simile a quello che succedeva per il caso elastico mentre la T_{11} riguarda quello che c'è sotto ovvero la seconda parentesi, in particolare la seconda parentesi in verità sta moltiplicando una matrice 6x6 con un'altra 6x6 e un vettore 6x1 quindi alla fine quello che ottengo è un vettore 6x1 degli spostamenti.

Posso scrivere tutto in modo compatto come:

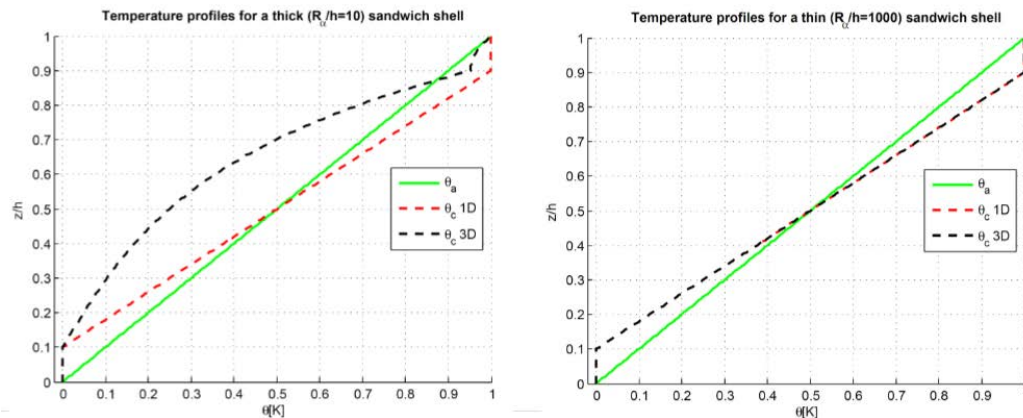
$$U_t^M = H_m U_b^1 + H_\Theta$$

che può essere anche scritta in modo diverso a partire dal sistema:

$$\begin{cases} B_t^M U_t^M = 0 \\ B_b^1 U_b^1 = 0 \end{cases}$$

Sostituendo la prima equazione otteniamo:

Se consideriamo già una piastra sandwich con alluminio e PVC vediamo che l'andamento della temperatura è:



Notiamo che:

- Caso Spesso: il profilo nel caso di Fourier 2D non tiene conto dello spessore e quindi fa un errore rispetto al caso 3D ma tiene conto della variazione di K_{33} (conducibilità) del materiale. Il caso 3D tiene conto sia dello spessore che della variazione di materiale.
- Caso Sottile: il profilo assunto lineare è errato anche in questo caso mentre siccome lo spessore è piccolo il profilo 2D e 3D coincidono.

Nel caso 3D l'equazione di Fourier posso scriverla come:

$$\nabla \cdot \mathbf{q}(u_1, u_2, u_3) = 0$$

Se il sistema di coordinate è ortogonale e rettilineo allora il flusso di calore è:

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = \frac{1}{a} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{a}{a_1} q_1 \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{a}{a_2} q_2 \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left(\frac{a}{a_3} q_3 \right) \right] \quad q_i = -\kappa_i \frac{1}{a_i} \frac{\partial \theta}{\partial u_i}$$

Facendo un po di passaggi posso scrivere tutto in funzione di H_α e H_β :

$$\frac{1}{H_\alpha H_\beta} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{H_\alpha H_\beta}{H_\alpha} \kappa_1 \frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{H_\alpha H_\beta}{H_\beta} \kappa_2 \frac{1}{H_\beta} \frac{\partial \theta}{\partial \beta} \right) \right] + \kappa_3 \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = 0$$

Alla fine ottengo l'equazione finale di Fourier dove all'interno di ogni layer j posso calcolare il k di conducibilità:

$$\kappa_1^{*j} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha^2} + \kappa_2^{*j} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \beta^2} + \kappa_3^{*j} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = 0$$

Per potere risolvere questa equazione e trovare l'andamento di θ che mi interessa ipotizzo che possa avere un andamento esponenziale per cui:

$$\Theta^j(z) = \Theta_0^j \exp(s^j z)$$

dobbiamo poi trovare il valore di s per lo strato j che è:

$$s_{1,2}^j = \pm \sqrt{\frac{\kappa_1^{*j} \bar{\alpha}^2 + \kappa_2^{*j} \bar{\beta}^2}{\kappa_3^{*j}}}$$

Determinando s_1 e s_2 posso quindi scrivere il valore di Θ^j con questa approssimazione:

$$\begin{aligned} \Theta^j(z) &= \Theta_{01}^j \exp(s_1^j z) + \Theta_{02}^j \exp(s_2^j z), \\ \Theta^j(z) &= S_1^j \cosh(s_1^j z) + S_2^j \sinh(s_1^j z). \end{aligned}$$

Nella definizione delle deformazioni quelle meccaniche non cambiano e le deformazioni igroscopiche hanno la stessa forma delle deformazioni termiche, i coefficienti di umidità sono nelle stesse posizioni dei coefficienti di espansione termica e le percentuali di umidità sono messi al posto della sovratemperatura.

La legge di Hooke non cambia ma adesso abbiamo le deformazioni meccaniche e igroscopiche al posto delle deformazioni meccaniche e termiche.

I coefficienti di accoppiamento termo-meccanico sono sostituiti dai coefficienti di accoppiamento igro-meccanico.

Un carico igroscopico equivalente è considerato al posto del carico termico equivalente per ottenerlo imponiamo dei contenuti di umidità sulla facce esterne che ci permette di determinare il profilo di umidità interna analogamente a quanto fatto con il profilo di temperatura.

16.4 Analisi Igro-Elastica di strutture multistrato

Anche in questo caso dobbiamo determinare l'andamento del contenuto di umidità e per farlo abbiamo 3 possibilità in analogia con quello fatto per la temperatura:

- Risoluzione della Legge di diffusione dell'umidità di Fick 3D
- Risoluzione della Legge di diffusione dell'umidità di Fick 2D
- Imposizione di un profilo di umidità lineare nella struttura multistrato

Le leggi di Fick possono essere scritte:

$$\mathcal{D}_{33}^k \frac{\partial^2 \mathcal{M}}{\partial z^2} = 0 \quad \text{1D version of the Fick moisture diffusion equation (material layer effect)}$$

$$\mathcal{D}_{11}^k \frac{\partial^2 \mathcal{M}}{\partial x^2} + \mathcal{D}_{22}^k \frac{\partial^2 \mathcal{M}}{\partial y^2} + \mathcal{D}_{33}^k \frac{\partial^2 \mathcal{M}}{\partial z^2} = 0 \quad \text{3D version of the Fick moisture diffusion equation (also thickness layer effect)}$$

Come con Fourier la legge 1D considererà solo l'effetto del materiale mentre la legge 3D considererà sia l'effetto dello spessore che del materiale perché considera la diffusione in tutte e 3 le direzioni.

Vediamo che il metodo di risoluzione è lo stesso per il caso di Fourier e dell'analisi termo-elastica, quello che cambia è solo la forma dell'equazione per cui avremo che quello che bisogna fare sarà:

- Imporre una soluzione all'equazione differenziale che varia per i casi 3D e 1D
- Imporre la continuità dei flussi all'interfaccia
- Aggiungere le condizioni esterne per ottenere tutti i valori dei coefficienti di umidità strato per strato.

Faremo questo su equazioni diverse che saranno:

- Equazione di Fick 3D scritta in α, β, z :

$$\left(\frac{\mathcal{D}_{11}^k}{H_{\alpha}^{k2}} \right) \frac{\partial^2 \mathcal{M}}{\partial \alpha^2} + \left(\frac{\mathcal{D}_{22}^k}{H_{\beta}^{k2}} \right) \frac{\partial^2 \mathcal{M}}{\partial \beta^2} + \mathcal{D}_{33}^k \frac{\partial^2 \mathcal{M}}{\partial z^2} = 0$$

- Equazione di Fick 1D:

$$\mathcal{D}_{33}^k \frac{\partial^2 \mathcal{M}}{\partial z^2} = 0$$

- Soluzione lineare assunta a priori

Notiamo che siccome le equazioni e i metodi di soluzione sono le stesse del caso termo-elastico allora posso fare l'analisi dell'umidità su Patran e Nastran mettendo i coefficienti idrostatici al posto di quelli termici.

16.5 Esempi di soluzione

Possiamo considerare i risultati ottenuti per quanto riguarda un'analisi termo-elastica per diverse tipologie di

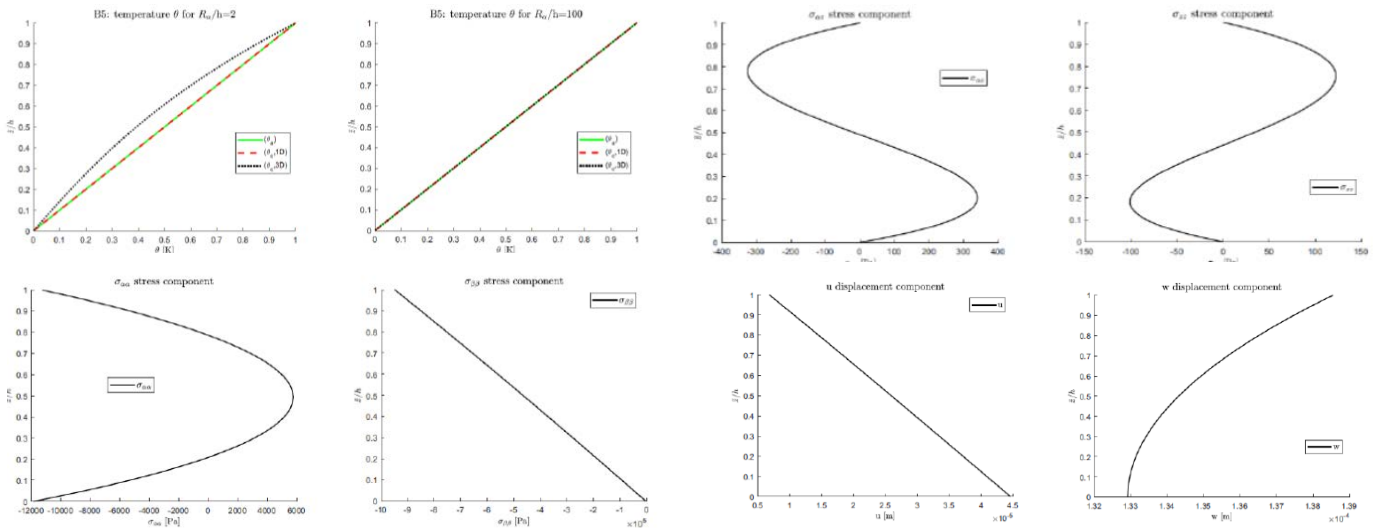
16.5.2 Piastra mono-strato isotropa in titanio

I risultati in termini di tensione e spostamenti sono:

R_a/h	2	5	10	20	50	100
$u[10^{-5}m]$ at $(\alpha = 0, \beta = b/2, z = +h/2)$						
3D(θ_a)	-3.5730	-1.7728	0.6652	5.4209	19.623	43.275
3D($\theta_c, 1D$)	-3.5730	-1.7728	0.6652	5.4209	19.623	43.275
3D($\theta_c, 3D$)	-3.2200	-1.7140	0.6772	5.4223	19.622	43.274
$v[10^{-5}m]$ at $(\alpha = a/2, \beta = 0, z = -h/2)$						
3D(θ_a)	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3D($\theta_c, 1D$)	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3D($\theta_c, 3D$)	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
$w[10^{-5}m]$ at $(\alpha = a/2, \beta = b/2, z = 0)$						
3D(θ_a)	2.0687	6.3251	13.444	27.651	70.233	141.18
3D($\theta_c, 1D$)	2.0687	6.3251	13.444	27.651	70.233	141.18
3D($\theta_c, 3D$)	2.1059	6.3144	13.431	27.642	70.229	141.18
$\sigma_{xx}[10^4Pa]$ at $(\alpha = a/2, \beta = b/2, z = +h/2)$						
3D(θ_a)	7.0586	0.0892	-0.5280	-0.4182	-0.2053	-0.1117
3D($\theta_c, 1D$)	7.0586	0.0892	-0.5280	-0.4182	-0.2053	-0.1117
3D($\theta_c, 3D$)	-5.0098	-2.1901	-1.1261	-0.5712	-0.2301	-0.1179
$\sigma_{yy}[10^4Pa]$ at $(\alpha = a/2, \beta = b/2, z = -h/2)$						
3D(θ_a)	1.5486	-0.2240	-0.2448	-0.1544	-0.0694	-0.0351
3D($\theta_c, 1D$)	1.5486	-0.2240	-0.2448	-0.1544	-0.0694	-0.0351
3D($\theta_c, 3D$)	-1.7924	-0.7635	-0.3792	-0.1879	-0.0747	-0.0364

$\sigma_{\alpha\beta}[10^4Pa]$ at $(\alpha = 0, \beta = 0, z = +h/4)$						
3D(θ_a)	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3D($\theta_c, 1D$)	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3D($\theta_c, 3D$)	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
$\sigma_{\alpha z}[10^4Pa]$ at $(\alpha = 0, \beta = b/2, z = +h/4)$						
3D(θ_a)	0.8436	-0.0115	-0.0174	-0.6241 $\times 10^{-2}$	-0.1177 $\times 10^{-2}$	-0.0324 $\times 10^{-2}$
3D($\theta_c, 1D$)	0.8436	-0.0115	-0.0174	-0.6241 $\times 10^{-2}$	-0.1177 $\times 10^{-2}$	-0.0324 $\times 10^{-2}$
3D($\theta_c, 3D$)	-66.928	-0.1246	-0.0321	-0.8098 $\times 10^{-2}$	-0.1297 $\times 10^{-2}$	-0.0339 $\times 10^{-2}$
$\sigma_{\beta z}[10^4Pa]$ at $(\alpha = a/2, \beta = 0, z = -h/4)$						
3D(θ_a)	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3D($\theta_c, 1D$)	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3D($\theta_c, 3D$)	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
$\sigma_{zz}[Pa]$ at $(\alpha = a/2, \beta = b/2, z = -h/4)$						
3D(θ_a)	346.96	-27.698	-51.184	-19.624	-3.8665	-0.9796
3D($\theta_c, 1D$)	346.96	-27.698	-51.184	-19.624	-3.8665	-0.9796
3D($\theta_c, 3D$)	14.887	-285.50	-91.627	-25.148	-4.2371	-1.0266

Se diagrammo i risultati avrò che:



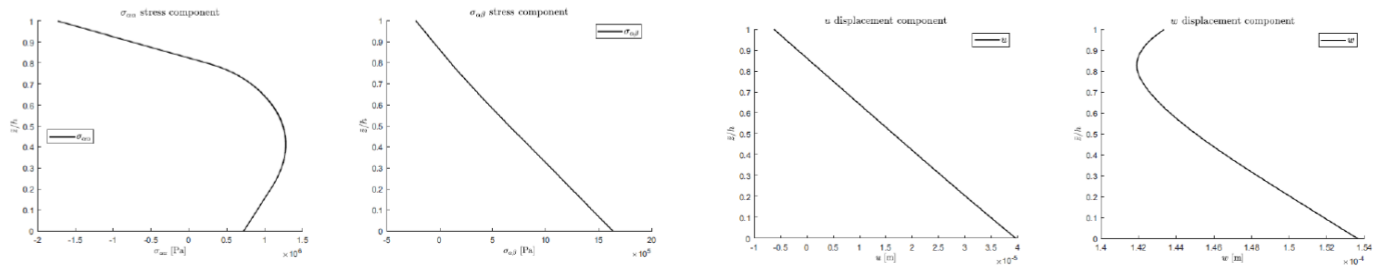
Notiamo che:

- Se è presente l'effetto dello spessore la soluzione 1D e 3D sono diverse così come anche quella lineare che coincide con quella 1D ma se il cilindro è sottile allora tutte le soluzioni coincidono. Anche quella lineare perché si tratta di un materiale isotropo monostrato.
- L'andamento delle σ è più o meno complicato ma non ho nessun carico a top e bottom.
- w e σ_{zz} sono diverse dal lineare perché il carico è di campo, quando h questi carichi quindi non potrà mai applicare la CLT o la FSDT.

16.5.3 Pannello sandwich cilindrico pelle di Al e dentro in PVC

R_a/h	2	5	10	20	50	100
$u[10^{-5}m]$ at $(\alpha = 0, \beta = b/2, z = +h/2)$						
3D(θ_a)	-10.134	-6.2106	0.7010	14.818	57.457	128.61
3D($\theta_c, 1D$)	-10.547	-6.0658	1.7093	17.534	65.279	144.94
3D($\theta_c, 3D$)	-10.428	-6.0160	1.7227	17.536	65.279	144.94
$v[10^{-5}m]$ at $(\alpha = a/2, \beta = 0, z = -h/2)$						
3D(θ_a)	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3D($\theta_c, 1D$)	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3D($\theta_c, 3D$)	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
$w[10^{-5}m]$ at $(\alpha = a/2, \beta = b/2, z = 0)$						
3D(θ_a)	2.8059	15.568	37.159	80.036	208.30	421.89
3D($\theta_c, 1D$)	3.0068	17.794	42.099	90.160	233.78	472.91
3D($\theta_c, 3D$)	3.4353	17.879	42.112	90.159	233.78	472.90
$\sigma_{xx}[10^4Pa]$ at $(\alpha = a/2, \beta = b/2, z = +h/2)$						
3D(θ_a)	40.943	30.197	28.954	28.961	29.193	29.302
3D($\theta_c, 1D$)	57.526	46.613	45.332	45.332	45.565	45.674
3D($\theta_c, 3D$)	50.807	45.457	45.031	45.255	45.553	45.671
$\sigma_{yy}[10^4Pa]$ at $(\alpha = a/2, \beta = b/2, z = -h/2)$						
3D(θ_a)	11.276	5.8276	5.0898	4.8053	4.8300	4.8193
3D($\theta_c, 1D$)	6.0584	0.8660	0.1630	-0.0221	-0.0839	-0.0936
3D($\theta_c, 3D$)	3.7887	0.6018	0.1018	-0.0369	-0.0863	-0.0941

$\sigma_{\alpha\beta}[10^4Pa]$ at $(\alpha = 0, \beta = 0, z = +h/4)$						
3D(θ_a)	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3D($\theta_c, 1D$)	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3D($\theta_c, 3D$)	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
$\sigma_{\alpha z}[10^4Pa]$ at $(\alpha = 0, \beta = b/2, z = +h/4)$						
3D(θ_a)	2.4049	0.8769	0.4277	0.2118	0.0843	0.0421
3D($\theta_c, 1D$)	2.3775	0.8540	0.4130	0.2036	0.0808	0.0403
3D($\theta_c, 3D$)	1.8442	0.8126	0.4077	0.2029	0.0808	0.0403
$\sigma_{\beta z}[10^4Pa]$ at $(\alpha = a/2, \beta = 0, z = -h/4)$						
3D(θ_a)	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3D($\theta_c, 1D$)	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3D($\theta_c, 3D$)	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
$\sigma_{zz}[10^4Pa]$ at $(\alpha = a/2, \beta = b/2, z = -h/4)$						
3D(θ_a)	-22.828	0.1782	0.1182	0.0657	0.0278	0.0142
3D($\theta_c, 1D$)	-728.70	0.2087	0.1288	0.0698	0.0292	0.0148
3D($\theta_c, 3D$)	-273.08	0.2005	0.1273	0.0696	0.0292	0.0148

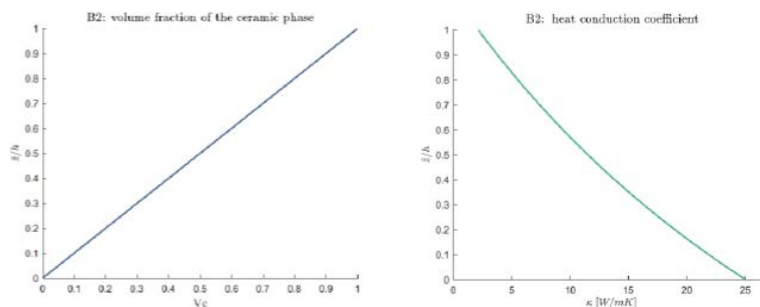


Notiamo che:

- Il modello lineare è come quasi sempre sbagliato
- I modelli 3D e 2D nel caso spesso sono distanti come mi aspettavo ma in entrambi i casi noto che il modello 1D descrive comunque una curva e non una retta come fatto nei casi precedenti. Questo in verità è perfettamente normale e all'interno del modello perché esso costruisce l'andamento delle grandezze con un pezzetto lineare per ogni sottostrato matematico ma se per ogni sottostrato le grandezze variano perché sono in un FGM allora ogni pezzetto lineare avrà pendenze diverse e quindi alla fine la curva che verrà fuori non è una retta.
- Notiamo questo effetto del FGM che fa variare le proprietà in modo graduale anche nel grafico di W che non ha nessun effetto ZigZag.

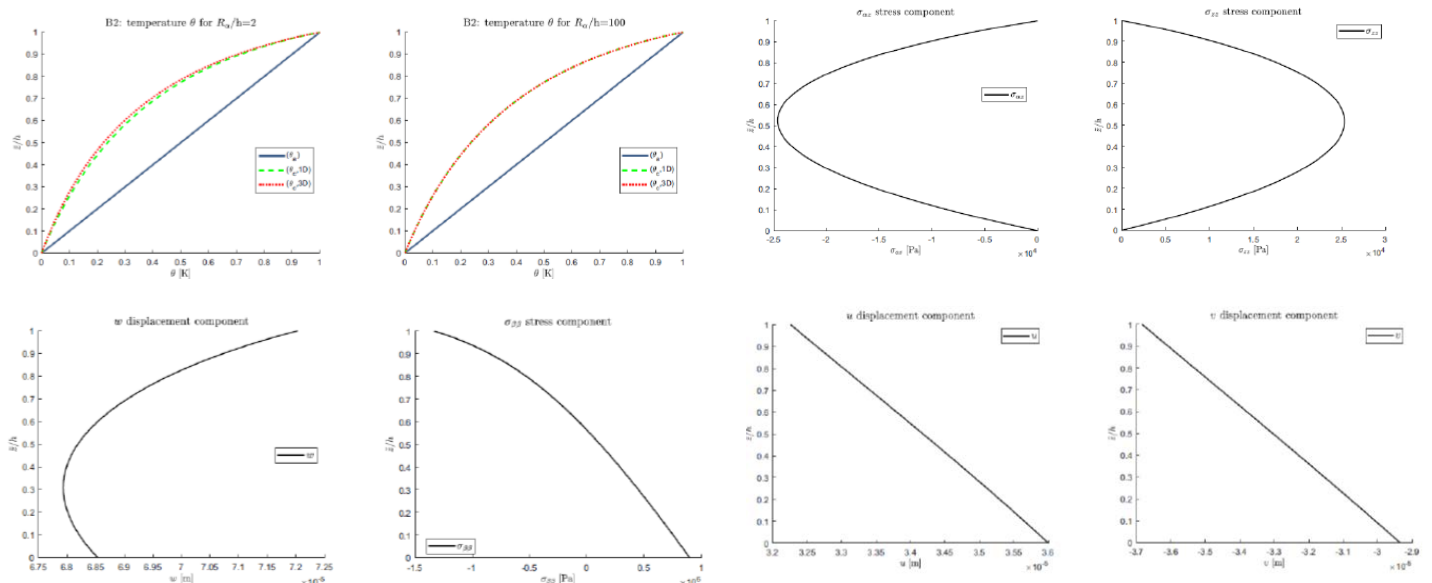
16.5.5 Pannello sandwich cilindrico in FGM con $p=1$

In questo caso, siccome $p=1$, a legge che regola il passaggio tra materiale ceramico e metallico è lineare infatti:



Notiamo che il coefficiente di conduzione del calore varia molto tra metalli e ceramici, in questo caso diminuisce di circa 5 volte.

Il risultato che ottengo è:



Con questo tipo di modello inoltre posso anche considerare e risolvere il problema inverso ovvero calcolare la T che si genera internamente al pezzo se è sottoposto ad un carico meccanico, di solito però questo non viene mai fatto perché si tratta di pochi centesimi di grado in analisi statiche che non sono apprezzabili sperimentalmente.

Se considero l'accoppiamento inoltre è come se la K termomeccanica definisca una rigidità maggiore della K meccanica, in verità gli effetti sono molto piccoli ma notiamo che le frequenze proprie ne sono influenzate e quindi la f termomeccanica < f meccanica. Un altro effetto secondario è quello che facendo un'analisi termomeccanica e una solo meccanica, a parità di carico, lo spostamento misurato dall'analisi termomeccanica sarà minore perché parte dell'energia sarà usata per l'aumento di temperatura del pezzo.

16.6.1 Step per ottenere un modello termo-meccanico disaccoppiato/parzialmente accoppiato 2D

Notiamo che se vogliamo creare un modello 2D i passaggi sono gli stessi:

- Principio variazionale
- Sostituzione delle equazioni costitutive
- Sostituzione delle relazioni geometriche
- Sostituzione in un modello 2D
- Soluzione analitica o agli elementi finiti, noi come sempre faremo la soluzione analitica.

I passi da seguire sono:

First step: Principle of Virtual Displacements (PVD)

In general

$$\int_V (\delta \epsilon_{pG}^T \sigma_{pC} + \delta \epsilon_{nG}^T \sigma_{nC}) dV = -\delta L^{in} + \delta L^e$$

In case of thermal stress analysis:

$$\sum_{k=1}^{N_l} \left\{ \int_{\Omega_k} \int_{A_k} (\delta \epsilon_{pG}^{kT} (\sigma_{pd}^k - \sigma_{pt}^k) + \delta \epsilon_{nG}^{kT} (\sigma_{nd}^k - \sigma_{nt}^k)) d\Omega_k dz_k \right\} = -\sum_{k=1}^{N_l} \delta L_{in}^k + \sum_{k=1}^{N_l} \delta L_e^k$$

- ▷ N_l is the number of layers, Ω_k and A_k are in-plane and thickness integration domains
- ▷ δL_{in}^k and δL_e^k are the inertial and external virtual works at the k^{th} -layer level
- ▷ Superscript k indicates the layer and the superscript T the transpose
- ▷ Subscript G indicates the geometrical relations and C the constitutive ones
- ▷ Subscript d indicates the mechanical part of stresses, subscript t indicates the thermal part of stresses

Il Principio dei Lavori Virtuali è il principio variazionale che usiamo e notiamo essere uguale a prima ma le ϵ sono solo meccaniche mentre le σ introducono anche un accoppiamento termico. Questo è il motivo per cui si dicono parzialmente accoppiate.

Second step: Constitutive equations

- ▷ Stresses for thermal stress analysis have two parts, a mechanical part denoted with the subscript d and a thermal one denoted with the subscript t :

$$\sigma_{pC}^k = \sigma_{pd}^k - \sigma_{pt}^k = Q_{pp}^k \epsilon_{pG}^k + Q_{pn}^k \epsilon_{nG}^k - \lambda_p^k T^k$$

$$\sigma_{nC}^k = \sigma_{nd}^k - \sigma_{nt}^k = Q_{np}^k \epsilon_{pG}^k + Q_{nn}^k \epsilon_{nG}^k - \lambda_n^k T^k$$

- ▷ The coefficients λ_p^k and λ_n^k are linked to the coefficients of thermal expansion α_p^k and α_n^k by:

$$\lambda_p^k = \lambda_{pp}^k + \lambda_{pn}^k = Q_{pp}^k \alpha_p^k + Q_{pn}^k \alpha_n^k$$

$$\lambda_n^k = \lambda_{np}^k + \lambda_{nn}^k = Q_{np}^k \alpha_p^k + Q_{nn}^k \alpha_n^k$$

Notiamo che nel modello c'è l'accoppiamento termomeccanico perché è presente λ che è strettamente legato ai coefficienti di espansione termica.

I valori delle matrici Q e dei vettori α e λ sono poi espressi a seconda del materiale.

Utilizzando l'equazione di Fourier in coordinate curvilinee arrivo a scrivere l'equazione dell'andamento della temperatura che dipende dalle incognite C^K che sono costanti per ogni layer K .

$$T_c(x, y, z) = [C_1^k \cosh(s_1^k z) + C_2^k \sinh(s_1^k z)] \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

Quindi per ogni strato k ho due incognite, se ho un numero N di strati allora abbiamo bisogno di $2N$ equazioni per determinare le incognite.

Avrò che queste equazioni sono:

- Equazioni al bottom e al top della superficie che forniscono già le due condizioni di estremità:

$$T_{bot} = C_1^1 \cosh(s_1^1 z_{bot}) + C_2^1 \sinh(s_1^1 z_{bot})$$

$$T_{top} = C_1^{N_l} \cosh(s_1^{N_l} z_{top}) + C_2^{N_l} \sinh(s_1^{N_l} z_{top})$$

- Equazioni di equilibrio della temperatura per ogni interfaccia e equazioni di equilibrio del flusso di calore all'interfaccia

$$C_1^k \cosh(s_1^k z_t^k) + C_2^k \sinh(s_1^k z_t^k) - C_1^{k+1} \cosh(s_1^{k+1} z_b^{k+1}) - C_2^{k+1} \sinh(s_1^{k+1} z_b^{k+1}) = 0$$

$$s_1^k K_3^k [C_1^k \cosh(s_1^k z_t^k) + C_2^k \sinh(s_1^k z_t^k)]$$

$$- s_1^{k+1} K_3^{k+1} [C_1^{k+1} \cosh(s_1^{k+1} z_b^{k+1}) + C_2^{k+1} \sinh(s_1^{k+1} z_b^{k+1})] = 0$$

Risolvendo il sistema otteniamo i $2N$ coefficienti C^K di cui avevamo bisogno e possiamo scrivere per ogni strato che la temperatura è:

$$T_c(z) = C_1^k \cosh(s_1^k z) + C_2^k \sinh(s_1^k z) \quad \text{with } k = 1, \dots, N_l$$

Quindi conosco il profilo di temperatura che mi serve perché il sistema è disaccoppiato.

16.6.2 Step per ottenere un modello termo-meccanico accoppiato 2D

L'accoppiamento termo-meccanico è dovuto al fatto che nella termoelasticità, che è una branca della meccanica che si occupa degli effetti del calore sulla deformazione e gli stress dei corpi elastici, le deformazioni e gli stress sono prodotti non solo da forze meccaniche ma anche da variazioni di temperatura.

I processi termoelastici non sono reversibili perché anche se la parte elastica lo è la parte termica è dissipativa quindi parte dell'energia viene persa durante il trasferimento di calore.

Notiamo che poi gli effetti del campo di temperatura sul campo di deformazione non è un fenomeno unidirezionale ma si possono considerare anche gli effetti del campo di deformazione sulla temperatura che però sono solitamente trascurabili. Se però considero un sistema totalmente accoppiato questo posso farlo perché ho $\Delta\epsilon$ che è funzione di ΔT e viceversa.

In genere l'accoppiamento è trascurabile e si possono dividere temperatura e deformazione e valutarle separatamente, in questo caso il problema diventa un problema parzialmente accoppiato.

Noi vogliamo studiare un sistema totalmente accoppiato dove sia la temperatura che gli spostamenti sono variabili primarie nelle equazioni di governo termo-meccaniche.

Questo modello totalmente accoppiato permette di analizzare alcuni problemi che sono di particolare interesse per il campo aeronautico e spaziale in un modo molto efficiente e semplice senza dover trovare un profilo di temperatura da applicare al corpo.

Anche in questo caso si lavora in condizioni di equilibrio per cui il transitorio è già terminato. Notiamo che le soluzioni per il caso disaccoppiato e accoppiato sono praticamente le stesse.

- Quando impongo le temperature sulle superfici non metterò più la parte dell'entropia η perché imponendo le temperature essa non varia
- Per quanto riguarda i carichi meccanici voglio vedere cosa succede se applico un carico meccanico in presenza di ΔT , facendo così il pezzo a destra non ci sarà più perché non c'è un flusso termico.

Dopo le opportune sostituzioni ottengo le equazioni di governo che sono riassunte in:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{u\theta} \\ \mathbf{K}_{\theta u} & \mathbf{K}_{\theta\theta} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{p}^i \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{p}^e \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Notiamo che a differenza del caso disaccoppiato sono presenti delle matrici \mathbf{K} che tengono conto degli accoppiamenti tra u e θ . Ho poi i carichi inerziali e i carichi esterni.

A questo punto per trovare la soluzione analitica impongo un andamento sinusoidale agli spostamenti e alle temperature

Governing equations: closed form

- ▷ Navier-type closed form solution is obtained via substitution of harmonic expressions for the displacements and temperature as well as considering the following material coefficients equal zero: $Q_{16} = Q_{26} = Q_{36} = Q_{45} = 0$ and $\lambda_6 = \kappa_{12} = 0$
- ▷ The following harmonic assumptions can be made for the variables, which correspond to simply supported boundary conditions:

$$u_{\tau}^k = \sum_{m,n} (\hat{U}_{\tau}^k) \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right), \quad k = 1, N_l,$$

$$v_{\tau}^k = \sum_{m,n} (\hat{V}_{\tau}^k) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right), \quad \tau = t, b, r,$$

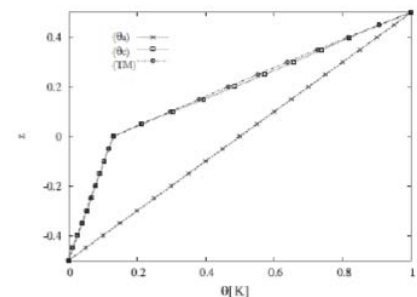
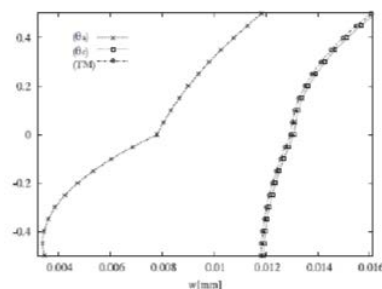
$$(w_{\tau}^k, \theta_{\tau}^k) = \sum_{m,n} (\hat{W}_{\tau}^k, \hat{\theta}_{\tau}^k) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right), \quad r = 2, N,$$

where $\hat{U}_{\tau}^k, \hat{V}_{\tau}^k, \hat{W}_{\tau}^k, \hat{\theta}_{\tau}^k$ are the amplitudes

Posso veder tre esempi di applicazione del modello accoppiato.

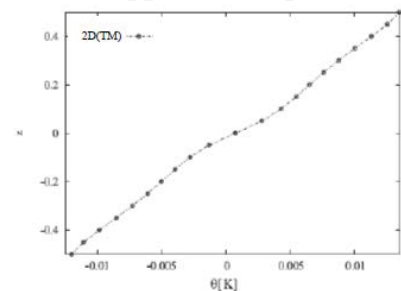
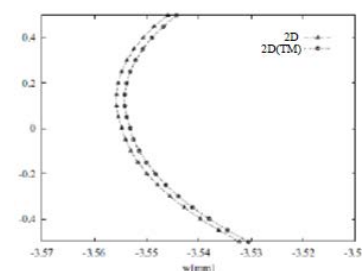
Piastra isotropa sottile (a/h=5) con sovratemperatura applicata al top e al bottom

In questo caso c'è una piccola differenza tra Fourier 3D disaccoppiato e il sistema accoppiato, danno praticamente gli stessi risultati.



Piastra con due strati compositi (90°/0°) con un carico meccanico di -200000Pa applicati al top

Notiamo che anche in questo caso la differenza tra accoppiato e disaccoppiato è praticamente nulla, se considero il caso accoppiato si sposta un po' di più perché un po' dell'energia la sto usando per creare un ΔT .



Il lavoro fatto da uno stress σ_{11} può essere scritto come:

$$\sigma_{11} dx_2 dx_3 \cdot \delta \varepsilon_{11} dx_1 = \sigma_{11} \delta \varepsilon_{11} dv$$

se considero tutte le componenti di stress posso dire che in forma compatta il lavoro è:

$$(\sigma_{11} \cdot \delta \varepsilon_{11} + \sigma_{22} \cdot \delta \varepsilon_{22} + \dots + \sigma_{12} \cdot 2\delta \varepsilon_{12}) dv = \sigma_{ij} \cdot \delta \varepsilon_{ij} dv$$

Il lavoro interno totale può essere ottenuto integrando sul volume del corpo:

$$\delta U = \int_{\Omega_0} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dv$$

Possiamo poi ottenere in modo analogo la forma duale di questa come:

$$\delta U^* = \int_{\Omega_0} \varepsilon_{ij} \delta \sigma_{ij} dv$$

Notiamo che nella prima forma la variabile primaria è δu che è legata a $\delta \varepsilon$ e la variabile secondaria è σ mentre nella seconda forma la variabile primaria è $\delta \sigma$ mentre quella secondaria è ε .

Il simbolo δ è detto OPERATORE VARIAZIONALE.

C'è un analogia tra l'operatore variazionale e l'operatore di differenziale totale infatti se prendiamo una $F(x, u, u')$ allora:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial u} du + \frac{\partial F}{\partial u'} du'$$

Se considero poi x fissato allora $dx=0$ e posso scrivere la variazione di F come:

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \delta u + \frac{\partial F}{\partial u'} \cdot \delta u' + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} (\delta u)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial u'^2} (\delta u')^2 + \dots$$

Siccome δu è piccolo posso trascurare i termini di potenza superiore e ottengo:

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial u} \delta u + \frac{\partial F}{\partial u'} \delta u'$$

Quindi se considero x fissata c'è un analogia tra δ e d . Inoltre possiamo vedere che anche le leggi per effettuare le operazioni sono le stesse:

$$\begin{aligned} \delta(\nabla u) &= \nabla(\delta u) \\ \delta \left(\int_{\Omega} u d\Omega \right) &= \int_{\Omega} \delta u d\Omega \\ \delta(F_1 \pm F_2) &= \delta F_1 \pm \delta F_2 \\ \delta(F_1 F_2) &= \delta F_1 F_2 + F_1 \delta F_2 \\ \delta \left(\frac{F_1}{F_2} \right) &= \frac{\delta F_1}{F_2} - F_1 \left(\frac{\delta F_2}{F_2^2} \right) \\ \delta(F_1)^n &= n(F_1)^{n-1} \delta F_1 \end{aligned}$$

Se poi G è una funzione di molte variabili dipendenti $G(u, v, w)$ allora la variazione totale è la somma di variazioni parziali:

$$\delta G = \delta_u G + \delta_v G + \delta_w G$$

Possiamo **definire il funzionale** come un integrale ad estremi definiti, che quindi ha come risultato un numero, in cui gli integrandi sono funzioni di variabili dipendenti tra di loro.

Per esempio:

$$I(u) = \int_0^L [au(x) + bu'(x) + cu''(x)] dx$$

Dove le variabili sono u, u', u'' e tutte dipendono da x quindi sono dipendenti tra di loro, si nota che poi $I(u)$ è un numero che dipende dalla scelta di u .

Si definisce poi un funzionale come lineare se vale: $I(\alpha u + \beta v) = \alpha I(u) + \beta I(v)$

Notiamo che in questa espressione sono presenti due parti: una parte variazionale e il suo coefficiente. Dove u è detta variabile primaria e il suo coefficiente è detta variabile secondaria.

Possiamo vedere che la specifica della variabile primaria sul punto di bordo crea le **condizioni al contorno essenziali o geometriche** mentre la specifica della variabile secondaria sul punto di bordo crea le **condizioni al contorno naturali o sulle forze**.

Se usiamo il lemma fondamentale del calcolo variazionale otteniamo:

$$G \equiv \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u'} \right) = 0 \quad \text{in } a < x < b$$

se poi $u(a)=u_a$ e $\delta u(b)$ sono arbitrari:

$$0 = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u'} \right) \right] \delta u \, dx + \left(\frac{\partial F}{\partial u'} \right)_{x=b} \delta u(b)$$

Siccome sia δu che $\delta u(b)$ sono arbitrari allora l'espressione sopra implica che sia l'equazione integrale che le condizioni al contorno sono pari a zero separatamente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u'} \right) &= 0, \quad a < x < b \\ \left(\frac{\partial F}{\partial u'} \right) &= 0 \quad \text{at } x = b \end{aligned}$$

Notiamo che la prima equazione saranno le Equazioni di EuleroLagrange mentre la seconda equazione saranno le condizioni al contorno che possono poi essere sulle variabili primarie o secondarie quindi naturali o sul carico.

17.3 Principio dei lavori virtuali

Tutto quello che ho detto precedentemente posso applicarlo al PVD.

Nel PVD definisco il lavoro come $L=\sigma \cdot \delta \epsilon$.

Posso dire che il **Lavoro Virtuale Esterno** è:

$$\delta V = -[\mathbf{F}_1 \cdot \delta \mathbf{u}_1 + \mathbf{F}_2 \cdot \delta \mathbf{u}_2 + \dots + \mathbf{F}_n \cdot \delta \mathbf{u}_n] = - \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{u}_i$$

Se considero l'**ipotesi di corpo rigido** allora il lavoro virtuale interno δU è nullo perché un corpo rigido non ha nessuna deformazione e tutti gli spostamenti avvengono ugualmente in ogni punto.

$$\delta V = - \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{u}_i = - \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \right) \cdot \delta \mathbf{u}$$

Ma in caso di corpo in equilibrio statico la somma delle forze è nulla.

Questo fa sì che, con queste due ipotesi, il lavoro virtuale totale $\delta U + \delta V$ dovuto agli spostamenti virtuali è nullo. Questo è conosciuto come il **Principio dei lavori virtuali**. Possiamo poi notare che questo vale anche per i corpi deformabili ma solo se $\delta U = -\delta V$.

Notiamo che le condizioni al contorno Γ_u e Γ_σ sono scollegate tra di loro e la loro somma è il bordo totale.

Possiamo infine affermare che il Principio dei Lavori Virtuali dice che:

se un corpo continuo, sia rigido che deformabile, è in equilibrio il lavoro virtuale di tutte le forze che si muovono attraverso uno spostamento virtuale è nullo:

$$\delta U + \delta V \equiv \delta W = 0$$

Questo principio è indipendente da qualsiasi legge costitutiva e si può applicare sia se il corpo è elastico che non elastico.

17.3.1 Principio di minimo dell'energia potenziale totale

Lo posso considerare come un caso speciale di PVD che funziona sia con corpi lineari che non lineari elastici. Per i corpi elastici secondo questo principio posso definire una **densità di energia di deformazione** U_0 tale che:

$$\sigma = \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon} \quad \text{or} \quad \sigma_{ij} = \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{ij}}$$

Posso poi scrivere il PVD e sostituire queste grandezze ottenendo:

$$\int_{\Omega_0} \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{ij}} \delta \varepsilon_{ij} dv - \left[\int_{\Omega_0} f_i \delta u_i dv + \int_{\Gamma_\sigma} t_i \delta u_i ds \right] = 0$$

In cui il primo integrale è pari a:

$$\int_{\Omega_0} \delta U_0 dv = \delta U$$

Dove U è il funzionale dell'energia di deformazione interna che vale:

$$U = \int_{\Omega_0} U_0 dv$$

Supponendo che possiamo anche scrivere un potenziale che descrive la variazione virtuale di lavoro fatto da forze di volume e superficie:

$$\begin{aligned} \delta V &= - \left[\int_{\Omega_0} \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} dv + \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} ds \right] \\ &= - \left[\int_{\Omega_0} f_i \delta u_i dv + \int_{\Gamma_\sigma} t_i \delta u_i ds \right] \end{aligned}$$

Si ottiene che il principio dei lavori virtuali diventa:

$$\delta U + \delta V = \delta(U + V) \equiv \delta \Pi = 0$$

Dove π è l'energia potenziale totale del corpo. Con questa equazione posso scrivere il PLV come un minimo del potenziale totale. Tra tutti i possibili spostamenti, quelli che soddisfano le equazioni di equilibrio in modo esatto sono quelli che rendono l'energia potenziale totale minima:

$$\Pi(\mathbf{u}) \leq \Pi(\bar{\mathbf{u}})$$

Quindi dato un problema gli spostamenti ammissibili li chiamo $\bar{\mathbf{u}}$ e tra questi \mathbf{u} saranno gli spostamenti che minimizzeranno l'energia potenziale totale.

Il Principio di Hamilton è una generalizzazione del Principio dei Lavori Virtuali alla dinamica dei sistemi per cui vengono considerate anche forze come la forza di inerzia. Considerando anche la forza di inerzia nasce la necessità di immettere anche l'energia cinetica oltre all'energia potenziale totale nel principio.

Quando introduco lo spostamento virtuale in un sistema dinamico in cui c'è anche la forza di inerzia devo tenere conto che la $\mathbf{u}=\mathbf{f}(\mathbf{x},t)$ quindi dipende anche dal tempo oltre che dallo spazio, questo fa sì che le condizioni al contorno varino. Posso definire delle condizioni al contorno dicendo che $\delta \mathbf{u}=0$ per qualsiasi istante di tempo ma in \mathbf{x} definiti oppure dire che $\delta \mathbf{u}=0$ per qualsiasi valore di \mathbf{x} ma in intervalli di tempo definiti.

Quello che sto facendo è aggiungere il termine:

$$\int_V \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \cdot \delta \mathbf{u} dV$$

al PLV, questo termine è pari a $\int_V \rho \cdot \text{accelerazione} dV = m a$ ovvero è il termine di forza di inerzia che lavora con lo spostamento virtuale $\delta \mathbf{u}$ dove $\delta \mathbf{u}(\mathbf{x},t)$ quindi devo fare attenzione alle condizioni al contorno.

- Soluzioni Forti in cui risolvo direttamente le equazioni differenziali quindi la soluzione che ottengo è valida punto per punto, ottengo una soluzione puntuale
- Soluzioni Deboli in cui ho relazioni integrali per cui non soddisfo l'equazione punto per punto ma rispetto un principio, come quello di minima energia per tutto il corpo, ottengo in questo caso una soluzione integrale.

Con i metodi variazionali noi mettiamo delle soluzioni che otteniamo facendo date ipotesi e applicando dati criteri all'interno del principio variazionale per cui non arriviamo manco alle equazioni di governo. Saranno quindi metodi diretti che mi danno una soluzione in forma debole perché sarà una soluzione frutto di un calcolo integrale.

Noi poi vogliamo che la soluzione goda della proprietà di convergenza e che sia consistente per cui che succeda che all'aumentare del numero N di termini con cui approssimo la soluzione aumenti l'accuratezza e la precisione della soluzione.

Possiamo dire che le equazioni di governo del problema fisico sono anche esse approssimate perché comunque nel modello geometrico o dei carichi faccio sempre delle approssimazioni che non lo rendono perfettamente uguale alla realtà, poi quando lo risolvo posso introdurre eventuali altri errori se uso metodi variazionali o posso fare una soluzione esatta che però come detto sarà la soluzione esatta di equazioni di governo affette da errore.

I principi variazionali che considereremo saranno:

- Metodo di Ritz
- Metodo dei Residui Pesati in cui sostituisco una soluzione approssimata al problema che fa sì che, rispetto alla soluzione esatta, ci sia un residuo che posso usare per ottenere le incognite. Si chiama dei residui pesati perché al fine di ottenere abbastanza equazioni introduco dei pesi per ogni incognita presente nel residuo e poi derivo rispetto alle diverse incognite per ottenere tante equazioni.

17.4.1 Metodo di Ritz

Le soluzioni esatte possono essere ottenute solo in casi particolari come nel caso di piastre isotrope o con angoli di 0° e 90° per cui si usano metodi approssimati come questo.

Il metodo di Ritz è basato su principi variazionali come quello che si usa nel PLV o nel principio di minima energia e genera una soluzione in forma debole siccome, come detto, sostituisco delle forme di soluzione direttamente nel principio variazionale.

Secondo questo metodo si scrive che possiamo approssimare lo spostamento u nel PLV con questa forma approssimata:

$$u \approx U_N = \sum_{j=1}^N c_j \varphi_j + \varphi_0$$

Dove poi devo calcolare le C_j = **coefficienti di Ritz** tale che il potenziale totale sia minimo. Per farlo faccio delle derivate parziali di C_j . Per farlo devo conoscere φ_j che sono le funzioni di approssimazione e la φ_0 che invece sono le funzioni che permettono di rispettare al contorno.

In generale il problema è il calcolo di φ_j che varia ogni volta che varia il carico e la geometria del problema, questo è il motivo per cui è stato introdotto il metodo FEM in cui, grazie all'introduzione della Mesh di elementi molto semplici come triangoli o rettangoli le funzioni φ_j sono facili da calcolare e sono sempre le stesse per ogni tipo di problema e le chiamo funzioni di forma.

Sostituendo l'equazione di U_N nell'equazione di $\Pi(u)$ che devo minimizzare fa sì che il problema si trasformi nella minimizzazione di una funzione del tipo $\Pi(C_j)$ per cui ci saranno tante equazioni algebriche di parametro C_j che devo calcolare.

- Aumentando il valore di N le equazioni che contengono C_j che ho calcolato per casi con N minore non varieranno ovviamente aggiungendo una equazione in più poi la soluzione ovvero i valori dei coefficienti C_j che troverò saranno diversi.
- Se le equazioni algebriche risultanti sono simmetriche anche A sarà simmetrica quindi sarà più facile da risolvere.
- Se il principio variazionale, come il PLV, è non lineare in u allora anche il sistema di equazioni elgebriche sarà composto da equazioni non lineari in C_j , questo in verità non è un problema perché esistono molti metodi numerici per risolverle come quelli di Newton o Newton-Raphson.
- Siccome il campo di spostamenti è approssimato allora anche le deformazioni ε saranno approssimate e siccome poi le σ sono ricavate in postprocessing usando le equazioni costitutive allora anche essi saranno approssimati.
- Le equazioni di equilibrio del problema sono soddisfatte solo nel senso dell'energia, non nel senso delle equazioni differenziali come abbiamo detto.
- Lo spostamento calcolato con il metodo di Ritz, aumentando il numero N di equazioni converge alla soluzione esatta in questo modo:

$$U_1 < U_2 < \dots < U_N < U_{M\dots} < u(\text{exact}), \text{ for } M > N$$
vediamo che quindi è convergente monotona ma arriva dal basso questo perché in generale le soluzioni numeriche sono più rigide del caso reale.
- Il metodo di Ritz può essere applicato a qualsiasi problema che può essere risolto in forma debole quindi posso applicarlo ai problemi strutturali solo se posso scrivere un principio dei lavori virtuali per quel problema, ci saranno dei metodi che generalizzeranno Ritz anche per problemi per cui non è necessario per forza poter scrivere il PLV.

17.4.2 Metodo dei Residui Pesati

Consideriamo un'equazione nella forma:

$$A(u) = f \text{ in } \Omega$$

$$B_1(u) = \hat{u} \text{ on } \Gamma_1, \quad B_2(u) = \hat{g} \text{ on } \Gamma_2$$

Dove la A(u) è un'equazione di secondo grado per cui devo scrivere due condizioni al contorno che saranno sugli spostamenti u e sulle loro derivate quindi sugli stress.

$$A(u) = -\frac{d}{dx} \left(a \frac{du}{dx} \right), \quad B_1(u) = u, \quad B_2(u) = a \frac{du}{dx}$$

Anche in questo caso cerchiamo una soluzione numerica del tipo:

$$U_N = \sum_{j=1}^N c_j \varphi_j + \varphi_0$$

Vediamo che se calcoliamo A(U_N)-f allora ottengo un numero diverso da 0 perché la soluzione con U_N è approssimata, chiamo questa differenza residuo R_N.

$$R_N = A \left(\sum_{j=1}^N c_j \varphi_j + \varphi_0 \right) - f \neq 0$$

Se considerassi solo questa equazione però avrei una sola equazione che non mi permette di trovare C_j , passiamo quindi alla forma integrale:

$$\int_{\Omega} \psi_i R_N(c_i, \varphi_i, f) \, d\mathbf{x} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

Si chiama metodo dei residui pesati perché è importante scegliere bene le funzioni di peso ψ_i per determinare nel modo esatto le incognite C_j .

In generale le funzioni φ_j e φ_0 devono rispettare tutte le caratteristiche che avevano anche nel caso del metodo di Ritz eccetto che in questo caso devono rispettare tutte le condizioni al contorno quindi sia condizioni sugli spostamenti che sulle loro derivate quindi sui carichi perché sono presenti entrambe.

17.4.4 Metodo dei minimi quadrati

In questo caso quello che viene fatto è minimizzare il quadrato del residuo.

$$\min I(c_i) \equiv \int_{\Omega} |R_N(c_j, \varphi_j, f)|^2 d\mathbf{x}$$

Questo posso scriverlo anche come:

$$\int_{\Omega} 2R_N(c_j, \varphi_j, f) \frac{\partial R_N}{\partial c_i} d\mathbf{x} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

in cui ho il residuo e la derivata del residuo che rappresenta il peso

Infatti:

$$\psi_i = \frac{\partial R_N}{\partial c_i} = A(\varphi_i)$$

quindi le funzioni peso, usando questo metodo, sono fatte così con $\frac{\partial R_N}{\partial c_i}$ che però è una funzione di φ_i per cui posso scrivere che $\psi_i = A(\varphi_i)$.

Sostituendo tutto ottengo un funzionale che mi da due condizioni al contorno perché una sarà sulla velocità e l'altra sulla posizione.

$$I(u) = \frac{1}{2} \left\{ \int_{\Omega} [A(u) - f]^2 d\Omega + \int_{\Gamma_1} [B_1(u) - \hat{u}]^2 d\Gamma + \int_{\Gamma_2} [B_2(u) - \hat{g}]^2 d\Gamma \right\}$$

17.4.5 Metodo di collocazione

In questo caso il residuo sarà funzione di un certo numero di incognite e può essere scritto come:

$$R_N(\mathbf{x}^i, \{c\}, \{\phi\}, f) = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

Notiamo che stiamo ponendo il residuo a 0 in alcuni punti dove il N di punti è pari al numero di incognite, come abbiamo detto precedentemente.

Posso scriverlo in forma integrale usando il delta di Dirac:

$$\int_{\Omega} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^i) R_N(\mathbf{x}, \{c\}, \{\varphi\}, f) d\mathbf{x} = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

Usando il delta di Dirac sto dicendo che il valore della funzione va a 1 solo nei punti \mathbf{x}_i che ho scelto io, in quei punti sto imponendo che il residuo è nullo.

17.4.6 Conclusioni

In generale abbiamo detto che i principi variazionali come il PLV sono usati per ottenere le equazioni di governo, nel nostro caso delle piastre, mentre i metodi variazionali come quelli di Galerkin o di Ritz sono usati per ottenere le soluzioni approssimate di queste equazioni di governo, nel nostro caso sempre per problemi di piastre o di aste.

In generale in tutti i metodi variazionali lo step più dispendioso è la selezione delle funzioni φ_i che diventa sempre più complicato man mano che la geometria diventa complessa o discontinua. Queste limitazioni sono superate dal modello FEM che usa funzioni di forma sempre trovate in modo simile a φ_i ma, grazie all'introduzione della mesh, analizza sempre gli stessi elementi che possono essere rettangoli o triangoli per i quali le funzioni di forma sono molto più semplici.

Equazioni del moto

$$\underline{f}_I = \underline{f}_I = - \begin{bmatrix} \mu \ddot{u} \\ \mu \ddot{v} \\ \mu \ddot{w} \end{bmatrix} \quad \ddot{u} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \ddot{v} = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad \ddot{w} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad \ddot{\underline{u}}^T = \ddot{\underline{u}}^T = [\ddot{u} \quad \ddot{v} \quad \ddot{w}]$$

\underline{f}_I are the inertial forces and μ is the mass density

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x &= \mu \ddot{u} \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_y &= \mu \ddot{v} \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_z &= \mu \ddot{w} \end{aligned} \quad \boxed{\underline{D}^* \underline{\sigma} = \underline{f} - \mu \ddot{\underline{u}} \quad \text{or} \quad \underline{Q}^* \underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{f} - \mu \ddot{\underline{u}}}$$

Se avessi che l'accelerazione fosse nulla otterrei le equazioni indefinite di equilibrio.

Equazioni costitutive che scrivo per il materiale isotropo

$$\sigma_x = 2G\varepsilon_x + \lambda I_{1\varepsilon}$$

$$\sigma_y = 2G\varepsilon_y + \lambda I_{1\varepsilon}$$

$$\sigma_z = 2G\varepsilon_z + \lambda I_{1\varepsilon}$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}, \quad \tau_{xz} = G\gamma_{xz}, \quad \tau_{yz} = G\gamma_{yz}$$

$$I_{1\varepsilon} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

First deformation invariant

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

First Lamé constant (or elastic shear modulus) and second Lamé constant

For isotropic materials

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2G+\lambda & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 2G+\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & 2G+\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} \quad \underline{Q} = \underline{C} = \begin{bmatrix} 2G+\lambda & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 2G+\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & 2G+\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \quad \boxed{\underline{\sigma} = \underline{C} \underline{\varepsilon} \quad \text{or} \quad \underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{Q} \underline{\underline{\sigma}}}$$

Constitutive operator or matrix of elastic coefficients

Dove $I_{1\varepsilon}$ è l'invariante di deformazione che è dovuto al fatto che se io allungo il materiale in una direzione, che potrebbe essere la direzione x allora si accorcia in direzione y e z.

Inverso delle equazioni costitutive che quindi legano ε e σ per un materiale isotropo al contrario delle equazioni costitutive

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

$$\gamma_{xy} = \tau_{xy}/G, \quad \gamma_{xz} = \tau_{xz}/G, \quad \gamma_{yz} = \tau_{yz}/G$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix}$$

\underline{C}^{-1} is the inverse of the constitutive operator

$$\boxed{\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{C}^{-1} \underline{\underline{\sigma}}}$$

Stress in termini di spostamenti sono le leggi di Hooke scritte in funzione degli spostamenti sostituendo $\varepsilon = du/dx$

Le equazioni fondamentali che abbiamo determinato sono quindi:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}\mathbf{u} \quad \rightarrow \text{Congruence equation}$$

$$\mathbf{D}^* \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f} - \mu \ddot{\mathbf{u}} \quad \rightarrow \text{Equilibrium equation}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} \quad \rightarrow \text{Constitutive equation}$$

Possiamo poi dire che:

$$\mathbf{L}\mathbf{u} = \mathbf{f} - \mu \ddot{\mathbf{u}}$$

Dove \mathbf{L} è una matrice di rigidità e \mathbf{f} è il vettore dei carichi quindi vale 0 se faccio un'analisi vibrazionale mentre $\ddot{\mathbf{u}}$ è il vettore delle accelerazioni che vale 0 se faccio un'analisi statica.

Il processo e le equazioni che vengono usate nel **caso statico** sono:

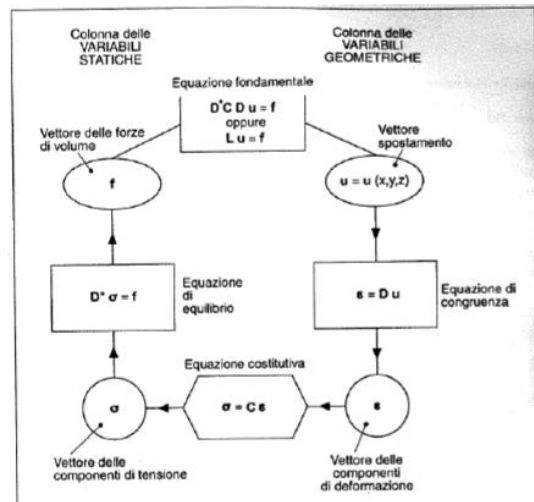


Figura A.1. Schema delle variabili e delle equazioni del problema dell'equilibrio elastico formulato per il solido elastico tridimensionale.

Il processo e le equazioni che vengono usate in un **caso dinamico** sono:

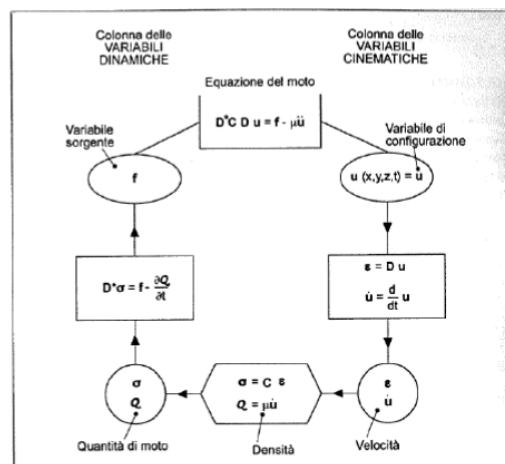


Figura A.2. Variabili ed equazioni del problema di equilibrio dinamico.

Notiamo che nel caso dinamico lo spostamento è solo funzione del tempo poi abbiamo le legge di hooke nel rombo sotto dove c è Q che dipende dal tempo.

Vediamo adesso alcuni esempi per capire se le equazioni possono ricavare i casi fisici che ho già studiato.

18.1 Vibrazioni longitudinali di un asta

Il vettore degli spostamenti \mathbf{u} ha solo un componente diverso da 0 che dipende da x e t :

$$\mathbf{u} = u(x, t) \quad \mathbf{v} = \mathbf{w} = \mathbf{0}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \ddot{w} \neq 0$$

Grazie a queste ipotesi le prime due equazioni del moto possono essere scritte come:

$$G \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + f_z = \mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

Se $f = 0$ e $T = G$ ho le vibrazioni libere della membrana:

$$T \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

Dove $c = \sqrt{T/\mu}$ è la velocità di propagazione dell'onda, noto che essa dipende da quanto tiro la membrana quindi dalla tensione applicata.

18.3 Corda vibrante

Considero adesso il caso di vibrazioni di una corda longitudinale. In questo caso ho solo v diverso da 0 quindi:

$$\mathbf{u}^T = [u \quad v \quad w] = [0 \quad v(x, t) \quad 0]$$

L'equazione diventa:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + q(x, t) \quad q = f_y/\mu \quad c = \sqrt{G/\mu}$$

Da cui ricavo la velocità di propagazione dell'onda che dipende dalla tensione della corda (T) dopo aver fatto le opportune sostituzioni.

$$c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

18.4 Onde elastiche 3D

Le tre equazioni del moto in termini di spostamenti possono essere scritte nei modi seguenti se considero che le forze di volume sono nulle ($f_x = f_y = f_z = 0$)

$$(\lambda + G) \frac{\partial I_{1k}}{\partial x} + G \nabla^2 u = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$(\lambda + G) \frac{\partial I_{1k}}{\partial y} + G \nabla^2 v = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

$$(\lambda + G) \frac{\partial I_{1k}}{\partial z} + G \nabla^2 w = \mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

usando gli operatori che conosco l'equazione può essere riscritta come:

$$(\lambda + G) \text{grad div } \mathbf{u} + G \nabla^2 \mathbf{u} = \mu \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}$$

Da questo caso possiamo ricavare due soluzioni particolari:

- Onde irrotazionali o onde di espansione
- Onde di pura rotazione

18.4.1 Onde di espansione

Le onde di espansione sono irrotazionali, di conseguenza, sono anche chiamate onde irrotazionali.

Le componenti $\omega_x \omega_y \omega_z$ possono essere definite come:

$$\omega_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad \omega_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad \omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

I collegamenti tra le variabili meccaniche e statiche (stress interni S e forze esterne F) e i collegamenti tra variabili cinematiche (spostamenti u e deformazioni e) è possibile usando una formulazione del principio del lavoro virtuale che è duale per i due casi.

L'equazione costitutiva è:

$$\mathbf{S} = \mathbf{C} \mathbf{e}$$

Dove C contiene i coefficienti elastici.

Le equazioni generatrici che si solito devo risolvere saranno invece nella forma:

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{F}$$

Da qui posso ottenere il vettore degli spostamenti nodali in modo molto semplice facendo l'inverso di K :

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F}$$

Questa equazione è l'equazione finale dei Metodi degli spostamenti o Metodo dell'equilibrio che si usa come ultima equazione un'equazione di equilibrio e poi da lì, attraverso gli spostamenti posso determinare le tensioni e le deformazioni.

Il metodo duale a questo è il Metodo delle forze o Metodo di Congruenza in cui l'ultima equazione è un'equazione di congruenza per cui partirò da un'equazione di equilibrio e scriverò le equazioni di congruenza.

Un esempio di questo è:

- Metodo degli spostamenti (o equilibrio) lo uso quando uso il PLV per calcolare gli spostamenti in un punto.
- Metodo delle forze (o di congruenza) lo uso quando uso il PLV per calcolare l'iperstatica.

I principi variazionali che uso abbiamo visto che possono essere visti come principi di soddisfazione di un minimo di energia potenziale.

$$\Pi = \Phi + H$$

Total potential energy Elastic potential energy Potential of the external loads: $H = -\mathbf{F}^T \mathbf{u}$

Noi cerchiamo il minimo dell'energia potenziale totale.

Alcuni esempi sono i principi stazionari del potenziale di Reissner o del potenziale di Hu-Washizu.

Questi principi variazionali sono usati per creare dei Metodi agli spostamenti.

Il Principio variazionale duale sono principi di minimo del potenziale complementare totale:

$$\Pi_c = \Psi - \mathcal{R}^T \boldsymbol{\eta}$$

Total complementary potential energy Complementary energy Potential of the constraint reactions where \mathcal{R} is the vector of the constraint reactions and $\boldsymbol{\eta}$ is the vector of the displacements imposed in the constraints.

Questi principi variazionali sono usati per creare Metodi alle forze.

Le equazioni:

$$\mathbf{e} = \mathbf{D} \mathbf{u} \quad , \quad \mathbf{D}^T \mathbf{S} = \mathbf{F} \quad , \quad \mathbf{S} = \mathbf{C} \mathbf{e} \quad \text{and} \quad \mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{F}$$

sono quelle usate per trovare la soluzione del problema degli spostamenti.

Nel caso si usi il metodo delle forze ci sono 4 equazioni che sono duali alle precedenti 4.

Quello che sto facendo è:

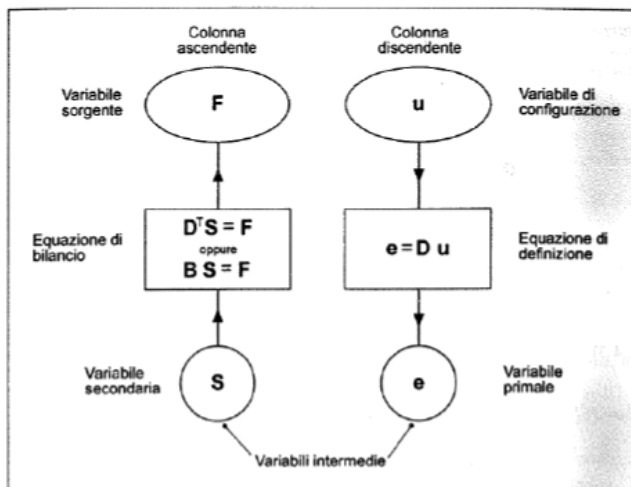


Figura 1.4. Colonne delle variabili geometriche e statiche.

Devo trovare dei modi per legare le due colonne, un metodo e scrivere che $\sigma = C\epsilon$ e che $F = Ku$ ma vedremo che esse possono essere sostituite dal PLV.

Le equazioni di equilibrio che scrivo si basano sul fatto che lo stress nella molla causato dalle forze esterne deve dare un sistema equilibrato.

$$\begin{aligned} X_1 - X_2 &= F_1 \\ X_2 - X_3 &= F_2 \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Equilibrium or balance operator

In forma compatta:

$$BS = F \quad \rightarrow \quad D^T S = F$$

$$B = D^T$$

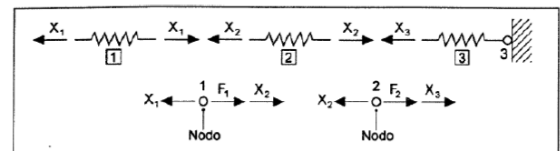


Figura 1.3. Sforzi applicati ai nodi ed alle molle.

A questo punto applico il **Principio dei Lavori Virtuali**.

Il sistema con le forze esterne F_i e le forze interne X_i è un sistema equilibrato per cui posso scrivere:

$$D^T S = F \quad \rightarrow \quad \text{Equilibrium}$$

$$e = Du \quad \rightarrow \quad \text{Congruence}$$

Dove i due sistemi sono indipendenti.

Il lavoro virtuale esterno posso definirlo come:

$$\delta L_e = F^T u = [F_1 \ F_2] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = F_1 u_1 + F_2 u_2 = u^T F$$

Il Lavoro virtuale interno lo definisco come:

$$\delta L_i = S^T e = [X_1 \ X_2 \ X_3] \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = X_1 e_1 + X_2 e_2 + X_3 e_3 = e^T S$$

Se applico il principio dei lavori virtuali ottengo:

$$\delta L_e = \delta L_i \quad \rightarrow \quad F^T u = S^T e \quad \rightarrow \quad F_1 u_1 + F_2 u_2 = X_1 e_1 + X_2 e_2 + X_3 e_3$$

Questo può essere dimostrato in 4 modi:

1) Comincio dalla definizione di lavoro virtuale esterno:

$$\delta L_e = F^T u = S^T Du \quad \text{where} \quad F^T = (D^T S)^T = S^T (D^T)^T = S^T D$$

$$F_1 \delta u_1 + F_2 \delta u_2 = X_1 \delta e_1 + X_2 \delta e_2 + X_3 \delta e_3$$

Questo permette di imporre le condizioni di equilibrio:

$$\delta e_1 = \delta u_1, \quad \delta e_2 = \delta u_2 - \delta u_1, \quad \delta e_3 = -\delta u_2 \quad \longrightarrow \quad (F_1 - X_1 + X_2) \delta u_1 + (F_2 - X_2 + X_3) \delta u_2 = 0$$

Il vettore δu è arbitrario e l'ultima relazione deve essere vera per ogni variazione δu_1 δu_2 quindi mettendo alternativamente δu_1 o δu_2 nulle ottengo le equazioni di equilibrio:

$$\left. \begin{array}{ll} \delta u_1 \neq 0 \text{ e } \delta u_2 = 0 & \longrightarrow F_1 - X_1 + X_2 = 0 \\ \delta u_1 = 0 \text{ e } \delta u_2 \neq 0 & \longrightarrow F_2 - X_2 + X_3 = 0 \end{array} \right\}$$

Abbiamo quindi dimostrato che il Principio dei Lavori Virtuali è una formulazione alternativa dell'equilibrio ed è equivalente a scrivere le equazioni di equilibrio.

In forma compatta posso scrivere:

$$\mathbf{F}^T \delta \mathbf{u} = \mathbf{S}^T \mathbf{D} \delta \mathbf{u} \quad \longrightarrow \quad (\mathbf{F}^T - \mathbf{S}^T \mathbf{D}) \delta \mathbf{u} = 0 \quad \longrightarrow \quad \delta \mathbf{u} \neq 0 \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{c} \mathbf{F}^T - \mathbf{S}^T \mathbf{D} = 0 \\ \text{or} \\ \mathbf{F} = \mathbf{D}^T \mathbf{S} \end{array}$$

Nella soluzione reale consideriamo una variazione auto-equilibrata dello stress interno $\delta X_1, \delta X_2, \delta X_3$ che è in grado di equilibrare le forze esterne F_1 e F_2 . Questo vuol dire che $X_1 + \delta X_1, X_2 + \delta X_2, X_3 + \delta X_3$ devono soddisfare le seguenti equazioni:

$$X_1 + \delta X_1 - X_2 - \delta X_2 = F_1$$

$$X_2 + \delta X_2 - X_3 - \delta X_3 = F_2$$

Per cui se il sistema era in equilibrio senza avere applicato nessuna variazione dei carichi allora anche se applico una variazione di carichi δX_i deve rimanere in equilibrio.

In forma matriciale posso scrivere:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta X_1 \\ \delta X_2 \\ \delta X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}$$

Che può essere scritto come:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta X_1 \\ \delta X_2 \\ \delta X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{D}^T \delta \mathbf{S} = \mathbf{0} \quad \delta \mathbf{S}^T = [\delta X_1 \quad \delta X_2 \quad \delta X_3]$$

Se considero, per ipotesi, che esista solo la variazione di carico δX_3 allora questa determina una reazione δR nel nodo 3 dell'elemento 3. Possiamo quindi scrivere:

$$F_1 = 0, F_2 = 0, \quad \delta X_1, \delta X_2, \delta R = \delta X_3$$

il lavoro virtuale esterno è:

$$\delta L_e = F_1 u_1 + F_2 u_2 + \delta X_3 u_3 = 0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + \delta R u_3 = \delta R u_3$$

mentre il lavoro virtuale interno posso scriverlo come:

$$\delta L_i = \delta X_1 e_1 + \delta X_2 e_2 + \delta X_3 e_3 = \delta \mathbf{S}^T \mathbf{e} = \mathbf{e}^T \delta \mathbf{S}$$

Per cui nel caso in esame in cui applico un'unica forza il principio dei lavori virtuali può essere scritto come:

$$\delta L_i = \delta L_e \quad \longrightarrow \quad \delta R u_3 = \delta X_1 e_1 + \delta X_2 e_2 + \delta X_3 e_3 \quad \longrightarrow \quad \delta R u_3 = \delta \mathbf{S}^T \mathbf{e} \quad \longrightarrow \quad \delta R u_3 = \mathbf{e}^T \delta \mathbf{S}$$

Questo principio, come abbiamo detto, è una forma alternativa di congruenza. E' quindi equivalente alle equazioni di congruenza.