



*centroappunti.it*

CORSO LUIGI EINAUDI, 55/B - TORINO

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: **2589A**

ANNO: 2025

# APPUNTI

STUDENTE: Andrea Forno

MATERIA: Dinamica delle Strutture Aerospaziali - Prof.  
Gherlone

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

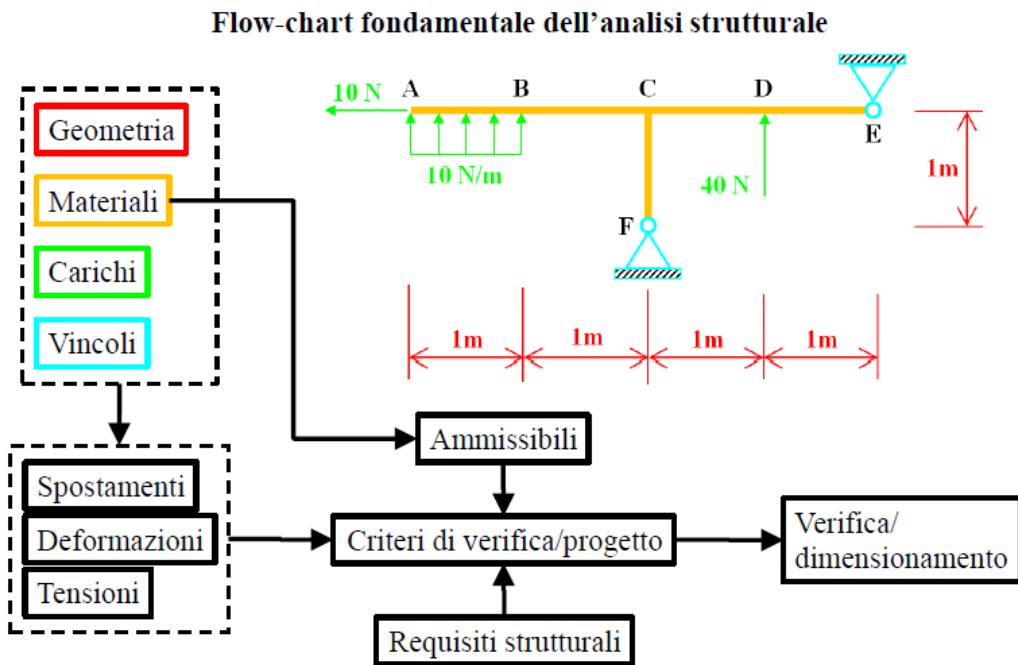
ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTI E NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.  
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.

## Sommario

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Introduzione .....</b>  | <b>4</b>  |
| Carichi dinamici .....   | 5         |
| <b>1.Dinamica dei sistemi ad un GDL.....</b>                     | <b>7</b>  |
| 1.1    Vibrazioni libere non smorzate .....                      | 9         |
| 1.2    Vibrazioni libere smorzate .....                          | 12        |
| 1.3    Vibrazioni forzate e smorzate.....                        | 17        |
| 1.3.1    Caso Statico.....                                       | 20        |
| 1.3.2    Risposta a gradino .....                                | 28        |
| 1.3.3    Risposta all'impulso .....                              | 29        |
| 1.3.4 Risposta a forzante generica.....                          | 32        |
| 1.3.5 Eccitazione indotta dalla base.....                        | 34        |
| 1.3.6 Trasformata di Laplace .....                               | 35        |
| 1.3.7 Trasformata di Fourier .....                               | 36        |
| 1.3.8 Recettanza,Mobilità e Inertanza .....                      | 38        |
| <b>2. Sistemi a N gradi di libertà .....</b>                     | <b>40</b> |
| 2.1 Vibrazioni libere non smorzate.....                          | 41        |
| 2.1.1 Esempio .....  | 44        |
| 2.1.2 Generalizzazione .....                                     | 46        |
| 2.1.3 Normalizzazione degli autovettori.....                     | 48        |
| 2.1.4 Riduzione dei sistemi.....                                 | 50        |
| 2.2 Vibrazioni forzate non smorzate .....                        | 52        |
| 2.3 Profilo Alare Infinito .....                                 | 56        |
| 2.4 Lo smorzamento .....   | 58        |
| 2.5 Passi per l'analisi dinamica di sistemi a NDOF (ESAME) ..... | 61        |
| <b>3. Sistemi continui.....</b>                                  | <b>63</b> |
| 3.1    Problema e metodi di soluzione .....                      | 67        |
| 3.2    Trave di Eulero-Bernoulli .....                           | 68        |
| 3.2.1 Equazioni del moto di Eulero-Bernoulli.....                | 69        |
| 3.3.2 Vibrazione assiale .....                                   | 78        |
| 3.3.3 Vibrazione trasversale.....                                | 81        |
| 3.3.4 Metodo di Rayleigh-Ritz .....                              | 87        |
| 3.3 Trave Rotante.....   | 93        |
| 3.3.1 Vibrazioni libere della trave rotante.....                 | 95        |
| 3.3.2 Effetto della massa concentrata .....                      | 97        |
| 3.3.3 Esempio .....  | 99        |
| 3.4 Trave di Timoshenko .....                                    | 100       |
| 3.4.1 Confronto tra Eulero-Bernoulli e Timoshenko .....          | 102       |

|   |            |
|---|------------|
| 3.5 Piastra di Kirchoff .....                                 | 103        |
| 3.5.1 Esempi .....  | 111        |
| 3.6 Piastra di Mindlin .....                                  | 112        |
| 3.6.1 Confronto tra Mindlin e Kirchoff .....                  | 115        |
| <b>4. Analisi strutturale dinamica con il metodo FEM.....</b> | <b>116</b> |
| 4.1 Asta .....  | 121        |
| 4.2 Trave .....   | 122        |
| 4.3 Barra di Torsione .....                                   | 126        |
| 4.4 Trave nello spazio (Eulero Bernulli) .....                | 126        |
| 4.5 Trave nello spazio (Timoshenko) .....                     | 127        |
| 4.6 Matrice Lumped .....                                      | 127        |
| 4.7 Riduzione.....  | 128        |

# Introduzione



L'analisi strutturale permette di passare da carichi, vincoli, materiali e geometria che conosco a spostamenti, deformazioni e tensioni che sono le incognite del problema.

Questi risultati sono poi usati per capire se i requisiti strutturali sono rispettati o meno. Per farlo si usano dei Criteri di Verifica o di Progetto che permettono di verificare se i valori ottenuti delle incognite stanno all'interno degli Ammissibili.

I criteri di Progetto sono fatti a priori quindi io progetto la struttura in modo che, per esempio, la  $\delta_{max} < \delta_{rottura}$  mentre i criteri di Verifica sono fatti a posteriori quindi dopo aver creato la struttura verifico che effettivamente la  $\delta_{max} < \delta_{rottura}$ .

Fino ad adesso abbiamo sempre usato requisiti di tipo Statico:

➤ **Robustezza:**

Capacità di sopportare i carichi. Il criterio di solito si esprime in termini di tensione o di carico.

$$\sigma_A \equiv \frac{F_A}{S} < \sigma_R \equiv \frac{F_R}{S}$$

➤ **Rigidezza:**

Capacità di limitare l'entità della deformazione della struttura, in genere è importante che una struttura non si deformi troppo per funzionare al meglio e non toccare altre parti.

$$\eta < \eta_{lim}$$

Si esprimere tipicamente in termini di spostamento o di deformazione ma per i materiali compositi può essere espressa in funzione di  $\epsilon$  e  $\gamma$ .

➤ **Stabilità:**

Capacità di mantenere una configurazione di equilibrio sotto carico, noi in genere siamo interessati ad avere una struttura con una configurazione di equilibrio stabile.

$$\sigma_A = \frac{F_A}{S} < \sigma_{cr} = \frac{F_{cr}}{S}$$

Il criterio si esprime di solito in termini di tensione o di carico.

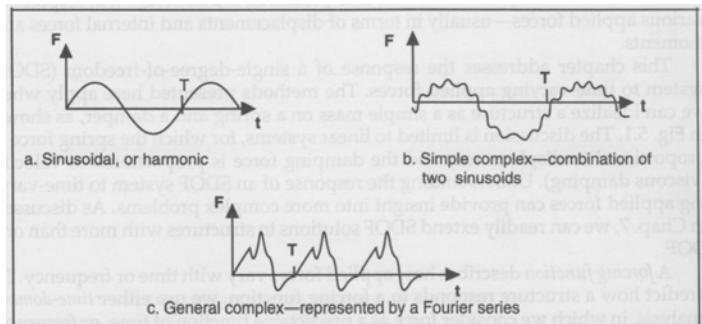
ES. un asta sottoposta a carichi di compressione non si muoverà troppo dalla sua posizione di equilibrio sono se il  $\sigma < \sigma_{critico}$

**Periodici:** un «pattern» della durata  $T$  («periodo») che si ripete nel tempo.

Possono essere ulteriormente divisi in:

Armonici: espressi da una funzione armonica (come un seno o un coseno) con un ben preciso periodo. In questo caso ho una sola armonica.

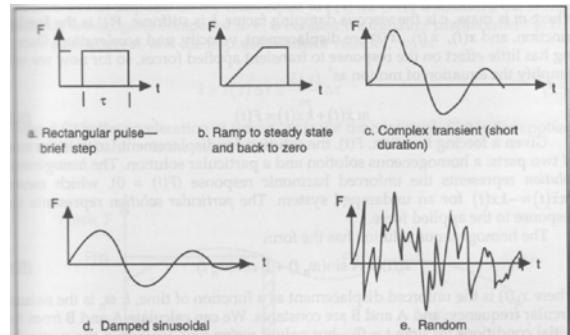
Complessi: combinazione di funzioni armoniche ciascuna con un suo periodo ma con periodi multipli tra di loro per cui dopo un tempo  $T$  tutte sono tornate allo stato iniziale. Per capire da quante armoniche è formato è necessario fare un Analisi di Fourier.



**Non periodici:** non esiste un «pattern» periodico e quindi un periodo  $T$ .

Possono essere ulteriormente divisi in:

- Transienti: di durata limitata quindi con un inizio e una fine (al limite anche impulsivi, cioè di durata teoricamente nulla).
- Periodici smorzati: carichi armonici con ampiezza che si riduce nel tempo
- Random: senza alcuna particolare regolarità



Notiamo che la grandezza caratterizzante i carichi dinamici è il tempo perché se il carico è troppo rapido la struttura non riesce ad adeguarsi in tempo e se il tempo caratteristico della struttura e il periodo del carico sono simili si ha la Risonanza. Questo fa sì che le equazioni siano EQUAZIONI DEL MOTO e non DI EQUILIBRIO e che quindi in tutte le equazioni ci sia il tempo.

Questo comporta che:

- Materiali: dobbiamo considerare anche la massa e lo smorzamento tipico oltre che le costanti  $E$  e  $\gamma$ .
- Carichi: oltre alla loro distribuzione nello spazio (concentrati o distribuiti) siamo interessati alla loro distribuzione nel tempo.
- Vincoli: oltre ai vincoli come li abbiamo visti ovvero le condizioni al contorno è necessario indicare le condizioni iniziali del problema.

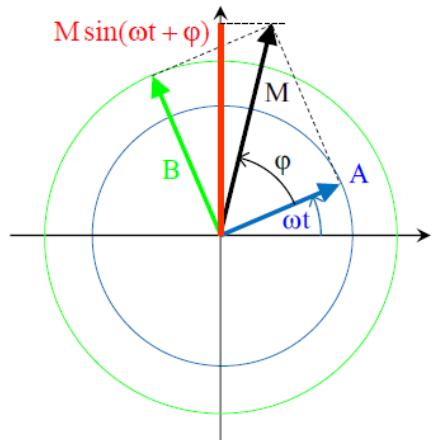
Tutto questo fa sì che i risultati dell'Analisi Strutturelle ovvero le Deformazioni, gli Spostamenti e le Tensioni dipendano da  $x, y, z$  ma anche da  $t$ .

notiamo poi che l'ampiezza dei vettori varia perché l'accelerazione avrà ampiezza  $A^* \omega^2$  mentre la velocità avrà ampiezza  $A^* \omega$ .

Posso poi usare i vettori rotanti nel piano complesso per sommare funzioni armoniche (seno e coseno) con la **stessa pulsazione** attraverso le proiezioni verticali di vettori rotanti.

$$\begin{aligned} & A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t) \\ &= A \sin(\omega t) + B \sin(\omega t + \pi/2) \\ &= M \sin(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M &\equiv \sqrt{A^2 + B^2} \\ \varphi &\equiv \arctan\left(\frac{B}{A}\right) \end{aligned}$$



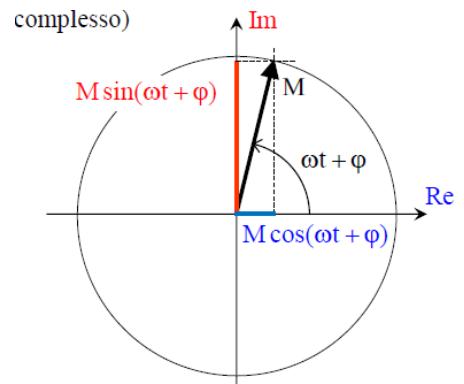
E' anche possibile considerare contemporaneamente la proiezione verticale (funzione seno) e la proiezione orizzontale (funzione coseno) in una sola funzione armonica rappresentata da un vettore rotante nel piano complesso (esponenziale complesso).

Notiamo che:

- Parte Reale → proiezione orizzontale
- Parte Immaginaria → proiezione verticale

Notiamo che:

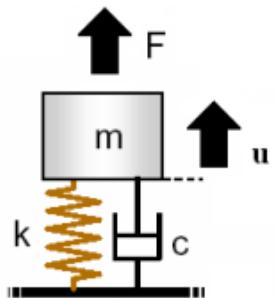
$$\begin{aligned} & M \cos(\omega t + \varphi) + jM \sin(\omega t + \varphi) \\ &= M e^{j(\omega t + \varphi)} \end{aligned}$$



A questo punto possiamo considerare il **sistema massa-molla-smorzatore** ad un grado di libertà.

Dove:

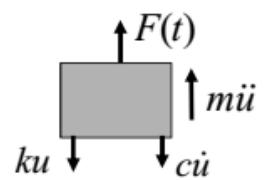
- La molla è lineare con costante elastica k
- Lo smorzatore è viscoso con smorzamento c
- E' presente una forza esterna



L'unico grado di libertà del sistema è u.

L'equazione del moto può essere ricavata usando la **seconda legge di Newton** e considerando le forze applicate al sistema e la sua accelerazione.

$$\sum F = ma \Rightarrow -ku - cu + F(t) = m\ddot{u} \Rightarrow m\ddot{u} + cu + ku = F(t)$$



Possiamo usare anche le **Equazioni di Lagrange** per ottenere l'equilibrio:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_k}{\partial \dot{u}} \right) + \left( \frac{\partial \Delta}{\partial \dot{u}} \right) + \left( \frac{\partial E_p}{\partial u} \right) = \left( \frac{\partial L_e}{\partial u} \right)$$

Dove:

- $E_k$  = Energia Cinetica
- $E_p$  = Energia Potenziale

$$\ddot{u} + \omega_n^2 u = 0$$

$$u(t=0) = U_0$$

$$\dot{u}(t=0) = \dot{U}_0$$

Vogliamo risolvere l'equazione differenziale e per farlo sappiamo che la soluzione sarà del tipo:

$$u(t) = M * e^{yt}$$

$$\dot{u}(t) = M * y * e^{yt}$$

$$\ddot{u}(t) = M * y^2 * e^{yt}$$

Sostituendo ottengo:

$$My^2 e^{yt} + \omega_n^2 M e^{yt} = 0$$

Da cui si nota che l'unica parte diversa da 0 dopo aver raccolto è:

$$y^2 + \omega_n^2 = 0$$

da cui ricavo che:

$$y_{1,2} = \mp \sqrt{\omega_n^2} = \mp i * \omega_n$$

La soluzione sarà una combinazione lineare delle due soluzioni:

$$u(t) = M_1 e^{y_1 t} + M_2 e^{y_2 t} = M_1 e^{i\omega_n t} + M_2 e^{-i\omega_n t} = M_1 [\cos(\omega_n t) + i \sin(\omega_n t)] + M_2 [\cos(\omega_n t) - i \sin(\omega_n t)]$$

$$u(t) = \cos(\omega_n t) * [M_1 + M_2] + \sin(\omega_n t) * i[M_1 - M_2]$$

Quindi se introduce  $A_1 = M_1 + M_2$  e  $A_2 = M_1 - M_2$  ottengo:

$$u(t) = \cos(\omega_n t) * A_1 + \sin(\omega_n t) * A_2$$

Posso calcolare la derivata:

$$\dot{u}(t) = -A_1 \omega_n \sin(\omega_n t) + A_2 \omega_n \cos(\omega_n t)$$

Se applico le condizioni al contorno ricavo  $A_1$  e  $A_2$ .

Alla fine ottengo i valori di velocità e accelerazione.

$$u(t) = U_0 \cos(\omega_n t) + \frac{\dot{U}_0}{\omega_n} \sin(\omega_n t)$$

$$\dot{u}(t) = \dot{U}_0 \cos(\omega_n t) - \omega_n U_0 \sin(\omega_n t)$$

Notiamo che grazie al fatto che le condizioni iniziali sono diverse da 0 la struttura vibra altrimenti non lo farebbe perché non è applicata nessuna forza.

Ricalcolando le energie coinvolte nel moto del sistema, si ha:

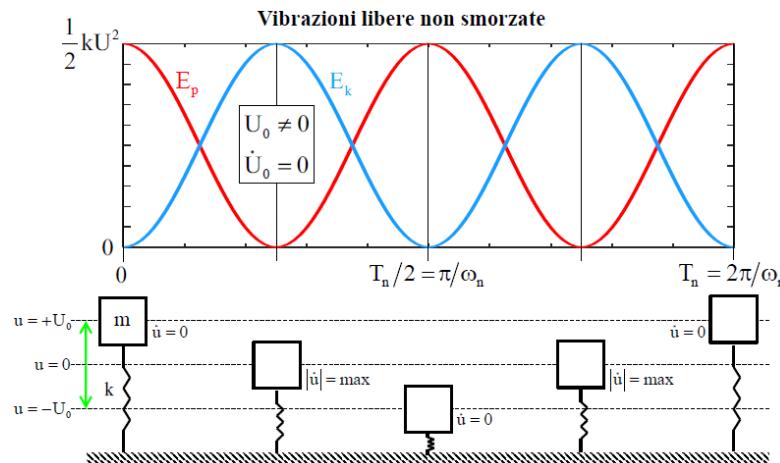
$$E_k = \frac{1}{2} m \dot{u}^2 = \frac{1}{2} m U^2 \omega_n^2 \cos^2(\omega_n t + \varphi) = \frac{1}{2} k U^2 \cos^2(\omega_n t + \varphi)$$

$$E_p = \frac{1}{2} k u^2 = \frac{1}{2} k U^2 \sin^2(\omega_n t + \varphi)$$

Si vede che, durante il moto del sistema:

$$E_k + E_p = \frac{1}{2} k U^2 = \text{cost}$$

quindi non ci saranno dissipazioni di energie e alternativamente le due energie sono una massima e l'altra nulla ma la somma rimarrà costante, questo lo si può notare anche dal grafico:



Notiamo che nella posizione di molla a riposo allora  $E_{pot}=0$  ma  $E_{cin}=Max$  quindi la velocità è massima mentre nella posizione di massima compressione o estensione della molla la  $E_{pot}=Max$  e  $E_{cin}=0$  quindi la massa è ferma.

Si può anche vedere che il periodo di oscillazione dell'energia è la metà del periodo di oscillazione della velocità.

Riassumendo ,le **vibrazioni libere non smorzate** (attivate quindi da condizioni iniziali non entrambe nulle) sono caratterizzate da:

- frequenza pari a quella propria del sistema ( $f_n = \omega_n / 2\pi$ ) e corrispondente periodo ( $T_n = 1 / f_n$ )
- ampiezza costante nel tempo e dipendente dalla pulsazione propria e dalle condizioni iniziali
- uno scambio continuo e senza dissipazioni tra energia cinetica (della massa) ed energia potenziale (della molla)

## 1.2 Vibrazioni libere smorzate

In questo caso si ha un sistema massa-molla-smorzatore non soggetto a forzanti esterne e quindi nuovamente messo in moto da condizioni iniziali non nulle.

L'equazione del moto e le relative condizioni iniziali sono:

Facendo tutti i conti otteniamo:

$$u(t) = e^{-\zeta \omega_n t} \left( U_0 \cos(\omega_d t) + \frac{\dot{U}_0 + \zeta \omega_n U_0}{\omega_d} \sin(\omega_d t) \right)$$

$$\dot{u}(t) = e^{-\zeta \omega_n t} \left( \dot{U}_0 \cos(\omega_d t) - \omega_n \frac{\omega_n U_0 + \zeta \dot{U}_0}{\omega_d} \sin(\omega_d t) \right)$$

$$\omega_d \equiv \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

Notiamo che l'espressione di  $u(t)$  possiamo vederla anche come:

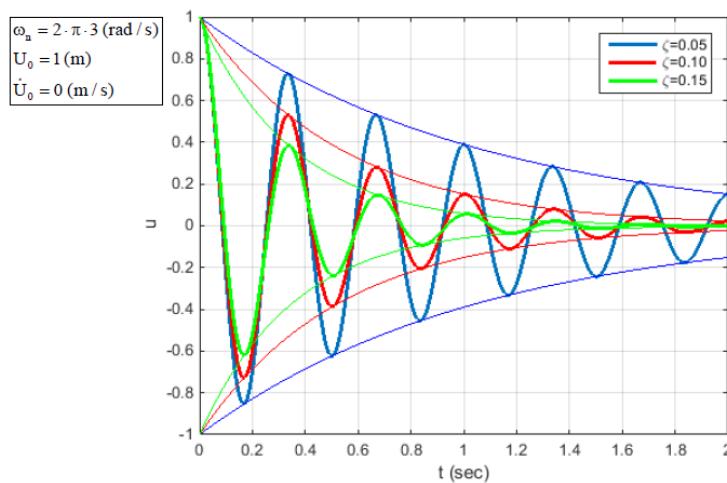
$$u(t) = A \cos(\omega_d t) + B \sin(\omega_d t) = U \operatorname{sen}(\omega_d t + \phi)$$

Da qua si nota che  $u(t)$  oscilla tra  $+U$  e  $-U$  ma se mettiamo anche l'esponenziale allora:

$$u(t) = U e^{-\zeta \omega_n t} \operatorname{sen}(\omega_d t + \phi)$$

Quindi la seconda parentesi oscilla tra -1 e 1 ma l'esponenziale la limita tra le due curve  $\pm U e^{-\zeta \omega_n t}$ .

Il grafico che otteniamo è:



Di questo grafico notiamo che:

- Se  $\zeta$  cresce, quindi il sistema diventa più smorzato allora la regione di oscillazione si fa più stretta a causa della presenza delle curve dell'esponenziale.
- La frequenza di vibrazione del sistema smorzato è legata a  $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$  dove  $f_d = f_n \sqrt{1 - \zeta^2}$  è la frequenza caratteristica di questo sistema che notiamo però variare in funzione di  $\zeta$ .

Riassumendo possiamo dire che:

Le vibrazioni libere smorzate con  $\zeta < 1$  (**sotto-smorzate**) sono caratterizzate da:

- frequenza pari a quella propria del sistema ( $f_d$ ) e corrispondente periodo ( $T_d = 1/f_d$ ), anche definito **pseudo-periodo** dato che si riferisce ad una funzione non propriamente periodica, la frequenza propria del sistema smorzato  $f_d$  è inferiore a quella del corrispondente sistema non smorzato  $f_n$  (per fattori di smorzamento inferiori al 10% tale differenza è inferiore allo 0.5%).
- ampiezza decrescente nel tempo secondo una funzione esponenziale caratterizzata dal termine esponenziale che fa sì che dopo un tempo sufficiente, la vibrazione si estingua.

Possiamo anche calcolare di quanto si smorza il sistema da un picco a quello successivo:

$$y_{1,2} = -\zeta \omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$$

Quindi sotto la radice ho un numero positivo che fa sì che la soluzione siano due radici distinte:

$$y_{1,2} = -\zeta \omega_n \pm \omega_d \quad \omega_d \equiv \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$$

La soluzione quindi sarà:

$$y(t) = M_1 e^{y_1 t} + M_2 e^{y_2 t} = M_1 e^{-\zeta \omega_n t} e^{-\omega_d t} + M_2 e^{-\zeta \omega_n t} e^{\omega_d t} = e^{-\zeta \omega_n t} (M_1 e^{-\omega_d t} + M_2 e^{\omega_d t})$$

Anche in questo caso imponendo le condizioni al contorno otterrei  $M_1$  e  $M_2$  ma solitamente si preferisce usare le funzioni:

$$\cosh(x) = (e^x + e^{-x})/2 \text{ e } \sinh(x) = (e^x - e^{-x})/2$$

da cui si ricava:

$$e^x = (\cosh(x) + \sinh(x))/2 \text{ e } e^{-x} = (\cosh(x) - \sinh(x))/2$$

Se questi li sostituisco agli esponenziali nell'equazione ottengo:

$$y(t) = e^{-\zeta \omega_n t} (A_1 \cosh(\omega_d t) + A_2 \sinh(\omega_d t))$$

Posso ricavare  $A_1$  e  $A_2$  in modo che rispettino le condizioni iniziali e ottengo:

$$u(t) = e^{-\zeta \omega_n t} \left( U_0 \cosh(\omega_d t) + \frac{\dot{U}_0 + \zeta \omega_n U_0}{\omega_d} \sinh(\omega_d t) \right)$$

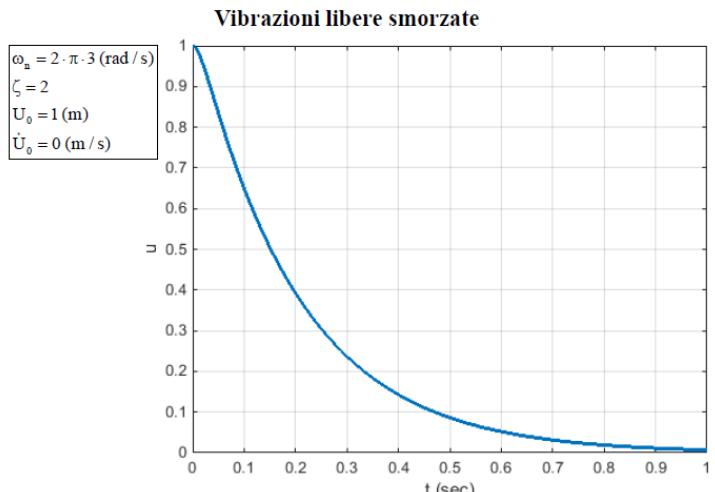
$$\dot{u}(t) = e^{-\zeta \omega_n t} \left( \dot{U}_0 \cosh(\omega_d t) - \omega_n \frac{\omega_n U_0 + \zeta \dot{U}_0}{\omega_d} \sinh(\omega_d t) \right)$$

Notiamo che i cosh e i senh sono usati perché permettono di avere la soluzione in una forma simile a quella che abbiamo ottenuto per gli altri casi. Le funzioni senh e cosh però non sono funzioni periodiche ma esponenziali quindi non oscilla nulla.

Se vediamo il grafico per questo caso notiamo che è molto simile a quello che ottengo per  $\zeta = 1$  ma in questo caso va a 0 più lentamente a parità di condizioni iniziali.

Anche in questo caso non ci sarà nessuna oscillazione perché sono tutte funzioni esponenziali.

Possiamo vedere la differenza tra i casi a  $\zeta = 1$  e  $\zeta > 1$  facendo variare di poco  $\zeta$  attorno a 1.  
Notiamo che in tutti i casi parte dalla condizione iniziale e tende a 0 ma c'è differenza nel punto in cui la curva è a  $t=1$  perché come possiamo notare dal grafico:



- $\zeta < 1$  la molla, seppur di poco, si comprime quindi ho almeno un'oscillazione
- $\zeta = 1$  la molla per la prima volta non si comprime
- $\zeta > 1$  la molla non ha nessuna oscillazione

La soluzione generale dell'omogenea associata,  $u_f(t)$ , è riconducibile al caso già trattato delle vibrazioni libere smorzate, con l'accortezza che le condizioni iniziali vanno ora applicate alla somma  $u_f(t) + u_p(t)$  quindi le costanti di integrazione calcolate precedentemente non sono più valide.

$$u(t=0) = u_f(t=0) + u_p(t=0) = U_0$$

$$\dot{u}(t=0) = \dot{u}_f(t=0) + \dot{u}_p(t=0) = \dot{U}_0$$

$u_f(t)$  è nota a meno delle due costanti di integrazione (da determinarsi appunto con le condizioni iniziali)

$$u_f(t) = \begin{cases} e^{-\zeta \omega_n t} [C_1 \cos(\omega_n t) + C_2 \sin(\omega_n t)] & 0 < \zeta < 1 \\ e^{-\omega_n t} [C_1 + C_2 t] & \zeta = 1 \\ e^{-\zeta \omega_n t} [C_1 \cosh(\omega_n t) + C_2 \sinh(\omega_n t)] & \zeta > 1 \end{cases}$$

Si noti che, in presenza di smorzamento,  $u_f(t)$  si esaurisce sempre dopo un **transitorio** e la soluzione a **regime** è  $u_p(t)$ . Questo si può notare anche dal fatto che  $u_f(t)$  è moltiplicato per un esponenziale decrescente che quindi dopo un po' si esaurisce, terminato il transitorio.

Ci concentriamo sul trovare  $u_p(t)$ .

La soluzione particolare dell'equazione completa,  $u_p(t)$ , dipende dal tipo di forzante  $F(t)$ .

Al fine di introdurre alcuni fondamentali concetti relativi alle vibrazioni forzate, utilizzeremo una forzante armonica di ampiezza  $F_0$  e pulsazione  $\omega$ :

$$F(t) = F_0 e^{j\omega t}$$

Sceglierla in questo modo è utile perché permetterà in seguito di confrontare la pulsazione  $\omega$  della forzante con la  $\omega_n$  del sistema.

Possiamo poi notare che l'equazione differenziale a coefficienti costanti è lineare per cui vale il principio di sovrapposizione degli effetti: la soluzione nel caso di una combinazione lineare di forzanti è la corrispondente combinazione lineare di soluzioni

Considerato poi che una qualunque funzione periodica può essere scritta (tramite serie di Fourier) come combinazione lineare di funzioni armoniche, si capisce l'importanza della particolare forzante scelta.

La soluzione particolare dell'equazione completa è:

$$\ddot{u}_p + 2\zeta\omega_n \dot{u}_p + \omega_n^2 u_p = \frac{F_0 e^{j\omega t}}{m}$$

Se ad essa sostituisco l'equazione di  $u_p(t)$  che decidiamo di usare e le sue derivate:

$$u_p(t) = u_0 e^{j(\omega t - \varphi)}$$

ottengo:

$$-\omega^2 u_0 e^{j(\omega t - \varphi)} + 2\zeta\omega_n j\omega u_0 e^{j(\omega t - \varphi)} + \omega_n^2 u_0 e^{j(\omega t - \varphi)} = \frac{F_0 e^{j\omega t}}{m}$$

Da qua semplifico  $e^{j\omega t}$  e ottengo:

$$u_0 e^{-j\varphi} [-\omega^2 + \omega_n^2 + j2\zeta\omega_n \omega] = \frac{F_0}{m}$$

Si può quindi considerare l'equazione del moto come un equilibrio dinamico rappresentato da un poligono delle forze rotante.

Notiamo che le forze che devono essere considerate le ricavo dall'equazione completa moltiplicando per m:

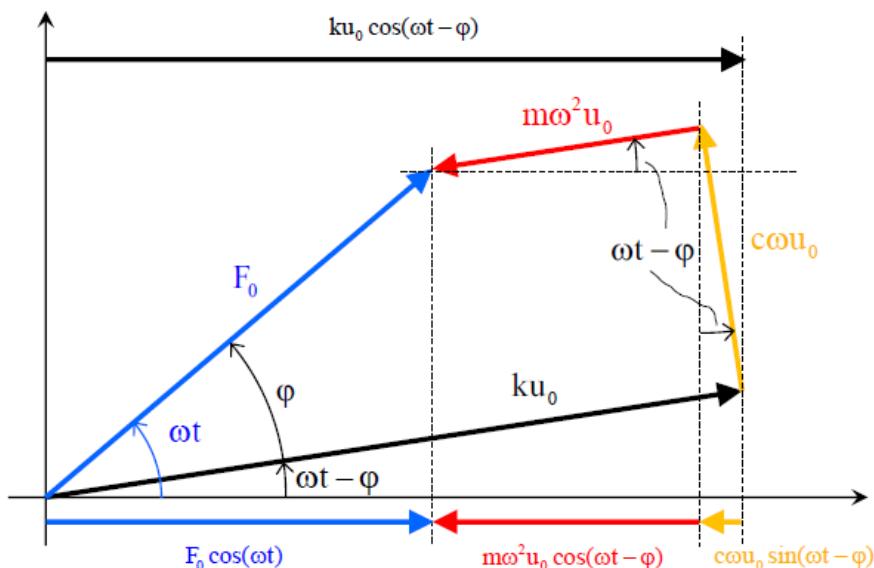
$$m\ddot{U}_p + c\dot{U}_p + \ddot{k}U_p = F(t)$$

$$F_{\text{inerzia}} + F_{\text{smorzamento}} + F_{\text{elastica}} = F_{\text{esterna}}$$

Dove poi:

- $F_{\text{esterna}} = F_0 e^{j\omega t}$ .
- $F_{\text{elastica}} = kU_p$  dove  $U_p$  ha la forma che conosco  $u_p(t) = u_0 e^{j(\omega t - \varphi)}$  che è in ritardo di  $\varphi$  rispetto alla  $F_{\text{est}}$ .
- $F_{\text{smorzamento}} = c\dot{U}_p$  dove  $U_p$  ha la forma che conosco  $u_p(t) = u_0 e^{j(\omega t - \varphi)}$  che genera un vettore rotante in anticipo di  $90^\circ$  rispetto ad  $U_p$  perché è la sua derivata.
- $F_{\text{inerzia}} = m\omega^2 u_0 e^{j(\omega t - \varphi)}$  che è una derivata seconda di  $u_p$  e quindi in ritardo di  $90^\circ$  rispetto alla  $F_{\text{smorzamento}}$  che è la derivata prima.

Da queste considerazioni ricavo:



Notiamo che il poligono è chiuso perché rappresenta l'equilibrio, infatti, tutte le forze sono equilibrate dalla forza esterna.

### 1.3.1 Caso Statico

Se consideriamo un caso statico abbiamo che  $F(t) = F_0 = \text{cost}$ . Se faccio un caso statico il sistema non oscilla quindi  $\omega = 0$  e la  $\beta = 0$ .

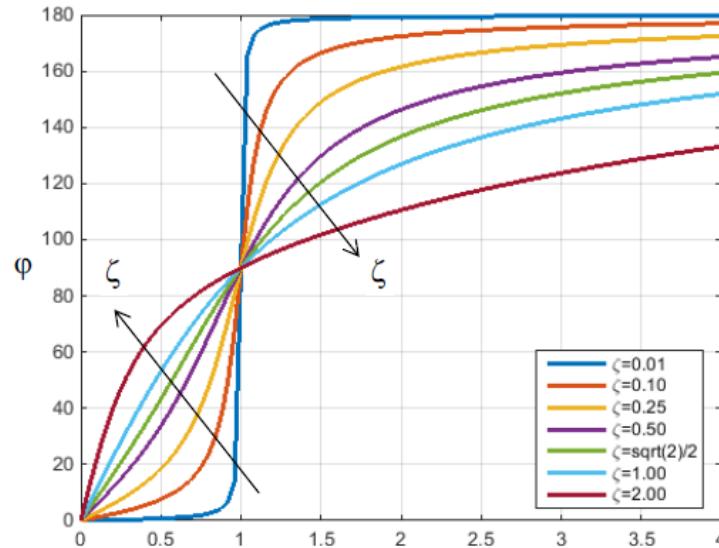
Mi aspetto che  $U_p(t) = U_0 = \text{cost}$  quindi le derivate saranno nulle.

L'equazione del moto diventa:

$$ku_0 = F_0 \text{ da cui posso ricavare } u_0$$

Notiamo che la risposta al caso statico è in fase con  $F(t)$  perché sono tutte funzioni costanti quindi non si genera ritardo di conseguenza se  $\varphi$  è il ritardo tra la risposta e la forzante dinamica sarà anche il ritardo tra la risposta dinamica e statica.

Per quanto riguarda il grafico di  $\varphi = f(\beta)$  in funzione di  $\zeta$ :



Notiamo che se la frequenza del carico è alta si tende ad avere un ritardo di  $180^\circ$ , se la frequenza è bassa non abbiamo nessun ritardo, a  $\beta = 1$  il ritardo è di  $90^\circ$ .

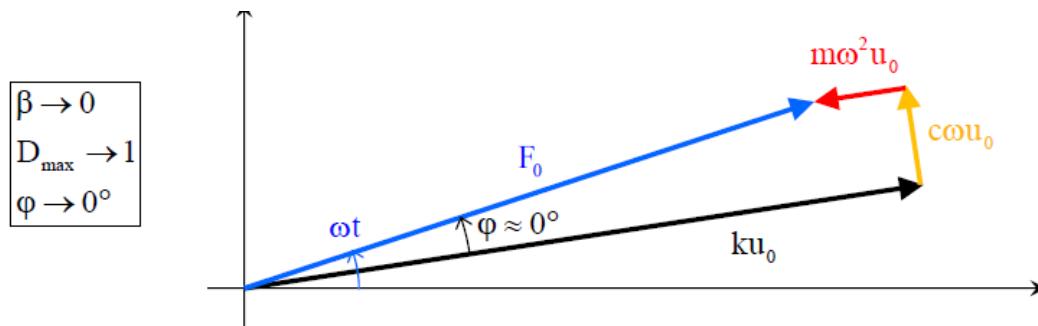
Studiamo adesso le regioni caratteristiche del sistema:

**β=0 Dmax=1 e φ=0°**

Nel caso in cui la frequenza della forzante,  $\omega$ , sia molto inferiore a quella propria del sistema,  $\omega_n$ , in pratica quest'ultimo risponde staticamente (con la stessa ampiezza e senza ritardo rispetto alla forzante).

Velocità e accelerazione sono trascurabili così come le relative forze viscosa e di inerzia

E' la forza elastica della molla a bilanciare il carico e si parla di **risposta dominata dalla rigidezza** (massa e smorzamento non hanno praticamente effetto).



**β=inf Dmax=0 e φ=180°**

Nel caso in cui la frequenza della forzante,  $\omega$ , è molto superiore a quella propria del sistema,  $\omega_n$ , la risposta ha una ampiezza che si riduce notevolmente al crescere di ed è in ritardo di  $180^\circ$  rispetto alla forzante

E' la forza di inerzia a bilanciare il carico esterno quasi da sola per cui si parla di **risposta dominata dalla massa** (rigidezza e smorzamento non hanno quasi effetto)

Si nota che tale massimo è presente (e comunque  $> 1$ ) solo se

$$\zeta \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Si può notare che nella condizione di risonanza a  $\beta = 1$  ho anche la massima forza applicata al pavimento.

Con buona approssimazione, se  $\zeta < 0.1$  allora  $\max_{\beta} (D_{\max}) \approx \frac{1}{2\zeta}$  questa quantità è definita Quality Factor.

Analizziamo ora la soluzione completa nel caso di funzione armonica (in particolare sinusoidale) e di sistema sotto-smorzato ( $\zeta < 1$ ) perché fino ad adesso abbiamo visto cosa succede alla soluzione  $u_p(x)$  che è a regime.

Consideriamo in questo caso che:

$$F(t) = \text{Im}(F_0 e^{j\omega t}) = F_0 \sin(\omega t)$$

Da cui ricavo che la soluzione al sistema:

$$\begin{aligned} \ddot{u} + 2\zeta\omega_n \dot{u} + \omega_n^2 u &= \frac{F_0 \sin(\omega t)}{m} \\ u(t=0) &= U_0 \\ \dot{u}(t=0) &= \dot{U}_0 \end{aligned}$$

Sarà come abbiamo detto la somma di sue soluzioni:

$$u = u_f + u_p = e^{-\zeta\omega_n t} [C_1 \cos(\omega_d t) + C_2 \sin(\omega_d t)] + u_0 \sin(\omega t - \phi)$$

dove tutti i coefficienti sono già stati definiti e calcolati, tranne  $C_1$  e  $C_2$  che sono determinati imponendo le condizioni iniziali:

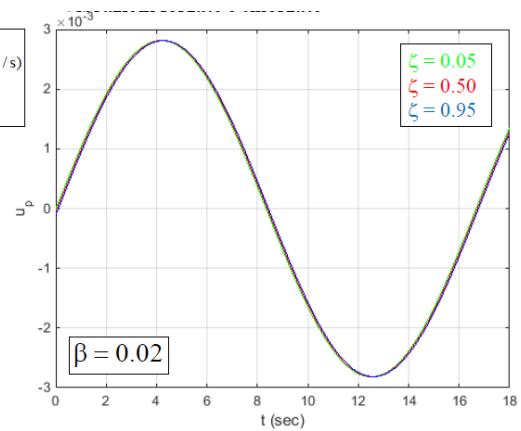
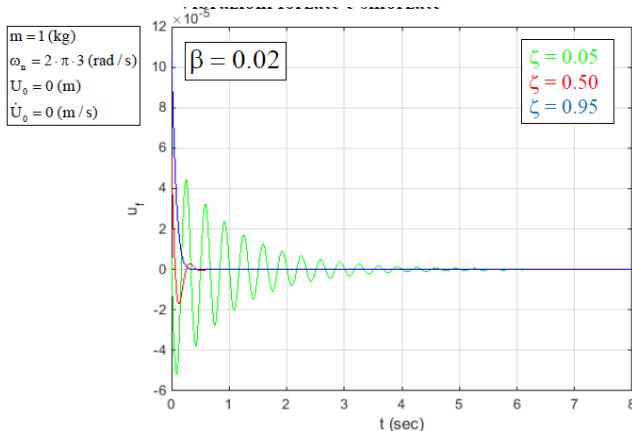
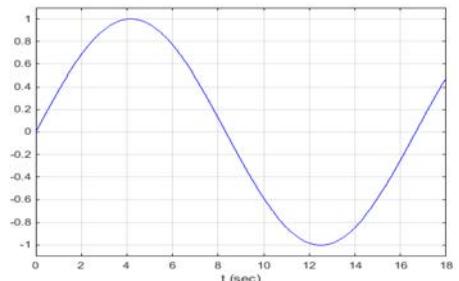
$$C_1 = U_0 + u_0 \sin(\phi) \quad C_2 = [\dot{U}_0 + \zeta\omega_n U_0 + u_0 (\zeta\omega_n \sin(\phi) - \omega \cos(\phi))] / \omega_d$$

Vediamo adesso degli esempi di andamento considerando  $U_0 = 0$  e  $\dot{U}_0 = 0$ , in cui è quindi la forzante che fa muovere tutto, vediamo cosa cambia al variare di  $\beta$ .

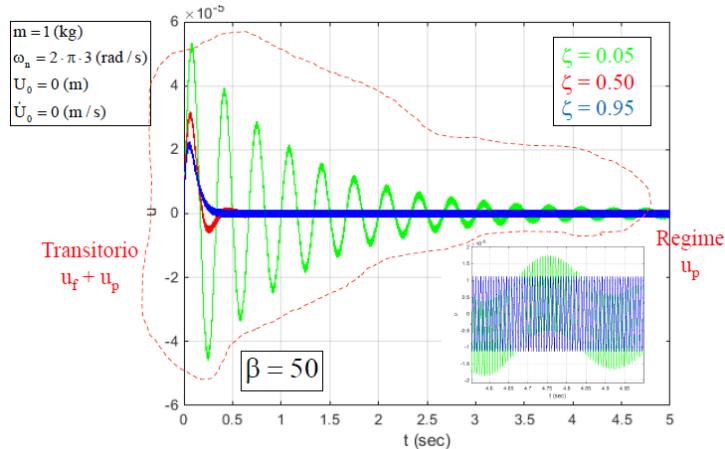
### **$\beta$ piccolo**

La forzante è descritta in figura con  $F_0 = 1\text{N}$  e  $\omega = 2 \cdot \pi \cdot 3 / 50$  quindi con frequenza di  $3/50$  Hz.

Vediamo le due soluzioni  $u_f$  e  $u_p$  separate.



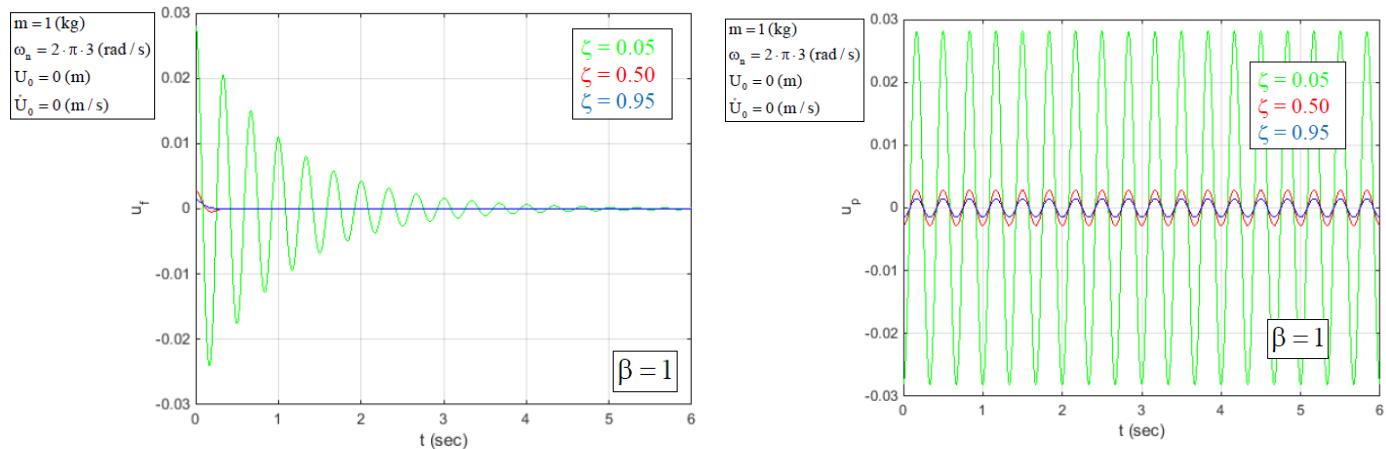
Se unisco le due soluzioni noto che l'andamento è proporzionale a cosa fa  $U_f$  per i diversi valori di  $\zeta$  quando siamo nelle condizioni di transitorio ma poi si stabilizza alla soluzione  $U_p$  a regime. Questo perché in generale  $U_f \gg U_p$  ma a regime  $U_f=0$  quindi ce solo  $U_p$ .



### **β = 1**

In questo caso consideriamo una forzante con  $F_0=1\text{N}$  e  $\omega=2 \cdot 3 \cdot \pi$ .

Se facciamo i grafici di  $u_f$  e  $u_p$  separati otteniamo:



Notiamo che:

- $U_f$  come prima varia in funzione di  $\zeta$
- $U_p$  ha un ampiezza che dipende da  $\zeta$  perché, come visto in precedenza, in questo caso abbiamo che  $F_{esterna} = F_{smorzamento}$  da cui si ricava che  $F_0 = c\omega_0$  quindi  $u_0 = F_0 / (2\zeta m \omega^2)$ , in questo caso otteniamo che:  $u_0 = \text{ampiezza} = 1,41 \cdot 10^{-3} / \zeta$  quindi l'ampiezza in generale è inversamente proporzionale a  $\zeta$ .

In verità esistono diversi tipi di forzanti, a seconda di esse avrò diverse soluzioni particolari:

$$\begin{aligned} F(t) = F_0 &\Rightarrow u_p(t) = u_0 \\ F(t) = F_0 + F_1 t &\Rightarrow u_p(t) = u_0 + u_1 t \\ F(t) = F_0 + F_1 e^{-at} &\Rightarrow u_p(t) = u_0 + u_1 e^{-at} \end{aligned}$$

dove i coefficienti della forzante ( $F_0$ ,  $F_1$  ed  $a$ ) sono noti mentre quelli della soluzione particolare ( $u_0$  ed  $u_1$ ) sono da determinarsi per sostituzione nell'equazione completa.

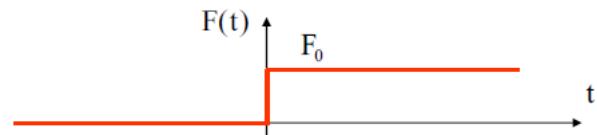
Di particolare importanza applicativa sono due forzanti esterne:

- Costante nel tempo dopo l'attivazione istantanea iniziale (anche detta a gradino)
- Delta di Dirac (forzante impulsiva)

Esse sono particolarmente importanti perché sono semplificazioni di casi reali e ci permettono di generalizzare il problema e quindi ricavare la risposta per qualsiasi tipo di forzante.

### 1.3.2 Risposta a gradino

La forzante a gradino è caratterizzata da valore nullo fino a  $t = 0$  e poi dalla «immediata» assunzione del valore  $F_0$  (sempre per  $t = 0$ ), valore che mantiene poi indefinitamente.



Nella realtà quello che accade è che si arriva ad un valore  $F_0$  in un certo tempo, se consideriamo questo tempo piccolo si arriva alla risposta a gradino.

L'equazione del moto ha all'interno  $F_0/m$  quindi è teoricamente risolta un istante dopo che la forzante è applicata.

$$\begin{aligned} \ddot{u} + 2\zeta\omega_n \dot{u} + \omega_n^2 u &= \frac{F_0}{m} \\ u(t=0) &= 0 \\ \dot{u}(t=0) &= 0 \end{aligned}$$

Si studia in genere la risposta al gradino Unitario, se poi l'intensità reale è diversa basta moltiplicare per il valore di  $F_0$ . Consideriamo quindi  $F_0=1$  e la soluzione sarà sempre:

$u(t)=u_p$  (dell'omogenea associata)+ $u_f$  (dell'equazione completa)

L'equazione completa è:

$$\ddot{u}_p + 2\zeta\omega_n \dot{u}_p + \omega_n^2 u_p = \frac{1}{m}$$

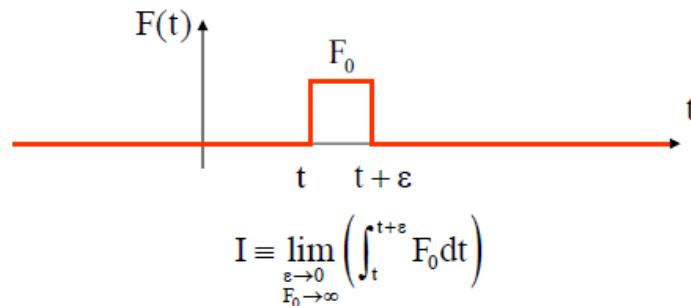
In cui  $F_0=\text{cost}$  quindi  $u_p=\text{cost}$  e di conseguenza le derivate sono nulle.

Sostituendo ottengo:

$$\begin{aligned} \omega_n^2 - \text{cost} &= \frac{1}{m} \\ \text{cost} &= \frac{1}{m\omega_n^2} = \frac{1}{k} \\ \Rightarrow u_p(t) &= \text{cost} = \frac{1}{k} \end{aligned}$$

L'impulso ha particolare importanza nel caso di una **forza impulsiva**, cioè di valore molto elevato (al limite infinito) e di durata molto breve (al limite nulla).

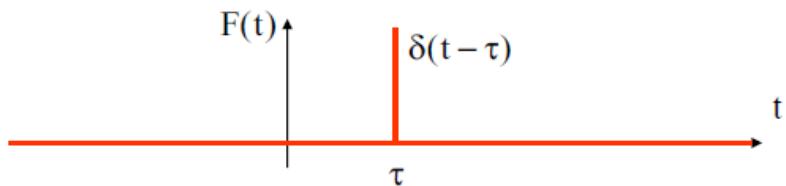
Il limite collegato all'impulso in questo caso non è frutto della sua definizione ma dovuto al fatto che stiamo studiando un caso fatto così:



Noi studieremo il caso di impulso unitario quindi con  $I=1$  e poi moltiplichiamo se ci sono forze diverse.

Una interpretazione matematica della forza impulsiva che ha un impulso unitario è la funzione **delta di Dirac**.

$$\delta(t - \tau) = \begin{cases} 0 & t \neq \tau \\ \infty & t = \tau \end{cases}$$



Le cui proprietà sono:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - \tau) dt = 1$$

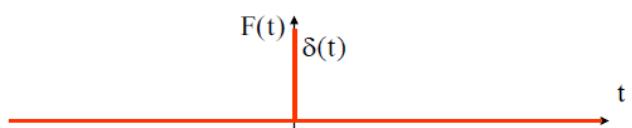
L'impulso della funzione delta di dirac vale 1.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(t - \tau) dt = f(\tau)$$

Vogliamo ora determinare la **risposta all'impulso unitario** di una forzante  $\delta(t)$ , cioè di una delta di Dirac centrata nell'istante  $\tau=0$ .

Notiamo che la funzione delta di dirac vale zero per tutti gli istanti precedenti e successivi a quelli a  $t=0$  ma a  $t=0$  vale infinito.

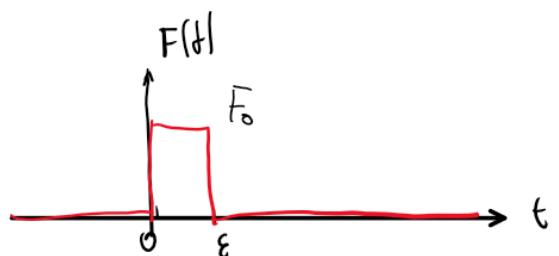
Vogliamo risolvere l'equazione del moto a  $t>0$  ma li la forzante è nulla.



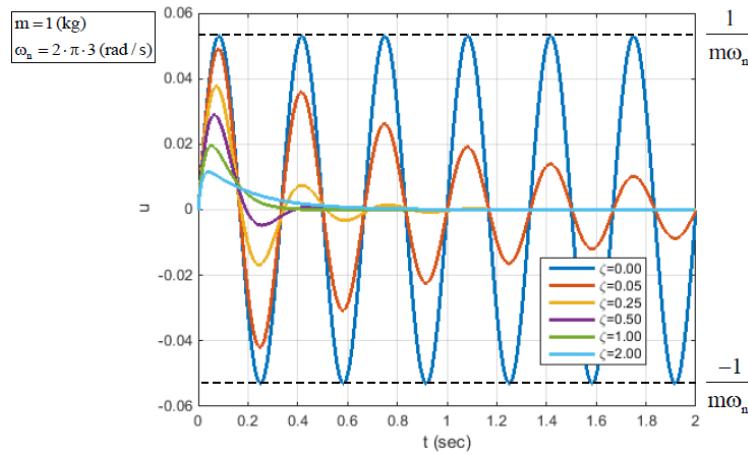
$$\ddot{u} + 2\zeta\omega_n \dot{u} + \omega_n^2 u = 0$$

Se anche le condizioni iniziali fossero nulle non si muoverebbe nulla quindi non avrebbe senso però se sperimentalmente do una martellata su un pezzo, quindi faccio qualcosa simile al delta di dirac, noto che esso si muove anche se  $u_0 = 0$  e .

In realtà quello che succede è che la forzante ha un'estensione nel tempo quindi ha un andamento come a destra.



Se vediamo gli andamenti di risposta hanno la stessa logica del caso smorzato con diversi valori di  $\zeta$ :



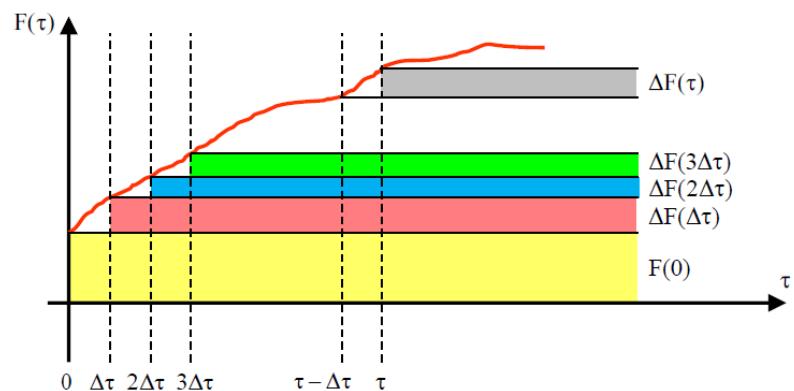
Notiamo che come sempre:

- Parte da 0 a  $t=0$
- L'ampiezza del caso non smorzato è  $1/m\omega_a$
- Se  $\zeta < 1$  le vibrazioni vengono abbattute
- $\zeta = 1$  è il primo valore a cui non si sono vibrazioni ed è il valore al quale le vibrazioni si smorzano prima

#### 1.3.4 Risposta a forzante generica

La forzante è nulla fino a  $t=0$  e poi ha un andamento irregolare. Posso trasferire l'andamento in una serie di gradini dividendo l'intervallo in tanti piccoli intervallini  $\Delta\tau$  fino ad arrivare al generico istante  $\tau$  di nostro interesse.

In questo modo posso individuare dei punti sulla curva del carico, con questi punti divido la forzante in tanti salti  $\Delta F$  che durano  $\Delta\tau$ . Notiamo che se  $\Delta\tau$  va a 0 allora non c'è più differenza tra la curva reale e gli intervallini.



Notiamo che si comporta come se a  $t=0$  applicassi un  $F(0)$ , in  $t=\Delta\tau$  applico un gradino alto  $\Delta F(\Delta\tau)$  e così via. Questo è utile perché noi conosciamo la risposta al gradino unitario e stiamo dividendo la funzione in tanti gradini unitari moltiplicati per  $\Delta F$ .

Il problema è che noi vogliamo la risposta ad un tempo  $\tau$  ma questi gradini non partono tutti a  $t=0$  quindi quando andrei a calcolare la risposta singola del gradino è un problema perché il tempo  $t$  della formula si riferisce a  $t=0$ . Quindi quello che viene fatto è immettere al posto di  $t$  nella forma  $t-N\Delta\tau$  dove  $N$  si riferisce all' $N$ -esimo gradino che sto considerando e poi moltiplicare la risposta per  $\Delta F(3\Delta\tau)$ .

Vediamo che quindi:

$$u(t) = \Delta F(\tau) \cdot A(t-\tau) \quad \text{se } \zeta=0$$

Notiamo che  $F(t)$  è qualsiasi tipo di forzante e  $h(t-\tau)$  è la risposta all'impulso unitario.

Se faccio il ragionamento al contrario quindi passo dall'integrale alla sommatoria e da  $d\tau$  a  $\Delta\tau$  ottengo:

$$u(t) = \sum_{t=\Delta t}^{t=\infty} F(\tau) \Delta\tau h(t-\tau)$$

Questo corrisponde ad un approssimazione in cui vedo la forzante come una successione di forze impulsive alte  $\Delta F$  che partono ognuna con  $\Delta\tau$  di ritardo rispetto a quella precedente e durano  $\Delta\tau$ . L'impulso della forza è  $\Delta\tau \cdot F(t)$  mentre  $h(t-\tau)$  è la risposta all'impulso unitario che parte da  $t$  ed è misurato in  $\tau$ .

Facendo la sommatoria di tutti i contributi arrivo all'equazione finale quindi posso vedere la  $u(t)$  come una somma di un infinita serie di impulsi grandi  $\Delta\tau$ .

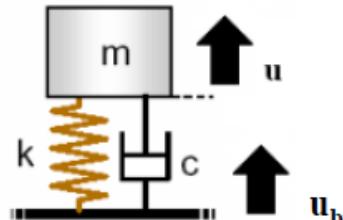
### 1.3.5 Eccitazione indotta dalla base

Quello che è la base di solito è l'oggetto che voglio misurare.

Il sistema di solito ha  $F(t)=0$  poi:

- Felastica dipende dallo spostamento  $u$  della base
- Fsmorzatore dipende dalla velocità della base

Il sistema da studiare è:



$$m\ddot{u} + c(\dot{u} - \dot{u}_b) + k(u - u_b) = 0$$

Introducendo la differenza tra i due spostamenti (cioè l'elongazione della molla),  $z=u - u_b$ , l'equazione diventa:

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = -m\ddot{u}_b$$

Se poi ipotizzo un moto armonico della base per cui:

$$u_b = u_{b0} e^{j\omega t} \rightarrow \dot{u}_b = -\omega u_{b0} e^{j\omega t}$$

Posso ricavare l'espressione:

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = mu_{b0}\omega^2 e^{j\omega t}$$

Dividendo per la massa ricavo:

$$\ddot{z} + 2\zeta\omega_n\dot{z} + \omega_n^2 z = u_{b0}\omega^2 e^{j\omega t}$$

Se poi trascuriamo il transitorio avrò che la  $z(t)=z_p$  quindi:

$$z_p(t) = z_0 e^{j(\omega t - \varphi)}$$

Avevamo già risolto un'equazione del genere in cui la forzante era  $F_0 e^{j\omega t}$  in cui la equazione era:

$$\ddot{u}_p + 2\zeta\omega_n\dot{u}_p + \omega_n^2 u_p = \frac{F_0 e^{j\omega t}}{m}$$

Per analogia possiamo dire che nel nostro caso:

Parte da una  $f(t)$  e genera una  $f(s)$  quindi prende una funzione nel dominio del tempo e la passa al dominio delle frequenze. Esiste anche l'antitrasformata.

Si può definire la **trasformata di Laplace** della funzione  $f(t)$ :

$$F(s) = L[f(t)] \equiv \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

dove  $s$  è una variabile complessa che ha l'unità di misura di una frequenza perché l'esponenziale deve essere adimensionale.

Sotto opportune condizioni è possibile anche definire l'**antitrasformata di Laplace** che mi fa passare dal dominio delle frequenze a quello del tempo.

$$f(t) = L^{-1}[F(s)]$$

Applicando la trasformazione di Laplace all'equazione differenziale del moto del sistema ad un grado di libertà posso ottenere un'equazione algebrica di  $U(s)$  che dipende da  $F(s)$  ovvero la trasformata di laplace di  $F(t)$  e da  $H(s)$  ovvero la trasformata di laplace della risposta all'impulso unitario.

$$U(s) = H(s)F(s) + m \left[ U_0 s H(s) + (\dot{U}_0 + 2\zeta\omega_n U_0) H(s) \right]$$

Dove:

$$H(s) \equiv \frac{1}{m(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} = L[h(t)]$$

La funzione incognita iniziale,  $u(t)$ , può essere ottenuta per antitrasformazione:

$$u(t) = \int_0^t F(\tau)h(t-\tau)d\tau + m \left[ U_0 \dot{h}(t) + (\dot{U}_0 + 2\zeta\omega_n U_0) h(t) \right]$$

Notiamo che  $u(t)$  calcolata in questo modo contiene l'integrale di Duhamel e un pezzo che mantiene le condizioni iniziali quindi grazie alla trasformata di laplace ho ottenuto una soluzione più completa che funziona per qualsiasi forzante e qualsiasi condizione iniziale.

### 1.3.7 Trasformata di Fourier

Questa viene molto utilizzata perché ci rivela molto sul comportamento del problema.

Anche in questo caso si trasferisce la  $f(t)$  in  $f(\omega)$  quindi possiamo vederla come un caso particolare della trasformata di Laplace in cui si ha solo la parte immaginaria di  $s$ .

Si consideri una generica funzione  $f(t)$ , si può definire la **trasformata di Fourier** della funzione:

$$F(\omega) = T[f(t)] \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$$

Si può definire l'Antitrasformata di Fourier:

$$f(t) = T^{-1}[F(\omega)] \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{+i\omega t} d\omega$$

E' importante osservare che:

- la trasformata di Fourier non ha particolari vantaggi se intesa come metodo per risolvere l'equazione del moto (date le limitazioni di applicabilità rispetto alla trasformata di Laplace)
- la natura della variabile immaginaria ( $s = j\omega$ ) rende la trasformata di Fourier utile dal punto di vista applicativo perché questa trasformazione porta dal **dominio del tempo al dominio delle frequenze**, molto più ricco di informazioni del primo; in altre parole, la trasformata di Fourier "rivelà" il contenuto in frequenza del problema (la forzante, il sistema e la risposta)
- il legame tra forzante, sistema e risposta è molto più semplice nel dominio delle frequenze (dove è rappresentato da una moltiplicazione) che nel dominio del tempo (dove è rappresentato da un'equazione differenziale) quindi diventa più semplice calcolare le variabili che ci interessano ovvero  $\omega_N$  e  $\zeta$ .

### 1.3.8 Recettanza,Mobilità e Inertanza

In laboratorio solitamente gli esperimenti vengono fatti usando degli accelerometri che misurano  $\ddot{U}(t)$  ma, in alcuni casi, si possono usare dei velocimetri laser che calcolano direttamente la  $U(t)$ , calcolare la  $u(t)$  direttamente è in genere molto più complicato in laboratorio. Per questo motivo si usano di solito delle grandezze diverse rispetto ad  $H(\omega)$  per legare uscita e ingresso.

La **Recettanza** si può scrivere:

$$H(\omega) = \frac{U(\omega)}{F(\omega)} = \frac{1}{k(1-\beta^2) + j(2\zeta\beta)} = M e^{-j\varphi}$$

$$M = \frac{1}{k} \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + 4\zeta^2\beta^2}} = \frac{1}{k} D_{\max}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{2\zeta\beta}{1-\beta^2}\right)$$

Scritta in questo modo possiamo vedere che è una funzione complessa  
che posso scrivere come:

Modulo  $\cdot e^{j\text{-fase}}$  dove il modulo  $M$  è dato da  $M \cdot F$  mentre  
la fase  $\varphi$  rappresenta il ritardo di  $F$  rispetto a  $U$ .

E' evidente il legame tra la funzione complessa  
Recettanza ed i risultati dell'analisi già effettuata sulla  
risposta a regime di un sistema a una forzante  
armonica quindi il fattore di amplificazione dinamica e  
ritardo di fase.

Infatti se facciamo il diagramma del modulo della  
Recettanza otteniamo quello che è presente in figura.

La **Mobilità** è il rapporto tra le trasformate di Fourier di velocità e forzante:

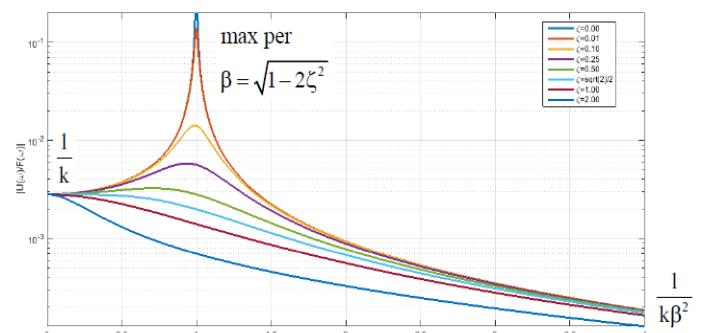
$$\frac{V(\omega)}{F(\omega)} = \frac{j\omega \cdot U(\omega)}{F(\omega)} = \frac{1}{k(1-\beta^2) + j(2\zeta\beta)} = M e^{-j\varphi}$$

$$M = \frac{\omega_n}{k} \frac{\beta}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + 4\zeta^2\beta^2}}$$

L'**Inertanza** è il rapporto tra le trasformate di Fourier di accelerazione e forzante

$$\frac{A(\omega)}{F(\omega)} = \frac{-\omega^2 \cdot U(\omega)}{F(\omega)} = \frac{1}{k(1-\beta^2) + j(2\zeta\beta)} = M e^{-j\varphi}$$

$$M = \frac{\omega_n^2}{k} \frac{\beta^2}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + 4\zeta^2\beta^2}}$$

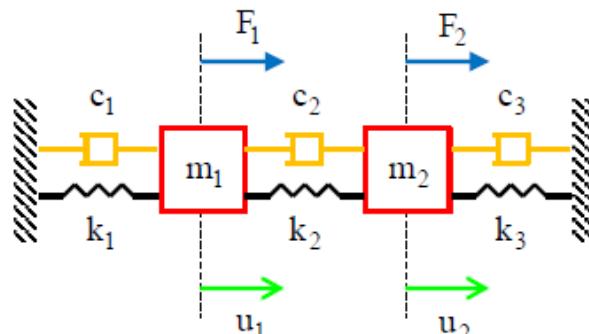


## 2. Sistemi a N gradi di libertà

Partiamo da un esempio di sistema a 2 gradi di libertà per imparare «sul campo» come si estende al caso di sistemi a più gradi di libertà il concetto di frequenza propria e poi generalizzeremo a N gradi di libertà.

Se abbiamo poi N gradi di libertà il sistema avrà N frequenze proprie ma in generale non è vero che ciascun grado di libertà abbia la sua frequenza propria ma tutti i gradi di libertà sono chiamati in gioco per ogni frequenza propria, questo fa sì che in generale il sistema a N gradi di libertà non si comporta come N sistemi massa-molla-smorzatore ma abbia un comportamento misto perché ogni frequenza chiama in gioco un po' di gradi di libertà.

Partiamo dall'esempio di un sistema a 2 Gradi di libertà:



Uso le Equazioni di Lagrange per ottenere le equazioni del moto e considereremo che l'unica massa sarà concentrata negli elementi con  $m$ , tutte le rigidezze elastiche sono concentrate negli elementi con  $k$  e tutti gli smorzamenti sono concentrati negli elementi con  $c$ .

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_k}{\partial \dot{u}_i} \right) + \left( \frac{\partial \Delta}{\partial \dot{u}_i} \right) + \left( \frac{\partial E_p}{\partial u_i} \right) = \left( \frac{\partial L_e}{\partial u_i} \right) \quad i = 1, 2$$

Dove i valori di Energia Cinetica ( $E_k$ ), Energia Potenziale ( $E_p$ ), Dissipazione ( $\Delta$ ) e Lavoro sono:

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} m_1 \dot{u}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{u}_2^2 \\ \Delta &= \frac{1}{2} c_1 \dot{u}_1^2 + \frac{1}{2} c_2 (\dot{u}_2 - \dot{u}_1)^2 + \frac{1}{2} c_3 \dot{u}_2^2 \\ E_p &= \frac{1}{2} k_1 u_1^2 + \frac{1}{2} k_2 (u_2 - u_1)^2 + \frac{1}{2} k_3 u_2^2 \\ L_e &= F_1 u_1 + F_2 u_2 \end{aligned}$$

Derivando nei due gradi di libertà  $u_1$  e  $u_2$  ottengo le 2 equazioni del moto:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{u}_1 + (c_1 + c_2) \dot{u}_1 - c_2 \dot{u}_2 + (k_1 + k_2) u_1 - k_2 u_2 &= F_1 \\ m_2 \ddot{u}_2 - c_2 \dot{u}_1 + (c_2 + c_3) \dot{u}_2 - k_2 u_1 + (k_2 + k_3) u_2 &= F_2 \end{aligned}$$

Che possono essere scritte in forma matriciale come:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

Sapendo che quindi l'esponente è immaginario quando analizzo il sistema a 2DOF cerco:

$$\{u\} = \{\phi\} e^{j\omega t}$$

Sostituendo ottengo:

$$([K] - \omega^2 [M])\{\phi\} e^{j\omega t} = \{0\}$$

Dato che il termine esponenziale è sempre  $\neq 0$ , il sistema precedente ha come soluzione banale  $\{\Phi\} = \{0\}$  (da escludere perché corrisponde all'assenza di moto) e, in alternativa, soluzioni non banali  $\{\Phi\} \neq \{0\}$  se:

$$\det([K] - \omega^2 [M]) = 0$$

Si tratta con tutta evidenza di un **problema agli autovalori e autovettori** perché è nella forma del tipo  $\det(A - \lambda I) = 0$ , possiamo quindi notare che  $\omega^2$  sono gli autovalori della matrice.

Facendo i conti posso calcolare  $\omega$ , notiamo che il polinomio caratteristico è di grado 2 in  $\omega^2$ , se avessi N gradi di libertà sarebbe di grado N in  $\omega^2$ . Trattandosi di un polinomio caratteristico di grado 2 in  $\omega^2$  allora le soluzioni sono 4 reali uguali e opposte e saranno  $\pm\omega_1$  e  $\pm\omega_2$ .

Vogliamo adesso calcolare le ampiezze  $\{\Phi\}$  e per farlo sostituisco il valore di  $+\omega_1$  o  $-\omega_1$  al posto di  $\omega$  nelle equazioni che annulla le stesse equazioni, di conseguenza per questi valori si  $\omega$ ,  $\{\Phi\} \neq 0$  e può essere calcolato.

Se sostituiamo ad  $\omega$  il valore  $+\omega_1$  oppure  $-\omega_1$ , si ottiene:

$$([K] - \omega_1^2 [M])\{\phi\}_1 = \{0\} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}\{\phi\}_1 = \{0\} \Rightarrow \{\phi\}_1 = A_1 \{\hat{\phi}\}_1 = A_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Se sostituiamo ad  $\omega$  il valore  $+\omega_2$  oppure  $-\omega_2$ , si ottiene:

$$([K] - \omega_2^2 [M])\{\phi\}_2 = \{0\} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}\{\phi\}_2 = \{0\} \Rightarrow \{\phi\}_2 = A_2 \{\hat{\phi}\}_2 = A_2 \begin{Bmatrix} 1 \\ -1/2 \end{Bmatrix}$$

In pratica, per ogni autovalore  $\omega^2$  (cioè per ogni coppia di radici  $\pm\omega$ ), si ha un autovettore, cioè una soluzione definita solo in termini dei rapporti tra i suoi coefficienti (detta **forma modale**) ma con ampiezza indeterminata.

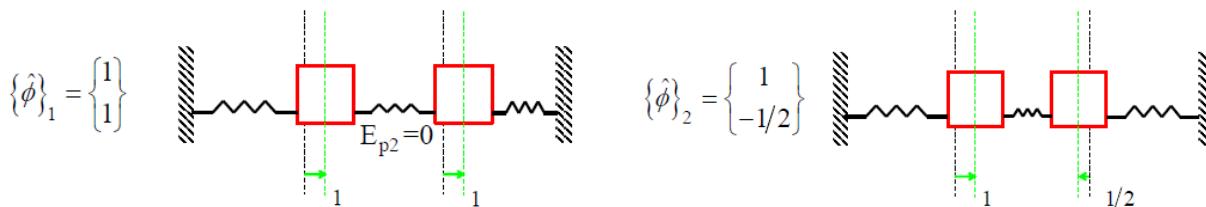
Questo vuol dire che sia  $\omega_1$  che  $\omega_2$  sono la pulsazione propria del sistema ma ad ognuna di esse il sistema si predisponde in un certo modo che è definito solo dal rapporto tra le ampiezze.

ES.

Se vibra a  $\omega_1$  le due masse avranno un movimento di ampiezza che non conosco ma sono sicuro che il rapporto tra i due gradi di libertà sarà 1.

Se vibra a  $\omega_2$  le due masse avranno un movimento di ampiezza che non conosco ma sono sicuro che il rapporto tra i due gradi di libertà sia  $-1/2$ .

Le due forme modali sono:



Quello che sto facendo è un prodotto scalare pesato per la matrice B ovvero sto calcolando, dati A vettore e B matrice il prodotto:

$$\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$$

Siccome il prodotto è nullo vuol dire che i due autovettori sono perpendicolari tra di loro rispetto alla matrice di massa e di rigidezza. Notiamo che se applichiamo il trasposto da entrambe le parti vale anche che:

$$\{\hat{\phi}_1\}^T [M] \{\hat{\phi}_2\} = 0 \quad \text{e} \quad \{\hat{\phi}_2\}^T [K] \{\hat{\phi}_1\} = 0$$

perché  $M=M^T$  e  $K=K^T$  siccome sono matrici simmetriche.

E' interessante anche fare il prodotto scalare dell'autovettore per se stesso con la mediazione di M o K, notiamo che viene un numero diverso da 0 e che se faccio il rapporto tra le grandezze ottengo  $\omega_1$  e  $\omega_2$  che mi interessano.

$$\left. \begin{aligned} \{\hat{\phi}_1\}_1^T [M] \{\hat{\phi}_1\}_1 &= [1 \ 1] \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 15 \\ \{\hat{\phi}_2\}_1^T [K] \{\hat{\phi}_1\}_1 &= [1 \ 1] \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 6 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\{\hat{\phi}_1\}_1^T [K] \{\hat{\phi}_1\}_1}{\{\hat{\phi}_1\}_1^T [M] \{\hat{\phi}_1\}_1} = \frac{2}{5} = \omega_1^2$$
  

$$\left. \begin{aligned} \{\hat{\phi}_2\}_2^T [M] \{\hat{\phi}_2\}_2 &= [1 \ -1/2] \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1/2 \end{bmatrix} = \frac{15}{2} \\ \{\hat{\phi}_2\}_2^T [K] \{\hat{\phi}_2\}_2 &= [1 \ -1/2] \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1/2 \end{bmatrix} = \frac{15}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\{\hat{\phi}_2\}_2^T [K] \{\hat{\phi}_2\}_2}{\{\hat{\phi}_2\}_2^T [M] \{\hat{\phi}_2\}_2} = 1 = \omega_2^2$$

Quindi posso generalizzare quanto detto per il sistema a 1GDL in cui  $\omega_N^2 = k/m$ , in un sistema a N GDL quello che ottengo è:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{\{\hat{\phi}_n\}_n^T [K] \{\hat{\phi}_n\}_n}{\{\hat{\phi}_n\}_n^T [M] \{\hat{\phi}_n\}_n}}$$

### 2.1.1 Esempio

Un altro caso interessante è quello nel quale le molle 1 e 3 non sono presenti ( $k_1 = k_3 = 0$ ) per cui l'intero sistema è **labile** perché non è vincolato.

Se immaginiamo che  $m_1 = m_2 = m$  e  $k_2 = k$ , si arriva, partendo dall'equazione generale a:

$$[M] = m \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [K] = k \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad [D] = \frac{k}{m} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \omega_n^2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det \left( \begin{bmatrix} \omega_n^2 - \omega^2 & -\omega_n^2 \\ -\omega_n^2 & \omega_n^2 - \omega^2 \end{bmatrix} \right) = 0$$

da cui gli autovalori (e le frequenze proprie):

$$\omega^4 - 2\omega_n^2\omega^2 = 0 \Rightarrow \omega_1^2 = 0, \quad \omega_2^2 = 2\omega_n^2 \Rightarrow \omega = 0 \text{ (rad. dop.)}, \quad \omega = \pm\sqrt{2}\omega_n$$

Notiamo che:

- Abbiamo introdotto quindi il parametro  $\omega_N$  che però è DIVERSO dalla pulsazione propria del sistema massa-molla-smorzatore.
- Per calcolare gli autovalori ho calcolato il determinante della matrice D di rigidezza dinamica e da lì abbiamo determinato che gli  $\omega$  sono un doppio 0 e una coppia di numeri reali.

Oss.

Gli Aerei di per se sono dei corpi labili per cui si comportano in questo modo quindi avrò alcuni modi di corpo rigido (3 rotazioni e 3 traslazioni rigide) e poi altri modi deformativi dovuti alla vibrazione di fusoliera e ali.

Anche in questo caso valgono le proprietà di ortogonalità delle forme modali rispetto alla matrice delle masse e alla matrice di rigidità.

### 2.1.2 Generalizzazione

Possiamo generalizzare il concetto per un sistema a N GDL in cui posso calcolare  $E_k$ ,  $E_{pot}$ ,  $\Delta$ ,  $L$  come forme quadratiche o forme lineari come abbiamo già visto:

$$E_k = \frac{1}{2} \{\dot{u}\}^T [M] \{\dot{u}\} \quad \Delta = \frac{1}{2} \{\dot{u}\}^T [C] \{\dot{u}\} \quad E_p = \frac{1}{2} \{u\}^T [K] \{u\} \quad L_e = \{u\}^T \{F\}$$

Applicando la formulazione di Lagrange posso ottenere il sistema di equazioni del moto che conosco:

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{F\}$$

Dove:

- Le matrici  $[M]$ ,  $[C]$  e  $[K]$  sono reali, simmetriche e (assumiamo nel nostro caso) a coefficienti costanti nel tempo
- $[M]$  è inoltre definita positiva quindi possiamo dire che  $\det[M] > 0$
- $[K]$  è inoltre definita positiva se il sistema non è labile ma ho  $\det[K] = 0$  se è labile

In assenza di smorzamento e di forzanti (vibrazioni libere non smorzate), si ha:

$$[M]\{\ddot{u}\} + [K]\{u\} = \{0\}$$

Ipotizzando una soluzione armonica nel tempo del tipo:

$$\{u\} = \{\phi\} e^{j\omega t}$$

Si ottiene:

$$([K] - \omega^2 [M])\{\phi\} = \{0\} \quad (\Leftrightarrow [K]\{\phi\} = \omega^2 [M]\{\phi\})$$

Cercare le soluzioni non banali dell'equazione conduce ad un problema agli autovalori (e autovettori) che risolviamo come fatto prima:

$$\det([K] - \omega^2 [M]) = 0$$

le cui soluzioni sono, rispettivamente, pulsazioni proprie  $\omega_i$  e forme modali  $\{\Phi\}_i$ .

Alla fine del processo ottengo quindi N autovalori positivi quindi N coppie di radici uguali e opposte a ciascuna delle quali corrisponde un autovettore. Se il sistema è labile ci sono anche i casi di  $\omega^2 = 0$  per cui ho un  $\omega = 0$  con molteplicità doppia da cui derivano dei modi di corpo rigido. Questo capita solo se le masse non sono collegate a vincoli esterni ma ci sono solo molle interne.

Notiamo che quindi la risposta di un sistema a N gradi di libertà è la somma di tante armoniche a  $\omega$  diverse MA anche se esse si sommano nel tempo sono indipendenti dal punto di vista energetico perché usano solo le proprie forze per creare i propri spostamenti.

### 2.1.3 Normalizzazione degli autovettori

Nei codici FEM è importante capire come è scritto  $\{\Phi\}_i$  perché poi A posso usarlo per mettere a posto le cose, il modo di scrivere  $\{\Phi\}_i$  dipende dal tipo di normalizzazione che viene fatta.

I modi di normalizzazione degli autovalori sono 3 ma solo i primi 2 vengono usati nei codici FEM:

#### 1. Normalizzazione rispetto al massimo

$$\max \{\hat{\phi}\}_i = 1 \quad i=1, \dots, N$$

In questo modo per ciascuno degli N autovettori del sistema il massimo deve essere 1 considerando modulo e segno.

#### 2. Normalizzazione rispetto alla matrice delle masse

$$\{\tilde{\phi}\}_i^T [M] \{\tilde{\phi}\}_i = 1 \quad i=1, \dots, N \Leftrightarrow [\tilde{\Phi}]^T [M] [\tilde{\Phi}] = [I]$$

Per ogni autovettore vale quello scritto sopra per cui la massa modale deve essere pari alla matrice identità, che significa avere tutte masse modali pari a 1.

#### 3. Normalizzazione rispetto alla matrice di rigidezza

$$\{\check{\phi}\}_i^T [K] \{\check{\phi}\}_i = 1 \quad i=1, \dots, N \Leftrightarrow [\check{\Phi}]^T [K] [\check{\Phi}] = [I]$$

Per ogni autovettore vale quello scritto sopra per cui la rigidezza modale deve essere pari alla matrice identità. Vediamo che questo ultimo modo di normalizzare non viene usato nei codici commerciali e spiegheremo dopo il perché.

La proprietà di ortogonalità dei modi permette di semplificare notevolmente il sistema di equazioni del moto, soprattutto nel caso di vibrazioni forzate non smorzate.

Nel caso di vibrazioni forzate non smorzate verrà che:

$$[M]\{\ddot{u}\} + [K]\{u\} = \{F(t)\}$$

Dove il sistema che ne deriva è molto difficile da risolvere perché le matrici sono NxN (N=numero di GDL) ma soprattutto c'è il problema che le equazioni sono tutte accoppiate.

Quello che viene fatto di solito è un passaggio di varabile che mi fa passare dalla coordinate fisiche alle coordinate modali tramite:

$$\{u(t)\} = [\phi]\{\v(t)\}$$

Si crea un vettore Nx1 che contiene le coordinate modali.

Da qua si può ricavare che:

$$\{\ddot{u}\} = [\phi]\{\ddot{v}\}$$

## 2.1.4 Riduzione dei sistemi

Quando scriviamo

$$\{u(t)\} = [\phi] \{v(t)\}$$

Vuol dire che:

$$\{u\} = [\phi]_1 v_1(t) + [\phi]_2 v_2(t) + \dots + [\phi]_n v_n(t)$$

dove normalmente gli autovalori ( $\omega^2$ ) del sistema vanno dalla frequenza più piccola alla frequenza più grande e di conseguenza anche gli autovettori  $\{\Phi\}$  che ho qua sono scritti in quell'ordine.

A questo punto se io considero che il sistema è eccitato da una forzante  $F(t)$  armonica nel tempo che avrà una data frequenza, allora solo gli autovettori associati ad autovalori che vibrano a quella frequenza o a frequenze simili sono eccitati da quella forzante.

ES Se la  $F(t)$  vibra a 6 Hz e gli autovalori 1,2,3 vibrano a 5,10 e 15 Hz solo i primi due sono eccitati da quella forzante, dal terzo in poi non più.

Se consideriamo il caso che solo i primi 3 autovalori sono eccitati dalla forzante abbiamo che il sistema si riduce a:

$$\{u\} = [(\phi_1 \ \phi_2 \ \phi_3)] \cdot \begin{Bmatrix} [v_1] \\ [v_2] \\ [v_3] \end{Bmatrix}$$

Per cui sto trascurando quello che succede dalla 4° frequenza in poi.

Possiamo dire che:

$$\{u\} \approx [\phi_{n+1:t}] \cdot \{v_{n+1:t}\}$$

Per cui dovrò trovare solo le prime n coordinate modali che solo associate agli autovalori che effettivamente mi servono e farlo è molto più facile perché devo risolvere un sistema  $3 \times 3$  (in questo caso) al posto di un  $N \times N$ .

Per trovare il sistema che descrive il moto del sistema a N gradi di libertà posso fare la stessa dimostrazione di prima considerando però  $\{\ddot{y}_R\}$  e  $\{v_R\}$  dove R=Ridotto.

$$[D_{MRR}] \{\ddot{v}_R\} + [D_{KRR}] \{v_R\} = \{\hat{F}_R\}$$

Dove le matrici  $D_{MRR}$  e  $D_{KRR}$  sono ridotte due volte perché hanno solo n elementi sulle righe e n elementi sulle colonne, essendo poi già matrici diagonali sto considerando praticamente solo n equazioni disaccoppiate dove n sono le frequenze che effettivamente sono eccitate dalla forzante.

Notiamo che usando le coordinate modali e poi facendo la normalizzazione e la riduzione del sistema ho un'enorme semplificazione da matrici  $N \times N$  accoppiate a matrici  $n \times n$  disaccoppiate. Quindi passo da sistemi con centinaia di migliaia di righe accoppiati a sistemi a poche righe disaccoppiati.

Notiamo che in coordinate fisiche avevo **le condizioni iniziali** che devo quindi trasferire in coordinate modali.

Le condizioni iniziali in genere sono:

$$\begin{aligned} \{u(t=0)\} &= \{U_0\} \\ \{\dot{u}(t=0)\} &= \{\dot{U}_0\} \end{aligned}$$

Oss:

$\omega_i^2$  è nullo solo se la rigidezza  $K$  è nulla perché non è possibile avere una massa infinita, in quel caso l'equazione del moto è  $M_J \ddot{v}_J = 0$  che è un sistema ad accelerazione nulla per cui la velocità sarà lineare nel tempo.

## 2.2 Vibrazioni forzate non smorzate

Studiamo il sistema descritto dalla relazione:

$$[M]\{\ddot{u}\} + [k]\{u\} = \{F(t)\}$$

Dove:

$\{F(t)\} = \{F_0\} \sin(\omega t)$  cioè con tutte le forzanti in fase e con la stessa pulsazione  $\omega$  per cui le froze differiscono solo in ampiezza.

Definiamo il sistema in coordinate modali e otteniamo:

$$[D_M]\{\ddot{v}\} + [D_k]\{v\} = \{F_0\} \sin(\omega t)$$

Notiamo che tutte le matrici sono diagonali per cui posso scrivere per ogni coordinata modale l'equazione del moto, si comporta come tanti sistemi a 1GDL smorzati.

Se considero i singoli elementi delle matrici ho:

$$M_i \ddot{v}_i(t) + K_i v_i(t) = \hat{F}_{0i} \sin(\omega t) \quad i=1, \dots, N$$

Come sempre si avrà che la soluzione è divisa tra la soluzione generale dell'omogenea associata e dalla parte particolare della soluzione completa, noi considereremo solo l'andamento della parte particolare perché dopo che è passato un po di tempo e il transitorio è finito ci sarà solo quella.

$$V_{ip} = V_{i0} \sin(\omega t - \varphi)$$

Notiamo che  $v_{i0}$  e  $\varphi$  lo ricavo per analogia dalle equazioni che abbiamo visto per il caso del sistema a 1GDL e alla fine arrivo a scrivere che:

$$v_{ip}(t) = v_{i0} \sin(\omega t) = \frac{\hat{F}_{0i}}{K_i (1 - \beta_i^2)} \sin(\omega t) \quad \beta_i \equiv \frac{\omega}{\omega_i}$$

Passando in coordinate fisiche:

$$\{u_p(t)\} = [\hat{\Phi}] \{v_p(t)\} = \sum_{k=1}^N \{\hat{\phi}\}_k v_{kp}(t) = \sum_{k=1}^N \{\hat{\phi}\}_k \frac{\hat{F}_{0k}}{K_k (1 - \beta_k^2)} \sin(\omega t)$$

ci concentriamo sulla riga  $\alpha$  del vettore quindi l'equazione diventa quella che considera solo una componente  $\alpha$  dell'autolettore  $\{\hat{\phi}_k\}$  che è un vettore colonna.

$$u_{\alpha p}(t) = \sum_{k=1}^N \hat{\phi}_{k\alpha} \frac{\hat{F}_{0k}}{K_k (1 - \beta_k^2)} \sin(\omega t)$$

Dove i pedici  $k\alpha$  associati al simbolo di autolettore indicano il coefficiente  $\alpha$ -esimo dell'autolettore  $k$ -esimo (cioè il coefficiente  $(\alpha, k)$  della matrice modale).

Sappiamo che poi le forze modali sono:

$$\{\hat{F}_0\} = [\hat{\Phi}]^T \{F_0\} \Rightarrow \hat{F}_{0k} = \sum_{\beta=1}^N \hat{\phi}_{k\beta} F_{0\beta}$$

quindi ottengo:

$$([D_k] - [D_n]\omega^2) \cdot \{v(\omega)\} = [\phi]^T \{F(\omega)\}$$

$$\Rightarrow \{v(\omega)\} = ([D_k] - [D_n]\omega^2)^{-1} [\phi]^T \{F(\omega)\}$$

MA ponendo alle coordinate fisiche appunto di:

$$T \{u(t)\} = T([\phi] \{v(t)\}) \Rightarrow \{U(\omega)\} = [\phi] \{v(\omega)\}$$

Da cui ricavo:

$$\underbrace{\{U(\omega)\}}_{N \times 1} = [\phi] \{v(\omega)\} = \underbrace{[\phi]}_{N \times N} \underbrace{([D_k] - [D_n]\omega^2)^{-1} [\phi]^T}_{N \times N} \underbrace{\{F(\omega)\}}_{N \times 1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\{U(\omega)\} = u(\omega) \cdot F(\omega)}$$

Dove tutti i termini funzione di  $\omega$  sono le trasformate di Fourier degli elementi. Notiamo che  $H(\omega)$  è la Recettanza Matriciale del sistema ed è grande  $N \times N$ , quando quindi ho  $N$  gradi di libertà la risposta in frequenza dipende da questa matrice.

In  $H(\omega)$  avrà al numeratore il prodotto tra due autovettori e al denominatore la rigidezza modale e la massa modale moltiplicate per gli autovalori. Il valore di  $H_{\alpha\beta}$  è il coefficiente alla riga  $\alpha$  e alla colonna  $\beta$  della matrice di recettanza.

Possiamo quindi dire che la trasformata alla riga  $\alpha$ -esima è pari a:

$$U_\alpha(\omega) = \sum_{\beta=1}^N H_{\alpha\beta}(\omega) F_\beta(\omega)$$

Se il sistema è, per esempio a tre gradi di libertà quindi:

$$U_3 = H_{31}E_1 + H_{32}F_2 + H_{33}F_3$$

Quindi in generale non è vero che  $H_{32} = U_3/F_2$  ma ci sono altri termini che dobbiamo considerare perché ci sono più gradi di libertà.

In generale però possiamo dire che:

$$H_{\alpha\beta}(\omega) = U_\alpha(\omega)/F_\beta(\omega) \quad \text{se solo } F_\beta \neq 0$$

Quindi se le altre forze sono nulle tranne la  $F_\beta$  allora il rapporto sarà rispettato.

Se poi capita che  $F_\beta = 1$  ovvero che la trasformata di Fourier della forza è unitaria allora capita che  $H_{\alpha\beta}(\omega) = U_\alpha(\omega)$ . In laboratorio si cerca sempre di mettersi in questa condizione in cui la trasformata di Fourier in generale è costante per poter calcolare la risposta del sistema in modo semplice, per fare questo devo avere una forzante che eccita tutte le frequenze allo stesso modo e quella che lo fa è il delta di Dirac che infatti è utilizzata perché posso calcolare  $H_{\alpha\beta}$  facilmente.

Confrontiamo la recettanza (FRF) di un sistema a 1 grado di libertà con il singolo coefficiente della recettanza (FRF) di un sistema a  $N$  gradi di libertà:

$$H(\omega) = \frac{1}{m(\omega_n^2 - \omega^2)} \quad \text{vs} \quad H_{\alpha\beta}(\omega) = \sum_{k=1}^N \frac{\phi_{ka}\phi_{kb}}{M_k(\omega_k^2 - \omega^2)} = \sum_{k=1}^N \hat{\phi}_{ka}\hat{\phi}_{kb} H_k(\omega)$$

Si nota che c'è un'analogia, infatti, nell'equazione a NGDL posso isolare il termine  $H$  che è molto simile a quello presente nel sistema a 1GDL.

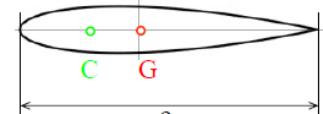
Se poi il fattore di partecipazione modale  $\hat{\Phi}_{k\alpha}\hat{\Phi}_{k\beta}$  in un punto è nullo ad un valore di frequenza allora vuol dire che a quella frequenza il punto non si muove, avrà un picco in meno nella risposta. In laboratorio devo stare attento a questo perché non devo applicare una forzante in quel punto perché mi perderei una frequenza di oscillazione che potrebbe portare alla risonanza per cui prima di fare delle analisi di laboratorio è utile fare un modello FEM per avere idea di quali saranno i punti in cui non devo applicare la forzante o in cui non devo mettere un sensore perché lì la struttura non vibra in un modo.

## 2.3 Profilo Alare Infinito

Considero un profilo in cui ho:

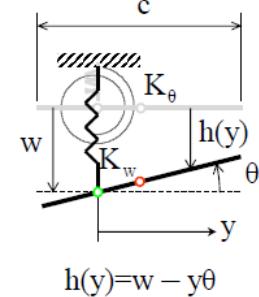
- Centro di taglio in cui se applico la forza questa genera solo traslazione e mai rotazione
- Baricentro

Centro di taglio      Baricentro



Questi determinano l'asse elastico e l'asse baricentrico.

Nel centro di taglio poi è presente una molla di rigidezza flessionale  $K_w$  e una di rigidezza torsionale  $K_\theta$ , il profilo può muoversi di  $w$  traslando e di  $\theta$  ruotando attorno al centro di taglio.



Vediamo che se  $\theta$  è piccolo allora  $h(y)=w-y\theta$

Vogliamo scrivere le equazioni del moto e per farlo uso l'equazione di lagrange in cui:

$$E_p = \frac{1}{2} K_w w^2 + \frac{1}{2} K_\theta \theta^2 = \frac{1}{2} [w \ \theta] \begin{bmatrix} K_w & 0 \\ 0 & K_\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ \theta \end{Bmatrix}$$

$$E_k = \int_c \frac{1}{2} \mu (\dot{w} - y\dot{\theta})^2 dy = \frac{1}{2} (m\ddot{w}^2 - 2S_c \dot{w}\dot{\theta} + I_c \dot{\theta}^2) = \frac{1}{2} [\dot{w} \ \dot{\theta}] \begin{bmatrix} m & -S_c \\ -S_c & I_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{w} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix}$$

Da esse ricavo le equazioni del moto che sono, per questo caso di vibrazioni libere non smorzate:

$$[M]\{\ddot{u}\} + [K]\{u\} = \{0\} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} m & -my_G \\ -my_G & I_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{w} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_w & 0 \\ 0 & K_\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ \theta \end{Bmatrix} = \{0\}$$

Siamo arrivati ad una matrice di rigidezza finale diagonale perché i calcoli sono stati fatti rispetto al centro di taglio che è il punto che disaccoppia le due rigidezze. Nel caso poi C coincide con G allora capita che le matrici sono totalmente disaccoppiate quindi flessione e torsione sono due moti indipendenti:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{w} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_w & 0 \\ 0 & K_\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ \theta \end{Bmatrix} = \{0\} \Leftrightarrow \begin{cases} m\ddot{w} + K_w w = 0 \\ I_c \ddot{\theta} + K_\theta \theta = 0 \end{cases}$$

In questo caso di problema disaccoppiato è facile ricavare le due frequenze proprie perché sono quelle di due sistemi a 1GDL ciascuno.

Troveremo quindi:

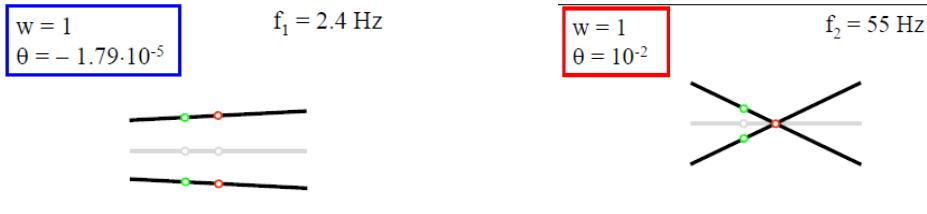
$$\omega_1 = \sqrt{\frac{K_w}{m}} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{K_\theta}{I_c}}$$

Dove:

- $\omega_1$  = pulsazione propria della forma modale flessionale
- $\omega_2$  = pulsazione propria della forma modale torsionale

- $\omega_2=55\text{Hz}$  e l'autolettore avrà  $w=1$  e  $\theta=10^{-2}$  per cui il moto sarà solo sia torsionale che flessionale

Le forme che ottengo sono:



Notiamo che:

- La prima forma modale ha  $\theta < 0$  quindi oltre a flettersi su e giù come faceva nel caso precedente il profilo ruota anche ma di un angolo molto piccolo, non c'è tanta differenza rispetto a quello che capita a  $Y_g=0$  perché sostanzialmente forma e frequenza del primo modo sono molto simili.
- La seconda forma modale avrà invece sia  $w$  che  $\theta$  non trascurabili, questo fa sì che sommando i due movimenti e come se il profilo ruotasse attorno al baricentro alla frequenza di 55Hz, anche in questo caso quindi il tipo di movimento è simile al caso  $Y_g=0$  ma è causato da andamenti delle variabili molto differenti.

## 2.4 Lo smorzamento

Tenere in considerazione lo smorzamento nel caso di sistemi a N gradi di libertà comporta complicazioni maggiori che nel caso a un grado di libertà in quanto, in generale, la matrice di smorzamento non è diagonalizzabile con le forme modali non smorzate.

Per cui se studio il sistema smorzato a NGDL ho che:

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{F\}$$

Se parla delle coordinate nodali:

$$[\phi]^T [M] [\phi] \{\ddot{v}\} + [\phi]^T [C] [\phi] \{\dot{v}\} + [\phi]^T [K] [\phi] \{v\} = [\phi]^T \{F\}$$

Si dia forma!

No diagonalizabile

Vediamo che quindi usando la matrice  $[\Phi]$  non siamo in grado di diagonalizzare  $C$  ma questo è intuitivamente spiegabile perché la matrice  $[\Phi]$  contiene le forme modali ottenute per il problema senza smorzamento. Il fatto che non riesco a diagonalizzare  $C$  è un problema.

Per poterla diagonalizzare si possono fare delle ipotesi e quella più usata è di **smorzamento proporzionale** in cui ipotizzo che:

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K] \Rightarrow [\hat{\Phi}]^T [C] [\hat{\Phi}] = \alpha[D_M] + \beta[D_K]$$

Sto quindi immaginando di scrivere  $C$  come una combinazione lineare della matrice di massa e di rigidezza.

Se applico la matrice  $[\Phi]$  vedo che viene:

$$[\phi]^T \alpha [M] [\phi] + [\phi]^T \beta [K] [\phi] = [\phi]^T [C] [\phi]$$

$$\Rightarrow [\phi]^T [C] [\phi] = \alpha D_M + \beta D_K$$

Questo permette di ricavare un fattore di smorzamento per l'i-esimo modo ma funziona solo se posso fare un esperimento.

Notiamo che il valore di  $H_{\alpha\beta}$  l'abbiamo ricavato in un sistema senza smorzamento quindi viene modificata se consideriamo anche lo smorzamento C.

Queste modifiche possono essere fatte in analogia con quello che succede con 1GDL infatti:

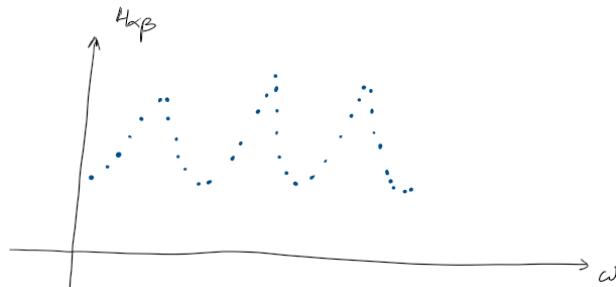
$$\boxed{1 \text{ GDL}} \quad \text{No } C \quad H(\omega) = \frac{1}{m(\omega_n^2 - \omega^2)} \quad \text{Se } C \quad H(\omega) = \frac{1}{m(\omega_n^2 - \omega^2 + \zeta^2 \omega_n^2)}$$

$$\boxed{N \text{ GDL}} \quad \text{No } C \quad H_{\alpha\beta} = \sum \frac{\hat{\Phi}_{k\alpha} \hat{\Phi}_{k\beta}}{M_k(\omega_k^2 - \omega^2)} \quad \text{Se } C \quad H(\omega) = \sum \frac{\zeta_k \omega_k}{M_k(\omega_k^2 - \omega^2 + 2\zeta_k \omega_k \omega)}$$

Quindi un sistema a NGLD ha come parametri modali:

- $\omega_k$  di cui ce ne sono N
- $\zeta_k$  di cui ce ne sono N
- $\hat{\Phi}_{k\alpha}$  e  $\hat{\Phi}_{k\beta}$  che sono autovettori ognuno con N elementi

Quello che si fa e che si misura  $H_{\alpha\beta}$  sperimentalmente per punti ottenendo grafici di questo tipo:



Da essi posso poi ricavare la curva reale attraverso dei metodi numerici che permettono di calcolare tutti i parametri di cui ho bisogno come  $\omega_k$ ,  $\zeta_k$ ,  $\hat{\Phi}_{k\alpha}$  e  $\hat{\Phi}_{k\beta}$  in modo da avere l'errore più piccolo possibile con i risultati sperimentali.

Ricordiamo che nel caso al sistema è applicata solo la forzante  $F_\beta$  allora l'equazione per determinare la trasformata di fourier della forza è:

$$H_{\alpha\beta}(\omega) = U_\alpha(\omega)/F_\beta(\omega) \quad \text{se solo } F_\beta \neq 0$$

Ed inoltre sappiamo che se  $F_\beta=0$  allora  $F_\beta(\omega)=1$  e quindi  $H_{\alpha\beta}=U_\alpha(\omega)$  ma la  $F_\beta(\omega)=1$  si ottiene solo se la forzante applicata è una delta di Dirac e questo accade perché Fourier dice che:

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \Rightarrow \Delta(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-\tau) e^{-j\omega t} dt$$

ma se che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(t-\tau) dt = f(\tau)$$

quindi viene che:

$$\Delta(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-j\omega\tau} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [\cos(\omega\tau) - j \sin(\omega\tau)]$$

$$|\Delta(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\cos^2(\omega\tau) + \sin^2(\omega\tau)) = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}}$$

- Guidare l'analisi sperimentale delle strutture  
Prima di una prova sperimentale dinamica è fondamentale effettuare una analisi modale (numerica)
- Valutare l'effetto delle modifiche al design

Quella ottenuta è detta **Equazione delle Onde** che ha per sistemi 1D uniformi, senza carichi esterni come soluzione generale:

$$\phi(x, t) = \phi_1(x - ct) + \phi_2(x + ct)$$

Dove  $\Phi_1$  e  $\Phi_2$  sono una qualsiasi funzione basta che l'argomento sia quello scritto.

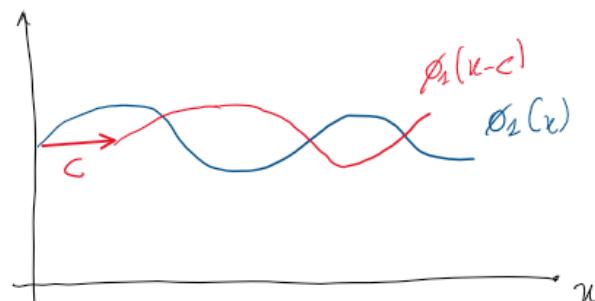
Data quindi una  $\Phi_1$  la sua forma la trovo poi con le condizioni iniziali, trovata come è fatta  $\Phi_1$  l'unico vincolo presente è che l'argomento della funzione deve essere  $x-ct$ . Lo stesso vale per  $\Phi_2$ .

Possiamo dimostrare questo fatto che qualsiasi  $\Phi_1$  e  $\Phi_2$  scelga questo è soluzione dell'equazione differenziale scritta assumendo di avere  $\Phi_1(\eta)$  con  $\eta=x-ct$  e calcolando le derivate.

$$\begin{aligned} \bullet \quad \frac{\partial \phi_1}{\partial t} &= \frac{\partial \phi_1}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial t} = (-c) \frac{\partial \phi_1}{\partial \eta} \Rightarrow \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial \eta} \right) = -c \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \eta^2} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \eta^2} \\ \bullet \quad \frac{\partial \phi_2}{\partial t} &= \frac{\partial \phi_2}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \phi_2}{\partial \eta} \cdot 1 \Rightarrow \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial t^2} = 1 \cdot \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial \eta^2} \end{aligned}$$

Se poi le sostituisco nella soluzione dell'equazione delle onde ottengo un'identità che conferma che questi valori sono funzione dell'equazione indipendentemente da come  $\Phi_1$  e  $\Phi_2$  vengano scelti. Come detto prima l'unica cosa che conta è che l'argomento di  $\Phi_1$  sia  $(x-ct)$  e quello di  $\Phi_2$  sia  $(x+ct)$ .

Possiamo rappresentare una funzione di questo tipo in istanti diversi.



Vediamo che  $\Phi_1(tx-c)$  è  $\Phi_1(x)$  spostato a destra di una valle  $ct$ . Questo lo posso vedere dal fatto che il valore che la funzione  $\Phi_1(x)$  assume nel punto 0 è lo stesso che assume la funzione  $\Phi_1(tx-c)$  nel punto  $x=ct$

Vediamo che quindi  $c$  è la velocità di propagazione dell'onda.

Un onda di questo tipo è detta Progressiva perché si muove verso destra ovvero verso  $x$  positive.

Se consideriamo adesso  $\Phi_2(x+c)$  vediamo che l'onda è un'onda regressiva che quindi si muove verso sinistra alla stessa velocità  $c$ .

Quindi quando la soluzione è:

$$\phi(x, t) = \phi_1(x - ct) + \phi_2(x + ct)$$

è perché ci sono due onde diverse che si propagano in senso opposto alla stessa velocità. Questo accade per tutti i sistemi 1D con equazioni del moto del secondo ordine.

Esistono poi sistemi continui che sono descritti con **derivate del quarto ordine** che sono:

Trave di Eulero-Bernoulli (sola flessione)

Modulo di Young E

Sezione di area S e mom. di in. I

Flessione cilindrica

Trave molto snella

$$\rho S \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = \bar{q}$$

$\bar{q}$  Carico trasversale distribuito [N/m]

Trave rotante (di Eulero-Bernoulli)

Flessione cilindrica

Trave molto snella

$$\rho S \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( H \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \bar{q}$$

$H$  Forza assiale [N]

$\bar{q}$  Carico trasversale distribuito [N/m]

Piastra di Kirchhoff

Spessore h

Piastra sottile

$$\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = \bar{q}$$

$D$  Rigidità flessionale [Nm]

$\bar{q}$  Carico trasversale distribuito [N/m<sup>2</sup>]

Anche in questo caso c'è una parte iniziale di risposta in cui il fenomeno è simile a quello descritto prima con riflessione delle onde si bordi del corpo ma noi considereremo il sistema dopo la fase transitoria.

Nella maggior parte dei casi i sistemi studiati sono finiti ma ci sono studi anche su sistemi infiniti anche se all'apparenza sono inutili che sono usati quando si studiano sistemi finiti ma su intervalli di tempo molto piccoli per cui l'onda progressiva non ha tempo di riflettersi e interagire con l'altra onda regressiva.  
ES. Impatto di un corpo su un pannello di un ala.

Nei sistemi con derivate del quarto ordine in assenza di carichi esterni e con proprietà costanti l'equazione diventa:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + a \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0 \quad a = EI / \rho S$$

Nel caso di sistema finito (onde stazionarie):

$$w(x, t) = \psi(x) \sin(\omega t)$$

da cui:

$$-\omega^2 \psi + a \psi_{xxxx} = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi_{xxxx} - (\omega^2/a) \psi = 0 \quad \Rightarrow \quad L(\psi) + \lambda \psi = 0$$

Per cui anche in questo caso si arriva ad un'equazione che è sempre risolvibile come un problema agli autovalori.

Si dice che nel problema agli autovalori **L è autoaggiunto** se vale che:

$$(L(\psi_i), \psi_j) = (L(\psi_j), \psi_i)$$

dove per (a,b) considero il prodotto scalare tra a e b pari a:  $\int_0^L a \cdot b dx$  con L=lunghezza della barra

Se un operatore è autoaggiunto, i suoi autovettori sono tra loro ortogonali, cioè:

$$(\psi_i, \psi_j) = 0, \quad i \neq j$$

Questa è una proprietà importante perché ci permetterà di diagonalizzare il problema come abbiamo fatto per il sistema a N GDL che poi diventavano N sistemi a 1GDL.

Dire questo vuol dire che a priori stiamo assumendo le equazioni dello spazio come note e rispettose delle condizioni al contorno legate ai vincoli.

Le incognite saranno quindi N, questo è molto buono perché ho trasformato un sistema a infiniti gradi di libertà in uno a N gradi di libertà che sappiamo studiare.

Dobbiamo trovare quindi  $\eta(t)$  e per farlo posso usare:

- Metodo di Galerkin che prevede la sostituzione di  $\eta(t)$  nelle equazioni del moto
- Metodo delle Energie in cui ricavo le equazioni di Energia Potenziale, Cinetica e Lavoro delle Forze Esterne e da lì ricavo le equazioni del moto discretizzate.

Usando il metodo delle energie si dimostra che, sostituendo la soluzione approssimata nelle espressioni di  $E_k$ ,  $E_p$  e  $L_e$ , si ottiene:

$$E_k(t) = \frac{1}{2} \{\dot{\eta}(t)\}^T [M] \{\dot{\eta}(t)\} \quad E_p(t) = \frac{1}{2} \{\eta(t)\}^T [K] \{\eta(t)\} \quad L_e(t) = \{\eta(t)\}^T \{F(t)\}$$

Da qua posso ottenere le equazioni del moto con le Equazioni di Lagrange grazie al fatto che ho discretizzato il problema passando da infiniti a N GDL ma facendo così ottengo delle equazioni del moto approssimate.

Ci si può chiedere allora perché ho ricavato le equazioni del moto in una forma esatta se poi è necessario approssimarle.

Riuscirei a ricavare delle equazioni esatti se usassi Galerkin la così dovrei avere una  $P_i$  che rispetta tutte le condizioni al contorno, se invece uso le soluzioni approssimate le uniche condizioni al contorno che il sistema deve rispettare sono quelle geometriche e non sui carichi. Questo fa sì che scrivere le soluzioni approssimate sia più semplice e che nella maggior parte dei casi la soluzione esatta, sapendo che tanto non la userò, non la ricavo neanche ma passo subito alla scrittura della soluzione del tipo  $f(x,t)$  che abbiamo visto e uso il metodo di Lagrange per il calcolo delle equazioni del moto.

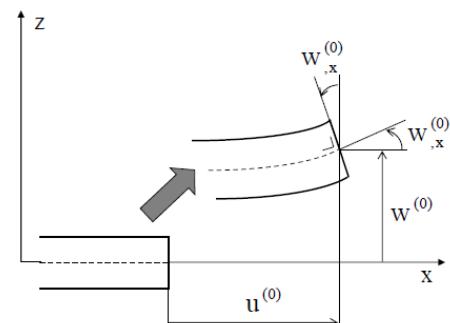
Dopo questo processo ho però ottenuto quello che volevo ovvero le equazioni del moto discretizzate che posso risolvere considerando quello che succede nei sistemi a NGLD che ho già studiato.

### 3.2 Trave di Eulero-Bernoulli

Consideriamo il caso di trave che si inflette solo nel piano quindi possiamo vederla solo di lato.

Le ipotesi che vengono applicate per creare il modello cinematico della trave di Eulero-Bernoulli sono:

- Le sezioni trasversali rimangono piane a deformazione avvenuta.
- Le sezioni trasversali rimangono perpendicolari all'asse della trave a deformazione avvenuta.
- Le sezioni trasversali mantengono invariata la loro altezza a deformazione avvenuta.
- Si ha uno stato piano di tensione (nulle le tensioni dirette secondo y).
- Anche  $\sigma_{zz}$  è nulla.



Notiamo che tutte le ipotesi sono dovute al fatto che sto considerando spostamenti e rotazioni piccole. Questo fa sì che l'angolo di rotazione possa essere indicato come indicato in figura sapendo che:

$$\tan(\alpha) = \frac{\partial w^0}{\partial x} \text{ ma siccome } \alpha \text{ è piccolo allora } \alpha = \tan(\alpha) = w^{0,x}$$

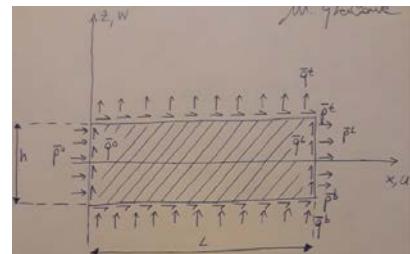
questo è l'angolo di rotazione dell'asse della trave a siccome la sezione e l'asse sono perpendicolari allora anche la sezione è inclinata dello stesso angolo.

Se per esempio consideriamo che sulla trave è applicata una pressione  $p_{top}$  allora possiamo calcolare:

$$\bar{q}_t = \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{q}_t dy$$

Avremo che:

- $q$  sono i carichi in direzione Z che saranno Top, Bottom, 0, L
- $p$  sono i carichi in direzione X che saranno Top, Bottom, 0, L



I carichi già noti saranno quelli con la - sopra.

Vogliamo scrivere le equazioni fondamentali in forma matriciale.

Notiamo che facendo così:

- La dipendenza da Z è presente nella matrice quindi è nota
- Il vettore contiene le dipendenze da x e t che sono quindi le incognite del mio problema

Per cui il sistema lo posso esprimere come:

$$\{S(x, y, z)\} = [z_v(z)] \{g_u(x, t)\}$$

Lo stesso accade per la deformazione che scrivo come:

$$\{\varepsilon(x, y, z)\} = [z_\varepsilon(z)] \{g_\varepsilon(x, t)\}$$

Anche il carico  $\sigma_{xx}$  lo scrivo in un modo simile con l'espressione che possiamo vedere.

Definiti i carichi ci concentriamo sui termini energetici.

Sappiamo che dobbiamo scrivere un'equazione per l'energia potenziale ( $E_{pot}$ ), il lavoro delle forze interne ( $L_{int}$ ) e il lavoro delle forze esterne ( $L_{est}$ ).

Per quanto riguarda l'**energia potenziale** possiamo scrivere che:

$$\begin{aligned} \delta E_p &= \int_V \delta \varepsilon_{xx}^\top \sigma_{xx}^k dv = \int_0^L \left( \int_S \delta \varepsilon_{xx}^\top \sigma_{xx}^{(k)} ds \right) dx \\ &= \int_0^L \delta \varepsilon_{xx}^\top [Z\varepsilon]^\top F [Z\varepsilon] \{g_\varepsilon\} ds dx \end{aligned}$$

$\delta \varepsilon_{zz}$  è la variazione virtuale di  $\varepsilon_{zz}$

$S$  è la sezione trasversale

(k) è presente perché potrei avere più strati di un multistrato

A questo punto devo calcolare la perturbazione ma quella di 1 e z non è fattibile perché z rappresenta una posizione che ho deciso io mentre la matrice  $[Z\varepsilon]$  è costante.

Il risultato che otteniamo è applicando  $\delta$  è:

$$\begin{aligned} &= \int_0^L \delta \{g_\varepsilon\}^\top \left( \int_S [Z\varepsilon]^\top F [Z\varepsilon] ds \right) \{g_\varepsilon\} dx \\ &= \int_0^L \delta \{g_\varepsilon\}^\top \cdot [KZI] \cdot \{g_\varepsilon\} dx \end{aligned}$$

Dove la parte centrale ha assunto il valore di  $[KZI]$  perché è composta da matrici tutte note.

$$\delta E_p = \int_o^L (M_{xx} \ddot{w} - N_x \dot{u}) dx + [N \dot{u}]_o^L + [M_x \ddot{w}]_o^L - [M \dot{w}]_o^L$$

Vogliamo scrivere adesso l'equazione per il **lavoro virtuale della forza di inerzia**.

Se abbiamo un volume dVol di un corpo posso ricavare la massa dm =  $\rho \cdot dVol$ . Le forze di inerzia fondamentali si calcolano a partire da esso e saranno:

$$\{dF_{\text{inerzia}}\} = dm \cdot \{a\}$$

Quindi posso calcolare:

$$\begin{aligned} \int L_{\text{inerzia}} &= \int_V \{\delta S\}^T \cdot \{dF_m\} = \int_V \delta \{S\}^T \cdot (-\rho \partial V \{\ddot{S}\}) dV \\ &= - \int_V \delta \{S\}^T \rho \{\ddot{S}\} dV \quad \text{con } \ddot{S} = a \end{aligned}$$

Vogliamo vedere come sono fatti i termini in S e  $\delta S$ :

$$\begin{aligned} \{S\} &= [zu] \cdot [gu] & \delta \{S\} &= [zu] \cdot \delta \{gu\} \\ \{\ddot{S}\} &= [zu] \cdot [g\ddot{u}] & \delta \{S\}^T &= \delta \{gu\} \cdot [zu]^T \end{aligned}$$

[Zu] non dipende dal tempo quindi se derivo nel tempo viene costante, essendo una costante non posso manco perturbarla

Se sostituisco ottengo:

$$\begin{aligned} \delta L_{\text{lin}} &= \int_V \delta \{S\}^T \left( -\rho \{\ddot{S}\} \right) dV \\ &= - \int_o^L \left( \int_S \delta \{gu\}^T [zu] P [zu] \{g\ddot{u}\} ds \right) dx \\ &= - \int_o^L \delta \{gu\}^T \left( \int_S [zu]^T P [zu] ds \right) \{g\ddot{u}\} dx \\ &= \boxed{- \int_o^L \delta \{gu\}^T \cdot [M_{2I}] \cdot \{g\ddot{u}\} dx} \end{aligned}$$

Dove  $[Zu] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & z \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Dove:

$$[M_{2I}] \equiv \int_S P^{(k)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & z \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} dS \equiv \begin{bmatrix} \mu & 0 & m_1 \\ 0 & \mu & m_2 \\ m_1 & m_2 & M \end{bmatrix}$$

Con all'interno i coefficienti di inerzia che sono analoghi a A,B,D ma possiamo scriverli come:

$$(\mu, m_1, m_2) \equiv \int_S P^{(k)} (1, z, z^2) dS$$

Notiamo che:

- Trave Isotropa avrà  $\mu = \rho S$   $m_2 = \rho I$   $m_1 = \rho S_G = 0$
- Trave composita multistrato  $m_1 = 0$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^L \left[ \bar{p}^b (\delta u^{(o)} + \frac{h}{2} \delta w_{,x}^{(o)}) + \bar{p}^t (\delta u^{(o)} - \frac{h}{2} \delta w_{,x}^{(o)}) \right. \\
 &\quad \left. + (\bar{q}^b + \bar{q}^t) \delta w^{(o)} \right] dx + \\
 &+ \int_{-h/2}^{h/2} \left[ \bar{p}^o (\delta u^{(o)}(z) - z \delta w_{,x}^{(o)}(z)) + \bar{p}^c (\delta u^{(o)}(z) - z \delta w_{,x}^{(o)}(z)) \right. \\
 &\quad \left. + (\bar{q}^o \delta w^{(o)}(z) + \bar{q}^c \delta w^{(o)}(z)) \right] dz
 \end{aligned}$$

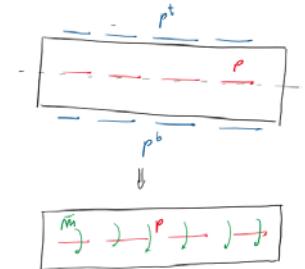
Da questa equazione del lavoro esterno posso raccogliere dei termini che sono:

$$\bar{p} = p^b - p^t \quad \bar{q} = q^b - q^t \quad \bar{m} = (p^b - p^t) \cdot h/2$$

Questo è utile perché ho trasformato due coppie di carichi su facce opposte in carichi distribuiti in direzione assiale o no, notiamo che poi m coinvolge anche  $p^t$  e  $p^b$  perché se essi sono uguali non ho componenti di momento e il contributo di m è costante, se invece sono diversi si crea il contributo m perché ho un momento sulla trave.

Notiamo che  $\bar{m}$  è con il - perché considero il verso positivo in senso orario e quello negativo in senso antiorario.

Notiamo che  $q$  è un carico per unità di lunghezza e anche  $m$  è un momento per unità di lunghezza quindi quando svilupperò le equazioni vedo che l'effetto dei carichi può essere schematizzato come un carico distribuito in direzione dell'asse, un momento distribuito e un carico perpendicolare all'asse.



Abbiamo che quindi:

$$\begin{aligned}
 \delta L_e = & \int_0^L \left[ (-\bar{p}^b + \bar{p}^t) \delta u^{(o)} + (\bar{q}^b + \bar{q}^t) \delta w^{(o)} \right. \\
 & \left. + \frac{h}{2} (\bar{p}^b - \bar{p}^t) \delta w_{,x}^{(o)} \right] dx \\
 & + \int_{-h/2}^{h/2} \left[ \dots \dots \dots \dots \right] dz
 \end{aligned}$$

Andiamo a sviluppare il secondo integrale, quello tra  $h/2$  e  $-h/2$ . Posso scrivere l'integrale come:

$$\begin{aligned}
 \int_{-h/2}^{h/2} &= \left[ \int_{-h/2}^{h/2} \bar{p}^o \delta z \right] \delta u^{(o)}(z=0) + \left[ \int_{-h/2}^{h/2} \bar{p}^o z \delta z \right] (-\delta u_{,z}^{(o)}(z=0)) + \left[ \int_{-h/2}^{h/2} \bar{p}^c \delta z \right] \delta u^{(o)}(z=L) \\
 &+ \left[ \int_{-h/2}^{h/2} \bar{p}^c z \delta z \right] (-\delta u_{,z}^{(o)}(z=L)) + \left[ \int_{-h/2}^{h/2} \bar{q}^o \delta z \right] \delta w^{(o)}(z=0) + \left[ \int_{-h/2}^{h/2} \bar{q}^c \delta z \right] \delta w^{(o)}(z=L)
 \end{aligned}$$

Se guardo i termini separatamente vedo che ottengo momenti e forze risultanti che posso rappresentare come in figura:

|   |   |
|---|---|
| $\bar{N}_o \equiv \int_{-h/2}^{h/2} \bar{p}^o \delta z$   | $\bar{N}_L \equiv \int_{-h/2}^{h/2} \bar{p}^c \delta z$   |
| $\bar{T}_o \equiv \int_{-h/2}^{h/2} \bar{q}^o \delta z$   | $\bar{T}_L \equiv \int_{-h/2}^{h/2} \bar{q}^c \delta z$   |
| $\bar{M}_o \equiv \int_{-h/2}^{h/2} \bar{p}^o z \delta z$ | $\bar{M}_L \equiv \int_{-h/2}^{h/2} \bar{p}^c z \delta z$ |

