



*centroappunti.it*

**CORSO LUIGI EINAUDI, 55/B - TORINO**

**Appunti universitari**

**Tesi di laurea**

**Cartoleria e cancelleria**

**Stampa file e fotocopie**

**Print on demand**

**Rilegature**

**NUMERO: 2577A**

**ANNO: 2024**

# **A P P U N T I**

**STUDENTE: Scaringi Nicolò**

**MATERIA: Strutture Aeronautiche - Prof. Gherlone**

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTI E NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.  
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.



**Politecnico  
di Torino**

# **STRUTTURE AERONAUTICHE**

Prof. Marco Gherlone



1° anno

*Nicolò Scaringi*

# INDICE

1.	PROGETTO STRUTTURALE E CARICHI	1
1.1	Requisiti, criteri e sicurezza	1
1.2	Classificazione dei carichi	2
2.	TEORIA DELL'ELASTICITÀ E MATERIALI	3
2.1	Equazioni costitutive	3
2.2	Caratterizzazione e proprietà dei materiali	5
2.3	Materiali anisotropi	7
3.	TEORIA DEL SEMICUSCIO	10
4.	TEORIA DELLE PIASTRE	13
4.1	Piastre di Kirchhoff	13
4.2	Piastre sandwich	18
4.2	Piastre iperelastiche	21
5.	STABILITÀ	23
6.	METODO DEGLI ELEMENTI FINITI	25
6.1	Metodo di Rayleigh - Ritz	25
6.2	Finite Element Method	26
6.3	Elementi finiti mono-dimensionali	29
6.4	Elementi finiti bi-dimensionali	31

# 1 PROGETTO STRUTTURALE E CARICHI

La verifica è l'analisi di una struttura non più modificabile. Il progetto è l'analisi di una struttura ancora da realizzare.

## 1.1 REQUISITI, CRITERI E SICUREZZA

I requisiti sono le caratteristiche ["a parole"] da rispettare. I criteri sono le formule matematiche - derivanti dai requisiti - da rispettare.

### PRINCIPALI REQUISITI - E RELATIVI CRITERI - STRUTTURALI IN AMBITO STATICO

Requisiti strutturali	Criteri strutturali
i) robustezza	→ robustezza
ii) rigidità	→ { rigidità elasticità
iii) stabilità	→ stabilità

i) La **robustezza** di una struttura è la sua capacità di sopportare i carichi.

Vi sono due formulazioni del criterio di robustezza, si applica quella più stringente:

$$a) \sigma_L \leq \frac{\sigma_s}{K_L}$$

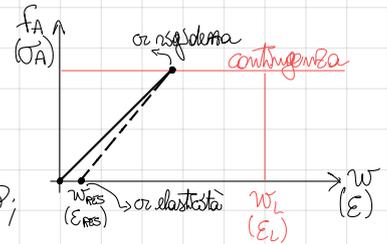
$$b) \sigma_L \leq \frac{\sigma_R}{K_R}$$

dove  
 $\sigma_L$ : tensione massima derivata dai carichi di contingenza  
 $\sigma_s$ : tensione massima [ammmissibile] del materiale (L: limite)  
 $\sigma_R$ : tensione di rottura [ammmissibile] del materiale  
 $K_L$ : fattore di sicurezza (tipicamente  $K_L=1$ )  
 $K_R$ : fattore di sicurezza a robustezza (tipicamente  $K_R=1,5$ )

ii) La **rigidità** di una struttura è la sua capacità di deformarsi entro un certo livello sotto carichi; riguarda lo spostamento/deformazione a contingenza (limite) dopo aver applicato il carico.

L'**elasticità** di una struttura è la sua capacità di limitare al minimo le deformazioni residue una volta che è stato eliminato il carico applicato; riguarda lo spostamento/deformazione residua dopo aver tolto il carico.

Il criterio di rigidità e il criterio di elasticità si possono esprimere in termini di spostamento massimo o di deformazione massima sotto i carichi di contingenza.



iii) La **stabilità** di una struttura è la sua capacità di mantenere una configurazione di equilibrio quando è perturbata.

Il criterio di stabilità prescrive l'assenza di fenomeni di instabilità sotto i carichi di robustezza.

### PRINCIPALI APPROCCI ALLA SICUREZZA STRUTTURALE

La sicurezza strutturale è la capacità di operare in condizioni di esercizio senza arrivare a rotture catastrofiche.

Il vecchio criterio prevede come assunto l'assenza di difetti nella struttura e si applica uno dei seguenti approcci:

- **safe-life** (vita sicura): determinazione della durata massima della struttura prima della rottura → tramite test a fatica si stabilisce la durata di vita sicura del componente - in termini di numero di alternanze o ore di volo - oltre la quale viene sostituito indipendentemente dalla presenza o meno di cricche. Secondo le JAR 25.571 il safe life si utilizza solo per il carrello e i suoi attacchi.

- **fail-safe** (sicurezza nella rottura): il verificarsi di una rottura non deve portare ad una rottura catastrofica, la struttura danneggiata deve essere in grado di operare per un determinato periodo di tempo (completamento della missione o rientro alla più vicina base disponibile) → si hanno strutture ridondanti che hanno sufficiente integrità strutturale per sopportare i carichi addizionali derivanti dall'elemento mal funzionante per un determinato periodo di tempo.

# 2 TEORIA DELL'ELASTICITÀ E MATERIALI

Campo di spostamenti  $\{u_i(x,y,z)\} = \begin{Bmatrix} u(x,y,z) \\ v(x,y,z) \\ w(x,y,z) \end{Bmatrix}$

Campo di deformazione  $[E_p] = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} & \epsilon_y & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{xz}}{2} & \frac{\gamma_{yz}}{2} & \epsilon_z \end{bmatrix} \sigma \quad \{E_p\} \equiv \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \text{ con}$

$$\epsilon_x = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_P \quad \epsilon_y = \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_P \quad \epsilon_z = \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_P$$

$$\gamma_{xy} = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_P + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_P$$

$$\gamma_{xz} = \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_P + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_P$$

$$\gamma_{yz} = \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_P + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_P$$

Campo di tensione  $[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \sigma \quad \{\sigma\} \equiv \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$

## 2.1 EQUAZIONI COSTITUTIVE

### EQUAZIONI COSTITUTIVE PER MATERIALI ANISOTROPI, MONOCLINI, ORTOTROPI E ISOTROPI

Si definisce lavoro/energia di deformazione il lavoro compiuto dall'esterno su un corpo per portarlo dalla configurazione indeformata ( $\{\epsilon_i\} = \{0\}$ ) e tensione nulla ( $\{\sigma_i\} = \{0\}$ ) ad un determinato stato deformativo  $\{\epsilon_i\}$  e tensionale. Un corpo si dice elastico se tale lavoro non dipende dal particolare processo di carico ma solo dagli stati iniziale e finale. Se le tensioni sono proporzionali alle deformazioni si dice che il comportamento del materiale è lineare.

Le equazioni costitutive di un materiale elastico lineare si esprimono attraverso la legge di Hooke generalizzata  $\{\sigma\} = [C]\{\epsilon\} \Leftrightarrow \{\epsilon\} = [S]\{\sigma\}$  dove  $[C]$  (6x6) matrice dei coefficienti elastici di rigidezza,  $[S] = [C]^{-1}$  (6x6) matrice dei coefficienti elastici di deformabilità, sono entrambe simmetriche.

I materiali **anisotropi** non presentano simmetrie di comportamento, la matrice  $[C]$  è piena e asimmetrica, le costanti elastiche indipendenti sono 21.

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ \text{sim} & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix}$$

I materiali **monoclinici** hanno comportamento simmetrico rispetto ad un piano (ad esempio (1,2)), le costanti elastiche indipendenti sono 13.

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ & & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ \text{sim} & & & C_{44} & C_{45} & 0 \\ & & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix}$$

I materiali **ortotropi** presentano 3 piani di simmetria del comportamento mutuamente ortogonali (ad esempio (1,2), (2,3) e (3,1)) gli assi 1,2 e 3 sono detti assi [principali] di ortotropia, le costanti elastiche indipendenti sono 9.

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ \text{sim} & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \quad (3)$$

## 2.2 CARATTERIZZAZIONE E PROPRIETÀ DEI MATERIALI

Per "abbinatura" le equazioni costitutive è necessario determinare sperimentalmente le costanti ingegneristiche dei materiali (moduli di elasticità longitudinale e tangenziale e coefficienti di Poisson). La caratterizzazione sperimentalmente avviene con prove distruttive dette prove di trazione uniaxiali; da esse è possibile ricavare anche altre proprietà molto importanti:

- trazione (al limite) di proporzionalità  $\sigma_p \rightarrow$  fine tratto lineare / dk elasticità
- trazione di snervamento  $\sigma_s, \sigma_{0.2} (\sigma_y) \rightarrow$  inizio tratto plastico
- trazione di rottura / resistenza a trazione  $\sigma_R (\sigma_{TU})$
- allungamento percentuale dopo rottura  $A_p$

La seconda del comportamento del materiale (ductile o fragile, isotropo o anisotropo), alcune di queste caratteristiche due possono: non essere definibili (materiale fragile ha  $\sigma_s$  indefinibile), necessarie con la direzione della sollecitazione, variare col verso della sollecitazione (trazione o compressione).

### PROVA DI TRAZIONE PER LA CARATTERIZZAZIONE DI UN MATERIALE ISOTROPO METALLICO (DUTTILE)

È una prova regolata dalla normativa, da stabilire le dimensioni totali e relative dei provini da utilizzare. I provini hanno forma a doglia / ossi dk come con una sezione minore nella parte centrale ove si vuole che si verifichi la rottura. La sezione può essere circolare o rettangolare.

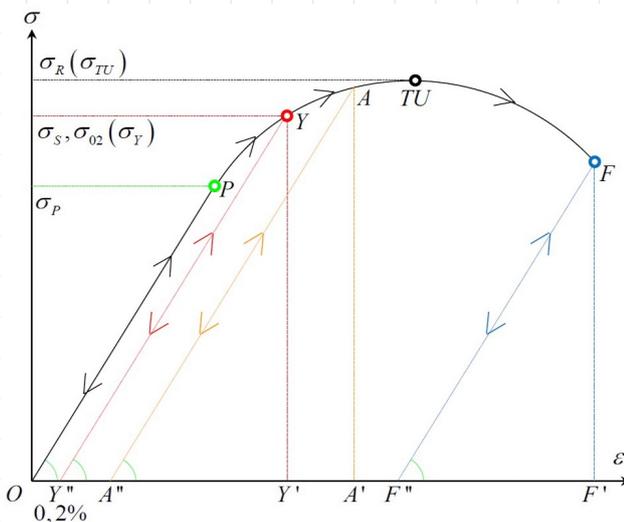
Le macchine per prove di trazione sono di solito composte da: una console di controllo, una cella di carico, due ganasce, un attizzatore idraulico. Sono in grado di applicare al provino carichi variabili nel tempo secondo una istessa temporale desiderata [possono essere utilizzati per prove di trazione e prove di fatica].

Durante la prova viene memorizzata, istante per istante, l'entità del carico applicato e della deformazione del provino. L'entità del carico  $F$  permette di determinare la sollecitazione / trazione ingegneristica  $\sigma = F/A_0$  relativa ad un provino con area della sezione resistente  $A_0$ , costante durante la prova. La deformazione ingegneristica è valutata come  $\epsilon = \Delta L / L_0$  dove  $\Delta L = L - L_0$  è l'incremento di lunghezza e  $L_0$  è la lunghezza iniziale presa come riferimento, misurate tramite estensimetri.

La prova può essere svolta in 2 modalità:

- controllo di spostamento  $\rightarrow$  in cui si utilizza una velocità di deformazione ( $d\epsilon/dt$ ) o di spostamento tra le due estremità ( $dl/dt$ ) costanti  $\rightarrow$  NB utilizzato nelle prove di trazione, eseguito nella sezione successiva
- controllo di carico  $\rightarrow$  in cui si utilizza una velocità di carico costante ( $dF/dt$ )

### DIAGRAMMA TENSIONE-DEFORMAZIONE PER UN MATERIALE ISOTROPO METALLICO (DUTTILE)



Per i materiali metallici isotropi un tipico comportamento duttile (non dissimile tra compressione e trazione). Nel tratto lineare  $E = \Delta\sigma / \Delta\epsilon$ ,  $\nu = -\Delta\epsilon / \Delta\epsilon$  e  $A_p = 100 \frac{L_f - L_0}{L_0}$ .  $\epsilon_A = OA'' + A''A'$  dove  $OA''$  deformazione plastica / residua e  $A''A'$  deformazione elastica.

In controllo di carico il provino si rompe in TU, per cui non è possibile osservare il ramo discendente della curva.

In controllo di spostamento il provino si rompe in F, poiché si rompono gli spostamenti indipendentemente dal carico è possibile osservare anche il ramo discendente della curva.

Il carico di rottura  $\sigma_R$  è definito come carico max, corrisponde alla rottura in controllo di carico e non in controllo di spostamento, ma è da considerare come deformazione.

Le prove a trazione si fanno in controllo di spostamento poiché nel ramo di TU-F il provino è ancora in grado di sopportare i carichi, tratto caratteristico del materiale duttile (capacità di deformarsi plasticamente). (5)

## CRITERI DI RESISTENZA PER MATERIALI COMPOSTI (ORTOTROPI)

Il criterio di rottura per i materiali composti tengono conto del diverso comportamento nelle varie direzioni di ortotropia e a seconda del verso della sollecitazione. Sono quindi coinvolti diversi ammissibili di tensione (deformazione) di rottura:

$$\sigma \quad \epsilon$$

$X_T (X_{ET})$  a trazione nella direzione delle fibre, 1

$X_C (X_{EC})$  a compressione nella direzione delle fibre, 1

$Y_T (Y_{ET})$  a trazione nella "direzione" della matrice, 2 e 3

$Y_C (Y_{EC})$  a compressione nella "direzione" della matrice, 2 e 3

$S (S_E)$  a taglio nel piano

$S_B$  di adesione interlaminare (è la tensione alla quale si rompe l'adesivo che unisce i materiali)

Il criterio di rottura possono: riguardare la tensione e la deformazione, essere non interattivo e interattivo, essere intra-laminare e inter-laminare.

a) Criterio della massima tensione (non interattivo intra-laminare)

$$f_{11} \equiv \frac{\sigma_1}{X} < 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{a seconda del segno della tensione, si considera l'ammissibile a trazione e compressione} \\ \text{e se il criterio è applicato con valori assoluti} \end{array} \right.$$

$$f_{12} \equiv \frac{\sigma_2}{Y} < 1$$

$$f_{12} \equiv \frac{\tau_{12}}{S} < 1$$

b) Criterio della massima deformazione (non interattivo intra-laminare)

$$f_{11} \equiv \frac{\epsilon_1}{X_E} < 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{a seconda del segno della deformazione, si considera l'ammissibile a trazione e a compressione e se il criterio} \\ \text{è applicato con valori assoluti} \end{array} \right.$$

$$f_{12} \equiv \frac{\epsilon_2}{Y_E} < 1$$

$$f_{12} \equiv \frac{\gamma_{12}}{S_E} < 1$$

Non interattivo: valida entro certi limiti, perché per singolarmente possono rispettare il criterio ammissibile a rottura, ma l'interazione tra loro può non far rispettare il criterio.

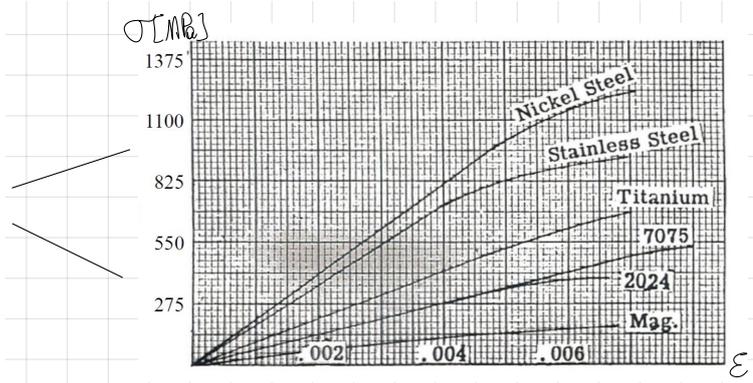
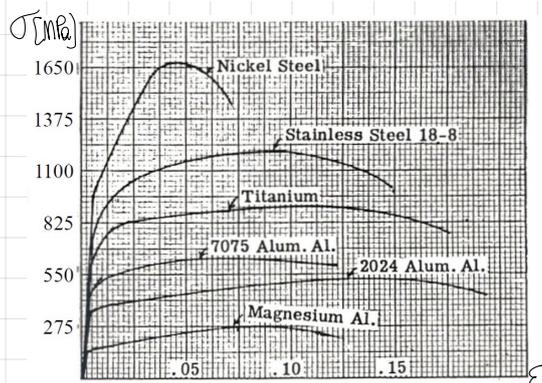
c) Criterio di Hoffmann (interattivo intra-laminare)

$$f_1 \equiv \frac{\sigma_1^2}{X_T X_C} + \frac{\sigma_2^2}{Y_T Y_C} + \frac{\tau_{12}^2}{S} + \frac{X_C - X_T}{X_T X_C} \sigma_1 + \frac{Y_C - Y_T}{Y_T Y_C} \sigma_2 - \frac{\tau_{12}^2}{X_T X_C} < 1$$

2.3

## MATERIALI AEROSPAZIALI

Materiale	Densità $\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	Modulo di Young $E$ (MPa)	Tensione di	Tensione di	Tensione di	Allungamento percentuale dopo rottura $A_{ps}$ (%)	Lunghezza di rottura $L_R$ (km)
			proporzionalità $\sigma_p$ (MPa)	snervamento $\sigma_s$ (MPa)	rottura $\sigma_R$ (MPa)		
Leghe di Mg	1800	26 46000			280-320	10-15	16
Leghe di Al	DURAL (SAE 2024)	27 73000	200	300	420-450	14-20	15
	ERGAL (SAE 7075)	27 73000	300	450	550-650	7-11	23
Leghe di Ti	4500	23 105000			1000-1200	13-18	24
Leghe Fe-C	Acciai da bonifica	7900	27 210000		>1200	14-20	>15
	Acciai saldabili	7900	27 210000		500-800	>20	8



facca di separazione ben definita; la combinazione ha proprietà dimiche-fasche non riscontrabili nei singoli materiali - Sono costituiti da:

- i) **matrice** → fase omogenea polimerica [metallica o ceramica] utile per tenere in posizione e proteggere i rinforzi, non tanto per sopportare il carico
- ii) **rinforzo** → fase dispersa di fibre lunghe ordinate e disordinate (o particelle) in grado di garantire rigidità e robustezza in specifiche direzioni - tra le fibre lunghe più diffuse si ricordano quelle di vetro, boro, carbonio, aramidiche (Kevlar).

Le proprietà dei composti sono funzione di quelle di matrice ( $m$ ) e fibra ( $f$ ) e delle rispettive percentuali in volume ( $V_m$  e  $V_f$ , regola delle miscele)  $V_m + V_f = 1$

$$E_1 = V_f E_f + V_m E_m \text{ essendo } E_m \ll E_f \Rightarrow E_1 \approx E_f V_f$$

$$E_2 = \frac{E_m E_f}{V_m E_f + V_f E_m}$$

tra i vantaggi dei materiali composti vi sono: elevato rigidezza e robustezza specifiche ( $E/\rho$  e  $\sigma_R/\rho$ ), possibilità di progettare la direzione delle fibre al fine di ottimizzare specifiche prestazioni ottenendo fibre orientate (tubo), stabilità dimensionale soprattutto termica in quanto si dilatano poco per effetto della temperatura.

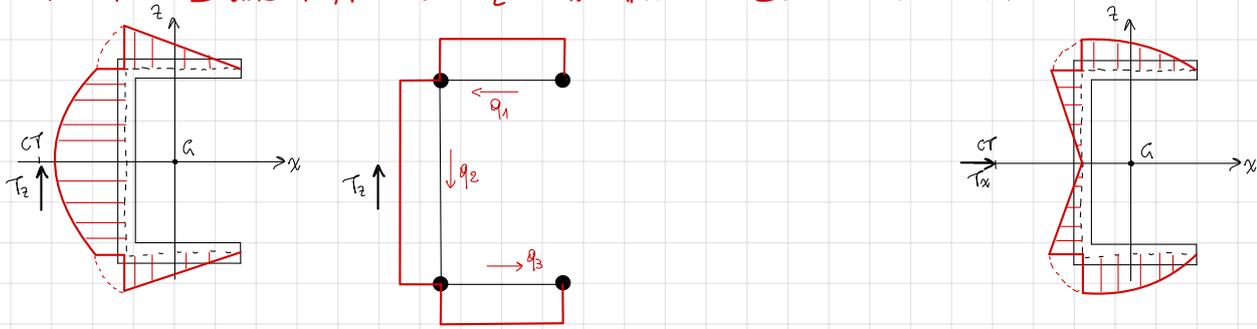
tra gli svantaggi vi sono: rottura fragile, costo mediamente elevato, sensibilità al danno soprattutto nel caso multistrato in quanto possono danneggiarsi all'interno dello strato e tra gli strati (delaminazione).

- ss) poiché i pannelli sono sede solo di sforzi di taglio, il flusso di taglio rimane costante nel pannello  $q_{1,2} = \tau_{xy} t = \text{cost}$
- sss) poiché se il flusso di taglio è costante nei pannelli, lo sforzo normale  $N_{x1}$  e la tensione normale  $\sigma_{x1}$  sono lineari lungo l'asse  $x$  dei correnti.

⇒ taglio e momento torcente: la conseguenza che il flusso di taglio  $q$  è costante in un pannello porta alla conclusione che lungo  $x$  il taglio e il momento torcente possono variare solo passando da un pannello all'altro e cioè attraversando una cerniera.

Momento flettente: la curva è lineare a tratti, con variazioni finite di pendenza in corrispondenza delle cerniere.  
Sforzo normale: stesso andamento del momento flettente.

### TRAVE A C SOGGETTA A TAGLIO $T_2$ E $T_x$ APPLICATO SUL CENTRO DI TAGLIO



### AREE COLLABORANTI IN PRE-CRITICO NEI CASI DI STRESS UNIASSIALE E DI PURA FLESSIONE

In pre critico, per il calcolo delle aree collaboranti si utilizzano le seguenti formule valide sia per trazione che per compressione:

- stress uniaxiale ( $\sigma_{x1} = \sigma_{x2}$ ):  $A_{coll} = \frac{at}{2}$
- stress a flessione ( $\sigma_{x1} = -\sigma_{x2}$ ):  $A_{coll} = \frac{at}{6}$

Nell'esempio a dx i pannelli verticali lavorano a flessione pura, i pannelli orizzontali lavorano in compressione. Per semplicità si suppone  $t$  uguale in tutti i pannelli.

$$A_{coll,1} = \frac{1}{6} at + \frac{1}{2} at$$

$$A_{coll,2} = \left(\frac{1}{6} at\right) 2 + \frac{1}{2} at$$

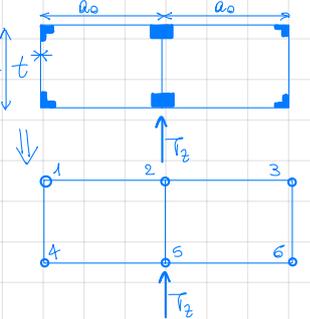
$$A_{coll,3} = \frac{1}{2} at + \frac{1}{6} at$$

$$A_{coll,4} = \frac{1}{6} at + \frac{1}{2} at$$

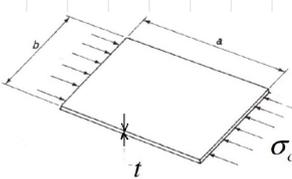
$$A_{coll,5} = \left(\frac{1}{6} at\right) 2 + \frac{1}{2} at$$

$$A_{coll,6} = \frac{1}{2} at + \frac{1}{6} at$$

Si ricorda che  $A_s = A_{coll,1,5} + A_{coll,2,3,4,6}$



### STRISCIA COLLABORANTE IN POST-CRITICO PER PANNELLO SOGGETTO A CARICO DI COMPRESSIONE UNIASSIALE



In post critico si instaurano fenomeni di instabilità, si ha  $\sigma_c = KE \left(\frac{t}{b}\right)^2$  con

$K = 3,62$  lati appoggiati dove  $b$ : dimensione lato caricato a pressione

$K = 6,31$  lati incastrati

$K$  parametro di carico critico/ coefficiente di snobbamento

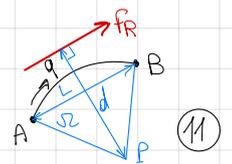
Negli esperimenti si osserva che la parte centrale del pannello va effettivamente in instabilità a carichi relativamente modesti, ma una striscia a contatto con il vincolo resiste alla presenza del vincolo stesso da cui aumenta la resistenza. Sembra una striscia di rivestimento a cavallo del vincolo, detta striscia collaborante, si sottrae all'instabilità e contribuisce alla resistenza a flessione. La larghezza collaborante può essere ottenuta imponendo  $\sigma_c = \sigma_{c2}$  e  $b = 2l_{sc}$  (trascurando la parte in instabilità), cioè imponendo che il carico del pannello per instabilità coincida con il limite di utilizzo del materiale.

$$\sigma_{c2} = KE \left(\frac{t}{2l_{sc}}\right)^2 \Rightarrow l_{sc} = t \sqrt{\frac{K E}{4 \sigma_{c2}}} \Rightarrow A_s = 2l_{sc} \cdot t \text{ : area striscia collaborante}$$

### RISULTANTE DEL FLUSSO $q$ NEI PANNELLI RETTILINEI E NEI PANNELLI CURVI

Per i pannelli rettilinei  $L = AB$  e la forza risultante è  $F_R = qL$  applicata sul pannello ( $d=0$ )

Per i pannelli curvilinei vale sempre  $L = AB$  e  $F_R = qL$  ma il punto di applicazione è al di fuori del pannello, essendo  $MR = 2qL$  (1ª formula di Bredt) ed essendo  $MR = F_R d$  si ha



[il polo P è arbitrario]

# 4

# TEORIA DELLE PIASTRE

La piastra è definita come il solido generato spostando un segmento di spessore  $h$  perpendicolarmente ad una superficie di riferimento  $S$  che può essere piana (piastra piana) o curva (guscio). La piastra deve essere poco spessa ( $a, b \gg h$ ) e poco incurvata ( $R_{min} \gg h$ ).

Nelle varie teorie sono fatte opportune assunzioni:

- i) sulle deformazioni e tensioni trasversali e quindi considerate nulle [anche strato per strato]
- ii) sull'andamento di spostamenti, deformazioni e tensioni lungo la coordinata di spessore  $z$

⇒ il problema diventa 2D  $(x, y)$

La seconda della geometria della piastra e del materiale di cui è composta esistono diverse teorie approssimate (modelli) di piastra.

La superficie di riferimento interatta a metà il segmento di spessore (superficie media). Nel caso di piastra costituita da  $N$  strati: gli strati vengono numerati da 1 a  $N$  con indice  $k$  nel verso positivo dell'asse  $z$ ; si utilizza una notazione con l'apice  $(k)$  per indicare una grandezza associata allo strato  $k$ -esimo; la quota dell'interfaccia superiore di uno strato si indica con  $z^{(k)+}$ , quella inferiore con  $z^{(k)-}$ .

## 4.1 PIASTRA DI KIRCHHOFF

Per piastra molto sottile ( $a/h, b/h \gg 30$ ) isotropa e multistrato composto ma senza variazioni eccessive delle proprietà meccaniche tra i vari strati.

### IPOTESI DI BASE E CINEMATICHE DELLA TEORIA DELLA PIASTRA DI KIRCHHOFF E CAMPO DI SPOSTAMENTI

La piastra di Kirchhoff ha le seguenti ipotesi di base:

- i) ciascuno strato ha spessore uniforme
- ii) ciascuno strato è isotropo o ortotropo e comunque omogeneo
- iii) gli strati sono perfettamente incollati tra di loro
- iv) gli spostamenti sono piccoli rispetto allo spessore totale (ipotesi di piccoli spostamenti)
- v) le deformazioni sono piccole rispetto all'unità (ipotesi di piccole deformazioni)
- vi) il comportamento del materiale di ogni strato è lineare elastico.

Le ipotesi cinematiche sono:

- i) i segmenti di spessore, inizialmente rettilinei, rimangono tali a deformazione avvenuta
- ii) i segmenti di spessore mantengono invariata la loro lunghezza a deformazione avvenuta
- iii) i segmenti di spessore, inizialmente perpendicolari alla superficie di riferimento, lo sono ancora a deformazione avvenuta

Per l'hp i) il campo di spostamenti ha andamento lineare su  $z$ :

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u^{(0)}(x, y) + z \vartheta(x, y) \\ v(x, y, z) = v^{(0)}(x, y) + z \psi(x, y) \\ w(x, y, z) = w^{(0)}(x, y) + z \phi(x, y) \end{cases}$$

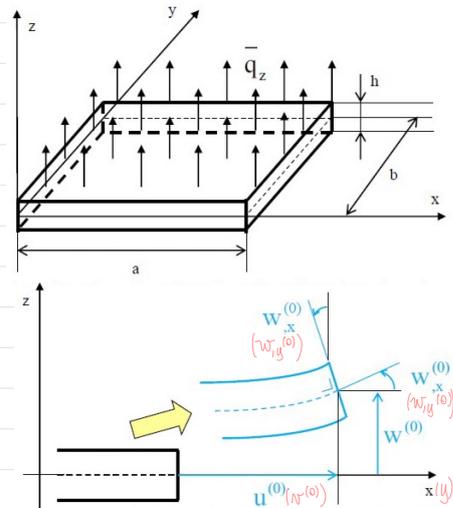
Per l'hp ii)  $\epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = \phi(x, y) = 0 \Rightarrow w(x, y, z) = w^{(0)}(x, y)$  gli spostamenti su  $z$  non dipendono da  $z$

Per l'hp iii)  $\chi_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \vartheta(x, y) + \frac{\partial w^{(0)}}{\partial x} = 0 \Rightarrow \vartheta(x, y) = -\frac{\partial w^{(0)}}{\partial x} = -w^{(0)}_{,x}$

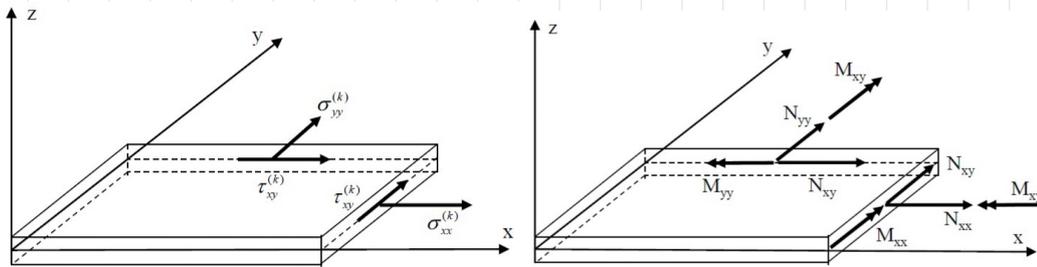
$\chi_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \psi(x, y) + \frac{\partial w^{(0)}}{\partial y} = 0 \Rightarrow \psi(x, y) = -\frac{\partial w^{(0)}}{\partial y} = -w^{(0)}_{,y}$  per cui il campo di spostamenti è:

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u^{(0)}(x, y) - z w^{(0)}_{,x}(x, y) \\ v(x, y, z) = v^{(0)}(x, y) - z w^{(0)}_{,y}(x, y) \\ w(x, y, z) = w^{(0)}(x, y) \end{cases}$$

trattasi di un modello 2D in quanto le variabili cinematiche (scomposi-  
to  $w^{(0)}(x, y)$ ,  $v^{(0)}(x, y)$ ,  $u^{(0)}(x, y)$ ) dipendono solo da  $x$  e  $y$  (13)



## FORZE E MOMENTI RESULTANTI DELLA TEORIA DELLA PIASTRA DI KIRCHHOFF



SS integra la regione te momento  
 $\langle \cdot \rangle = \int_{-h/2}^{h/2} (\cdot) dz$   
 (integrale su tutto il laminato, non solo uno strato)

$\sigma_{xx}^{(k)}, \sigma_{yy}^{(k)}, \tau_{xy}^{(k)}$  sono le uniche componenti non nulle  
 Le forze risultanti per unità di lunghezza sono:

$$\{N\} = \begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \langle \sigma^{(k)} \rangle = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx}^{(k)} \\ \sigma_{yy}^{(k)} \\ \tau_{xy}^{(k)} \end{Bmatrix}$$

I momenti risultanti per unità di lunghezza sono:

$$\{M\} = \begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \langle z \sigma^{(k)} \rangle = \begin{Bmatrix} z \sigma_{xx}^{(k)} \\ z \sigma_{yy}^{(k)} \\ z \tau_{xy}^{(k)} \end{Bmatrix}$$

## [EQUAZIONI COSTITUTIVE] MATRICI DI RIGIDITÀ CARATTERISTICHE DELLA TEORIA DELLA PIASTRA DI KIRCHHOFF

Le equazioni costitutive della piastra di Kirchhoff sono:

$$\begin{cases} \{N\} \\ \{M\} \end{cases} = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B] & [D] \end{bmatrix} \begin{cases} \{\epsilon^0\} \\ \{\kappa\} \end{cases}$$

che si può compattezza su

Considerando N strati [ di spessore  $h^{(k)}$  e al cui interno  $Q^{(k)} = \text{cost}(z)$  si possono scrivere le matrici di rigidità:

- matrice delle rigidità membranali  $[A] = \langle [Q^{(k)}] \rangle = \sum_{k=1}^N [Q^{(k)}] h^{(k)}$
- matrice delle rigidità di accoppiamento  $[B] = \langle z [Q^{(k)}] \rangle = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N [Q^{(k)}] ((z^{(k)+})^2 - (z^{(k)-})^2)$
- matrice delle rigidità fless-torsionali  $[D] = \langle z^2 [Q^{(k)}] \rangle = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N [Q^{(k)}] ((z^{(k)+})^3 - (z^{(k)-})^3)$

Le principali proprietà delle matrici di rigidità sono:

- [A], [B] e [D] sono simmetriche e 3x3
- [A] dipende solo da quali strati fanno parte del laminato e non dalla loro posizione  $\rightarrow$  è invariante per cambio di posizione degli strati
- [B] e [D] dipendono sia dagli strati del laminato ma anche dalla loro posizione
- nel caso di superficie di riferimento coincidente con la superficie media, se la laminazione è simmetrica (per spessore, materiale e sua orientazione) allora  $[B] = [0]$ .

Dall'ultima proprietà deriva la seguente differenza di comportamento:

- per piastra non simmetrica  $[B] \neq [0] \rightarrow$  il comportamento membranale e quello fless-torsionale sono accoppiati: gli sforzi  $\{N\}$  provocano anche fless-torsioni e i momenti  $\{M\}$  generano anche deformazioni membranali
- per piastra simmetrica  $[B] = [0] \rightarrow$  il comportamento membranale e quello fless-torsionale sono disaccoppiati: gli sforzi  $\{N\}$  provocano solo deformazioni membranali e i momenti  $\{M\}$  generano solo fless-torsioni.

Altre particolari laminazioni sono:

c) monostato (N=1) ortotropo ( $\nu = 0^\circ$ ):  $[A] = h \begin{bmatrix} E_1 & \nu_{12} E_2 & 0 \\ 1-\nu_{12} \nu_{21} & 1-\nu_{12} \nu_{21} & 0 \\ \nu_{12} E_2 & E_2 & 0 \\ 1-\nu_{12} \nu_{21} & 1-\nu_{12} \nu_{21} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix}$   $[B] = [0]$   $[D] = \frac{h^3}{12} [A]$

d) monostato (N=1) isotropo ( $\nu \neq 0^\circ, E_1 = E_2 = E, \nu_{12} = \nu_{21} = \nu, G_{12} = G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ )  $[A] = \frac{Eh}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$   $[B] = [0]$   $[D] = \frac{h^3}{12} [A]$

e) cross-ply ( $\theta = 0^\circ, 90^\circ$ ):  $[A] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}$   $[B] = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix}$   $[D] = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix}$  (15)