



centroappunti.it

CORSO LUIGI EINAUDI, 55/B - TORINO

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 2575A

ANNO: 2024

A P P U N T I

STUDENTE: Scaringi Nicolò

**MATERIA: Orbital Robotics and Distributed Space System -
Prof. Romano**

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTI E NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.



**Politecnico
di Torino**

ORBITAL ROBOTICS AND DISTRIBUTED SPACE SYSTEM

Prof. Marcello Romano

2° anno

Nicolò Scaringi

INDICE

Orbital Robotics	1
1. FUNDAMENTALS OF ENGINEERING MECHANICS	2
1.1 Basic Concepts	2
1.2 Attitude Kinematics & Differential Kinematics of vector bases	5
1.3 Rotational dynamics of a Rigid Body	7
1.4 Dynamics of a Particles	10
1.5 Dynamics of a System of Particles	12
2. ASTRODYNAMICS	13
2.1 Attitude control of a single Rigid Body etc	13
3. ORBITAL ROBOTICS	14
3.1 Rototranslational Motion of a Mass Continuum and of a Rigid Body	14
3.2 Introduction to Rigid Multi-Body System	15
3.3 Fixed and Moving Base Robotic Manipulator - Recursive Analysis: Kinematics	16
3.4 Fixed and Moving Base Robotic Manipulator - Recursive Analysis: Differential Kinematics	19
3.5 Fixed and Moving Base Robotic Manipulator - Recursive Analysis: Dynamics	21
3.6 Fixed and Moving Base Robotic Manipulator - Recursive Analysis: Analysis & Control	23
4. DISTRIBUTED SPACE SYSTEMS	26
4.1 Kepler Problem (Unperturbed Restricted 2 Body Problem)	26
4.2 Restricted 2 Body Problem, Proximity Flight	29
4.3 Gravity gradient force and torque	31
5. LABORATORY TESTING	32

ORBITAL ROBOTICS

Space robotics è definita come la scienza interessata allo studio dell'ingegneria e delle operazioni di spacecraft system che possono interagire fisicamente con altri oggetti nello spazio utilizzando attivamente meccanismi di bordo controllati che consentono il docking, l'assembly, la manipulation o la mobility.

Space robotics si può dividere in due grosse sotto-categorie:

- **orbital robotics** (microgravity robotics) → si occupa dell'**orbiting space robotics system**: un esempio pragmatico è un satellite artificiale dotato di un manipolatore robotico di bordo che consente di afferrare e manipolare altri orbiting object per il services, l'assembly di stations spaziali o altre grandi strutture, e la rimozione di detriti orbitali.
- **planetary robotics** → riguarda gli space robotics system che operano sulla superficie di un corpo extraterrestre; un esempio paradigmatico è un veicolo spaziale che atterra sulla superficie della Luna o di Marte e rilascia un rover robotico per esplorare vicino al sito di atterraggio, il rover può essere dotato di un robotico manipolatore per erigere strumenti alla superficie.

La base vettoriale cartesiana viene rappresentata come $\hat{A} = \{\hat{e}^A\} = \begin{pmatrix} \hat{e}_1^A \\ \hat{e}_2^A \\ \hat{e}_3^A \end{pmatrix}$.

La mutua ortogonalità è espressa da: $\{\hat{e}^A\} \cdot \{\hat{e}^A\} = \begin{pmatrix} \hat{e}_1^A \\ \hat{e}_2^A \\ \hat{e}_3^A \end{pmatrix} \cdot \{\hat{e}_1^A, \hat{e}_2^A, \hat{e}_3^A\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \triangleq \mathbb{I}_3$.

La regola della mano destra è espressa da: $\{\hat{e}^A\} \times \{\hat{e}^A\} \triangleq \begin{pmatrix} 0 & \hat{e}_3^A & -\hat{e}_2^A \\ -\hat{e}_3^A & 0 & \hat{e}_1^A \\ \hat{e}_2^A & -\hat{e}_1^A & 0 \end{pmatrix}$

Un vettore arbitrario \underline{v} può essere espresso in una base vettoriale arbitraria $\{\hat{e}^B\}$ come combinazione lineare dei vettori della base $\underline{v} = N_1 \hat{e}_1^B + N_2 \hat{e}_2^B + N_3 \hat{e}_3^B$ dove N_1, N_2 e N_3 sono le coordinate/componenti scalari di \underline{v} in $\{\hat{e}^B\}$. $N_s^B = \underline{v} \cdot \hat{e}_s^B$ con $s=1,2,3$. Le coordinate di \underline{v} nella base vettoriale B possono essere scritte come $v^B = \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{pmatrix}^B = \underline{v} \cdot \begin{pmatrix} \hat{e}_1^B \\ \hat{e}_2^B \\ \hat{e}_3^B \end{pmatrix}$

Valgono le seguenti operazioni nella base vettoriale cartesiana: $\underline{c} = \underline{a} + \underline{b} \Rightarrow c^B = a^B + b^B$
 $\underline{s} = \underline{a} \cdot \underline{b} \Rightarrow (a^B)^i (b^B)_i = (b^B)^i (a^B)_i$ • $\underline{c} = \underline{a} \times \underline{b} \Rightarrow c^B = a_x^B b^B$ dove la cross-vector matrix è $a_x^B \triangleq \begin{bmatrix} 0 & -a_3^B & a_2^B \\ a_3^B & 0 & -a_1^B \\ -a_2^B & a_1^B & 0 \end{bmatrix}$

La cross-vector matrix si costruisce col seguente metodo: si parte dall'elemento (3,2) in cui $s=1$, si muove in senso orario con un salto a forma di L - come il cavallo negli scacchi - fino all'elemento (1,3) in cui $s=2$; da lì si muove in senso orario con un salto a forma di L fino all'elemento (2,1) in cui $s=3$; si completa il resto della matrice per anti-simmetria < skew-symmetry >.

TENSORS

Un tensore [di secondo ordine] è un'entità matematica tale da dato il vettore \underline{a} e moltiplicato scalarmemente per il tensore \underline{S} si ottiene un vettore \underline{b} che in genere ha diversa intensità e direzione $\underline{b} = \underline{S} \cdot \underline{a}$

Il prodotto diadico < dyadic product / dyads > $\underline{a} \underline{b} = \underline{a} \otimes \underline{b}$ ha importanti proprietà: $\underline{c} \cdot \underline{a} \underline{b} \triangleq (\underline{c} \cdot \underline{a}) \underline{b}$; $\underline{a} \underline{b} \cdot \underline{c} \triangleq \underline{a} (\underline{b} \cdot \underline{c})$; $(\underline{a} \underline{b}) \times \underline{c} \triangleq \underline{a} (\underline{b} \times \underline{c})$; $\underline{a} \times (\underline{b} \underline{c}) \triangleq (\underline{a} \times \underline{b}) \underline{c}$; $\underline{a} \underline{b} \cdot \underline{c} \underline{d} \triangleq (\underline{b} \cdot \underline{c}) \underline{a} \underline{d}$. La somma di più dyads è detta dyadic e per essa vale $(\underline{a} \underline{b} + \underline{c} \underline{d}) \cdot \hat{e} \triangleq \underline{a} \underline{b} \cdot \hat{e} + \underline{c} \underline{d} \cdot \hat{e}$.

Si definisce base diadica di una base vettoriale $\{\hat{e}^A\} \otimes \{\hat{e}^A\} = \begin{pmatrix} \hat{e}_1 \hat{e}_1^A & \hat{e}_1 \hat{e}_2^A & \hat{e}_1 \hat{e}_3^A \\ \hat{e}_2 \hat{e}_1^A & \hat{e}_2 \hat{e}_2^A & \hat{e}_2 \hat{e}_3^A \\ \hat{e}_3 \hat{e}_1^A & \hat{e}_3 \hat{e}_2^A & \hat{e}_3 \hat{e}_3^A \end{pmatrix}$

Dato un tensore arbitrario \underline{S} , si può esprimere una base vettoriale arbitraria $\{\hat{e}^A\}$ come combinazione lineare $\underline{S} = S_{11}^A \hat{e}_1 \hat{e}_1^A + S_{12}^A \hat{e}_1 \hat{e}_2^A + S_{13}^A \hat{e}_1 \hat{e}_3^A + S_{21}^A \hat{e}_2 \hat{e}_1^A + S_{22}^A \hat{e}_2 \hat{e}_2^A + S_{23}^A \hat{e}_2 \hat{e}_3^A + S_{31}^A \hat{e}_3 \hat{e}_1^A + S_{32}^A \hat{e}_3 \hat{e}_2^A + S_{33}^A \hat{e}_3 \hat{e}_3^A$ con s fattori/componenti scalari $S^A = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix}$ per cui si ha $\underline{S} = \{\hat{e}^A\}^i S^A \{\hat{e}^A\}^j$ e $S^A = \{\hat{e}^A\}^i \cdot \underline{S} \cdot \{\hat{e}^A\}^j$

Nella base vettoriale cartesiana CVB valgono le seguenti operazioni per s tensori: $\underline{D} = \underline{a} \underline{b} \Rightarrow D^A = a^A (b^A)$; $\underline{S} = \underline{T} + \underline{U} \Rightarrow S^A = T^A + U^A$; $\underline{T} \cdot \underline{a} = \{\hat{e}^A\}^i T^A a^A$; $\underline{T} \cdot \underline{U} = \{\hat{e}^A\}^i T^A U^A \{\hat{e}^A\}^j$

Il tensore identità è definito in modo che $\underline{1} \cdot \underline{a} \triangleq \underline{a} \cdot \underline{1} \triangleq \underline{a}$, quindi $\underline{1} = \hat{e}_1 \hat{e}_1^A + \hat{e}_2 \hat{e}_2^A + \hat{e}_3 \hat{e}_3^A$ e la sua matrice di coordinate è $1^A = \mathbb{I}_3$

L'inverso del tensore è tale che $\underline{T}^{-1} \cdot \underline{T} \triangleq \underline{T} \cdot \underline{T}^{-1} \triangleq \underline{1}$, cioè l'inverso di un tensore, in una qualsiasi base vettoriale, ha la matrice delle coordinate uguale all'inverso della matrice delle coordinate del tensore originale.

Il cross-product tensor è un'altro modo per indicare il cross-product $\underline{a}_x \cdot \underline{b} \triangleq \underline{a} \times \underline{b}$, quindi $\underline{a}_x = \{\hat{e}^A\}^i a_x^A \{\hat{e}^A\}^j$

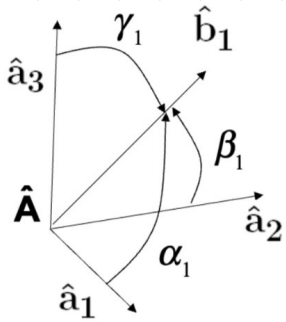
Dato qualsiasi vector-product tensor \underline{a}_x , o più in generale un tensore anti-simmetrico < skew-symmetric tensor >, è sempre possibile determinare il suo vettore associato / axial vector \underline{a} : $\underline{a} = \text{axial}(\underline{a}_x)$ $\underline{a}_x = \text{svaxial}(\underline{a})$

L'evoluzione nel tempo di una funzione scalare è uguale in qualsiasi sistema di riferimento; invece per una funzione vettoriale o tensoriale dipende dal sistema di riferimento in quanto il sistema di riferimento può essere affetto da una o entrambi le seguenti cause: i) la variazione nel tempo dell'intensità e della direzione del vettore stesso, ii) il moto del sistema di riferimento da cui si osserva il vettore. (3)

1.2 ATTITUDE KINEMATICS & DIFFERENTIAL KINEMATICS OF VECTOR BASES

L'orientamento di un RF è il suo orientamento nello spazio 3D rispetto ad una base lineare (ad esempio un altro RF), il moto rotazionale di un RF è un'evoluzione nel tempo del suo orientamento.

DIRECTION COSINE MATRIX



Usare intenzionalmente la seguente nomenclatura $\hat{a}_s = \hat{e}_s^A$ e $\hat{b}_s = \hat{e}_s^B$ con $s=1,2,3$;

$A = \{\hat{e}^A\}, B = \{\hat{e}^B\}$ e $\hat{e} = \hat{n}$ $C = \cos$
 Dati 2 CVB A e B si ha che $B = C_{BA} A$ dove $B = \begin{bmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \hat{b}_3 \end{bmatrix}$ e $A = \begin{bmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \hat{a}_3 \end{bmatrix}$ e

$$C_{BA} = \begin{bmatrix} \hat{b}_1 \cdot \hat{a}_1 & \hat{b}_1 \cdot \hat{a}_2 & \hat{b}_1 \cdot \hat{a}_3 \\ \hat{b}_2 \cdot \hat{a}_1 & \hat{b}_2 \cdot \hat{a}_2 & \hat{b}_2 \cdot \hat{a}_3 \\ \hat{b}_3 \cdot \hat{a}_1 & \hat{b}_3 \cdot \hat{a}_2 & \hat{b}_3 \cdot \hat{a}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c(\alpha_1) & c(\beta_1) & c(\gamma_1) \\ c(\alpha_2) & c(\beta_2) & c(\gamma_2) \\ c(\alpha_3) & c(\beta_3) & c(\gamma_3) \end{bmatrix}$$

matrice dei coseni direttivi
 < Direction Cosine Matrix DCM >

Si definisce R_{AB} il tensore di rotazione che trasforma il RF B nel RF A, nello stesso modo

in cui $\{\hat{e}^B\}$ è trasformato in $\{\hat{e}^A\}$: $R_{AB} \hat{e}^B = \hat{e}^A$ per cui valgono $R_{AB} \cdot \hat{e}_1^B = \hat{e}_1^A$; $R_{AB} \cdot \hat{e}_2^B = \hat{e}_2^A$; $R_{AB} \cdot \hat{e}_3^B = \hat{e}_3^A$ e
 $\hat{1} = \hat{e}_1^A \hat{e}_1^B + \hat{e}_2^A \hat{e}_2^B + \hat{e}_3^A \hat{e}_3^B$, per cui $R_{AB} = \hat{e}_1^A \hat{e}_1^B + \hat{e}_2^A \hat{e}_2^B + \hat{e}_3^A \hat{e}_3^B = \sum \hat{e}^A \hat{e}^B$

Se DCM è definito anche come $C_{BA} = \sum \hat{e}^A \cdot R_{AB} \cdot \hat{e}^B = \sum \hat{e}^B \cdot R_{AB} \hat{e}^A = \sum \hat{e}^B \cdot \hat{e}^A$ e si può definire $R_{BA} = C_{AB}$

Le proprietà della DCM sono: i) è ortogonale $\Rightarrow C_{BA} C_{AB} = I \Leftrightarrow C_{BA} = C_{AB}^{-1}$; ii) $\det(C_{BA}) = 1$; iii) ha un autovalore reale pari a +1 e due autovalori complessi coniugati $\exp(\pm i\alpha)$; iv) $C_{BA} \eta = \eta$

Dato due basi ortogonali A e B arbitrarie, un vettore v arbitrario e un tensore S arbitrario, si ha che $v^B = C_{BA} v^A \Leftrightarrow$

$v^A = C_{AB} v^B$ e $S^A = C_{AB} S^B C_{BA} \Leftrightarrow S^B = C_{BA} S^A C_{AB}$

Se si ha una composizione di rotazioni $A \rightarrow B$ e $B \rightarrow C$, allora $C_{CA} = C_{CB} C_{BA}$, e si può estendere per successive rotazioni.

Se la rotazione avviene solo intorno ad un asse, la DCM si semplifica:

$$C_1(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \quad C_2(\phi) = \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & -\sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \phi & 0 & \cos \phi \end{bmatrix} \quad C_3(\phi) = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La DCM ha alcune proprietà: i) i suoi elementi sono 9 numeri reali, ma solo 3 di essi sono indipendenti; ii) solo 3 elementi indipendenti non sono sufficienti per esprimere univocamente l'orientamento del sistema di coordinate, perché le 6 equazioni vincolanti sono non-lineari e ce sono multiple soluzioni; iii) 6 elementi sono sufficienti per determinare univocamente gli altri 3 elementi: noti due assi della CVB, il terzo asse si determina con la regola della mano destra.

QUATERNIONS

Dato due CVB A e B, l'orientamento di B rispetto A è definito dal quaternion $q_{AB} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 \sin(\alpha/2) \\ \epsilon_2 \sin(\alpha/2) \\ \epsilon_3 \sin(\alpha/2) \\ \cos(\alpha/2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon \\ \eta \end{bmatrix}$ e vale

$\|q_{AB}\|^2 = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 = \epsilon^T \epsilon + \eta^2 = 1$ che è l'equazione di una sfera unitaria 4D. Si noti che $q_{AB}^{-1} = \begin{bmatrix} -\epsilon \\ \eta \end{bmatrix}$ descrive lo stesso orientamento di q_{AB} : due punti opposti della sfera unitaria 4D corrispondono allo stesso orientamento, quindi alla stessa DCM. Il quaternion con il quarto elemento positivo corrisponde alla più piccola rotazione.

Dati due quaternioni $q' = \begin{bmatrix} q_1' \\ q_2' \\ q_3' \\ q_4' \end{bmatrix} = q_1' \hat{i} + q_2' \hat{j} + q_3' \hat{k} + q_4'$ e $q'' = \begin{bmatrix} q_1'' \\ q_2'' \\ q_3'' \\ q_4'' \end{bmatrix} = q_1'' \hat{i} + q_2'' \hat{j} + q_3'' \hat{k} + q_4''$, valgono le seguenti operazioni

$\hat{i}^2 = \hat{j}^2 = \hat{k}^2 = \hat{i} \hat{j} \hat{k} \hat{i} = -1$ e $\hat{i} \hat{j} = \hat{k}$; $\hat{j} \hat{i} = -\hat{k}$; $\hat{i} \hat{k} = -\hat{j}$; $\hat{k} \hat{i} = \hat{j}$; $\hat{j} \hat{k} = -\hat{i}$; $\hat{k} \hat{j} = \hat{i}$; $\hat{i} \hat{k} = -\hat{j}$; la moltiplicazione tra quaternioni non è commutativa: $q_{mm}(q'' \otimes q') = q' \otimes q'' \neq q'' \otimes q' = q_{mm}(q' \otimes q'')$

Dato il quaternion $q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix}$ il suo inverso è $q^{-1} = \frac{1}{q^T q} \begin{bmatrix} -q_1 \\ -q_2 \\ -q_3 \\ q_4 \end{bmatrix}$ dove $q^T q = (q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2)$. Facendo riferimento a due CVB

si ha $q_{BA} = q_{AB}^{-1}$ e $q_{AB} = q_{BA}^{-1}$.

1.3 ROTATIONAL DYNAMICS OF A RIGID BODY

NEWTON'S II LAW

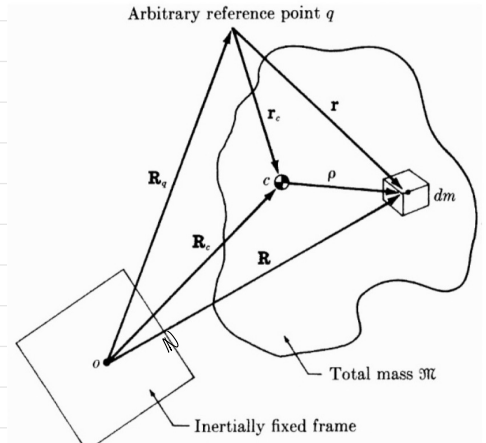
$\underline{F} = m \underline{a} = \frac{d}{dt} \int \underline{p}$ dove $\underline{p} = m \underline{v} \Rightarrow d\underline{F} = \dot{\underline{R}} dm$. Si può scrivere $d\underline{F} = d\underline{f} + d\underline{f}'$, dove $d\underline{f}$ è la risultante delle forze interne agenti su dm e $d\underline{f}'$ è la risultante delle forze esterne agenti su dm , dove $\int d\underline{f}' = 0$ per la III legge di Newton.

CENTER OF MASS (COM)

Il centro di massa di un corpo rigido (o massa continua) è il punto c identificato dal seguente vettore-posizione rispetto ad un punto arbitrario q

$$\underline{r}_c = \frac{\int \underline{r} dm}{M} \text{ dove } M = \int dm$$

Il COM si muove come una singola particella di massa pari alla massa totale del sistema, e rispetta alla risultante delle forze esterne agenti sull'intero corpo $\underline{F} = M \dot{\underline{R}}_c$



MOMENTA

La quantità di moto < linear momentum > di un corpo rigido è la somma vettoriale delle quantità di moto < linear momenta > delle porzioni infinitesime del corpo $\underline{Q} := \int \dot{\underline{R}} dm = M \dot{\underline{R}}_c$

L'impulso della forza < impulse-momentum > è dato da $\int_{t_1}^{t_2} \underline{F} dt = \int_{t_1}^{t_2} (M \dot{\underline{R}}_c) dt = \underline{Q}(t_2) - \underline{Q}(t_1)$. In particolare, se $\underline{F} = 0$ o $\int_{t_1}^{t_2} \underline{F} dt = 0$, la quantità di moto si conserva tra t_1 e t_2 .

\underline{R}_c rispetto inertial frame N	$\underline{R} = \underline{R}_q + \underline{r}$
\underline{r} rispetto arbitrary point q	$\underline{R} = \underline{R}_c + \underline{p}$
\underline{p} rispetto COM(c)	

Il momento angolare < angular momentum > di un RF o MC wrt un pt arbitrario q è $\underline{H}^q := \int \underline{r} \times \dot{\underline{r}} dm$

Il momento della quantità di moto < moment of momentum > è $\underline{h}^q := \int \underline{r} \times \dot{\underline{R}} dm$

Si ricava da $\underline{H}^q = \int \underline{r} \times \dot{\underline{r}} dm \Rightarrow \dot{\underline{H}}^q = \int \underline{r} \times \ddot{\underline{r}} dm = \int \underline{r} \times \ddot{\underline{R}} dm + \underline{R}_q \times \int \dot{\underline{r}} dm = \underline{M}^q + \underline{R}_q \times \underline{M}^q = \underline{M}^q + M \underline{R}_q \times \underline{v}_c \Rightarrow \dot{\underline{H}}^q = \underline{M}^q + M \underline{R}_q \times \underline{v}_c$

moment- angular momentum derivative equation dove $\underline{M}^q := \int \underline{r} \times d\underline{f}$

E analogamente $\dot{\underline{h}}^q = \underline{M}^q + \underline{v}_c \times M \dot{\underline{R}}_q$ moment- moment of momentum derivative equation

L'impulso angolare del momento angolare < angular impulse - angular momentum > è $\underline{A}^1(t_1, t_2) := \int_{t_1}^{t_2} \underline{M}^q dt = \underline{H}^q(t_2) - \underline{H}^q(t_1) - \int_{t_1}^{t_2} M \underline{R}_q \times \underline{v}_c dt$

Se $\underline{M}^q = 0$ o $\int_{t_1}^{t_2} \underline{M}^q dt = 0$ il momento angolare tra t_1 e t_2 wrt un punto arbitrario q NON si conserva.

Se viene scelto un particolare punto q che soddisfa uno di questi due criteri: a) q = COM del corpo; b) q ∈ N, cioè è un punto fisso nel sistema inerziale allora si ha $\dot{\underline{H}}^q = \underline{M}^q$. In questo particolare caso $\underline{A}^1(t_1, t_2) := \int_{t_1}^{t_2} \underline{M}^q dt = \underline{H}^q(t_2) - \underline{H}^q(t_1)$ è detta risultante [invariante] dell'impulso angolare; se $\underline{M}^q = 0$ o $\int_{t_1}^{t_2} \underline{M}^q dt = 0$ il momento angolare si conserva.

Qualsiasi sistema di forze avente risultante \underline{F} è equivalente ad un sistema composto da una coppia e da una singola forza \underline{F}' dove \underline{F}' ha la stessa intensità ed è parallela ad \underline{F} , ma è passante per un punto q arbitrario selezionato. Per ciò il momento angolare di un corpo rigido wrt un sistema arbitrario F e un punto q è $\underline{H}^q := \int \underline{r} \times \dot{\underline{r}} dm = \int \underline{r} \times \frac{d\underline{r}}{dt} dm + \underline{H}^*$ dove $\underline{H}^* := \int \underline{r} \times (\underline{\omega}_{FN} \times \underline{r}) dm$ con $\underline{\omega}_{FN}$ velocità angolare del sistema F wrt N

INERTIA MATRIX

Applicando l'identità di Jacobi si ha $\underline{r} \times (\underline{\omega}_{FN} \times \underline{r}) = -\underline{r} \times (\underline{r} \times \underline{\omega}_{FN}) \Rightarrow \underline{r} \times (\underline{\omega}_{FN} \times \underline{r}) = -(\underline{r}\underline{r} - \underline{r}\underline{r}\underline{1}) \cdot \underline{\omega}_{FN}$. Si ha $\underline{H}^* := \int \underline{r} \times (\underline{\omega}_{FN} \times \underline{r}) dm = \underline{I}^q \cdot \underline{\omega}_{FN}$ dove $\underline{I}^q := \int [(\underline{r}\underline{r}) \underline{1} - \underline{r}\underline{r}] dm$ è il tensore di inerzia del corpo rigido wrt q. e vale ${}^A \underline{I}^q = \int \underline{e}^A \underline{e}^A \cdot \underline{I}^q \cdot \underline{e}^A \underline{e}^A$

Se $\underline{r} = r_1 \hat{e}_1 + r_2 \hat{e}_2 + r_3 \hat{e}_3$ allora gli elementi di ${}^A \underline{I}^q$ sono

$I_{11} := \int (r_2^2 + r_3^2) dm$	$I_{22} := \int (r_1^2 + r_3^2) dm$	$I_{33} := \int (r_1^2 + r_2^2) dm$
$I_{12} = I_{21} := -\int r_1 r_2 dm$	$I_{13} = I_{31} := -\int r_1 r_3 dm$	$I_{23} = I_{32} := -\int r_2 r_3 dm$

Linear permutation of index (7)

axes ω suo verso: $H_c \neq \text{const}$ e $|H_c| = \text{const}$, $\omega_{BN} \neq \text{const}$ e $|\omega_{BN}| = \text{const}$

SUMMARY

Particolarità fondamentali del moto rotazionale del corpo rigido:

i) Large rotation do not commute \rightarrow l'orientamento non è un vettore

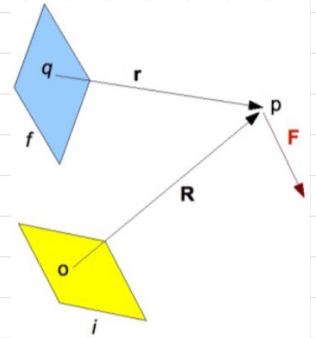
ii) la velocità angolare non è la derivata nel tempo di un vettore $\rightarrow \underline{\omega}_{BA} : \dot{C}_{BA} = -\omega_{BA}^x C_{BA}$ con $\omega_{BA}^x \triangleq$

iii) il momento angolare non è [in generale] parallelo alla velocità angolare.

$$\begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}$$

L'impulso della forza nell'intervallo Δt è $I = \int_{t_1}^{t_2} \underline{F} dt = \int_{t_1}^{t_2} (m \frac{d^2}{dt^2} \underline{R}) dt = m \left[\frac{d}{dt} \underline{R}(t_2) - \frac{d}{dt} \underline{R}(t_1) \right] \Rightarrow I = m \underline{V}(t_2) - m \underline{V}(t_1)$
 dove $I = \int_{t_1}^{t_2} \underline{F} dt$ è detto **impulso** [vettoriale] e $m \underline{V}$ quantità di moto < linear momentum > [vettoriale]

Il **momento** della forza \underline{F} wrt O è $\underline{M}^O := \underline{R} \times \underline{F}$. Il **momento angolare** della particella p wrt O è $\underline{H}^O := \underline{R} \times m \frac{d}{dt} \underline{R}$. La 2^a legge di Newton si può riscrivere come $\underline{R} \times \underline{F} = \underline{R} \times m \underline{A} \Rightarrow \underline{M}^O = \frac{d}{dt} \underline{H}^O$ e l'impulso del momento è $\int_{t_1}^{t_2} \underline{R} \times \underline{F} dt = \int_{t_1}^{t_2} \underline{M}^O dt = \underline{H}^O(t_2) - \underline{H}^O(t_1)$



L'**energia cinetica** [vettoriale] è $T := \frac{1}{2} m \underline{V}^T \cdot \underline{V}$, la **potenza** è $P := \underline{F} \cdot \underline{V}$, sono legate tra loro da $P = \dot{T}$. Il **lavoro** fatto da una forza \underline{F} sulla particella p è $W_{12} := \int_{t_1}^{t_2} \underline{F} \cdot \underline{V} dt = \int_{P_1}^{P_2} \underline{F} \cdot d\underline{R}$; è legata alle altre grandezze da $W_{12} = \int_{t_1}^{t_2} P dt = \int_{t_1}^{t_2} \underline{F} \cdot \underline{V} dt = T_2 - T_1$ dove $T_i = T(t_i)$.

In casi particolari il lavoro W_{12} fatto dalla forza \underline{F} dipende solo dai punti P_1 e P_2 , in questo caso \underline{F} è una forza conservativa. Una forza è conservativa se $\nabla \times \underline{F} = 0$.

Se la forza è conservativa si ha un campo conservativo ed è quindi possibile definire l'**energia potenziale** come $V := -U + C$ dove U è il potenziale scalare, C è una costante arbitraria introdotta per porre $V=0$ in un arbitrario datum point. Per un sistema conservativo l'**energia meccanica totale** $(T+V)$ si conserva: $T_1 + V_1 = T_2 + V_2$

VIRTUAL WORK & LAGRANGE EQUATIONS

Data una particella p , identificata dalla posizione \underline{R} in un intervallo Δt , che cambia posizione nel tempo, in ogni istante si può immaginare di avere una posizione diversa data da $\underline{R} + \delta \underline{R}$, lo spostamento immaginario $\delta \underline{R}$ è detto **spostamento virtuale**.

Lo spostamento virtuale è: indipendente dal tempo, arbitrario in intensità e direzione, infinitesimale, compatibile con tutti i vincoli del moto della particella.

La 2^a legge di Newton diventa $\underline{F} = m \underline{A} \Rightarrow \underline{F} \cdot \delta \underline{R} = m \underline{A} \cdot \delta \underline{R}$, dove $\underline{F} \cdot \delta \underline{R}$ è detto **lavoro virtuale**.

In un sistema di coordinate generalizzate (q_1, q_2, \dots, q_n) lo spostamento virtuale si scrive come $\delta \underline{R} = \delta \underline{R}(q_1, q_2, \dots, q_n) = \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial \underline{R}}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha$. Esempi di equazioni vincolari sono: a) moto sul piano $z=0$; b) moto sulla sfera $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$; c) moto a velocità costante [e direzione arbitraria] $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = v^2$; d) moto fuori dalla sfera $x^2 + y^2 + z^2 \geq r^2$.

I vincoli sono detti: **holonomici** se è nella forma di equazione algebrica, **non-holonomici** in caso contrario. Un sistema è detto **holonomico** se ha tutti i vincoli holonomici; il sistema è detto **non-holonomico** se ha almeno un vincolo non-holonomico. Per un sistema holonomico è sempre possibile descrivere il sistema utilizzando n coordinate generalizzate indipendenti, dove n è uguale al numero di gradi di libertà DoF, che sono funzione solo del tempo.

Le **equazioni di Lagrange** per una particella con holonomici constraint [o no constraint] sono $\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha$, dove $Q_\alpha := \underline{F} \cdot \frac{\partial \underline{R}}{\partial q_\alpha} = \underline{F} \cdot \frac{\partial \underline{R}}{\partial \underline{q}_\alpha}$ è detta **forza generalizzata**, $\alpha = 1, \dots, n$ con $n = \text{DoF}$. Il lavoro virtuale può essere scritto come

$$\underline{F} \cdot \delta \underline{R} = \underline{F} \cdot \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial \underline{R}}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha = \sum_{\alpha=1}^n Q_\alpha \delta q_\alpha$$

Le equazioni di Lagrange per una particella soggetta solo a forze conservative con holonomici constraint [o no constraint]

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0 \text{ dove la funzione di Lagrange è definita come } L := T - V$$

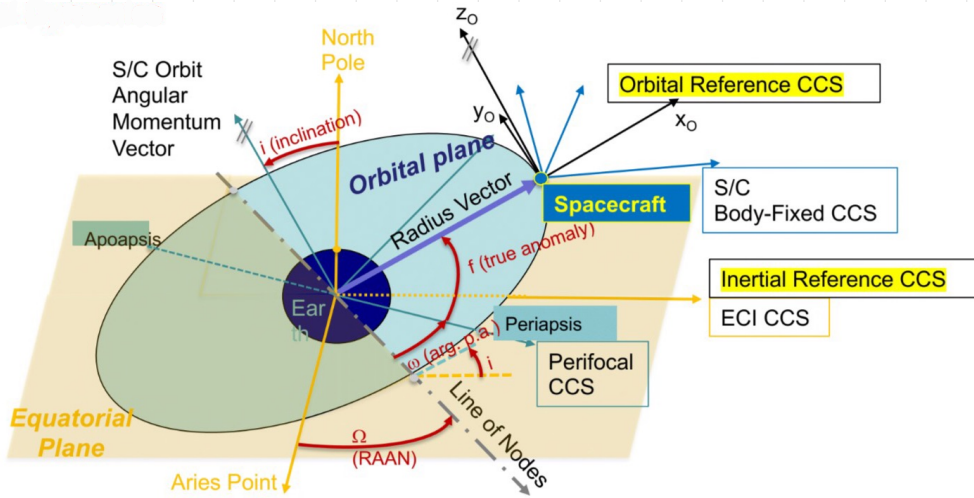
L'**approccio di Newton**: è basato su quantità scalari (R, V, A, F) ; si usano solo coordinate fisiche (cartesiane, polari ecc); richiede il calcolo di forze/coppie di reazione; per un sistema multibody è necessario considerare ciascun corpo separatamente.

L'**approccio analitico** (eq. di Lagrange, Hamilton ecc) è basato su quantità scalari (T, V, W, L) ; si usano coordinate generalizzate; forze/coppie che non fanno lavoro virtuale non appaiono nella formulazione delle equazioni; il sistema multibody si può considerare come un unico.

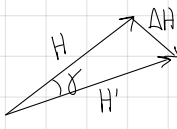
2.

ASTRODYNAMICS

2.1 ATTITUDE CONTROL OF A SINGLE RIGID BODY S/C



Per la stabilizzazione dell'assetto e piccoli angoli di manovra < attitude stabilization and small angle maneuvers > questi metodi sono validi solo per angoli piccoli perché si basa su approssimazioni lineari.



Spinning stabilization / rigidità giroscopica < gyroscopic stiffness >

$$\Delta H \cong H \gamma = T_{\text{perp}} \text{ dist } \Delta t \Rightarrow \gamma = \frac{T_{\text{perp}} \text{ dist } \Delta t}{I \omega_{\text{spin}}}$$

La momentale spin direction è stabile, come conseguenza dell'abilità del momento angolare (vettore) di resistere alle perturbazioni ad esso perpendicolari.

Attualmente questo metodo è utilizzato per l'orientation della travi e delle antenne.

Spinning quasi-rigid body. Il moto spontaneo di un corpo rigido è directionalmente stabile intorno agli assi di massa ma a minima inerzia. Gli S/C in realtà non sono corpi rigidi, ma molti possono essere considerati quasi-rigid body.

3 dispositivi di scambio della quantità di moto < momentum exchange devices MED > sono tutti atti ad attuare la rotazione dei dischi < wheels > all'interno dello S/C. Il momento angolare varia tra S/C e dischi:

- una coppia è applicata ad ogni disco e si genera una coppia uguale e opposta dello S/C (3^o legge di Newton);
- vale l'equazione di Eulero del moto rotazionale (nel caso ideale di assenza di corse esterne si ha la conservazione del momento angolare).

3 MED forniscono solo una coppia di controllo interna. Non sono due tipi: reaction wheels RW e control moment gyro CMG. Uno S/C che contiene MED è spesso chiamato gyrostato.

Ricordando che $H_{\text{TOT}} = H + H_W$ e $H_{\text{TOT}} + W \times H_{\text{TOT}} = T_{\text{EXT}}$ si ha $J_{\text{TOT}} \dot{W}_{\text{BN}} + W_{\text{BN}}^x J_{\text{TOT}} W_{\text{BN}} = T_{\text{EXT}} + T_{\text{MED}}$ dove

$$T_{\text{MED}} = -(W_{\text{BN}}^x \dot{z}h + \dot{z}h + J_{\text{TOT}} W_{\text{BN}}) = T_{\text{requested}}$$

$$\text{Per le reaction wheels } \dot{z} = 0 \text{ e } J_{\text{TOT}} = 0 \text{ quindi } T_{\text{MED, RW}} = -\dot{z}h - W_{\text{BN}}^x z h = T_{\text{requested}} \Rightarrow \dot{h} = -z^{-1} (T_{\text{requ}} + W_{\text{BN}}^x z h) \Rightarrow \dot{h} = T_W$$

Per i control moment gyro \dot{z} e J_{TOT} sono approssimativamente 0 per un modello del primo ordine, quindi

$$T_{\text{MED, CMG}} = -\dot{z}h - W_{\text{BN}}^x z h = T_{\text{requ}} \Rightarrow \dot{z}h \approx -\frac{T_{\text{requ}}}{1 + W_{\text{BN}}^x z}$$

3.2 INTRODUCTION TO RIGID MULTI-BODY SYSTEMS

Un multi-rigid-body system MB è formato da: rigid bodies/links, ideal mechanical joints, forces/torques.
 Per sistema multibody si intende un insieme di body uniti da joint. Si assume che: il sistema multibody è rigido, cioè ciascun body è un rigid body; ha un'architettura tridimensionale.

Position e orientation assoluta di un body insieme alla position e orientation relativa di ciascuno degli altri body unit il primo costituiscono la **configuration** a cui il sistema MB è in un certo istante. La configuration space di un sistema MB è l'insieme di tutte le possibili configurazioni.

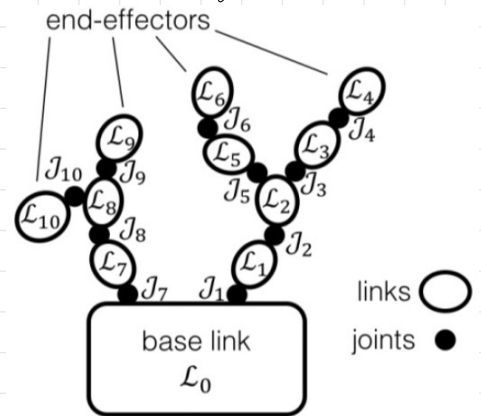
Il number of **degree of freedom** Dof di un sistema MB è la dimensione della configuration space, è il numero minimo di coordinate richieste per descrivere univocamente la configuration del sistema. $D_{tot} = D_{base} + \sum_{joints} D_{joints}$ dove $0 \leq D_{base} \leq 6$ e D_{joints} è la somma dei Dof (intorno) dato dai joint.

3 joint connettono due link. 3 tipi base sono i seguenti:

- fixed joint (Dof=0) → connette rigidamente due link
 - revolute joint (Dof=1) → consente ad due link di ruotare rispetto all'altro intorno ad un asse comune e; lo spostamento angolare è variabile ed è denotato con θ .
 - prismatic joint (Dof=1) → consente ad due link di traslare rispetto all'altro lungo un asse comune e; lo spostamento lineare è variabile ed è denotato con d .
- Lo spostamento <displacement> può essere in generale indicato con q_s .

Regular numbering scheme. Ogni link L_i è identificato dal numero i in modo che ogni child link lungo un ramo ha un numero maggiore del suo parent link; il primo child link di un ramo separato in generale ha un numero che non è sequenziale unit il suo parent link; il base link è numerato con 0.

Ogni joint J_j è identificato da un numero j che è uguale al numero i che identifica il link successivo.
 L'ultimo link di un ramo è chiamato end-effector.



MOMENTA, ENERGY & EOM

Il **system linear momentum** è $p(t) = M \dot{C} = \sum_{s=1}^N m_s \dot{C}_s$

Il **system angular momentum** unit punto Q arbitrario è $h_Q(t) = M Q \dot{C} + \sum_{s=1}^N (I_{Cs}^{Bs} \cdot \omega_{BsN}) + \sum_{s=1}^N [m_s (C_s \times \dot{C}_s)]$,
 invece unit il COM del sistema C $h_C(t) = \sum_{s=1}^N [I_{Cs}^{Bs} \cdot \omega_{BsN}] + m_s (C_s \times \dot{C}_s)$

La **system kinetic energy** è $T = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^N m_s \underline{v}(C_N) \cdot \underline{v}(C_N) + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^N m_s \dot{C}_s \cdot \dot{C}_s + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^N \omega_{BsN} \cdot I_{Cs}^{Bs} \cdot \omega_{BsN}$

Le **EOM** per il system COM sono $\frac{d}{dt} p(t) = M \frac{d}{dt} \underline{v}(C_N) = F$ o $M \underline{a}(C_N) = F$

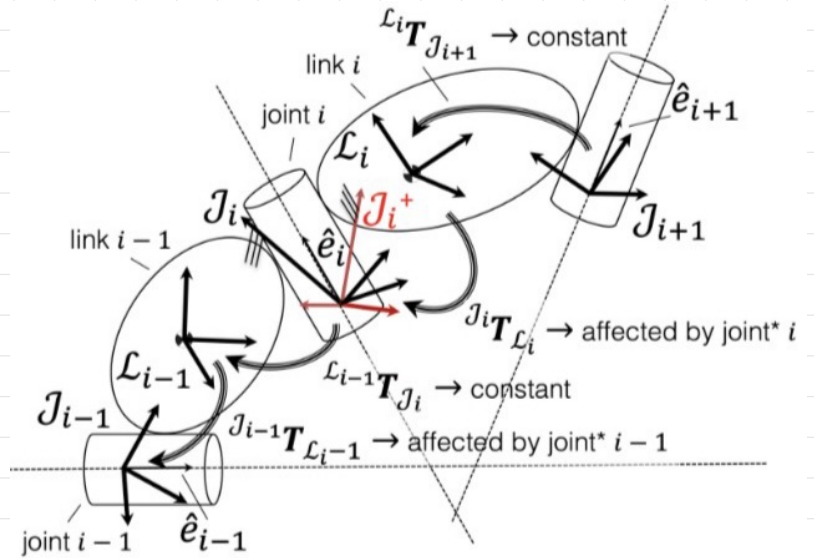
Sistemi $L_{s-1} T_{L_s} = L_{s-1} T_{J_s} L_{L_s} = L_{s-1} T_{J_s} T_{J_s^+} (q_s) T_{L_s}^+$
 dove $L_{s-1} T_{J_s}$ e $J_s^+ T_{L_s}^+$ sono costanti.

Per un revolute joint $J_s T_{J_s^+} = \begin{bmatrix} R_{3 \times 3}(\hat{e}_s, \theta_s) & 0_{3 \times 1} \\ 0_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix}$ con $\theta_s = q_s$

Per un prismatic joint $J_s T_{J_s^+} = \begin{bmatrix} I_3 & d_s \hat{e}_s \\ 0_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix}$ con $d_s = q_s$

Per un fixed joint $J_s T_{J_s^+} = \begin{bmatrix} I_3 & 0_{3 \times 1} \\ 0_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix}$ essendo $q_s = 0, \forall t$

Nel caso in cui il CCS I sia il CCS J_{s+1} si ha $I T_{J_{s+1}} = I T_{L_s} L_{L_{s+1}} = I T_{L_s} T_{J_{s+1}^+} (q_{s+1}) T_{L_{s+1}}$
 $I T_{L_{s+1}} = I T_{L_s} L_{L_{s+1}} = I T_{L_s} T_{J_{s+1}^+} (q_{s+1}) T_{L_{s+1}}$



GENERALIZED VARIABLES

Dato un MB system, esiste un insieme di variabili cinematiche q che definiscono pienamente la sua configurazione. Un particolare insieme di variabili - tra gli infiniti casi possibili - necessita di essere scelto per analizzare il MBS. Un insieme conveniente è per esempio $q = \{r_0, l_0, q_1, \dots, q_n\}$.
 Le variabili generalizzate hanno in genere dei vincoli. Per esempio i vincoli di traslazione possono essere dovuti alla presenza di un ostacolo e di boundness di movimento, i vincoli di rotazione possono essere dovuti ad una zona di esclusione e una pointing direction preferenziale, i vincoli delle variabili dei joint possono essere dovuti ai limiti meccanici sui joint displacement. L'unione di tutte le configurazioni ammissibili è denotata con Q_a .

WORKSPACE

La workspace rispetto al CCS I è definita per un particolare punto del MBS come la regione dello spazio euclideo spaziale da quel punto particolare mentre tutte le configurazioni variabili assumono tutti i possibili valori, cioè mentre le variabili di configurazione spaziano su Q_a . Un particolare sottospazio è il punto end effector EE.

- 3 diversi tipi di workspace sono:
- primary workspace/reachable workspace \rightarrow definito come l'unione delle posizioni W_p che il punto EE può raggiungere con almeno un orientamento del CCS EE
 - constant orientation workspace \rightarrow definito come l'insieme di posizioni W_{co} che l'end-effector può raggiungere con uno specifico set di orientamenti
 - secondary workspace/dexterous workspace \rightarrow definito come l'unione di posizioni W_s che il punto EE può raggiungere mentre sta realizzando tutti i possibili orientamenti del CCS EE
- $W_s \subseteq W_{co} \subseteq W_p \subseteq \mathbb{R}^3$

INVERSE KINEMATIC

L'inverso cinematico problem consiste nella determinazione del valore delle joint variabile corrispondenti ad una data pose dell'end-effector (posizione e orientazione dell'EE CCS). L'inverso cinematico problem è più complicato perché:

- le equazioni da risolvere sono in generale non lineari, e non è sempre possibile trovare una soluzione in forma chiusa
- possono esistere soluzioni multiple
- se esiste un joint displacement limit la regione dove le soluzioni sono possibili è limitata
- possono esistere infinite soluzioni
- potrebbero non esserci soluzioni ammissibili: l'esistenza delle soluzioni è garantita solo se position e orientation del dato end-effector appartiene al dexterous workspace del manipolatore.

Joint space è lo spazio n-dimensionale definito dalle joint variabile. È un sottoinsieme del configuration space.
Operational space è lo spazio definito da tutte le variabili che specificano la pose dell'EE CCS di un particolare manipolatore. Per un cartesian manipolator è \mathbb{R}^3 , per un planar manipolator è $SE(2) \triangleq \mathbb{R}^2 \times SO(2)$, per uno spatial manipolator è $SE(3) \triangleq \mathbb{R}^3 \times SO(3)$.

3.4 FIXED AND MOVING BASE ROBOTIC MANIPULATOR RECURSIVE ANALYSIS: DIFFERENTIAL KINEMATICS

È intuitivo che se si muove in rotazione e traslazione l'end effector [o qualsiasi altro punto/link del manipolatore] nel modo desiderato, è necessario muovere di conseguenza ognuno dei joint del manipolatore [e la base body, nel caso di free-flyer].

Si vuole studiare come esprimere matematicamente la relazione diretta e inversa tra il moto di qualsiasi punto, e il CCS del MBS, e il valore delle coordinate generalizzate del sistema e le loro derivate temporali [o viceversa]: direct e inverse differential kinematics problem (DK, IDK).

Il moto di un point mass in qualsiasi momento è descritto matematicamente dal vettore della velocità [lineare] istantanea wrt un CCS particolare.

Il moto di un rigid body è in genere composto simultaneamente dalla traslazione e rotazione [angular motion] simultanea. Il moto di un RB è descritto matematicamente dalla velocità [lineare] di uno dei suoi joint e dalla velocità angolare [wrt un CCS di riferimento] in un CCS fissato al corpo.

RECURSIVE PROPAGATION OF VELOCITIES

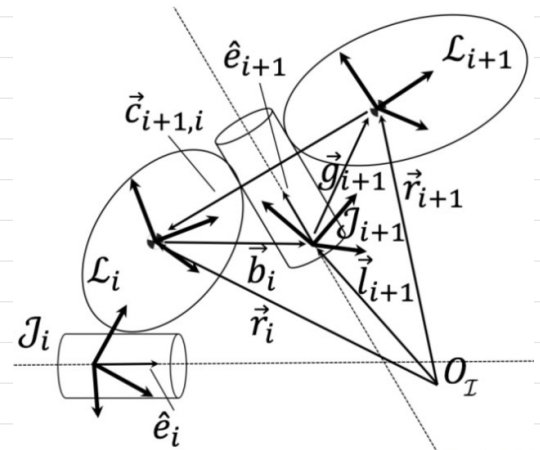
Considerando due link consecutivi di un robot: la velocità angolare wrt inertial frame del link/CS L_{s+1} è ricorsivamente ottenuta dalla chain rule per la velocità angolare $\vec{\omega}_{s+1} = \vec{\omega}_s + \dot{\theta}_{s+1} \hat{e}_{s+1} \quad \forall s = 0, \dots, n-1$.

Dalla figura si ha $\vec{r}_{s+1} = \vec{r}_s + \vec{b}_s + \vec{q}_{s+1}$ dove $\vec{b}_s \triangleq O_s O_{s+1}$ e $\vec{q}_{s+1} \triangleq O_{s+1} O_{s+1}$

Differenziando si ottiene

$$\dot{\vec{r}}_{s+1} = \frac{d\vec{r}_{s+1}}{dt} \Big|_I = \frac{d\vec{r}_s}{dt} \Big|_I + \frac{d\vec{b}_s}{dt} \Big|_I + \frac{d\vec{q}_{s+1}}{dt} \Big|_I \quad \text{che può essere riscritto come}$$

$$\dot{\vec{r}}_{s+1} = \dot{\vec{r}}_s + \vec{e}_{s+1,s} \times \vec{\omega}_s + \dot{\theta}_{s+1} \hat{e}_{s+1} + \dot{\theta}_{s+1} (\hat{e}_{s+1} \times \vec{q}_{s+1}) \quad \text{dove } \vec{e}_{s+1,s} = -\vec{b}_s - \vec{q}_{s+1} = \vec{r}_s - \vec{r}_{s+1}$$



SCREW ALGEBRA NOTATION

Quando i vettori della velocità angolare e lineare del link/CS L_{s+1} sono proiettati in un CCS I , le loro componenti scalari possono essere accumulate in due 3×1 column matrix w_{s+1}^I e $\dot{\theta}_{s+1}^I$. Usando la screw theory notation [1, 2, 3], queste matrices di componenti di velocità possono essere incapsulate in una singola 6×1 twist matrix $t_{s+1} \in \mathbb{R}^6$ (che esprime la derivata temporale assoluta della pose del link/CS L_{s+1}) $t_{s+1} \triangleq \begin{bmatrix} w_{s+1}^I \\ \dot{\theta}_{s+1}^I \end{bmatrix}$

La twist-propagation matrix dal link L_j al link L_s è una matrice 6×6 definita come $B_{sj} \triangleq \begin{bmatrix} I_3 & 0_{3 \times 3} \\ (e_{s+1}^I)^{\times} & I_3 \end{bmatrix}$. Come regola convenzionale si stabilisce che se L_j e L_s non sono nello stesso ramo <branch> allora $B_{sj} = 0_{6 \times 6}$

Valgono le seguenti proprietà: $B_{ss} = I_6$; $B_{sj}^{-1} = B_{js}$; $B_{sj} B_{jk} = B_{sk}$

Il twist-propagation "vector" del link/CS L_{s+1} è una matrice 6×1 definita come $p_{s+1} \triangleq \begin{cases} \dot{\theta}_{s+1}^I & \text{se } \mathcal{T}_{s+1} \text{ è revolute} \\ \dot{\theta}_{s+1}^I & \text{se } \mathcal{T}_{s+1} \text{ è prismatic} \end{cases}$

Proiettando le eq in un CCS I si ha $w_{s+1}^I = w_s^I + \dot{\theta}_{s+1}^I \hat{e}_{s+1}^I$
 $\dot{\theta}_{s+1}^I = \dot{\theta}_s^I + (e_{s+1,s}^I)^{\times} w_s^I + \dot{\theta}_{s+1}^I \hat{e}_{s+1}^I + \dot{\theta}_{s+1}^I [(e_{s+1}^I)^{\times} q_{s+1}^I]$ usando le definizioni appena

avuto si ha $t_{s+1} = B_{s+1,s} t_s + p_{s+1} \dot{\theta}_{s+1}$

BASE LINK VELOCITIES

La velocità [lineare] \dot{y}_0 è solitamente conosciuta in componenti scalari nel CCS I ($\dot{y}_0 \equiv \dot{y}_0^I$). La velocità angolare ω_0 è conosciuta in componenti scalari sia nel CCS L_0 come $\omega_0^{L_0}$, che nel CCS I come ω_0^I . Il twist del base link t_0 , per definizione, richiede che i vettori velocità siano proiettati nel CCS I $t_0 = \begin{bmatrix} \omega_0^I \\ \dot{y}_0^I \end{bmatrix}$ è possibile cambiare base al metodo seguente (18)