



centroappunti.it

CORSO LUIGI EINAUDI, 55/B - TORINO

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 2573A

ANNO: 2024

A P P U N T I

STUDENTE: Scaringi Nicolò

MATERIA: Meccanica del Volo Spaziale - Prof. Battipede

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTI E NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.



**Politecnico
di Torino**

MECCANICA DEL VOLO SPAZIALE

Prof. ssa Manuela Battipede

1° anno

Nicolò Scaringi

INDICE

1.	MECCANICA ORBITALE DEI DUE CORPI	1
1.1	Problema dei due corpi	1
1.2	Equazione della traiettoria e relazioni	2
1.3	Velocità caratteristiche e velocità cosmiche	4
1.4	Problema tempo per l'orbita ellittica	6
2.	DETERMINAZIONE DELL'ORBITA MEDIANTE OSSERVAZIONI	
2.1	Sistemi di riferimento	8
2.2	Parametri orbitali classici	9
2.3	Trasformazione di coordinate	10
2.4	Misura del tempo	11
3.	SATELLIZZAZIONE TERRESTRE	15
3.1	Ground track di un satellite	15
3.2	Effetti sulla ground track	
4.	PERTURBAZIONI	18
4.1	Presenza di un terzo corpo	18
4.2	Non sfericità della Terra	19
4.3	Resistenza aerodinamica	20
4.4	Radiazione solare	20
5.	MANOVRE ORBITALI	22
5.1	Manovre ad 1 impulso	22
5.2	Manovre a 2 impulsi	23
5.3	Manovre a 3 impulsi	25
6.	MISSIONI INTERPLANETARIE	27
6.1	Metodo patch-conics	27
7.	SISTEMA TERRA-LUNA	31
7.1	Parametri orbitali	31
7.2	Perturbazioni	31
8.	PROBLEMA DEI TRE CORPI CIRCOLARE RISTRETTO	33
8.1	Equazioni del moto	33
8.2	Punti lagrangiani	34
8.3	Superfici a zero velocità	35

1 MECCANICA ORBITALE DEI DUE CORPI

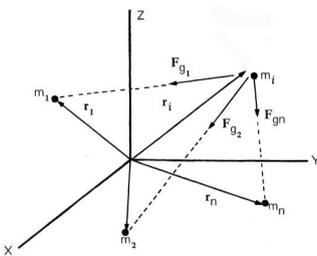
LEGGI DI KEPLERO

- 1^a legge: l'orbita di un pianeta è ellittica [quasi sempre su un piano] e il Sole occupa uno dei due fuochi dell'ellisse.
- 2^a legge: il raggio vettore congiungente il pianeta al Sole spazza aree uguali in tempi uguali \rightarrow quando il pianeta è più vicino al Sole (vicino al perielio) va più velocemente, quando è più lontano dal Sole (vicino all'afelio) va più lentamente.
- 3^a legge: il quadrato del periodo di rivoluzione di un pianeta è proporzionale al cubo della distanza media dal Sole, che corrisponde all'asse maggiore dell'ellisse.

MECCANICA NEWTONIANA

- 1^a legge: (legge d'inertzia) ogni oggetto materiale permane nel suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme se la risultante delle forze esterne su esso applicate è nulla.
- 2^a legge: la variazione della qd m di un oggetto è proporzionale al vettore risultante delle forze esterne ad esso applicate $F = d(mv)/dt$
- 3^a legge: (conservazione della qd m) ad ogni azione applicata dall'esterno su un corpo materiale corrisponde una reazione uguale e contraria dello stesso corpo.
- Legge di gravitazione universale: due punti materiali A e B, di masse m_A e m_B con mutua distanza $r = |AB|$, esercitano uno sull'altro una forza attrattiva F_g , proporzionale come indicato di massa. $F_g = G \frac{m_A m_B}{r^2}$ con $G = 6,67 \pm 0,005 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2} \text{ kg}^{-1}$ costante di attrazione gravitazionale. Questa legge regola sia la meccanica terrestre che la meccanica celeste, quindi è una legge universale.

CENNO AL PROBLEMA DEGLI N CORPI



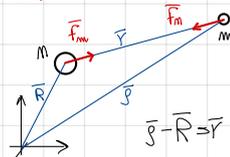
Si si riferisce ad un sistema di riferimento inerziale (non accelerato)
 Hp: i) i corpi sono sferici simmetrici, la massa costante è concentrata nel centro (puntiformi)
 ii) non si solo il contributo della forza gravitazionale

$$m_s \ddot{R}_s = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_j + \dots + \vec{F}_N$$
 con $\vec{F}_j = -G \frac{m_s m_j}{\|R_s - R_j\|^2} \frac{R_s - R_j}{\|R_s - R_j\|}$

$$m_s \ddot{R}_s = \sum_{j \neq s}^N \left[-G \frac{m_s m_j}{\|R_s - R_j\|^2} \frac{R_s - R_j}{\|R_s - R_j\|} \right] \Rightarrow \ddot{R}_s = \sum_{j \neq s}^N \left[-G \frac{m_j}{\|R_s - R_j\|^2} \frac{R_s - R_j}{\|R_s - R_j\|} \right]$$
 Se hanno N eq del 2° ordine accoppiate. Irriducibile analitica.

Si parla di problema degli N corpi ristretto se c'è almeno un corpo di massa trascurabile rispetto agli altri.
 Se si considerano 2 corpi (Luna + Sole, Sf + Terra) allora 3 soluz. analitica.

1.1 PROBLEMA DEI DUE CORPI



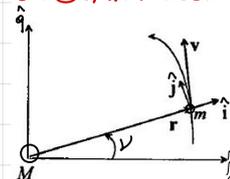
Hp: i) masse puntiformi con $m \ll M$
 ii) si considera solo la forza gravitazionale
 iii) non si considera l'influenza del terzo corpo (problema Sf + Terra, il 3° corpo è il Sole)

Si ha $|F_m| = |F_M| = G \frac{Mm}{r^2}$, in particolare $M \ddot{R} = G \frac{Mm}{r^2} \frac{R}{r}$

$$\ddot{r} - \ddot{R} = -G \frac{M+m}{r^2} \frac{r}{r} \Rightarrow \ddot{r} = -G \frac{M}{r^2} \frac{r}{r} \Rightarrow \ddot{r} + \frac{GM}{r^2} \frac{r}{r} = 0$$

Definendo il parametro gravitazionale $\mu := GM \left[\frac{\text{km}^3}{\text{s}^2} \right]$ si ricava l'eq del problema dei due corpi $\ddot{r} + \frac{\mu}{r^2} \frac{r}{r} = 0$
 $M_\oplus = G M_\oplus = 6,67258 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{s}^2} \cdot 5,972 \cdot 10^{24} \text{ kg} = 3,98633 \cdot 10^{14} \frac{\text{m}^3}{\text{s}^2} \Rightarrow \mu_\oplus = 398600 \frac{\text{km}^3}{\text{s}^2} \text{ terra}; \mu_\odot = \frac{M_\odot}{81,3} \text{ luna}, \mu_\odot = 132500 \cdot 10^5 \frac{\text{km}^3}{\text{s}^2}$

COSTANTI DEL MOTO

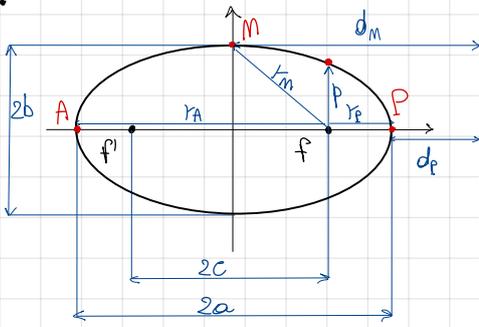


\hat{i} e \hat{j} ruotano perché sono vincolati a m , \hat{j} e \hat{q} sono fissa perché vincolati a M

$$\begin{cases} \dot{\hat{i}} = \dot{\phi} \cos \phi \hat{j} + \dot{\phi} \sin \phi \hat{i} \\ \dot{\hat{j}} = -\dot{\phi} \sin \phi \hat{j} + \dot{\phi} \cos \phi \hat{i} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\hat{i}} = -\dot{\phi} \sin \phi \hat{j} + \dot{\phi} \cos \phi \hat{i} \\ \dot{\hat{j}} = -\dot{\phi} \cos \phi \hat{j} - \dot{\phi} \sin \phi \hat{i} \end{cases}$$

 $\dot{\phi}$: anomalia vera

fuoco e la distanza dalla retta direttrice è costante, questo rapporto è detto eccentricità $e = \frac{r}{d}$.



Di seguito vengono illustrate le proprietà geometriche dell'ellisse.

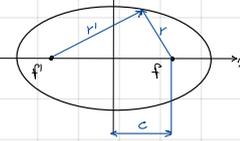
P: peripetto, A: apogio, p: semilatus rectum $p = r(\gamma = 90^\circ)$

P) $\frac{r_P}{d_P} = e$ con $r_P = a - c \Rightarrow d_P = \frac{a-c}{e}$

A) $\frac{r_A}{d_A} = e$ con $\begin{cases} r_A = a + c \\ d_A = 2a + d_P = 2a + \frac{a-c}{e} \end{cases} \Rightarrow e = \frac{a+c}{2ae+a-c} \Rightarrow a+c = 2ae+a-c \Rightarrow 2ae = 2c \Rightarrow e = \frac{c}{a}$, quindi $0 < e < 1$

M) $\frac{r_M}{d_M} = e$ con $d_M = a + d_P = a + \frac{a-c}{e} \Rightarrow r_M = ed_M = ae + a - c = \frac{c}{a}a + a - c = a \Rightarrow r_M = a$ da cui si ricava $r_M^2 = c^2 + b^2 \Rightarrow a^2 = c^2 + b^2 \Rightarrow a = \sqrt{c^2 + b^2}$

Dall'eq dell'ellisse in forma cartesiana $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow y^2 = -\frac{b^2}{a^2}x^2 + b^2$ con $b^2 = a^2 - c^2 = a^2 - a^2e^2 = a^2(1-e^2) \Rightarrow y^2 = -(1-e^2)x^2 + a^2(1-e^2)$



$r^2 = (c-x)^2 + y^2 = c^2 - 2cx + x^2 + y^2 = a^2e^2 - 2ae^2x + x^2 + a^2(1-e^2) = e^2x^2 - 2ae^2x + a^2 = (a - ex)^2 \Rightarrow r = a - ex$
 $r'^2 = (c+x)^2 + y^2 = c^2 + 2cx + x^2 + y^2 = a^2e^2 + 2ae^2x + x^2 + a^2(1-e^2) = e^2x^2 + 2ae^2x + a^2 = (a + ex)^2 \Rightarrow r' = a + ex$

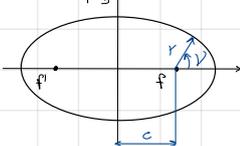
$r + r' = a - ex + a + ex = 2a$

Peripetto: $x = a \Rightarrow r_P = a - ea = a(1-e) \Rightarrow r_A + r_P = 2a \Rightarrow a = \frac{r_A + r_P}{2}$

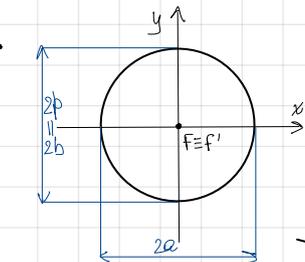
Apogio: $x = -a \Rightarrow r_A = a + ea = a(1+e) \Rightarrow r_A - r_P = 2ae \Rightarrow e = \frac{r_A - r_P}{r_A + r_P}$

Semilatus rectum: $\frac{p}{d_P} = e$ con $d_P = r_P + d = a(1+e) + \frac{a(1-e)}{e} = a - ea + \frac{a-ae}{e} \Rightarrow p = ed_P = ae - ae^2 + a - ae \Rightarrow p = a(1-e^2)$

Dall'eq dell'ellisse in forma polare $r = a - ex$ con $x = c + r \cos \gamma = ae + r \cos \gamma \Rightarrow r = a - ae^2 - er \cos \gamma \Rightarrow r(1 + e \cos \gamma) = a(1 - e^2) = p \Rightarrow r = \frac{p}{1 + e \cos \gamma}$



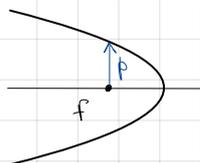
Un'altra sua proprietà è la seguente: ricordando che $\tan \gamma = \frac{N_P}{N'_P} = \frac{r'}{r}$ con $r = \frac{p}{1 + e \cos \gamma} \Rightarrow r(1 + e \cos \gamma) = p \Rightarrow r'(1 + e \cos \gamma) - re \sin^2 \gamma = 0 \Rightarrow \frac{r'}{r} = \frac{e \sin^2 \gamma}{1 + e \cos \gamma}$



Le proprietà geometriche della circonferenza sono le seguenti:

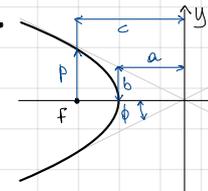
L'eq cartesiana è $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ con $a^2 = b^2 = r^2 \Rightarrow \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = r^2$

I fuochi della conica coincidono nel centro della circonferenza, quindi $c=0 \Rightarrow e = \frac{c}{a} = 0$



Le proprietà geometriche della parabola sono le seguenti:

$d_P = p$ (per definizione di parabola) $\Rightarrow e = 1 \Rightarrow \frac{a \rightarrow \infty}{c \rightarrow \infty}$ è il caso degenere



Di seguito vengono illustrate le proprietà geometriche dell'iperbole.

L'eq cartesiana è $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Per $y=0 \Rightarrow x = \pm a \rightarrow$ si sceglie $a > 0$

Se scegliessimo $a < 0$, con fuoco sempre F) si avrebbe una trasversale differente dall'iperbole, perché la forza gravitazionale è sempre di natura attrattiva. $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, $e = \frac{c}{a} > 1$

In coordinate polari $\begin{cases} x = r \cos \alpha \\ y = r \sin \alpha \end{cases} \Rightarrow \frac{r^2 \cos^2 \alpha}{a^2} - \frac{r^2 \sin^2 \alpha}{b^2} = 1 \Rightarrow b^2 \cos^2 \alpha - a^2 \sin^2 \alpha = a^2 b^2 > 0 \Rightarrow b^2 \cos^2 \alpha - a^2 \sin^2 \alpha > 0 \Rightarrow \tan^2 \alpha < \frac{b^2}{a^2}$

Il caso limite si ha per $\alpha_{lim} = \phi: \tan^2 \phi = \frac{b^2}{a^2}$, essendo $c = \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow b^2 = c^2 - a^2 = a^2 e^2 - a^2 = a^2(e^2 - 1)$ per cui $\tan^2 \phi = \frac{a^2(e^2 - 1)}{a^2} = e^2 - 1 \Rightarrow \tan^2 \phi + 1 = e^2 \Rightarrow \frac{\sin^2 \phi + \cos^2 \phi}{\cos^2 \phi} = e^2 \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 \phi} = e^2 \Rightarrow \cos \phi = \frac{1}{e}$

Riassumendo: circonferenza $c=0 \Rightarrow e=0$
 ellisse $c < a \Rightarrow 0 < e < 1$
 parabola $a \rightarrow \infty, c \rightarrow \infty \Rightarrow e=1$
 iperbole $c > a \Rightarrow e > 1$

Nella tabella seguente si riassumono velocità ed energia in base alla forma della traiettoria:

v	a	E_g	v_{10}	e	forma
0	0	(0)	\	(0)	retta verso il centro della terra
$0 < v < v_c$	> 0	< 0	\	$0 < e < 1$	ellisse suborbitale ($b_0 \equiv A$)
v_c	> 0	< 0	\	0	circonferenza
$v_c < v < v_E$	> 0	< 0	\	$0 < e < 1$	ellisse ($b_0 \equiv P$)
v_E	0	= 0	0	1	parabola
$v > v_E$	< 0	> 0	> 0	> 1	iperbole
∞	0	(∞)	> 0	0	retta orizzontale dal b_0

VELOCITÀ COSMICHE

• La v_I è la velocità circolare a raggio pari al raggio del corpo principale. È il valore più piccolo che può assumere la velocità circolare.

$$r_{\oplus} = 6371 \text{ km} \Rightarrow v_{I\oplus} = v_c|_{r_{\oplus}} = \sqrt{\frac{M_{\oplus}}{r_{\oplus}}} = \sqrt{\frac{398600}{6371}} = 7,91 \frac{\text{km}}{\Delta}$$

• La v_{II} è la velocità di escape se si lancia con il raggio del corpo principale. È il valore più piccolo che può assumere la velocità di fuga.

$$v_{II\oplus} = v_E|_{r_{\oplus}} = \sqrt{2} \frac{M_{\oplus}}{r_{\oplus}} = \sqrt{2} v_{I\oplus} = \sqrt{2} \cdot 7,91 = 11,2 \frac{\text{km}}{\Delta}$$

Per non apparire la notazione si considera come corpo secondario lo s/c, come corpo principale la terra, sottoposta all'influenza gravitazionale del Sole.

• La v_{III} è la velocità che dovrebbe avere al burnout uno s/c che si trova sulla superficie della terra per uscire dalla sfera d'influenza del Sole, cioè per uscire dal sistema solare.

$r_{\odot} = 149,5 \cdot 10^6 \text{ km}$ raggio circolare della terra rispetto al Sole $\Rightarrow v_{c\odot} = \sqrt{\frac{M_{\odot}}{r_{\odot}}} = \sqrt{\frac{132500 \cdot 10^6}{149,5 \cdot 10^6}} = 29,77 \text{ km}$ velocità circolare della terra rispetto al Sole
da cui si ricava $v_{E\oplus} = \sqrt{2} v_{c\odot} = \sqrt{2} \cdot 29,77 = 42,10 \frac{\text{km}}{\Delta}$ velocità di fuga della terra dal sistema solare, quindi si ha

$v_{\infty} = v_{E\oplus} - v_{c\oplus} = 12,33 \frac{\text{km}}{\Delta}$ che rappresenta l'eccesso iperbolico di velocità con cui lo s/c esce dalla SOI della terra (v_{∞} deve essere nella direzione del moto della terra). All'eccesso iperbolico dello s/c bisogna aggiungere la velocità di fuga dello s/c dalla sfera d'influenza terrestre $E_g = \frac{v_{III}^2}{2} - \frac{M}{r_0} = \frac{v_{\infty}^2}{2} \Rightarrow \frac{v_{III}^2}{2} - \frac{v_{II}^2}{2} = \frac{v_{\infty}^2}{2} \Rightarrow v_{III} = \sqrt{v_{\infty}^2 + v_{II}^2} =$

$= \sqrt{12,33^2 + 11,2^2} = 16,65 \frac{\text{km}}{\Delta}$. Riassumendo: partendo con $v_{III} = 16,65 \text{ km/s}$ sul raggio della terra, si uscirebbe dalla sfera d'influenza della terra con eccesso iperbolico $v_{\infty} = 12,33 \text{ km/s}$, se il lancio è stato effettuato nella stessa direzione del moto della terra, si ha un valore assoluto di velocità (rispetto al Sole) di $v_{E\oplus} = 42,10 \text{ km/s}$ quindi così si pone su una traiettoria parabolica che porta ad avere un eccesso iperbolico nullo uscendo dalla SOI del Sole.

• La v_{IV} è la velocità che dovrebbe avere al burnout uno s/c che si trova sulla superficie della terra per andare a cadere sul Sole.

Per cadere sul Sole, è necessario uscire dalla SOI terrestre con velocità relativa al Sole nulla, quindi bisogna lanciare ad una velocità opposta alla direzione della terra a velocità $v_{10} = v_{c\oplus} = 29,77 \frac{\text{km}}{\Delta}$ (relativa alla terra).

All'eccesso iperbolico con cui lo s/c esce dalla SOI terrestre, bisogna aggiungere la velocità di fuga dello s/c dalla SOI terrestre $E_g = \frac{v_{IV}^2}{2} - \frac{M}{r_0} = \frac{v_{\infty}^2}{2} \Rightarrow \frac{v_{IV}^2}{2} - \frac{v_{II}^2}{2} = \frac{v_{\infty}^2}{2} \Rightarrow v_{IV} = \sqrt{v_{\infty}^2 + v_{II}^2} = \sqrt{29,77^2 + 11,2^2} = 31,8 \frac{\text{km}}{\Delta}$

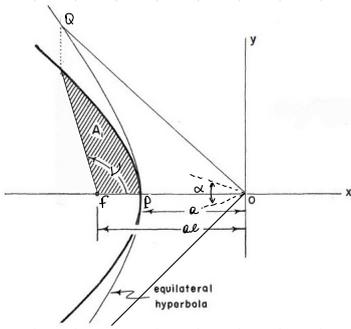
Considerazioni su altri pianeti. La luna ha velocità cosmiche molto basse, tanto che ad una velocità pari a $v_{I\oplus}$ si starebbe già in orbita intorno alla luna. $v_{I\oplus} = 1,68 \frac{\text{km}}{\Delta}$ e $v_{II\oplus} = 2,35 \frac{\text{km}}{\Delta}$ (s/c rispetto alla luna). $v_{c\oplus} = 1,02$ velocità circolare della luna rispetto alla terra, $v_{E\oplus} = 1,44 \frac{\text{km}}{\Delta}$ velocità di fuga della luna dalla terra, quindi

$v_{\infty} = v_{E\oplus} - v_{c\oplus} = 0,42 \frac{\text{km}}{\Delta}$ eccesso iperbolico con cui lo s/c esce dalla SOI lunare, a questo bisogna aggiungere la velocità di fuga dello s/c dalla SOI lunare per ricavare $v_{III\oplus} = \sqrt{v_{\infty}^2 + v_{II\oplus}^2} = 2,33 \frac{\text{km}}{\Delta}$; considerando $v_{\infty} = v_{c\oplus}$ si ricava $v_{IV\oplus} = \sqrt{v_{c\oplus}^2 + v_{II\oplus}^2} = 2,56 \frac{\text{km}}{\Delta}$

Marte ha velocità cosmiche basse. $v_{I\oplus} = 3,55 \frac{\text{km}}{\Delta}$ e $v_{II\oplus} = 5,01 \frac{\text{km}}{\Delta}$. $v_{c\oplus} = 24,13 \frac{\text{km}}{\Delta}$ e $v_{E\oplus} = 34,13 \frac{\text{km}}{\Delta}$ rispetto al Sole; con trattazione analoga a quella vista per la terra si ottiene $v_{III\oplus} = \sqrt{v_{\infty}^2 + v_{II\oplus}^2} = 11,19 \frac{\text{km}}{\Delta}$ e $v_{IV\oplus} = \sqrt{v_{c\oplus}^2 + v_{II\oplus}^2} = 24,65 \frac{\text{km}}{\Delta}$.

GENERALIZZAZIONE DEL PROBLEMA TEMPO

Per l'ellisse si rispettano solo le formule importanti, già ottenute: l'eq dell'ellisse è $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ con $x = a \cos E$
 $A_{OPB} = \frac{a^2 E}{2} \Rightarrow E = \frac{2A_{OPB}}{a^2}$ angolo di anomalia eccentrica $t_{P1} = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} [E - e \sin E]$
 $y = \frac{b}{a} a \sin E = b \sin E$



l'eq dell'iperbole è $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ con $x = a \cosh d$ $y = a \sinh d$ $\text{essendo } \cosh d = \frac{e + \cos \psi}{1 + e \cos \psi}$

$A_{OPB} = \frac{a^2 f}{2} \Rightarrow f = \frac{2A_{OPB}}{a^2}$ angolo di anomalia eccentrica iperbolica

$$t_{P1} = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} [f - e \sinh f]$$

Ampliamento per la parabola si ha $D = \sqrt{p} \tan \frac{\psi}{2}$ angolo di anomalia parabolica

$$t_{P1} = \frac{1}{2\sqrt{\mu}} [pD + \frac{1}{3}D^3]$$

IN SINTESI

PROBLEMA DEI DUE CORPI

Eq del problema dei due corpi $\ddot{\vec{r}} + \frac{\mu}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} = 0$ con $\mu = G(M+m)$

$$R_{\oplus} = 6371 \text{ km}$$

$$M_{\oplus} = 5972 \cdot 10^{24} \frac{\text{kg}}{\text{s}^2}$$

$$\mu = \mu_{\oplus} / 81,3$$

$$M_{\odot} = 192 \cdot 500 \cdot 10^{30} \frac{\text{kg}}{\text{s}^2}$$

Costanti del moto: velocità $\dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} \dot{r}_r \\ \dot{r}_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\psi} \end{pmatrix}$, accelerazione $\ddot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} \ddot{r}_r \\ \ddot{r}_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{r} - r\dot{\psi}^2 \\ 2\dot{r}\dot{\psi} + r\ddot{\psi} \end{pmatrix}$, momento della q.d.m. $\vec{h} = \vec{r} \wedge \dot{\vec{r}} = r^2 \dot{\psi} \vec{u}_z = \text{cost}$

energia meccanica [specific] $E_g = E_{gk} + E_{gp} = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a} = \text{cost}$, eq della traiettoria nel problema dei due corpi $r = \frac{h^2/\mu}{1 + e \cos \psi}$

EQUAZIONE DELLA TRAIETTORIA E RELAZIONI

Consid. eccentricità $e = \frac{c}{a} = \frac{B}{a} \Rightarrow B = ae$, semilatus rectum $r(\psi = 90^\circ) = p = a(1 - e^2) = \frac{h^2}{\mu} \Rightarrow h = \sqrt{\mu a(1 - e^2)}$

raggio periastron $r_p = a(1 - e^2)$
 raggio apoastron $r_a = a(1 + e^2)$

raggio $r = \frac{p}{1 + e \cos \psi}$, flight path angle $\tan \psi = \frac{e \sin \psi}{1 + e \cos \psi}$

VELOCITÀ CARATTERISTICHE E COSMICHE

Velocità caratteristiche

velocità circolare: la velocità necessaria per mantenere il corpo secondario in orbita circolare $v_c = \sqrt{\frac{\mu}{r_{to}}}$

velocità di fuga: velocità che permette al corpo secondario di uscire dalla sfera d'influenza del corpo principale arrivando asintoticamente alla SOI con velocità nulla $v_{to} = 0$, cioè è la velocità che permette al corpo secondario di raggiungere l'∞ con

velocità nulla $v_{\infty} = \sqrt{2} v_c$

ecceso iperbolico di velocità: velocità residua all'uscita della SOI quando $v_{to} > v_E$ $v_{\infty} = \sqrt{\frac{\mu}{a}}$

Velocità cosmiche

v_I : velocità circolare a raggio pari al raggio del corpo principale, $v_{I\oplus} = 7,91 \frac{\text{km}}{\text{s}}$

v_{II} : velocità di escape se il burnout coincide con il raggio del corpo principale, $v_{II\oplus} = 11,2 \frac{\text{km}}{\text{s}}$

v_{III} : velocità che dovrebbe avere al burnout uno s/c che si trova sulla superficie della luna per uscire dalla sfera d'influenza del Sole, cioè per uscire dal sistema solare, $v_{III\oplus} = 16,65 \frac{\text{km}}{\text{s}}$

v_{IV} : velocità che dovrebbe avere al burnout uno s/c che si trova sulla superficie della luna per andare a cadere sul Sole, $v_{IV\oplus} = 31,8 \frac{\text{km}}{\text{s}}$

PROBLEMA TEMPO

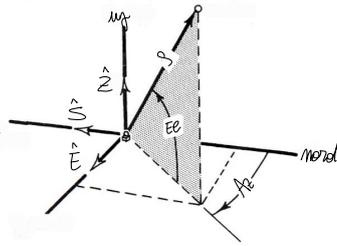
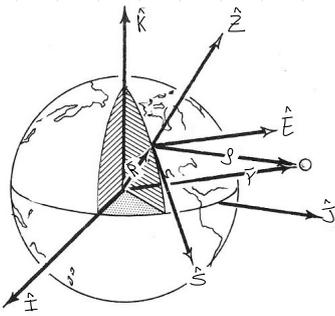
Periodo dell'orbita ellittica $T = T_E = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}$, moto medio $\dot{M} = \frac{\mu}{a^3}$, tempo impiegato dal periastron al pt 1 $t_{P1} = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} [E - e \sin E] = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} M$, $t_{12} = t_{P2} - t_{P1}$

Problema diretto: si misura la posizione in termini di ψ per calcolare il tempo trascorso, $t_{P1} = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} [E_1 - e \sin E_1]$

Problema inverso: si misura il tempo trascorso per calcolare la posizione in termini di ψ , $\psi = \arccos \left[\frac{e - \cos E}{1 - e \cos E} \right]$

Inoltre $\vec{r} \cdot \vec{v} = r v \cos(\theta - \varphi) = r v \sin \varphi$
 $\langle \vec{r} \cdot \vec{v} \rangle > 0 \Rightarrow \varphi > 0 \Rightarrow$ Va da pericentro ad apocentro \rightarrow quando c/s si allontana dal pericentro
 $\langle \vec{r} \cdot \vec{v} \rangle < 0 \Rightarrow \varphi < 0 \Rightarrow$ Va da apocentro a pericentro \rightarrow quando c/s si avvicina al pericentro

SISTEMA TOPOCENTRICO ORIZZONTALE



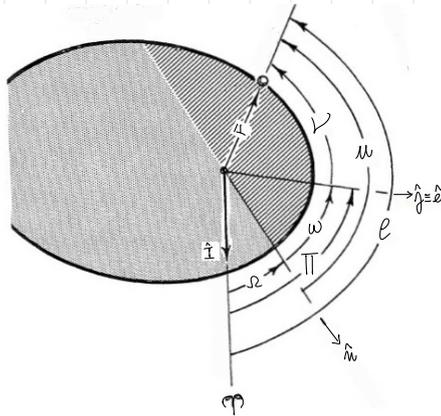
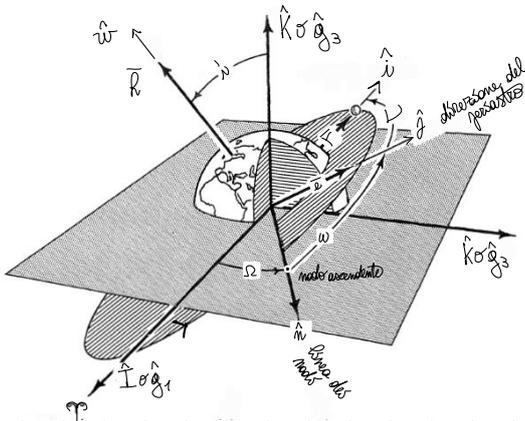
Origine: tops, luogo/punto della superficie terrestre in cui si trova la ground station (GS)
 Piano fondamentale: orizzonte locale
 Verso \hat{z} : uscente dal centro della terra
 gli altri assi sono verso sud e est.
 Il sistema SEZ non è inerziale in quanto è rotazionale alla terra quindi ruotando con essa.

La distanza dalla GS al c/s è ρ , e si definisce l'angolo di azimut Az misurato nel piano fondamentale in verso orario dal merid, l'angolo di elevazione El si misura dall'orizzonte a \hat{z} nel verso di \hat{z} .

$$\begin{cases} \beta_s = -\rho \cos(El) \cos(Az) \\ \beta_E = \rho \cos(El) \sin(Az) \\ \beta_z = \rho \sin(El) \end{cases}$$

2.2

PARAMETRI ORBITALI CLASSICI



Si hanno 4 parametri 2D: forma, dimensione, posizione del pericentro, posizione del corpo secondo l'asse rispetto al pericentro, orientamento del piano dell'orbita; 2 parametri 3D: orientamento piano dell'orbita; per un totale di 6 parametri orbitali

DETERMINAZIONE A PARTIRE DALLA MISURA DI $\vec{r}_{c/s}$ E $\vec{v}_{c/s}$ IN UN DETERMINATO ISTANTE

- 3 parametri sono definiti nel seguente modo:
- normale al piano dell'orbita dello s/c $\hat{h} = \vec{r} \wedge \vec{v} \Rightarrow \hat{w} = \frac{\hat{h}}{\|\hat{h}\|}$
 - linea dei nodi $\hat{n} = \hat{k} \wedge \hat{h} \Rightarrow \hat{n} = \frac{\hat{k} \wedge \hat{h}}{\|\hat{k} \wedge \hat{h}\|}$
 - direzione del raggio $\hat{i} = \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|}$
 - direzione del pericentro $\hat{e} = \frac{\vec{v} \wedge \hat{h}}{\|\vec{v} \wedge \hat{h}\|} \Rightarrow \hat{e} = \hat{j} = \frac{\vec{e}}{\|\vec{e}\|}$

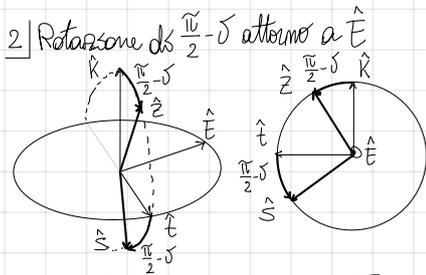
3 parametri orbitali di un s/c su orbita intorno alla terra - sistema geocentrico equatoriale - sono i seguenti:

- I) Forma \rightarrow semilatus rectum $p = \frac{\|\hat{h}\|^2}{\mu}$
 \rightarrow semiasse maggiore $a: p = a(1-e^2) \Rightarrow a = \frac{p}{1-e^2}$
- II) Eccentricità $e: e = \|\hat{e}\|$
- III) Argomento del pericentro $w: \hat{n} \cdot \hat{j} = \|\hat{n}\| \|\hat{j}\| \cos w \Rightarrow w = \arccos(\hat{n} \cdot \hat{j})$
 $\begin{cases} 0 < w < \pi & \text{se } e_z > 0 \\ \pi < w < 2\pi & \text{se } e_z < 0 \end{cases}$
- IV) Posizione anomala vera in un determinato istante $\nu(t): \hat{j} \cdot \hat{i} = \|\hat{j}\| \|\hat{i}\| \cos \nu \Rightarrow \nu = \arccos(\hat{j} \cdot \hat{i})$
 $\begin{cases} 0 < \nu < \pi & \text{se } \vec{r} \cdot \vec{v} > 0 \\ \pi < \nu < 2\pi & \text{se } \vec{r} \cdot \vec{v} < 0 \end{cases}$
- V) Determinazione del nodo ascendente $\Omega: \hat{i} \cdot \hat{n} = \|\hat{i}\| \|\hat{n}\| \cos \Omega \Rightarrow \Omega = \arccos(\hat{i} \cdot \hat{n})$
 $\begin{cases} 0 < \Omega < \pi & \text{se } m_y > 0 \\ \pi < \Omega < 2\pi & \text{se } m_y < 0 \end{cases}$
- VI) Inclinazione del piano dell'orbita $i: \hat{k} \cdot \hat{w} = \|\hat{k}\| \|\hat{w}\| \cos i \Rightarrow i = \arccos(\hat{k} \cdot \hat{w})$
 $\begin{cases} 0 < i < \pi/2 & \text{orbita diretta (senso antiorario)} \\ \pi/2 < i < \pi & \text{orbita retrograda (senso orario)} \end{cases}$

3 parametri orbitali di un pianeta su orbita intorno al Sole - sistema eliocentrico eclittico - si ottengono sostituendo \hat{g}_1 a \hat{i} , \hat{g}_2 a \hat{j} , \hat{g}_3 a \hat{k} nelle formule dei parametri nel sistema geocentrico equatoriale

PARAMETRI ALTERNATIVI

- Se $s = 0 \Rightarrow \Omega$ è indefinito. Si definisce l'angolo longitudine del pericentro $\Pi = \Omega + w$
- Se $e = 0$ (orbita circolare) $\Rightarrow w$ è indefinito. Si definisce l'angolo argomento della latitudine al tempo $t: M: w + \nu$



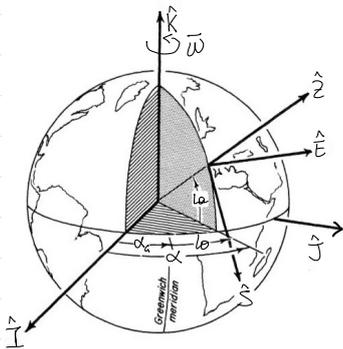
$$L_\delta = \begin{bmatrix} t\hat{S} & 0 & k\hat{S} \\ 0 & 1 & 0 \\ t\hat{Z} & 0 & k\hat{Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}-\delta) & 0 & \cos(\pi-\delta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\delta & 0 & \cos(\frac{\pi}{2}-\delta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\delta & 0 & -\cos\delta \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\delta & 0 & \sin\delta \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \vec{r}_{SEZ} = L_\delta \vec{r}_{tEK}$

Quindi si ha $\vec{r}_{SEZ} = L_\delta L_\alpha \vec{r}_{tEK} \Rightarrow \vec{r}_{SEZ} = L \vec{r}_{tEK} \Rightarrow \vec{r}_{tEK} = L^T \vec{r}_{SEZ}$ con $L = L_\delta L_\alpha$ e $L^T = L_\alpha^T L_\delta^T$

tEK è un sistema di riferimento inerziale, mentre SEZ è un sistema di riferimento rotante (non inerziale) con $\dot{\hat{S}} = \vec{\omega} \wedge \hat{S}$, $\dot{\hat{E}} = \vec{\omega} \wedge \hat{E}$, $\dot{\hat{Z}} = \vec{\omega} \wedge \hat{Z}$ dove $\vec{\omega}$ è la velocità angolare terrestre. Siames: ρ la distanza relativa (dalla GS allo S/c) e r la distanza assoluta (dal centro della terra allo S/c), tale che $\vec{r}_{SEZ} = \vec{\rho}_{SEZ} + \vec{R}_{SEZ}$ e $\vec{r}_{tEK} = \vec{\rho}_{tEK} + \vec{R}_{tEK}$ con $\vec{\rho}_{tEK} = L_\alpha^T L_\delta^T \vec{\rho}_{SEZ}$. Si vuole ricavare la velocità nel sistema SEZ : $\dot{\vec{r}}_{SEZ} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Big|_{SEZ} = \frac{d}{dt} (\rho_S + \rho_S) \hat{S} + \frac{d}{dt} (\rho_S + \rho_S) \hat{E} + \frac{d}{dt} (\rho_Z + \rho_Z) \hat{Z} + (\rho_S + \rho_S) \dot{\hat{S}} + (\rho_S + \rho_S) \dot{\hat{E}} + (\rho_Z + \rho_Z) \dot{\hat{Z}}$
 $= \dot{\rho}_S \hat{S} + \dot{\rho}_E \hat{E} + \dot{\rho}_Z \hat{Z} + (\rho_S + \rho_S) \vec{\omega} \wedge \hat{S} + (\rho_S + \rho_S) \vec{\omega} \wedge \hat{E} + (\rho_Z + \rho_Z) \vec{\omega} \wedge \hat{Z} = \dot{\vec{\rho}}_{SEZ} + \vec{\omega}_{SEZ} \wedge \vec{r}_{SEZ} \Rightarrow \dot{\vec{r}}_{SEZ} = \dot{\vec{\rho}}_{SEZ} + \vec{\omega}_{SEZ} \wedge \vec{r}_{SEZ}$
 poiché $\vec{\omega}_{tEK} = \vec{\omega}$ si ha $\vec{\omega}_{SEZ} = L_\delta L_\alpha \vec{\omega}_{tEK}$

RELAZIONE TRA I SISTEMI tEK E SEZ

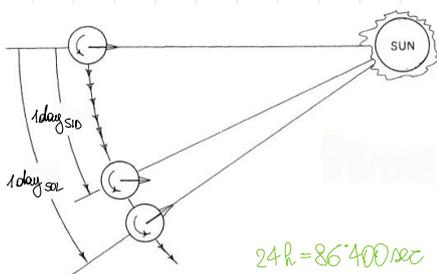


$\alpha(t) = \alpha_G(t) + L\omega$ con $\alpha_G(t) = \alpha_{G0} + \omega(t-t_0)$ ascensione retta di Greenwich in un determinato istante. $L\omega = \cos\delta(t)$ longitudine, $L\omega = \sin\delta(t)$ latitudine. Per il calcolo dell'ora conviene riportare l'orario della GS in orario di Greenwich. \hat{I} è l'ora ed è definito come la differenza tra GM e Sole il 21/03, nasce dando da la terra ruota di $\approx 15^\circ$ /ora, in senso antiorario si ricava la direzione di GM all'orario considerato $\Rightarrow \alpha_{G0}$ è l'angolo compreso tra \hat{I} e la direzione di GM. Ricordando che la terra si muove di circa 1° /giorno si può ricavare la posizione della terra sull'eclittica.

Nota α_{G0} (di Greenwich in un determinato istante) e la longitudine della GS, si calcola $\alpha = \alpha_{G0} + L\omega$ (della ground station).

2.4 MISURA DEL TEMPO

TEMPO SOLARE E TEMPO SIDERALE



Il giorno solare è definito come il tempo necessario per effettuare una rotazione completa rispetto al Sole, ciò avviene in 24h. Il giorno siderale è definito come il tempo necessario per effettuare una rotazione completa rispetto alle stelle fisse, ciò avviene con una rotazione di 2pi. Dalla figura si evince che in un giorno solare viene effettuata una rotazione maggiore di 2pi per poter riallineare col Sole, questo accade perché la terra si è spostata anche sulla sua orbita intorno al Sole.

	tempo	rotazione
giorno solare	$24 h_{sol} = (24 h \ 03 m \ 56,5 sec)_{sid} = 86'636,56 sec_{sid}$	$\frac{86400}{86464,09} \cdot 2\pi = 1,0027379$
giorno siderale	$24 h_{sid} = (23 h \ 56 m \ 4,09 sec)_{sol} = 86'164,09 sec_{sol}$	2π

il secondo siderale è più piccolo del secondo solare

Il giorno solare è definito con le seguenti assunzioni: la terra è su un'orbita circolare il cui periodo coincide con il periodo della terra, l'asse di rotazione è perpendicolare al piano dell'orbita.

UNIVERSAL TIME COORDINATED (UTC) E GREENWICH MEAN SIDERAL TIME (GMST)

L'UTC si riferisce al giorno solare ed è l'orario al meridiano di Greenwich. Si preferisce riferirsi all'UTC piuttosto che all'orario locale LT: in questo modo l'orario è indipendente dalla posizione dell'osservatore e dipende solo dalla rotazione terrestre. La trasformazione UTC-LT avviene mediante il fuso orario.

Il passaggio da UTC a GMST è necessario per il calcolo di α_{G0} in quanto \hat{I} si riferisce alle stelle fisse. La conversione (11)

per un totale di $0^{\circ}0'50,26''/y = 0,01395^{\circ}/y$. Quindi per far compiere un giro completo del cielo sono necessari $\frac{360^{\circ}}{0,01395^{\circ}/y} = 25786y$ che è definito anno platonico. *In 12893 y l'asse terrestre non sarà diretto più verso la stella polare ma verso la stella nera.* Ruotando l'asse terrestre nota anche il piano equatoriale che serve a definire l'asse X_3 (pag 8), quindi scaturisce un effetto detto precessione dell'asse degli equinozi. L'asse degli equinozi ruota in senso orario a velocità $0,01395^{\circ}/y$, quindi si ha una rotazione di 1° ogni $\frac{1^{\circ}}{0,01395^{\circ}/y} = 71,63y$. Dato il verso di rotazione della Terra (antiorario) e quello di rotazione degli equinozi (orario) si ha che ogni $71,63y$ gli equinozi sono anticipati di un giorno. Si definisce:
 anno siderico: periodo per una rivoluzione completa rispetto alle stelle fisse $\rightarrow 360^{\circ} \Rightarrow 365d 9h 9min 9sec$
 anno tropico: periodo per una rivoluzione completa rispetto al Sole (bisogna considerare la precessione) $\rightarrow 360^{\circ} - 50,26'' = 359,10^{\circ} \Rightarrow 365d 5h 48min 46sec$

IN SINTESI

PARAMETRI ORBITALI CLASSICI

- Versoria: - normale al piano dell'orbita dello SK $\vec{h} = \vec{r} \wedge \vec{v} \Rightarrow \hat{w} = \frac{\vec{h}}{\|\vec{h}\|}$
 - linea dei nodi $\vec{n} = \hat{k} \wedge \hat{w} \Rightarrow \hat{n} = \frac{\hat{k} \wedge \hat{w}}{\|\hat{k} \wedge \hat{w}\|}$
 - direzione del raggio $\hat{i} = \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|}$
 - direzione del periastron $\hat{e} = \frac{\vec{r} \wedge \hat{n}}{\|\vec{r} \wedge \hat{n}\|} \Rightarrow \hat{e} = \hat{j} = \frac{\vec{e}}{\|\vec{e}\|}$

• Parametri:

- Forma \rightarrow semilatus rectum $p = \frac{\|\vec{h}\|^2}{\mu}$
 \rightarrow semiasse maggiore $a = \frac{p}{1-e^2}$

- Eccentricità $e = \|\vec{e}\|$

- Argomento del periastron $\omega = \arccos(\hat{n} \cdot \hat{e})$

$$\begin{cases} 0 < \omega < \pi & \text{se } e_z > 0 \\ \pi < \omega < 2\pi & \text{se } e_z < 0 \end{cases}$$

- Posizione anomala vera in un determinato istante $\nu = \arccos(\hat{j} \cdot \hat{i})$

$$\begin{cases} 0 < \nu < \pi & \text{se } \vec{r} \cdot \vec{v} > 0 \\ \pi < \nu < 2\pi & \text{se } \vec{r} \cdot \vec{v} < 0 \end{cases}$$

- Inclinazione del nodo ascendente $\Omega = \arccos(m_x)$

$$\begin{cases} 0 < \Omega < \pi & \text{se } m_y > 0 \\ \pi < \Omega < 2\pi & \text{se } m_y < 0 \end{cases}$$

- Inclinazione del piano dell'orbita $i = \arccos(\hat{k} \cdot \hat{w})$

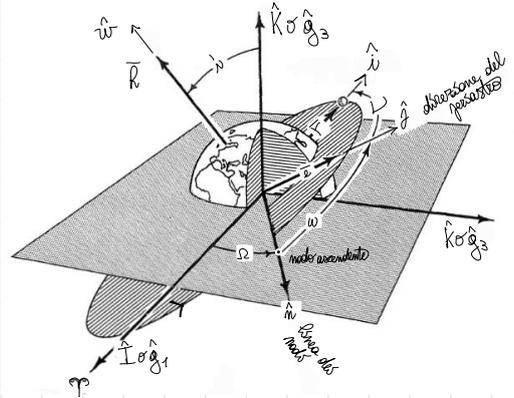
$$\begin{cases} 0 < i < \pi/2 & \text{orbita diretta (senso antiorario)} \\ \pi/2 < i < \pi & \text{orbita retrograda (senso orario)} \end{cases}$$

• Parametri alternativi:

- Se $b = 0 \Rightarrow \Omega$ è indefinito \rightarrow longitudine del periastron $\Pi := \Omega + \omega$

- Se $e = 0$ (orbita circolare) $\Rightarrow \omega$ è indefinito \rightarrow argomento della latitudine al tempo $u := \omega + \nu$

- Se $b = 0 \wedge e = 0 \Rightarrow \Omega$ e ω sono indefiniti \rightarrow longitudine vera al tempo $l := \Omega + \omega + \nu$



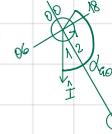
TRASFORMAZIONE COORDINATE

- Passaggio da ppw a IJK $\begin{cases} Y_I \\ Y_J \\ Y_K \end{cases} = \begin{bmatrix} \hat{i} \cdot \hat{j} & \hat{i} \cdot \hat{q} & \hat{i} \cdot \hat{w} \\ \hat{j} \cdot \hat{j} & \hat{j} \cdot \hat{q} & \hat{j} \cdot \hat{w} \\ \hat{k} \cdot \hat{j} & \hat{k} \cdot \hat{q} & \hat{k} \cdot \hat{w} \end{bmatrix} \begin{cases} Y_p \\ Y_q \\ Y_w \end{cases}$ con $L^T = L_w^T L_s^T L_z^T$ e $L = L_z L_s L_w$

$$L_z^T = \begin{bmatrix} \cos \Omega & \sin \Omega & 0 \\ -\sin \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; L_s^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & \sin i \\ 0 & -\sin i & \cos i \end{bmatrix}; L_w^T = \begin{bmatrix} \cos \omega & \sin \omega & 0 \\ -\sin \omega & \cos \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Passaggio da IJK a SEZ $\vec{Y}_{SEZ} = L \vec{Y}_{IJK}, \vec{Y}_{IJK} = L^T \vec{Y}_{SEZ}$ con $L = L_s L_z$ e $L^T = L_z^T L_s^T$. $L_z = \begin{bmatrix} \cos \delta & \sin \delta & 0 \\ -\sin \delta & \cos \delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; L_s = \begin{bmatrix} \sin \delta & 0 & -\cos \delta \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos \delta & 0 & \sin \delta \end{bmatrix}$

- Relazioni tra IJK e SEZ $\begin{cases} \alpha(t) = \alpha_a(t) + L\delta \\ \delta = L\delta \end{cases}$ con $\alpha_a(t) = \alpha_{a0} + \omega(t-t_0)$



MISURA DEL TEMPO

- Giorno solare $24h_{sol} = (24h 03m 56,56s)_{SID} = 86400,90909s_{SID}$ $\frac{86400}{86400,90909} \cdot 2\pi = 1,002732\pi$
- Giorno siderico $24h_{SID} = (23h 56m 4,09s)_{sol} = 86164,09s_{sol}$ $\frac{86164,09}{86400} \cdot 2\pi$

• Calendario giuliano basato su un ciclo di 4 anni: 1 anno bisestile ogni 4 anni. Si perde 1 giorno ogni 128 anni.
 • Calendario gregoriano basato su un ciclo di 400 anni: sono bisestili gli anni che sono multipli di 4 tranne quelli che sono multipli di 100 a meno che non siano anche multipli di 400. Si perde 1 giorno ogni 323 anni.

3

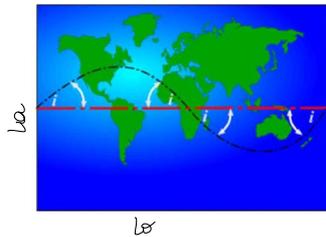
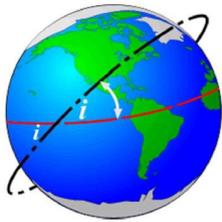
SATELLIZZAZIONE TERRESTRE

TIPICI DI ORBITE

- ↳ satelliti **LEO** (Low Earth Orbit) si trovano fino ad una quota di 2000 km. Sono prevalentemente satelliti di telecomunicazione e teleosservazione, tra essi troviamo anche la Stazione Spaziale Internazionale ISS e il telescopio Hubble.
- ↳ satelliti **MEO** (Medium Earth Orbit) si trovano tra una quota di 2000 e 35'793 km, la maggior parte sono concentrati ad una quota di 20'000 km e hanno un periodo orbitale di circa 12 h; a questa quota si trovano i satelliti GNSS (GPS, Galileo ecc.)
- ↳ satelliti **HEO** (High Earth Orbit) si trovano ad una quota superiore a 35'793 km. alla quota di 35'793 km si trovano i satelliti geostazionari e geotrasportatori, a quote superiori i satelliti hanno orbite ellittiche
- ↳ satelliti geostazionari **GEO** hanno periodo orbitale pari ad un giorno siderale, sincronizzati con la rotazione della Terra.
- ↳ satelliti geotrasportatori **GSO** hanno orbite geostazionarie nel piano dell'equatore, stazionarie rispetto alla Terra.
- ↳ satelliti LEO, MEO e GSO hanno orbite circolari.

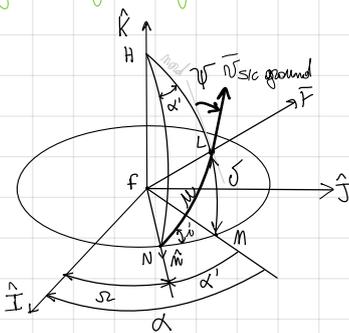
3.1

GROUND TRACK DI UN SATELITE



La ground track è il luogo dei punti dato dall'intersezione tra il rettilineo passante e la superficie terrestre. Per qualsiasi inclinazione del piano dell'orbita, la traiettoria è sempre una circonferenza massima - cioè che contiene il centro della Terra - perché il fuoco della traiettoria è il centro della Terra. Per uscire da questa condizione

bisognerebbe vincere la forza gravitazionale terrestre tenendo i motori sempre accesi. Solitamente si hanno forze impulsive per avere orbite kepleriane.



Nota: s, m e σ si calcolano $L_0(t)$ e $L_a(t)$ si utilizzano le proprietà dei trig. sferici.

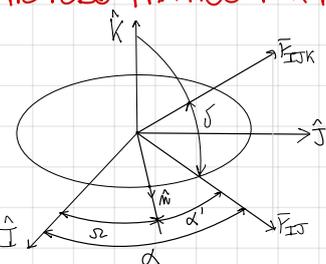
$$\text{trig NMLF: } \frac{\sin \delta}{\sin s} = \frac{\sin m}{\sin \sigma} \Rightarrow \sin \delta = \sin s \sin m \Rightarrow \delta(t) = \arcsin[\sin s \sin m]$$

$$\text{trig NLHF: } \frac{\sin \alpha'}{\sin m} = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - \delta)}{\cos \delta} = \frac{\cos \delta}{\cos \delta} \Rightarrow \sin \alpha' = \sin m \frac{\cos \delta}{\cos \delta} \Rightarrow \alpha'(t) = \arcsin[\sin m \frac{\cos \delta}{\cos \delta}]$$

per cui $\alpha(t) = \sigma + \alpha'$. Essendo $\alpha = \alpha_a + L_0$ si calcolano

$$\begin{cases} L_0 = \alpha - \alpha_a = \alpha - [\alpha_{a0} + \omega_p(t-t_0)] \text{ su un determinato istante} \\ L_a = \delta \end{cases}$$

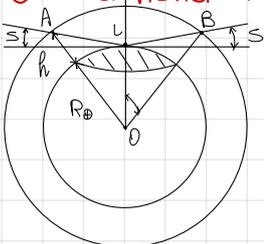
METODO PRATICO PER IL CALCOLO DI $\alpha(t)$



$$\text{Su 3D } \begin{cases} Y_I = Y_{IS} \cos \delta \cos \alpha \\ Y_J = Y_{IS} \cos \delta \sin \alpha \\ Y_K = Y_{IS} \sin \delta \end{cases} \text{ su 2D } \begin{cases} Y_{II} = Y_{IS} \cos \delta \\ Y_{IJ} = Y_{IS} \sin \delta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Y_I = Y_{II} \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{Y_I}{Y_{II}} \\ Y_J = Y_{IJ} \sin \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \frac{Y_J}{Y_{IJ}} \end{cases}$$

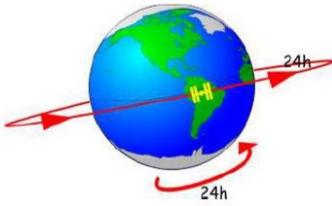
$$\text{per cui } \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha = \frac{Y_J / Y_{IJ}}{Y_I / Y_{II}} \Rightarrow \alpha = \arctan_2(\sin \alpha, \cos \alpha) = \arctan_2\left(\frac{Y_J}{Y_{IJ}}, \frac{Y_I}{Y_{II}}\right)$$

CONO DI VISIBILITÀ, ANGOLO DI COPERTURA, AREA DI ACQUISIZIONE



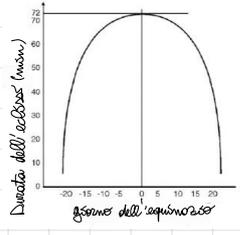
Seamus: α l'angolo di elevazione (presso apice $\sim 5^\circ$, colline $\sim 25^\circ$); β l'angolo di copertura [se lo si costruisce tra i punti A e B dell'orbita, si riesce a comunicare con esso]. Il cono di visibilità è dato dall'intersezione tra la sfera di raggio $R+h$ e il cono ABL che ha asse OL e apertura $\frac{\pi}{2} - \alpha$; la zona/area di visibilità è la proiezione del cono di visibilità sulla sfera terrestre [finché la ground track si trova in questa zona è possibile comunicare con il satellite].

ORBITA GEOSTAZIONARIA

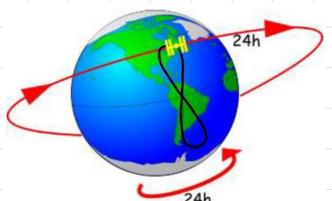


L'orbita geostazionaria ha periodo orbitale pari ad un giorno siderale (86'163,09 sec) e si trova nel piano equatoriale.
 Se vuole ricavare l'altitudine h per avere l'orbita geostazionaria: la velocità angolare della Terra è $\omega_{\oplus} = \frac{2\pi}{86'164,09} = 7,2921 \cdot 10^{-5} \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$, per cui $\omega_{\text{GEO}} = \sqrt{\frac{\mu_{\oplus}}{r_{\text{GEO}}}} = \omega_{\oplus} r_{\text{GEO}} \Rightarrow$
 $\frac{\mu_{\oplus}}{r_{\text{GEO}}} = \omega_{\oplus}^2 r_{\text{GEO}}^2 \Rightarrow r_{\text{GEO}} = \left[\frac{\mu_{\oplus}}{\omega_{\oplus}^2} \right]^{1/3} = \left[\frac{398'600}{(7,2921 \cdot 10^{-5})^2} \right]^{1/3} = 42'164 \text{ km}$ quindi $h_{\text{GEO}} = r_{\text{GEO}} - R_{\oplus} = 35'793 \text{ km}$

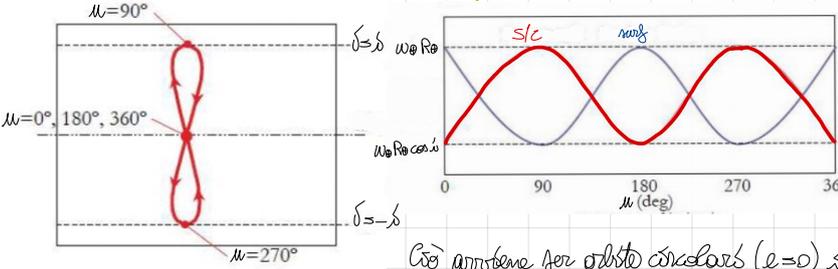
Aumentando h aumenta la superficie terrestre osservabile dallo s/c. Ad $h = 35'000 \text{ km}$ ($\sim h_{\text{GEO}}$) è osservabile il 43% della superficie terrestre; bastano quindi 3 satelliti geostazionari per coprire tutta la superficie della Terra.
 I problemi principali per un satellite geostazionario sono: a) eclissi solare, durante la quale il satellite non viene alimentato; b) perturbazioni dovute dall'attrazione gravitazionale di corpi terzi (a causa del Sole si perde 1%/y, a causa della Luna $< 1\%/y$ ma \uparrow)



ORBITA GEOSINCRONA



L'orbita geosincrona ha periodo orbitale pari ad un giorno siderale (86'164,09 sec).
 La proiezione a terra della velocità del satellite è $v_{\text{SIC, ground}} = \omega_{\oplus} R_{\oplus}$, nel sistema S-E la sua componente est è $v_{\text{SIC, E}} = v_{\text{SIC, ground}} \cos \delta$ per $v = v_{\text{SIC, ground}} \frac{\cos \delta}{\cos \delta} = \omega_{\oplus} R_{\oplus} \frac{\cos \delta}{\cos \delta}$
 La componente est della velocità della superficie terrestre è $v_{\text{surf, E}} = \omega_{\oplus} R_{\oplus} \cos \delta$ [per la relazione tra arco di equatore e arco di parallelo si moltiplica per $\cos \delta = \cos \lambda$]
 Sulla linea dei nodi $\mu = 0^\circ, 180^\circ, 360^\circ$
 $\Rightarrow \delta = 0^\circ \Rightarrow \begin{cases} v_{\text{SIC, E}} = \omega_{\oplus} R_{\oplus} \cos \delta \\ v_{\text{surf, E}} = \omega_{\oplus} R_{\oplus} \cos \delta \end{cases} \Rightarrow v_{\text{surf, E}} = v_{\text{SIC, E}}$
 Per $\mu = 90^\circ, 270^\circ \Rightarrow \delta = \delta \Rightarrow \begin{cases} v_{\text{SIC, E}} = \omega_{\oplus} R_{\oplus} \\ v_{\text{surf, E}} = \omega_{\oplus} R_{\oplus} \cos \delta \end{cases} \Rightarrow v_{\text{surf, E}} < v_{\text{SIC, E}}$



Ciò avviene per orbite circolari ($e=0$) in cui $\omega_{\text{SIC}} = \omega_{\oplus}$ sempre.
 Aumentando l'eccentricità l'orbita diventa ellittica e ω_{SIC} non è sempre uguale a ω_{\oplus} : al perisodio si hanno velocità tangenziali maggiori, $\omega_{\text{SIC}} > \omega_{\oplus}$ e la ground track si sposta verso l'orizzonte; all'apoteo si hanno velocità tangenziali minori, $\omega_{\text{SIC}} < \omega_{\oplus}$ - Greenwisch è più veloce e sopra lo S/C - (orbita retrograda) e la ground track si sposta verso l'orizzonte.
 L'orbita geosincrona ellittica non è simmetrica rispetto alla latitudine come per le orbite geosincrone, ma la sua ground track (a forma di 8) è inclinata verso est. Inoltre non sono simmetriche nemmeno rispetto la longitudine perché dal lato delle λ negative si toglie un po' di rotazione terrestre: $|\lambda_{\text{min}}| < |\lambda_{\text{max}}|$

IN SINTESI

- LEO: $0 < h < 2'000 \text{ km}$ - MED: $2'000 < h < 35'793 \text{ km}$ - GEO: $h > 35'793 \text{ km}$, tra questi ci sono GEO e GSO
- GROUND TRACK DI UN SATELLITE**
- La ground track è il luogo dei punti dati dall'intersezione tra la retta posizione e la superficie terrestre.
 $\begin{cases} \lambda = \alpha - \alpha_0 = \alpha - [\alpha_0 + \omega_{\oplus}(t-t_0)] \\ \lambda_a = \delta \end{cases}$ in un determinato istante, con $\alpha = \arctg 2 \left(\frac{Y_0}{X_0}, \frac{Y_1}{X_1} \right)$
 - Se δ è l'angolo di elevazione e β l'angolo di copertura per avere fuori grande possibile copertura, h grande $\Rightarrow T$ maggiori
- EFFETTI SULLA GROUND TRACK**
- Effetto dell'inclinazione $\cos \lambda = \frac{\cos \delta}{\sin \beta} \Rightarrow \lambda_{\text{max}} = \delta, \lambda_{\text{min}} = -\delta$ (3 punti di latitudine max e min si trovano in un termino di longitudine) in opposizione alla linea dei nodi.
 - Effetto della rotazione terrestre: che ruota verso est \Rightarrow ground track verso ovest ad ogni ciclo. Da LEO si ricava a: $T = \frac{2\pi R_{\oplus}}{\omega_{\oplus}} = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}$
 - Effetto dell'altitudine: se $h \uparrow \Rightarrow a \uparrow \Rightarrow T \uparrow$ secondi $T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}$
 - Orbita geostazionaria geosincrona, e nel piano equatoriale. Per $\omega_{\text{GEO}} = \omega_{\oplus} r_{\text{GEO}}$ si ricava $r_{\text{GEO}} = 42'164 \text{ km}$ ($\sim 42'000 \text{ km}$) $\Rightarrow h_{\text{GEO}} = 35'793 \text{ km}$ ($\sim 36'000 \text{ km}$)
 - Orbita geosincrona: $T = 1 \text{ giorno} = 86'164,09 \text{ sec}$. Sulla linea dei nodi $v_{\text{surf, E}} > v_{\text{SIC, E}}$, in opposizione $v_{\text{surf, E}} < v_{\text{SIC, E}}$

IN SINTESI

eq dell'orbita kepleriana perturbata è $\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} + \vec{a}_p$ dove \vec{a}_p è l'accelerazione dovuta dalle forze perturbative

PRESENZA DI UN TERZO CORPO

$$a_p = \frac{\mu_p}{r^2} \sqrt{1 - 2 \frac{r}{R} \cos \alpha + \frac{r^2}{R^2}}, \text{ se } \alpha \text{ approssima } \alpha \approx R \Rightarrow a_p \approx \frac{\mu_p}{R^3}$$

azioni gravitazionali

$$a_{\oplus} = \frac{\mu_{\oplus}}{r_{\oplus}^2} = 2 \cdot 10^{-4} \frac{\text{km}}{\text{s}^2}$$

$$a_{\oplus} = \frac{\mu_{\oplus}}{R^2} = 5 \cdot 10^{-6} \frac{\text{km}}{\text{s}^2}$$

$$a_{\oplus} = \frac{\mu_{\oplus}}{R^2} = 3 \cdot 10^{-8} \frac{\text{km}}{\text{s}^2}$$

azioni perturbative

$$a_{p\oplus} = \frac{\mu_{\oplus} \gamma_{\oplus 0}}{R^3} = 1,64 \cdot 10^{-9} \frac{\text{km}}{\text{s}^2}$$

$$a_{p\oplus} = \frac{\mu_{\oplus} \gamma_{\oplus 0}}{R^3} = 3,65 \cdot 10^{-9} \frac{\text{km}}{\text{s}^2}$$

NON SFERICITÀ DELLA TERRA

• Effetti: i) regressione della linea dei nodi $\dot{\omega} = -3\pi J_2 \left(\frac{R_p}{p}\right)^2 \cos i \frac{1}{\tau} \left[\frac{\text{rad}}{\text{sec}}\right]$ se $0 < i \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \Delta \omega < 0$

ii) precessione della linea degli apsidi $\frac{\Delta \omega}{\text{orb}} = \frac{3}{2} \pi J_2 \left(\frac{R_p}{p}\right)^2 (5 \cos^2 i - 1)$ se $i < 63,4^\circ$ ($i > 116,6^\circ$) \Rightarrow la linea degli apsidi ruota concordamente con il satellite
 se $i = 63,4^\circ$ ($i = 116,6^\circ$) \Rightarrow la perturbazione non si manifesta
 se $63,4^\circ < i < 116,6^\circ$ \Rightarrow (regressione) la linea degli apsidi ruota in verso opposto con il satellite

• l'orbita diossimona sfrutta la regressione della linea dei

modi: si deve essere pari alla velocità angolare della terra $1,0027 \cdot 10^{-7} \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$

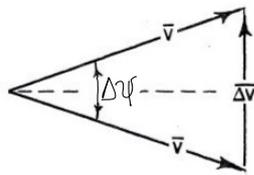
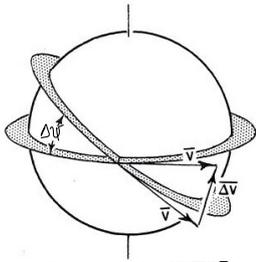
l'orbita melanija ha orbita fortemente ellittica con apogeo elevato, sorvola le zone ricche di pbs. Ha $i = 63,4^\circ$ o

$116,6^\circ$ in modo che non si manifesti la precessione della linea degli apsidi [se si manifestasse si avrebbe immersione tra apogeo e perigeo].

RESISTENZA AERODINAMICA

Si manifesta per orbite basse, svanisce per $h > 700 \text{ km}$. La resistenza aerodinamica significa una velocità di riduzione della quota orbitale $\dot{a} = -\sqrt{\mu a} \frac{C_D}{m} \rho$, è legato al coefficiente balistico $BC = \frac{m}{C_D \rho_0} \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^2}\right]$, che indica la capacità di un corpo di superare la resistenza aerodinamica.

CAMBIO DI PIANO SEMPLICE ($\Delta\psi$)



Hp. s) orbita inessale e orbita finale circolare

s.b) $a, e = \text{cost} \Rightarrow r = \text{cost}, e = 0$

s.s) ΔV singolare

Risolvendo da $Eg = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a} = \text{cost} \Rightarrow |v| = \text{cost}$ e che $|h| = r|v| = \text{cost} \Rightarrow$

$v_0 = \frac{h}{r} (1 + e \cos \psi) = \frac{h}{r} = \text{cost}$, dunque anche $v_f = \text{cost}$, e la v_0 che viene

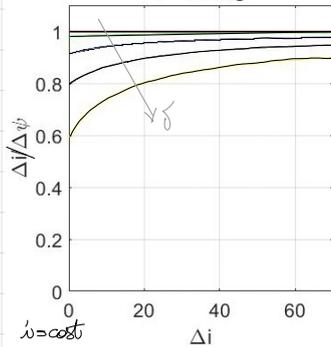
mutato di $\Delta\psi$, per cui $\Delta V = 2v_0 \sin(\frac{\Delta\psi}{2})$ se $\Delta V \downarrow \Leftrightarrow \psi \uparrow$
 mutare v significa modificare l'heading

La variazione dell'heading provoca una variazione dell'inclinazione del piano dell'orbita. Facendo riferimento alla figura di pag. 15, per le proprietà dei trig. si ha

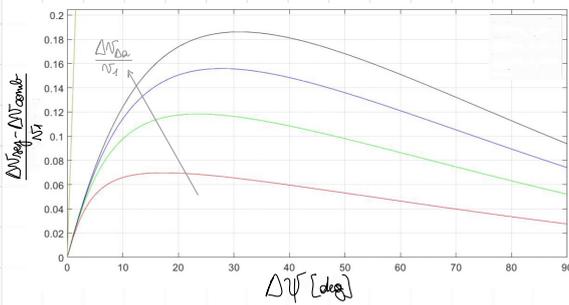
$$\left. \begin{aligned} \psi_1 &= \arcsin \left[\frac{\cos \delta}{\cos \delta'} \right] \\ \psi_2 &= \arcsin \left[\frac{\cos(\delta + \Delta\delta)}{\cos \delta'} \right] \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta\psi = \arcsin \left[\frac{\cos(\delta + \Delta\delta)}{\cos \delta'} \right] - \arcsin \left[\frac{\cos \delta}{\cos \delta'} \right]$$

$\Delta\delta < 0 \Rightarrow \Delta\psi > 0 \Rightarrow \frac{\Delta\psi}{\Delta\delta} < 0$; $\Delta\delta = 0 \Rightarrow \Delta\psi = 0 \Rightarrow \frac{\Delta\psi}{\Delta\delta}$ indefinita; $\Delta\delta > 0 \Rightarrow \Delta\psi < 0 \Rightarrow \frac{\Delta\psi}{\Delta\delta} < 0$

Il costo è $\Delta\psi$ e il guadagno è $\Delta\delta$. Solo se $\delta = \pi/2$ (all'equatore) si ha $\Delta\delta = \Delta\psi$



Il cambio di piano è estremamente costoso anche se $\Delta\delta = \Delta\psi$ ($\Delta V \uparrow \Leftrightarrow \psi \downarrow, \Delta\delta \uparrow$), inoltre non cambia Eg , conviene



combinare la manovra di cambio piano con altre, ancora meglio, conviene suddividere il cambio piano in più piccoli cambi singoli di piano combinati (per $\Delta\delta$ piccoli $\cos \delta \approx 1$).

Si considerino le manovre di aggiustamento dell'altitudine degli orbidi + cambio di piano semplice:

a) effettuando la manovra separata il costo è $\Delta V_{req} = \Delta V_{ra} + \Delta V_{ps} = 2v_0 \sin \frac{\Delta\psi}{2} + (v_2 - v_1)$

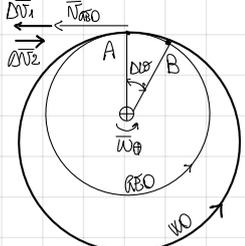
b) effettuando la manovra combinata il costo è $\Delta V_{comb} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2 \cos \Delta\psi}$, se $\Delta\psi$ è piccolo $\Rightarrow \Delta V_{comb} \approx v_2 - v_1$.

Confrontando manovra separata e combinata, si nota che per $\Delta\psi$ piccolo nella manovra combinata si effettua una rotazione senza costo.

5.2

MANOVRE A 2 IMPULSI

FASAMENTO DELL'ORBITA



Equivalente alla modifica del tempo di passaggio al periastrio. Si considera uno s/c ipotetico, marcia che staziona nel punto A, il target è lo stazionamento su B, con $\Delta\psi = \angle B - \angle A$, e si ha

$\Delta T = \frac{\Delta\psi}{\omega_{\theta}}$

Se lo s/c è in anticipo rispetto al target: non è possibile stazionare fermi in un punto in modo da stazionare su B, ma ci si può su una waiting (parking) orbit (WO/PO) esterna alla GEO che ha periodo maggiore $\tau_{WO} > \tau_{GEO}$. Durante τ_{WO} la zona percorsa $2\pi + \Delta\psi$; grazie alla 3° legge di Keplero si ricorra la dimensione della waiting orbit $m[\tau_{WO} - \tau_{GEO}] = \Delta T$, insieme inserita il fatto che

perché si vuole avere una WO prossima al più possibile alla GEO, su modo da avere τ_{WO} e a_{WO} più piccolo possibile. Ci sono però dei vincoli sui tempi di permanenza, limiti sui multipli di giorni.

Considerando $m=1$: $\tau_{WO} = \Delta T + \tau_{GEO} = 2\pi \sqrt{\frac{a_{WO}^3}{\mu_{\oplus}}} \Rightarrow a_{WO} = \sqrt[3]{\frac{\mu_{\oplus}}{2\pi} (\tau_{WO})^2}$, si ricorda $v_{GEO} = \sqrt{\frac{\mu_{\oplus}}{r_{GEO}}}$. Nel passaggio dalla GEO alla WO

$Eg_{WO} = -\frac{\mu_{\oplus}}{2a_{WO}} = \frac{v_{P,WO}^2}{2} - \frac{\mu_{\oplus}}{r_{GEO}} \Rightarrow v_{P,WO} = \sqrt{\frac{2\mu_{\oplus}}{r_{GEO}} - \frac{\mu_{\oplus}}{a_{WO}}} \Rightarrow \Delta V_1 = |v_{P,WO} - v_{GEO}|$. Dopo una waiting orbit completa la zona è rotata di

$2\pi + \Delta\psi$, quindi lo s/c si trova nel pt. B. Si ritorna dalla WO alla GEO $\Delta V_2 = |v_{GEO} - v_{P,WO}|$. Insieme sommariamente

$\Delta V = 2|v_{P,WO} - v_{GEO}| = 2 \sqrt{\frac{2\mu_{\oplus}}{r_{GEO}} - \frac{\mu_{\oplus}}{a_{WO}}} - 2 \sqrt{\frac{\mu_{\oplus}}{r_{GEO}}}$