



centroappunti.it

CORSO LUIGI EINAUDI, 55/B - TORINO

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 2572A

ANNO: 2024

A P P U N T I

STUDENTE: Scaringi Nicolò

MATERIA: Meccanica del Volo - Prof. Gili

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTI E NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.



**Politecnico
di Torino**

MECCANICA DEL VOLO

Prof. Piero Gili

1° anno

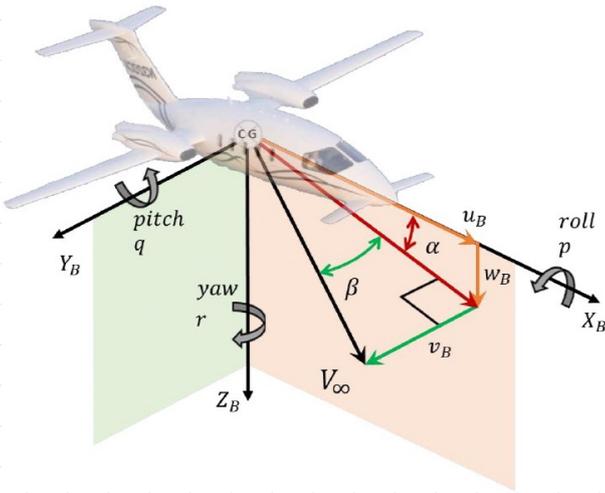
Nicolò Scaringi

INDICE

PARTE 1	1
1. STABILITÀ STATICA	1
1.1 Risoluzioni	1
1.2 Condizioni di equilibrio e mod. stability	1
2. MOTO NON UNIFORME	4
2.1 Moto nel piano di simmetria	4
2.2 Virata	6
2.3 Raffica	7
PARTE 2	9
3. MOMENTO DI CERNIERA	9
3.1 Comandi liberi	10
3.2 Aletta correttiva	11
3.3 Risoluzione di H mediante l'aletta tab	12
4. SFORZO DI BARRA	14
4.1 Trasmissione del comando	14
4.2 Punti di manovra a comandi bloccati e liberi	16
4.3 Control force gadgets	18
4.4 Effetto suolo e volo in manovra	18
PARTE 3	19
5. S.R. E CINEMATICA	19
5.1 Sistemi di riferimento	19
5.2 Angoli di Eulero ed equazioni cinematiche	21
6. EQUAZIONI CARDINALI DELLA DINAMICA	23
6.1 Equazioni non lineari del moto	23
6.2 Equazioni linearizzate del moto	25
7. DINAMICA LONGITUDINALE	27
7.1 Analisi delle derivate	28
7.2 Soluzioni	28
7.3 Root locus e Stabilità dinamica	33
7.4 Sizing & Handling qualities	34
PARTE 4	36
7.5 Risposta al comando	36
7.6 Comandi liberi	37
8. DINAMICA LATERO-DIREZIONALE	39
8.1 Equazioni linearizzate	39
8.2 Derivate aerodinamiche	41
8.3 Analisi dei modi propri	45
8.4 Handling qualities	47

1. STABILITÀ STATICA

1.1 SISTEMA DI RIFERIMENTO VELOVOLO



RICHIAMI

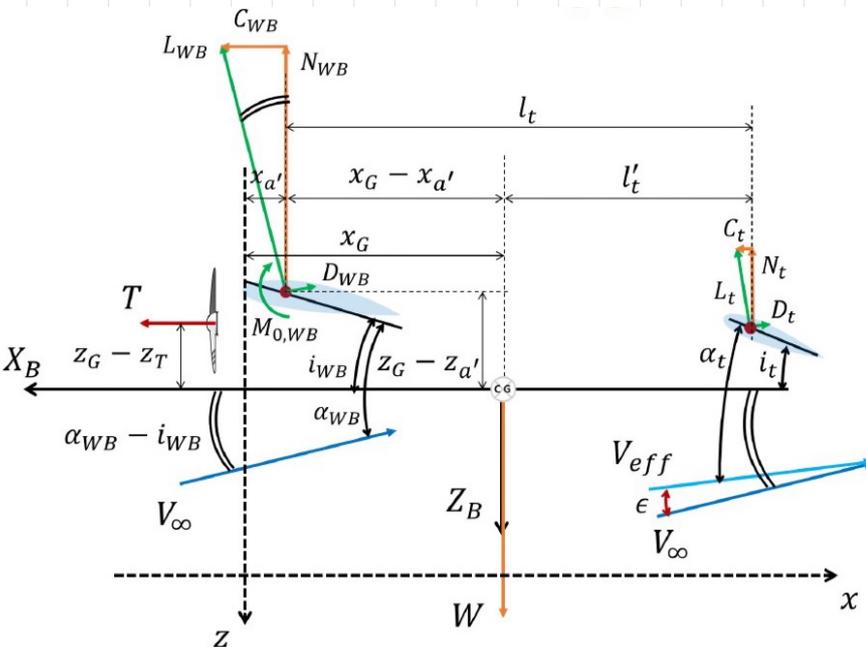
- La terra è centrata nel baricentro e parallela al velivolo
- L'asse longitudinale X_B è verso prua
- L'asse verticale Z_B è verso il basso (risf. pilota)
- L'asse trasversale Y_B è verso destra (risf. pilota), pertanto $M_q > 0$ a cabrare $M_q < 0$ a scendere

RICHIAMI DI EQUILIBRIO E STABILITÀ

Equilibrio se $\sum^F Fat = 0 \wedge \sum^M Mat = 0$
 La stabilità è una caratteristica dell'equilibrio per cui a seguito di disturbi esterni il sistema tende a tornare nella condizione di equilibrio iniziale



SCHEMA GENERALE DEL VELOVOLO



Il fuoco di un profilo aerodinamico rappresenta il punto rispetto al quale il momento di trasporto delle forze aerodinamiche è costante. Il punto neutro è il fuoco del velivolo completo.

Si ricorda che $C_L = C_{L,WB} + \frac{S_t}{S} C_{L,t}$ e $C_m = C_{m0,WB} + C_{MP} + \frac{x_G - x_{a'}}{c} C_L - \bar{V} C_{m,t}$ dove

$$\bar{V} = \frac{S_t l}{S c}$$

Si dimostra che $C_m = C_{m0} + C_{m\alpha}$ dove

$$C_{m\alpha} = a \left[\frac{x_{a'} - x_{a'}}{c} - \frac{\bar{V} a_t}{a} \left(1 - \frac{\partial \epsilon}{\partial \alpha} \right) \right] + \frac{\partial C_{MP}}{\partial \alpha} = a \frac{x_N - x_N}{c} \text{ con punto neutro}$$

$$\frac{x_N}{c} = \frac{x_{a'}}{c} + \frac{\bar{V} a_t}{a} \left(1 - \frac{\partial \epsilon}{\partial \alpha} \right) \frac{1}{a} \frac{\partial C_{MP}}{\partial \alpha} \text{ è fuoco del velivolo}$$

$$C_{m0} = C_{m0,WB} + C_{m,FD} + \frac{\bar{V} a_t \bar{i}}{a} \text{ con}$$

$$\frac{1}{1+f} = \frac{S_t a_t}{S_w a} \left(1 - \frac{\partial \epsilon}{\partial \alpha} \right) - 1, a = a_{WB} (1+f) \text{ e } f = \frac{S_t a_t}{S_w a_{WB}} \left(1 - \frac{\partial \epsilon}{\partial \alpha} \right) \text{ per cui } C_{m0} = C_{m0,WB} + a_t \bar{V} \bar{i} \left[1 - \frac{a_t S_t}{a S} \left(1 - \frac{\partial \epsilon}{\partial \alpha} \right) \right]$$

Se $x_G < x_N$ (punto neutro più a poppa rispetto al baricentro), allora il piano di coda stabilizza il velivolo.

1.2 CONDIZIONI DI EQUILIBRIO E SPEED STABILITY

DERIVATE DI COMANDO

Un velivolo in MRUD è in equilibrio se $\begin{cases} L=W \\ T=D \\ M=0 \end{cases}$ da cui per definizione si ottengono

velivolo ala-coda/convenzionale

$$C_{L\delta} = \frac{\partial C_L}{\partial \delta} = \frac{\partial C_{L,WB}}{\partial \delta} + \frac{S_t}{S} \frac{\partial C_{L,t}}{\partial \delta} = \frac{S_t}{S} a_t \tau (>0)$$

$$\text{con } \tau = \frac{\partial \alpha_t}{\partial \delta}$$

velivolo tutt'ala

$$C_{L\delta} = \frac{\partial C_L}{\partial \delta} = \frac{\partial C_{L,WB}}{\partial \delta}$$

$$C_{m\delta} = \frac{\partial C_{m0,WB}}{\partial \delta} + \frac{\partial C_{MP}}{\partial \delta} + \frac{x_G - x_{a'}}{c} \frac{\partial C_L}{\partial \delta} - \bar{V} \frac{\partial C_{m,t}}{\partial \delta} = \frac{x_G - x_{a'}}{c} \frac{S_t}{S} a_t \tau - \bar{V} a_t \tau = -\frac{S_t l'_t}{S c} a_t \tau (<0) \quad C_{m\delta} = \frac{\partial C_{m0,WB}}{\partial \delta} + \frac{\partial C_{MP}}{\partial \delta} + \frac{x_G - x_{a'}}{c} \frac{\partial C_{L,WB}}{\partial \delta} \quad (1)$$

Nella condizione stabile $X_{a,2}$ si ha $L_{t,B} > L_{t,A}$ cioè una portanza minore di quella richiesta, pertanto il velivolo tende a calare, $C_L \uparrow$, $V \downarrow$ e se velivolo ritorna nella posizione iniziale. Nella condizione instabile $X_{a,3}$ si ha $L_{t,B} < L_{t,A}$ cioè una portanza minore di quella richiesta, pertanto il velivolo tende a picchiare e $V \uparrow$.
 Per cui le condizioni di **stabilità statica longitudinale** sono:

$C_{m\alpha} < 0 \Rightarrow X_{a,1} < X_{a,2}$; $\frac{\partial \delta_{e,eq}}{\partial C_{L,eq}} < 0$; $\frac{\partial \delta_{e,eq}}{\partial V_{eq}} > 0$ (speed stability) [condizioni equivalenti] - Si può dimostrare che

per gli effetti di compressibilità sono trascurabili $\frac{\partial \delta_{e,eq}}{\partial V_{eq}} = \frac{\partial \delta_{e,eq}}{\partial C_{L,eq}} \frac{\partial C_{L,eq}}{\partial V_{eq}} = \frac{4W/S}{\rho V^3} \frac{X_{a,1} - X_{a,2}}{C_{m\delta e}}$

La condizione della speed stability è valida in regime subsonico e supersonico, non lo è in regime transonico.

contingenza massima teorica raggiungibile a parità di geometria. È un valore teorico in quanto non realizzabile, perché la potenza del propulsore e la robustezza della struttura lo impedirebbero. Il fattore di carico massimo effettivo (date condizioni strutturali) è dato a seconda della categoria del velivolo: ad es. +2,5 per velivoli civili, +6/8 per velivoli militari/civili.

Dalla polare aerodinamica si ha $\frac{L}{D} = E$, essendo $L = mW$, si ha $D = \frac{L}{E} = \frac{mW}{E}$. Per valutare il raggio minimo ottenibile occorre considerare anche l'equilibrio nella direzione della velocità per assicurarsi di avere la spinta necessaria. Considerando il punto più basso della traiettoria ($\gamma=0$) si ha $T = D = \frac{mW}{E}$, considerando qualsiasi modello per la spinta si può ricavare la manetta che deve essere $l \leq 1$

Per determinare le condizioni di fattore di contingenza massima occorre utilizzare un metodo iterativo:

si ricorda che $T = D$, $D = \frac{L}{E} = \frac{mW}{E}$, $T = l_0 X_1 \psi_1 l_1$

1) si considera $C_{L,MAX}$ (o K_{min}) e $M_{MAX, strutt}$

2) si ricorra la velocità $V_0^2 = K C_{L,MAX} M_{MAX, strutt}^2$

3) metta la polare, si ricorra $E_{C_{L,MAX}}$ e quindi $D = \frac{M_{MAX, strutt} W}{E_{C_{L,MAX}}}$

4) si ricorra la manetta necessaria $T = D = \frac{M_{MAX, strutt} W}{E_{C_{L,MAX}}} = l_0 X_1 \psi_1 l_1 \Rightarrow l_1 = \frac{M_{MAX, strutt} W}{E_{C_{L,MAX}}} \frac{1}{l_0 X_1 \psi_1}$

5) se $l_1 \leq 1$ si calcola $R = \frac{K_{C_{L,MAX}}}{g} \frac{1}{1 - \frac{1}{M_{MAX, strutt}^2}}$, altrimenti si ritorna allo step 1 considerando un $C_L < C_{L,MAX}$

DERIVATE C_{Lq} E C_{mq}

Rispetto al punto più basso ($\gamma=0$), nella generica condizione si ha la stessa velocità ma angolo di attacco e fattore di carico diversi, pertanto si avrà $\alpha = \alpha_{eq} + \Delta\alpha$ angolo di attacco, $\delta = \delta_{eq} + \Delta\delta$ deflessione equilibratore, $P = P_{eq} + \Delta P$ spinta di barra. Essendo $m_{eq} = 1$ e $m = m_{eq} + \Delta m$ si ha che $\Delta m = m - 1$.

Il control force per δ è $\frac{dP}{d\delta} = \frac{\Delta P}{\Delta \delta} = \frac{\Delta P}{m-1}$, l'elevator angle per δ è $\frac{d\delta}{dm} = \frac{\Delta \delta}{m-1}$

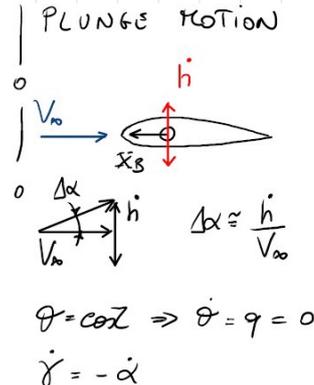
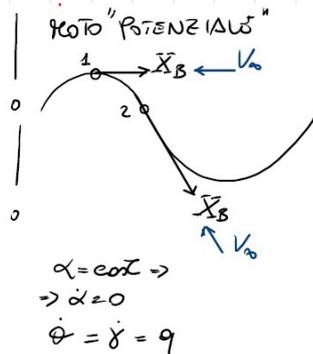
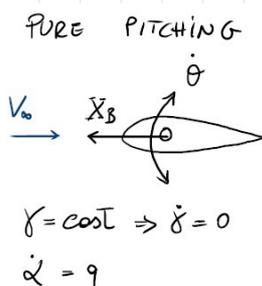
Inoltre il campo di moto è "deformato" durante la richiamata rispetto al puro moto traslazionale. La presenza di q modifica la distribuzione di pressione e le forze aerodinamiche che si generano, considerando piccoli disturbi è applicabile la sovrapposizione degli effetti, si ottiene:

$$\begin{cases} C_L = C_{L,eq} + \Delta C_L(\Delta\alpha, \Delta\delta, q) \\ C_m = C_{m,eq} + \Delta C_m(\Delta\alpha, \Delta\delta, q) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_L = C_{L\alpha} \Delta\alpha + C_{L\delta} \Delta\delta + C_{Lq} q \\ C_m = C_{m\alpha} \Delta\alpha + C_{m\delta} \Delta\delta + C_{mq} q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta C_L = C_{L\alpha} \Delta\alpha + C_{L\delta} \Delta\delta + C_{Lq} q \\ \Delta C_m = C_{m\alpha} \Delta\alpha + C_{m\delta} \Delta\delta + C_{mq} q \end{cases}$$

Si introduce il tempo aerodinamico $t^* = \frac{c}{2V_0}$ cioè il tempo necessario al velivolo per percorrere alla sua velocità una spessa pari a metà corda, in forma adimensionale $\hat{t} = t/t^*$. La velocità di beccheggio adimensionata è

$$\hat{q} = q t^* = \frac{qc}{2V_0} \text{ - le derivate si possono esprimere come } \begin{cases} C_{Lq} = \frac{\partial C_L}{\partial \hat{q}} = \frac{\partial C_L}{\partial q} \frac{2V_0}{c} \\ C_{mq} = \frac{\partial C_m}{\partial \hat{q}} = \frac{\partial C_m}{\partial q} \frac{2V_0}{c} \end{cases} \text{ il contributo principale e quello della coda:}$$

ricordando che $\Delta\alpha = \arctg \frac{q l_t}{V_0} \approx \frac{q l_t}{V_0}$ e che $C_{L_t} = a_t \alpha_t |_{\alpha=0} + a_t \tau \alpha_e + a_t \frac{q l_t}{V_0}$ si ha $C_{L_t q} = \frac{\partial C_{L_t}}{\partial q} = \frac{\partial C_{L_t}}{\partial q} \frac{2V_0}{c} = a_t \frac{l_t}{V_0} \frac{2V_0}{c} = 2a_t \frac{l_t}{c}$



$T \cos \alpha^* = D + W \sin \gamma + \frac{W}{g} \frac{dV_{\infty}}{dt} = \frac{mW}{E} \Rightarrow \begin{cases} \sin \gamma = \frac{T}{W} \cos \alpha^* - \frac{m}{E} \\ m = \left(\frac{T}{W} \cos \alpha^* - \sin \gamma \right) E \end{cases}$, pertanto $\begin{matrix} \text{salita } \gamma_{\max} \rightarrow E_{\max} \\ \text{discesa } \gamma_{\min} \rightarrow E_{\max} \end{matrix}$ (il più grande degli angoli di discesa o il più piccolo degli angoli di discesa in valore assoluto). Si ricavano le grandezze seguenti a quota costante ($T \approx D = \frac{mW}{E}$)

$Y_c = \frac{2W/S}{\rho_{\infty} C_L} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{M^2}}} \Rightarrow \lim_{M \rightarrow \infty} Y_c = \frac{2W/S}{\rho_{\infty} C_L}$ $\Omega = \frac{V}{Y_c} = g \sqrt{\frac{\rho_{\infty} C_L}{2W/S}} \sqrt{\frac{M^2 - 1}{M}} \Rightarrow \lim_{M \rightarrow \infty} \Omega = +\infty$

Ricordando che per un motore a getto $T = T_{50} X_1 \Psi_1 \eta_1$ si ricava:

$\bullet T = D = \frac{L}{E} = \frac{mW}{E} \Rightarrow m = \frac{ET}{W} = \frac{X_1 \Psi_1 \eta_1}{W/T_{50}} E \Rightarrow m_{\max} = \frac{X_1 \Psi_1 \eta_1}{W/T_{50}} E_{\max}$ $\bullet Y_c = \frac{2W/S}{\rho_{\infty} C_L} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{M^2}}} \Rightarrow Y_{c, \min} = \frac{2W/S}{\rho_{\infty} C_{L, \max}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{M^2}}}$

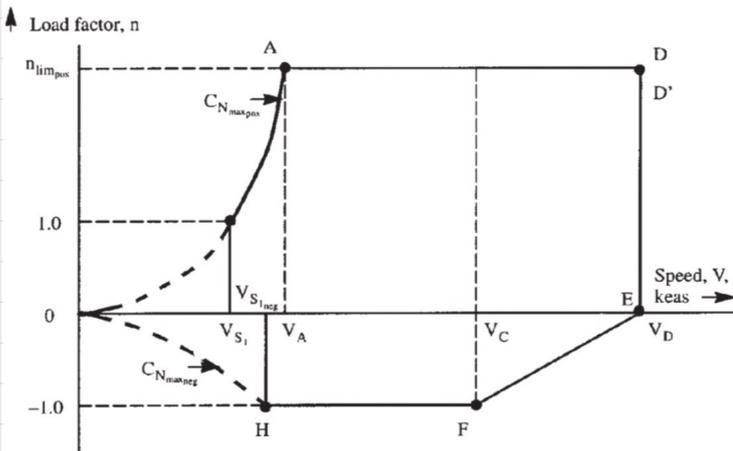
per ricavare la combinazione di m e C_L che danno **raggio minimo** e **omega massimo** si applica il seguente schema iterativo:

- 1) si considera $C_{L, E_{\max}}$ e $m_{E_{\max}} = \frac{X_1 \Psi_1 \eta_1}{W/T_{50}} E_{\max}$
- 2) si ricava la velocità V_{∞} da X_1
- 3) si ricava $Y_{c, \min}$ e Ω_{\max}

2.3 RAFFICA

Il diagramma di sviluppo rappresenta i punti più critici che devono essere analizzati strutturalmente, è dato dalla sovrapposizione del diagramma di raffica sul diagramma di manovra. Il diagramma di manovra studia il fattore di carico a contingenza in funzione della velocità in un'atmosfera in quiete; il diagramma di raffica aggiunge la componente dell'atmosfera non in quiete.

DIAGRAMMA DI MANOVRA



Rappresenta la funzione $m = \frac{L}{W} = \frac{\rho_0 V_{\infty}^2 C_L}{2W/S}$, si riferisce a carico alare W/S e quota fissati.

- V_A : velocità di manovra
- V_C : velocità di cresta
- V_D : velocità di affondata
- V_B : velocità per la massima raffica ($V_A \leq V_B \leq V_C$)
- $m_{lim, pos}$ fattore di carico limite positivo
- $m_{lim, neg}$ fattore di carico limite negativo

Il fattore di carico a contingenza massimo e minimo sono definiti dalla normativa sulla base della particolare

categoria del velivolo. Soltanto un velivolo è progettato per volare in condizioni normali e non in volo inverso, ciò significa che la parabola caratterizzata da $C_{L, \min}$ è più piatta di quella caratterizzata da $C_{L, \max}$. Il limite superiore della velocità non è dettato dalla normativa per motivi strutturali ma per motivi aerodinamici in quanto si avrebbe lo stall.

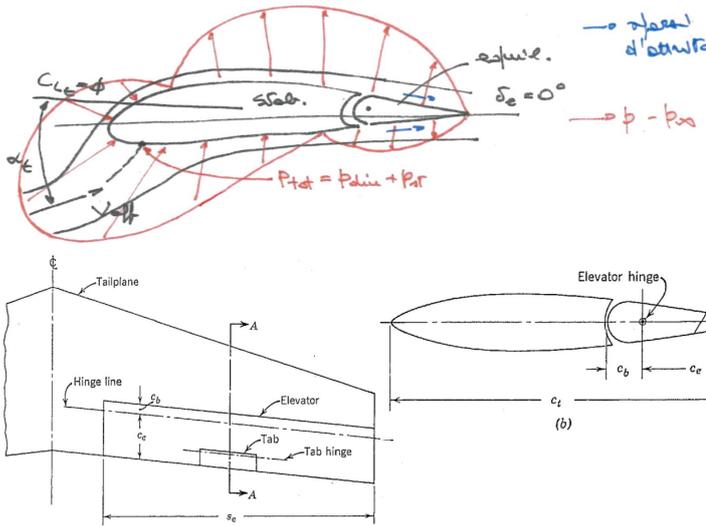
SCHEMATIZZAZIONE NELLA RAFFICA

Le ipotesi per la schematizzazione della raffica sono:

- i) $\delta \alpha \approx \text{cost}$ e $\delta \theta \approx \text{cost}$
- ii) no rotazione ($C_m = 0$), $\Delta \alpha$ è dovuto solo alla raffica
- iii) circostanze aerodinamiche istantanee
- iv) velivolo rigido (si trascurano le deformazioni elastiche)
- v) $|W/g| \ll |V|$

vi) traiettoria orizzontale ($\gamma \approx 0^\circ$)

3. MOMENTO DI CERNIERA



Per momento di cerniera s'intende l'effetto delle azioni aerodinamiche sull'equilibratore in termini di momento rispetto all'asse di rotazione della superficie mobile.

Gli sforzi d'attacco e le pressioni sulla parte mobile (equilibratore) generano un momento rispetto all'asse di cerniera ("hinge moment", H) positivo se concorde con il verso di Y_B . Se l'equilibratore è equilibrato staticamente e dinamicamente, allora non si hanno forze di massa [e di inerzia] che agiscono sull'equilibratore.

Il momento di cerniera aerodinamico H

deve essere bilanciato da un momento uguale e contrario generato dal pilota (con adeguato sforzo di barra) oppure da un sistema di attuazione (elettrico) meccanica.

Si definisce un momento di riferimento al fine di introdurre il coefficiente di momento di cerniera C_H (momento aerodinamico).

La parte estrema (tab) genera delle forze trasversali nel campo della portanza generata ma è determinante per il momento di cerniera. Esistono diverse tipologie di tab: correttore ("trim tab"), servomotrice, compensativa/compensativa.

$$H = \frac{1}{2} \rho v_0^2 \eta_t S_e c_e C_H \quad \text{con} \quad C_H = f(\alpha_t, \delta_e, \delta_{tab}) \quad \text{dove} \quad \alpha_t = \alpha_s + \epsilon \delta_e + \frac{\partial \alpha_t}{\partial \delta_{tab}} \delta_{tab} \approx \alpha_s + \epsilon \delta_e \quad \rightarrow \quad \alpha_s = \alpha_t \Big|_{\substack{\delta_e=0 \\ \delta_{tab}=0}}$$

Considerando che $C_H = f(\alpha_s, \delta_e, \delta_{tab})$, esso si può espandere con la serie di Taylor del 1° ordine: $C_H = b_0 + \frac{\partial C_H}{\partial \alpha_s} \alpha_s + \frac{\partial C_H}{\partial \delta_e} \delta_e + \frac{\partial C_H}{\partial \delta_{tab}} \delta_{tab} \Rightarrow C_H = b_0 + b_1 \alpha_s + b_2 \delta_e + b_3 \delta_{tab}$, essendo $b_1 = \frac{\partial C_H}{\partial \alpha_s}$; $b_2 = \frac{\partial C_H}{\partial \delta_e}$; $b_3 = \frac{\partial C_H}{\partial \delta_{tab}}$. Se il profilo è simmetrico $b_0 = 0$, se il velivolo è tutt'ala $\alpha_s = \alpha$.

Ricordando che $\alpha_s = (1 - \frac{\partial \epsilon}{\partial \alpha}) \alpha_{WB} - \dot{\alpha}$; $\alpha_{WB} = \alpha + \frac{S_t}{S} \frac{a_t}{a} \dot{\alpha}$; $a = a_{WB} (1 + f)$, si ottiene $\alpha_s = (1 - \frac{\partial \epsilon}{\partial \alpha}) \alpha - \frac{\dot{\alpha}}{1 + f}$ da cui si ottiene $C_H = b_0 + b_1 (1 - \frac{\partial \epsilon}{\partial \alpha}) \alpha - b_1 \frac{\dot{\alpha}}{1 + f} + b_2 \delta_e + b_3 \delta_{tab} \Rightarrow C_H = C_{H0} + C_{H\alpha} \alpha + b_2 \delta_e + b_3 \delta_{tab}$ dove $C_{H0} = b_0 - b_1 \frac{\dot{\alpha}}{1 + f}$ e $C_{H\alpha} = b_1 (1 - \frac{\partial \epsilon}{\partial \alpha})$ se il velivolo è tutt'ala $\alpha_s = \alpha$; $C_{H0} = b_0$ e $C_{H\alpha} = b_1$.

STABILITÀ DEL COMANDO

In generale, a fronte di un disturbo esterno ($\Delta \alpha_s$, $\Delta \delta_e$ o $\Delta \delta_{tab}$), il momento aerodinamico di cerniera $C_H = b_0 + b_1 \alpha_s + b_2 \delta_e + b_3 \delta_{tab}$ che si genera intrinsecamente dovrà tendere ad annullare il disturbo.

a) Se $\Delta \alpha_s > 0 \Rightarrow C_H < 0$ affinché, muovendo il TE verso l'alto, la direzione di portanza nulla tenda a muoversi di un angolo negativo al fine di annullare il disturbo esterno. Pertanto per la stabilità del comando

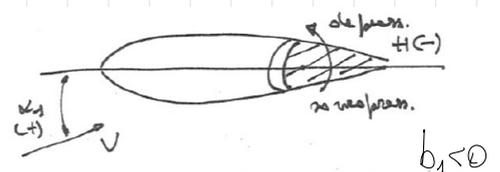
$$b_1 < 0$$

b) Se $\Delta \delta_e > 0 \Rightarrow C_H < 0$ affinché, muovendo il TE verso l'alto, tenda a ritornare verso la posizione subassiale. Pertanto per la stabilità del comando

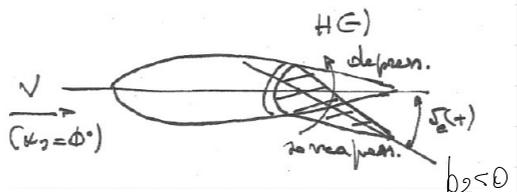
$$b_2 < 0$$

c) Se $\Delta \delta_{tab} > 0 \Rightarrow C_H < 0$ affinché, muovendo il TE verso l'alto, tenda a ritornare verso la posizione subassiale. Pertanto per la stabilità del comando

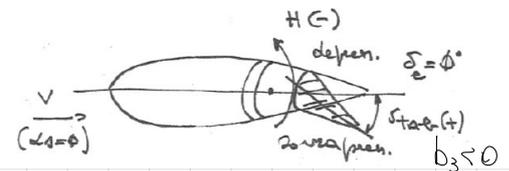
$$b_3 < 0$$



$$b_1 < 0$$



$$b_2 < 0$$



$$b_3 < 0$$

Si nota che $C_{L_t} = a_t \alpha_t = a_t \int ds - \frac{a_t \tau}{b_2} (b_0 + b_3 \delta_{tab}) \Rightarrow \alpha_t = \alpha_s \int - \frac{\tau}{b_2} (b_0 + b_3 \delta_{tab})$

PUNTO NEUTRO A COMANDI LIBERI

Si ricava dall'espressione $C_{M_d} = C_{M_d} - \frac{C_{M_0} C_{H_d}}{b_2} = a' \frac{x_a - x_N}{c}$

Nel caso di velivolo tutt'ala si ricorda che $C_{H_d} = b_1$; $C_{M_d} = a \frac{x_a - x_N}{c} = a \frac{x_a - x_a'}{c}$ essendo $x_N = x_a'$; $C_{M_0} = \frac{\partial C_{M_0 WB}}{\partial \delta_e} + C_{L_0} \frac{x_a - x_a'}{c}$

Sostituendo si ottiene $a' \frac{x_a - x_N}{c} = a \frac{x_a - x_N}{c} - \frac{b_1 C_{L_0} x_a - x_N}{b_2 a'} - \frac{b_1 \frac{\partial C_{M_0 WB}}{\partial \delta_e}}{b_2 a'} \Rightarrow \frac{x_a - x_N}{c} = \frac{x_a - x_N}{c} \frac{1}{a'} \left(a - \frac{b_1 C_{L_0}}{b_2} \right) - \frac{b_1}{b_2 a'} \frac{\partial C_{M_0 WB}}{\partial \delta_e} \Rightarrow$

$\frac{x_N'}{c} = \frac{x_N}{c} + \frac{b_1}{b_2 a'} \frac{\partial C_{M_0 WB}}{\partial \delta_e}$ Si nota che $x_N' < x_N$, cioè il punto neutro a.c.l. è anteriore (verso la prua) rispetto al punto neutro a comandi bloccati.

Nel caso di velivolo convenzionale (ala-coda) si ricorda che $\frac{x_N}{c} = \frac{x_a'}{c} + \bar{V} \frac{a_t}{a} (1 - \frac{\partial \epsilon}{\partial \alpha})$ trascurando il contributo di $C_{M_{Pd}}$ i

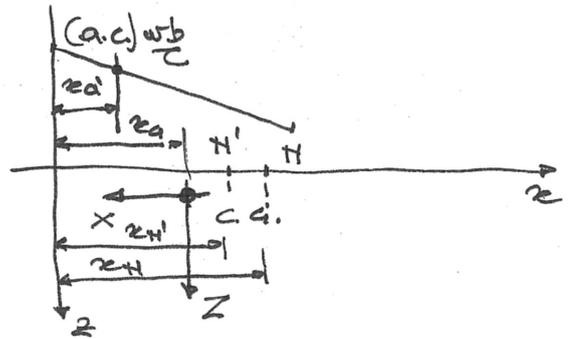
$C_{M_d} = a \frac{x_a - x_N}{c}$; $C_{H_d} = b_1 (1 - \frac{\partial \epsilon}{\partial \alpha})$; $C_{M_0} = -a_t \tau \bar{V} + C_{L_0} \frac{x_a - x_a'}{c}$; $C_{L_0} = \frac{S_t}{S} a_t \tau$. Sostituendo si ottiene $C_{M_d} = C_{M_d} - \frac{C_{H_d}}{b_2} (-a_t \tau \bar{V} + C_{L_0} \frac{x_a - x_a'}{c}) + C_{L_0} \frac{x_a - x_a'}{c} = C_{M_d} + \frac{C_{H_d}}{b_2} a_t \tau \bar{V} - \frac{C_{H_d} C_{L_0} x_a - x_a'}{b_2 a' c} = a' \frac{x_a - x_N}{c} \Rightarrow \frac{x_a - x_N}{c} = \frac{x_a - x_a'}{c} \frac{1}{a'} \left(a - \frac{C_{H_d} C_{L_0}}{b_2} \right) + \frac{a}{a' c} \frac{x_N}{c} + \frac{C_{H_d} C_{L_0} x_a' - x_N + x_N}{b_2 a' c} + \frac{C_{H_d} a_t \tau \bar{V}}{b_2 a' c} \Rightarrow \frac{x_N'}{c} = \frac{x_N}{c} - \frac{C_{H_d}}{b_2 a'} a_t \tau \left(\frac{S_t}{S} \frac{x_a' - x_N}{c} + \bar{V} \right)$ Si nota che $\frac{x_N'}{c} < \frac{x_N}{c}$, e il termine che si sottrae alla

posizione del fuoco a comandi bloccati è positivo e costante per un dato velivolo velivolo, per cui anche in questo caso il punto neutro è anteriore (verso prua) rispetto al caso a comandi bloccati.

Si osserva che:

- se $x_a < x_N \Rightarrow x_a < x_N \rightarrow$ se un velivolo è staticamente stabile a comandi liberi, lo sarà anche [e in misura maggiore] a comandi bloccati
- non vale il viceversa, per cui può essere la possibilità in cui baricentro coda tra i due fuochi per cui è velivolo è staticamente stabile a comandi bloccati ($x_a < x_N$) ma non a comandi liberi ($x_a > x_N$).

Si definisce il margine statico a comandi liberi $K_N = \frac{x_N' - x_a}{c} \cdot 100 [\%]$ e il margine statico a comandi bloccati $K_N = \frac{x_N - x_a}{c} \cdot 100 [\%]$



3.2 ALETTA CORRETRICE

Il momento di curvatura è fortemente influenzato dalle deflessioni del tab δ_{tab} .

L'aletta tab, usata come aletta correttiva / trim tab / ferro tab, ha lo scopo di annullare lo sforzo di barra; l'attuazione avviene tramite comandi del pilota tramite levette o pulsantino.

Per compensare la forza aerodinamica creata dall'escursione dell'equilibratore è necessario che la trim tab muova di un angolo δ_{eq} opposto: retarzioni positive di equilibratore implicano retarzioni negative di aletta correttiva.

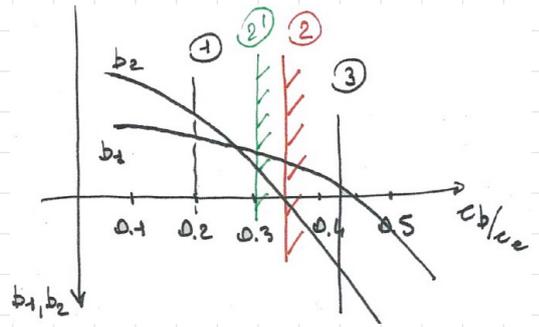
Assumendo il profilo simmetrico e $\delta_s = 0$, se il velivolo è in equilibrio e $C_{H, tab} (+) = C_{H, eq} (-)$ [cioè i due contributi di equilibratore e trim tab sono uguali e opposti tali da annullare il momento di curvatura] allora si dice che il velivolo è trimmato \rightarrow il velivolo è trimmato se, oltre alle condizioni di equilibrio, il momento di curvatura è nullo.

Le condizioni di equilibrio sono:

$$\begin{cases} C_{L, eq} = C_{L_d} \alpha_{eq} + C_{L_0} \delta_{eq} \\ -C_{M_0} = C_{M_d} \alpha_{eq} + C_{M_0} \delta_{eq} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_{eq} = \frac{C_{M_0} C_{L_0} + C_{M_0} C_{L, eq}}{\Delta} \\ \delta_{eq} = -\frac{C_{L_0} C_{M_0}}{\Delta} - \frac{C_{M_0} C_{L, eq}}{\Delta} \end{cases}$$
 dove $\Delta = C_{L_d} C_{M_0} - C_{L_0} C_{M_d} \neq f(x_a)$

Le condizioni di TRIM sono $EQ + C_H = 0$ ($\equiv P=0$ se la trasmissione è meccanica reversibile)

Ricordando che $C_H = b_0 + b_1 \alpha_5 + b_2 \delta_e + b_3 \delta_{tab}$, si può scrivere $C_H = b_0 + b_1 \alpha_5 + b_2 \delta_e - K b_3 \delta_e = b_0 + b_1 \alpha_5 + (b_2 - K b_3) \delta_e = b_0 + b_1 \alpha_5 + b_2 \left(1 - \frac{K b_3}{b_2}\right) \delta_e$. Poiché $K > 0, b_2 < 0, b_3 < 0$ e $|b_2| > |b_3|$, si può verificare che $0 < \left(1 - \frac{K b_3}{b_2}\right) < 1 \Rightarrow \left|b_2 \left(1 - \frac{K b_3}{b_2}\right)\right| < |b_2|$, pertanto $\delta_e \downarrow \Rightarrow H \downarrow$



ARRETRAMENTO DELL'ASSE DI CERNIERA

L'obiettivo è minimizzare i coefficienti del C_H purché restino negativi. Per stabilità del comando si intende il requisito secondo cui a comando libero l'equilibratore tenda alla posizione neutra, così è soddisfatto se la derivata aerodinamica b_2 è negativa.

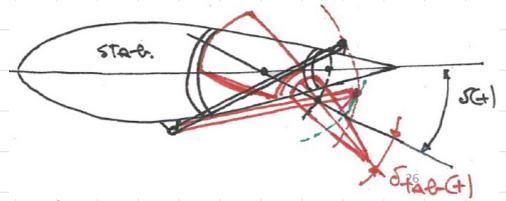
Si esaminano i diversi casi del figura:

- 1) comando stabile perché $b_2 < 0$
- 2) comando per cui $b_2 = 0$, per $c_b/c_e \approx 0,35$
- 2') $b_2 < 0$ e se comando è stabile, ma può darsi che il momento di cerniera sia grande e non riesca a compensare
- 3) $b_1 < 0$ e piccolo in valore assoluto ma $b_2 > 0$ per cui il requisito di stabilità non è soddisfatto, tuttavia il momento di cerniera può essere contrastato meglio introducendo un'ala scompensatrice.

ALETTA SCOMPENSATRICE

Al fine di minimizzare b_1 , si arretra troppo la cerniera ottenendo un comando instabile ($b_2 > 0$), come nel caso (3) appena visto.

L'ala scompensatrice monta nello stesso senso dell'equilibratore, perché la brella collega la parte ventrale dello stabilizzatore alla parte dorsale dell'ala tal.



La deflessione è $\delta_{tab} = K \delta_e$, per cui si ha $C_H = b_0 + b_1 \alpha_5 + b_2 \left(1 + \frac{K b_3}{b_2}\right) \delta_e$. Poiché $\left|\frac{K b_3}{b_2}\right| > 1 \Rightarrow |K b_3| > |b_2|$ essendo $b_3 < 0$, allora $\left|b_2 \left(1 + \frac{K b_3}{b_2}\right)\right| < |b_2|$ e $b_2 \left(1 + \frac{K b_3}{b_2}\right) < 0$ pertanto si ha la stabilità del comando.

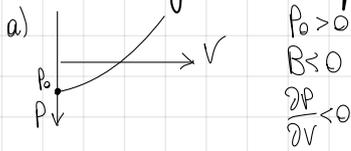
Si può controllare K affinché il termine su δ_e $b_2 \left(1 + \frac{K b_3}{b_2}\right)$ sia negativo e piccolo; inoltre se b_1 è piccolo si ottiene C_H piccolo.

Cronologia degli interventi fatti per la riduzione di H / compensazione aerodinamica in ordine orologio:

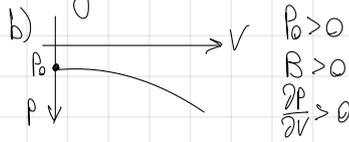
- 1) aerodinamica \rightarrow 1a) arretramento dell'asse di cerniera
 - 1 b) arretramento di superficie avanti il base di cerniera
- 2) aletta tal \rightarrow 2a) aletta compensatrice
 - 2 b) aletta scompensatrice
- 3) servo tal \rightarrow 3a) aletta servomotrice (comanda direttamente solo l'ala tal)
- 4) servocomando puro (attuatore dell'equilibratore, in aggiunta ad un dispositivo di sensibilità artificiale - "artificial feel" - per dare dei requisiti al pilota affinché siano soddisfatti i requisiti di comando).

$$P_{trim} = P_0 + B \frac{1}{2} \rho_0 V_{\infty}^2 \Big|_{trim} = 0 \Rightarrow V_{\infty, trim}^2 = -\frac{2P_0}{\rho_0 B}, \text{ se è nota } V_{\infty, trim} \text{ si può ricavare } B: B = -\frac{2P_0}{\rho_0 V_{\infty, trim}^2} = -\frac{2P_0}{\rho_0 V_{EAS, trim}^2}$$

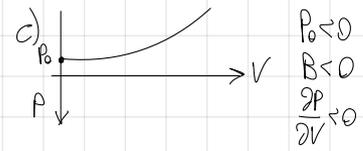
3 casi non indipendenti ai requisiti sono i seguenti:



req. (sv) OK, req. (V) NO
 velivolo trimmabile ma $P \downarrow$ se $V \uparrow$



req. (sv) NO, req. (V) OK
 $P \uparrow$ se $V \uparrow$ ma velivolo non trimmabile

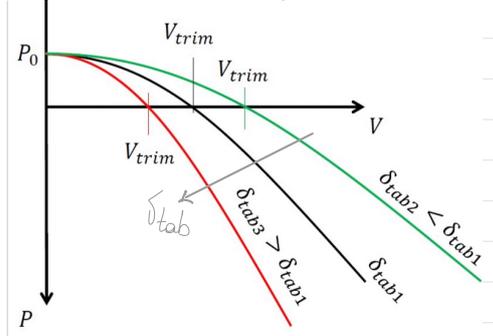
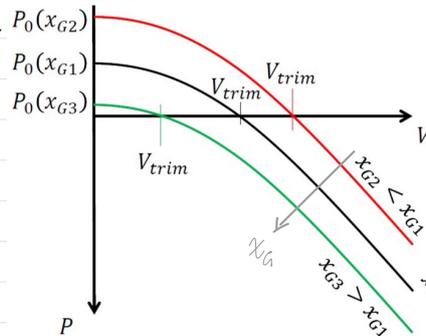


req. (sv) NO, req. (V) NO
 velivolo non trimmabile e $P \downarrow$ se $V \uparrow$

In condizioni di trim, e cioè quando req. (sv) e req. (V) sono entrambi soddisfatti ($P_0 < 0, B > 0$), si hanno i seguenti effetti.

EFFETTO DI P_0

• Per l'effetto di P_0 senza tab si può trimmare a diverse velocità spostando il baricentro [es. visto con $V_{eq}(W, x_a, i_e, eq)$]: se $x_a \uparrow$ (si sposta verso prua) $\Rightarrow V_{trim} \uparrow$
 • Per l'effetto del δ_{tab} si agisce su B per cambiare la pendenza della P : se $\delta_{tab} \uparrow \Rightarrow B \uparrow \Rightarrow V_{trim} \downarrow$, oppure quota $z \downarrow \Rightarrow \rho \uparrow \Rightarrow \delta_{tab} \downarrow \Rightarrow B \downarrow \Rightarrow V_{trim} \uparrow$, o $V \uparrow \Rightarrow i_e \uparrow \Rightarrow \delta_{tab} \downarrow \Rightarrow V_{trim} \uparrow$

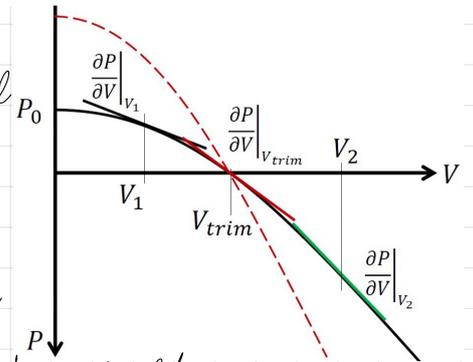


STICK FORCE GRADIENT

La stick force gradient/sensibilità del comando determina la sensibilità del pilota, ma anche la capacità di mantenere la velocità costante a fronte di disturbi esterni.

La derivata $\frac{\partial P}{\partial V}$ aumenta con la velocità: all'aumentare della velocità cambia la sensibilità del comando che diventa più "dura". In generale $\frac{\partial P}{\partial V} = B \rho_0 V_{\infty}$, se si ottiene il valore di B si ha $\frac{\partial P}{\partial V} = -\frac{2P_0}{\rho_0 V_{\infty, trim}^2} \rho_0 V_{EAS} = -\frac{2P_0}{V_{\infty, trim}^2} V_{EAS}$, nella condizione

di trim $\frac{\partial P}{\partial V} \Big|_{trim} = -\frac{2P_0}{V_{\infty, trim}^2}$. Si dovrà agire su P_0 affinché si abbia una $\frac{\partial P}{\partial V} \Big|_{trim}$ adeguata per il pilotaggio.



ATTRITO DEL COMANDO

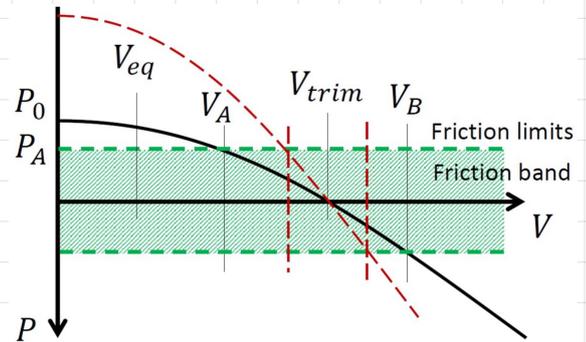
In una trasmissione di comando reale è presente per quanto possibile essere trascurabile l'attrito dato dalle funi, dalle pulegge e dagli altri componenti della trasmissione stessa. Si considera attrito costante, in quanto lo è sperimentalmente in quanto le prove vengono fatte a terra quando in condizioni statiche.

Si consideri di trimmare il velivolo alla V_{trim} ; il pilota tira a sé il volantino e si porta alla V_{eq} . Quando rilascia il volantino il velivolo si porta alla velocità di trim V_A perché lo sforzo che dovrebbe esercitare (P_A) viene esercitato dall'attrito. È importante che le forze di attrito sulla linea di comando siano inferiori a certe soglie (ad. es. $\sim \pm 1 \text{ kg}$ per velivolo non grandi) affinché la sensibilità non sia completamente mascherata.

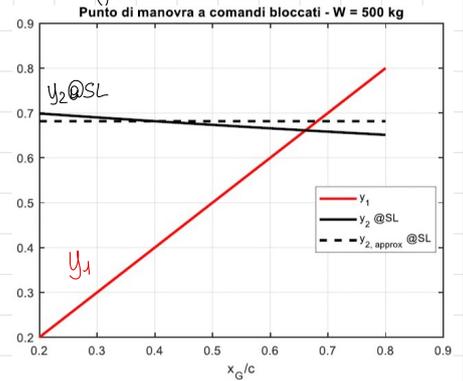
All'interno della fascia di attrito si può volare a diverse velocità di trim senza che il pilota faccia alcuno sforzo (tra V_A e V_B): insensibilità al trimmaggio.

Per ridurre l'insensibilità al trimmaggio si può:

- ridurre gli attriti
- aumentare la pendenza della curva P nelle condizioni di trim ($\frac{\partial P}{\partial V} \Big|_{trim}$), cioè aumentare P_0 .



Nelle ipotesi considerate il punto di manovra a comandi bloccati è davanti al punto neutro a comandi bloccati $x_M > x_N$.
 Affinché sia soddisfatto il requisito $(V_S) \frac{\Delta \delta_e}{m-1} < 0$ (per aumentare il fattore di carico deve ridurre l'angolo dell'equilibratore) deve verificarsi che $x_A < x_M$; se ho un velivolo stabile staticamente ($x_A < x_N$) allora è soddisfatto automaticamente anche il req. $(V_S) \frac{\Delta \delta_e}{m-1} < 0$



Il punto di manovra a comandi bloccati dipende da $C_{Lq} = 2a_1 \bar{V}' = f(x_A)$ e $C_{mq} = -2a_1 \bar{V}' \frac{b_2'}{c} = f(x_A^2)$. Come 1° approssimazione si considera $b_2' = \text{cost}$ $\Rightarrow x_M = \text{cost}$; come 2° approssimazione si ricorra iterativamente al punto di manovra a comandi bloccati.

$$\frac{\Delta \delta_e}{m-1} = - \frac{C_{Lm=1} C_{Lq} (2M - C_{Lq})}{2M \Delta} (y_1 - y_2) \quad \text{dove} \quad y_1 = \frac{x_A}{c} \quad y_2 = \frac{x_M}{c} - \frac{C_{mq}}{2M - C_{Lq}}$$

PUNTO DI MANOVRA A COMANDI LIBERI

Si può ricorrere $C_{Hq} = \frac{2b_1 b_2'}{c}$. Considerando la condizione in equilibrio e quella in manovra si può scrivere

$$\Delta C_H = C_{Hx} \Delta x + C_{Hq} \hat{q} + b_2 \Delta \delta_e, \quad \text{ricordando che } \frac{\Delta x}{m-1} = \frac{1}{C_{Lq}} (C_{Lm=1} - C_{Lq} \frac{C_{Lm=1}}{2M} - C_{Lq} \frac{\Delta \delta_e}{m-1}) \quad \text{e } \hat{q} = \frac{(m-1) C_{Lm=1}}{2M}, \quad \text{si ottiene la seguente}$$

$$\text{relazione } \frac{\Delta C_H}{m-1} = \frac{C_{Lm=1}}{2M C_{Lq}} [(2M - C_{Lq}) C_{Hx} + C_{Hq} C_{Lq}] + \frac{\Delta \delta_e}{m-1} (b_2 - \frac{C_{Lq} C_{Hx}}{C_{Lq}}) \quad \text{dove } b_2 - \frac{C_{Lq} C_{Hx}}{C_{Lq}} = \frac{b_2 a'}{a} \quad \text{per cui si ricorra}$$

$$\frac{\Delta C_H}{m-1} = \frac{C_{Lm=1}}{2M C_{Lq}} [(2M - C_{Lq}) C_{Hx} + C_{Hq} C_{Lq}] + \frac{\Delta \delta_e}{m-1} \frac{b_2 a'}{a}. \quad \text{Ricordando che } \frac{\Delta \delta_e}{m-1} = - \frac{C_{Lm=1} C_{Lq} (2M - C_{Lq})}{2M \Delta} \frac{x_A - x_M}{c} \quad \text{si ricorra}$$

$$\frac{\Delta C_H}{m-1} = - \frac{C_{Lm=1} b_2 a'}{2M \Delta} (2M - C_{Lq}) \left[\frac{x_A}{c} - \frac{x_M (x_A)}{c} - \frac{\Delta}{b_2 a'} \left(\frac{C_{Hx}}{C_{Lq}} + \frac{C_{Hq}}{2M - C_{Lq}} \right) \right] = - \frac{C_{Lm=1} b_2 a'}{2M \Delta} (2M - C_{Lq}) \frac{x_A - x_M'}{c} \quad \text{da cui si ottiene il}$$

$$\text{punto di manovra a comandi liberi } \frac{x_M'}{c} = \frac{x_M}{c} + \frac{\Delta}{b_2 a'} \left(\frac{C_{Hx}}{C_{Lq}} + \frac{C_{Hq}}{2M - C_{Lq}} \right) \quad \frac{x_M'}{c} = f(x_M) = f(z)$$

$$\text{Si definisce il margine di manovra a comandi liberi } K_{M'} = \frac{x_M'}{c} - \frac{x_A}{c}$$

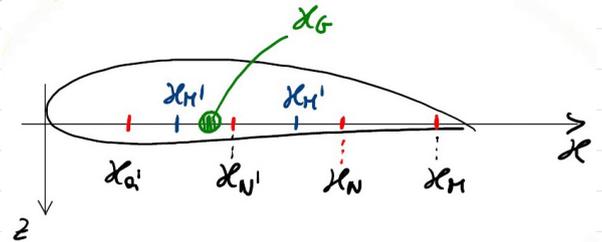
$$\text{Ricordando che } P = -C_H = -C_H \frac{1}{2} \rho_0 V_0^2 S e c_e \quad \text{allora } \frac{\Delta P}{m-1} = Q = -C_H \frac{1}{2} \rho_0 V_0^2 S e c_e \frac{\Delta C_H}{m-1} = C_H \frac{b_2 a'}{2M \Delta} (2M - C_{Lq}) \frac{x_A - x_M'}{c} (C_{Lm=1} \frac{1}{2} \rho_0 V_0^2) S e c_e,$$

$$\text{per definizione } (C_{Lm=1} \frac{1}{2} \rho_0 V_0^2) = \frac{W}{S} \quad \text{per cui si ottiene } \frac{\Delta P}{m-1} = Q = C_H \frac{W}{S} \frac{b_2 a'}{2M \Delta} (2M - C_{Lq}) \frac{x_A - x_M'}{c} S e c_e$$

Si osserva da: $Q < 0$ se $x_A < x_M'$; la stick force per g non dipende dalla velocità; i valori tipici di $\frac{\Delta P}{m-1}$ sono dell'ordine unitario (1 kg per g) per velivoli acrobatici, più elevato (ad. es. 4 kg per g) per velivoli da trasporto.

Occorre smettere fra le seguenti osservazioni:

- $\frac{\Delta P}{m-1} = Q$ aumenta linearmente con $x_A - x_M'$
- Q aumenta linearmente con il carico alare: maggiore è il carico alare, più "pesante" risulterà il comando di manovra
- Q è proporzionale ad un volume $S e c_e$
- Ma la velocità o il C_L compaiono esplicitamente nell'espressione di Q. Infatti, escludendo l'effetto dei numeri di Reynolds e Mach, la velocità non influenza Q
- Q è una funzione della quota mediante il parametro $M = \frac{V}{a} \approx 0.425 \rho_0 (z \uparrow \Rightarrow M \uparrow \Rightarrow Q \uparrow)$
- Se $x_M < x_A < x_M'$ allora non si ha l'inversione del movimento di controllo per g, ma solo del Q
- L'analisi proposta vale per condizioni stazionarie sotto fattore di carico n, non durante la transizione: non importa quale sia la posizione del baricentro, per eseguire una manovra (da condizioni di equilibrio a $m=1$) si avvia sempre movimento e forza di controllo nella direzione normale (indietro per una richiesta), sebbene una o entrambe potranno cambiare segno quando si raggiungono condizioni stazionarie a $m \neq 1$.



Analogamente a quanto visto per i comandi bloccati, il punto di manovra a comandi liberi si ricava iterativamente

$$\text{da } \frac{\Delta C_H}{m-1} = - \frac{C_{Lm=1} b_2 a'}{2M \Delta} (2M - C_{Lq}) (y_1 - y_2) \quad \text{dove } y_1 = \frac{x_A}{c} \quad \text{e } y_2 = \frac{x_M}{c} + \frac{\Delta}{b_2 a'} \left(\frac{C_{Hx}}{C_{Lq}} + \frac{C_{Hq}}{2M - C_{Lq}} \right) \quad (17)$$

5

S.R. E CINEMATICA

5.1

SISTEMI DI RIFERIMENTO

Lo studio della dinamica si basa sulla risoluzione di equazioni differenziali che, essendo ricavate dalle equazioni cardinali della dinamica ed essendo in forma vettoriale, hanno una validità generale e quindi indipendente dal sistema di riferimento scelto per le rappresentazioni.

RIFERIMENTO INERZIALE (ECI & ECEF)

Il riferimento cosiddetto inerziale è il riferimento di cui si postula semplicemente o esplicitamente l'esistenza nella formulazione di qualche problema di dinamica; una teoria di riferimento si definisce inerziale se essa non accelera rispetto alle stelle fisse.

Il sistema Earth Centred Inertial (ECI) F_{ECI} ha:

- centro: centro della terra
- piano XY: nel piano dell'equatore
- asse Z: verso nord
- asse X: verso un corpo celeste/stella fissa

Risulta quindi centrato nel centro della terra e con gli assi rivolti verso le stelle fisse.

Il sistema Earth-Earth-Fixed Frame (ECEF) F_{ECEF} :

- centro: centro della terra
- piano XY: nel piano dell'equatore
- asse Z: verso nord
- asse X: verso il punto con latitudine e longitudine nulle

Risulta quindi centrato nel centro della terra e ruota solidale ad essa con periodo pari alla rotazione terrestre ($360^\circ/24 = \sim 0,004^\circ/s$)

Il sistema ECI, pur non ruotando con la terra, non è inerziale perché: ruota intorno al Sole con un periodo di 365 gg, è animato da nutazione [periodo di ~ 18 anni], è animato da precessione [periodo di ~ 26.000 anni], il sistema solare è animato dal moto della galassia, la galassia è animata dal moto nello spazio. Sia ECI che ECEF possono considerarsi inerziali in relazione alle scopi dell'analisi: per tempo e distanze brevi [no spacecraft].

Nel considerare la terra che non ruota si commette un errore nella stima delle forze d'inerzia. Per avere un'idea si pensi a SL, per un veicolo di 16.000 lb che si muove nell'equatore verso est alla velocità di 220 km/h, si stanno trascurando delle forze apparenti di circa il 0,3% della massa complessiva. Maggiore è la quota e la velocità, maggiore è l'errore commesso.

Nella geodesia moderna si approssima la forma della terra con un geoide di riferimento, definito come il luogo dei punti cui corrisponde un livello di energia potenziale gravitazionale costante (nulla per convenzione). Questo viene modellato con un ellissoide (WGS84), mentre ellipsoidi locali servono per definire meglio la verticale locale [o piano orizzontale].

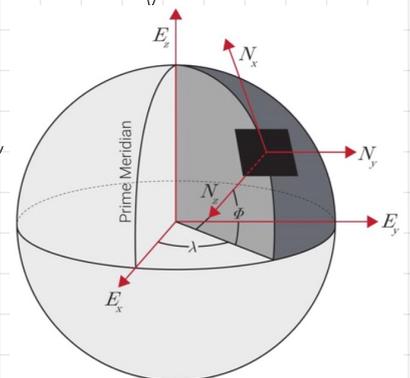
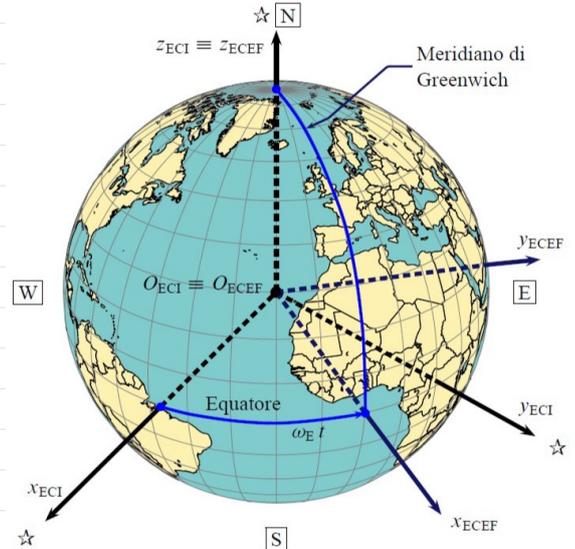
Il raggio terrestre nel piano equatoriale (detto datum) è ~ 6.378 km.

RIFERIMENTO TANGENTE (NED)

Un sistema di riferimento tangente è un riferimento solidale alla terra avente origine in un punto della superficie terrestre. Nel caso di modelli sferici terrestri, il raggio medio è $R_E \approx 6.378$ km.

Per convenzione il sistema North-East-Down F_{NED} ha:

- centro: punto della superficie terrestre
- piano XY: tangente alla superficie (ellissoide globale, locale o la sfera)
- asse X: verso nord
- asse Y: verso est
- asse Z: verso il centro della terra



Un altro sistema corpo rotante è il sistema di assi principali d'inerzia F_p che è tale che i prodotti d'inerzia (J_{xy}, J_{yz}, J_{yz}) siano nulli.

52 ANGOLI DI EULERO ED EQUAZIONI CINEMATICHE

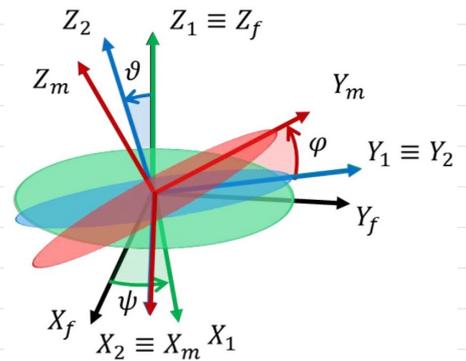
ORIENTAMENTO DEL VEICOLO

Si consideri una terna fissa F_f (ad es. inerziale ONEN) e una terna mobile F_m (ad es. assi corpo).

Gli **angoli di Eulero** rappresentano una terna ordinata di rotazioni (non sono le componenti di un vettore!) che un sistema di riferimento generico con origine coincidente con il sistema mobile è orientato secondo F_f dove compiere per trovarsi sovrapposto a quello mobile F_m .

Se riferiti al veicolo, si definiscono angoli di Eulero del veicolo abitualmente con una sequenza 3-2-1:

- 3) angolo di azimuth o rotta (**heading**) ψ , intorno a Z_f (da F_f a F_1)
- 2) angolo di elevazione (**elevation**) ϑ , intorno a Y_1 (da F_1 a F_2)
- 1) angolo di inclinazione laterale (**bank**) ϕ , intorno a X_m (da F_2 a F_m)



Si noti che esiste una differenza sostanziale tra gli angoli di Eulero e angoli di imbardata (**yaw**), beccheggio (**pitch**) e rollio (**roll**). Ad esempio l'angolo di azimuth (**heading**) rappresenta una rotazione intorno all'asse Z_f , mentre l'angolo di imbardata (**yaw**) è una rotazione istantanea intorno all'asse Z_m . Inoltre gli angoli di Eulero, essendo eseguiti su terna distinte, definiscono delle velocità angolari che non sono tra loro perpendicolari, mentre yaw, pitch e roll lo sono perché misurati su assi corpo. Questi ultimi si possono immaginare come rotazioni finite intorno agli assi corpo: $\text{yaw} = \gamma \Delta t$; $\text{pitch} = \vartheta \Delta t$; $\text{roll} = \rho \Delta t$.

La ciascuna terna di angoli di Eulero corrisponde un unico orientamento degli assi corpo. La terna non dipende dalla stessa progressione (come il veicolo sia giunto ad un certo orientamento) ma solo dall'istante considerato.

MATRICE DI ROTAZIONE

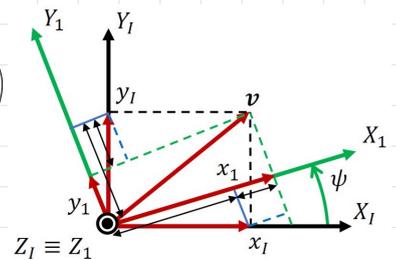
Si consideri la prima rotazione intorno all'asse Z_f dell'angolo ψ (positivo) da F_f (F_I) a F_1 . Le coordinate sono $\begin{cases} x_1 = x_I \cos \psi + y_I \sin \psi \\ y_1 = y_I \cos \psi - x_I \sin \psi \\ z_1 = z_I \end{cases}$ che in forma matriciale diventa

$$\begin{cases} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{cases} = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{cases} x_I \\ y_I \\ z_I \end{cases} \Rightarrow \underline{x}_1 = R(3, \psi) \underline{x}_I$$

La rotazione 3-2-1, che allinea F_f a F_m ($F_I \rightarrow F_B$) avviene per successive rotazioni:

$$\begin{cases} F_I \xrightarrow{3} F_1 : \underline{x}_1 = R(3, \psi) \underline{x}_I \\ F_1 \xrightarrow{2} F_2 : \underline{x}_2 = R(2, \vartheta) \underline{x}_1 \\ F_2 \xrightarrow{1} F_B : \underline{x}_B = R(1, \phi) \underline{x}_2 \end{cases} \Rightarrow \underline{x}_B = R(1, \phi) R(2, \vartheta) R(3, \psi) \underline{x}_I \Rightarrow \underline{x}_B = \underline{B}_{E2B} \underline{x}_I$$

$$\underline{R}_{I \rightarrow B} = \underline{B}_B$$



La matrice Earth-to-Body è $\underline{B}_B = \underline{B}_{E2B} = R(1, \phi) R(2, \vartheta) R(3, \psi)$

Il processo inverso ($F_B \rightarrow F_I$) sarà data dalla sequenza 1-2-3 delle rotazioni in senso inverso: $\underline{x}_I = R(3, -\psi) R(2, -\vartheta) R(1, -\phi) \underline{x}_B$
 $\Rightarrow \underline{x}_I = \underline{B}_{B2E} \underline{x}_B$. La matrice Body-to-Earth è $\underline{B}_{B2E} = R(3, \psi) R(2, \vartheta) R(1, \phi) = R^T(3, \psi) R^T(2, \vartheta) R^T(1, \phi) = \underline{B}_B^{-1} = \underline{B}_{E2B}^T$

Le matrici \underline{B}_{E2B} e \underline{B}_{B2E} si definiscono matrici dei coseni direttori (direction cosine matrix, DCM). Nel caso di più rotazioni (o trasformazioni) si possono utilizzare le DCM in modo sequenziale (o cascata).

Una generica DCM $R(k, \alpha)$ - dove k è l'asse attorno cui avviene la rotazione e α è l'angolo di rotazione - è così definita:

- elemento k -esimo della diagonale = 1
- altri elementi della diagonale = $\cos \alpha$
- altri elementi della k -esima riga e k -esima colonna = 0
- altri elementi della riga prima della k -esima = $-\sin \alpha$
- altri elementi della riga dopo la k -esima = $\sin \alpha$

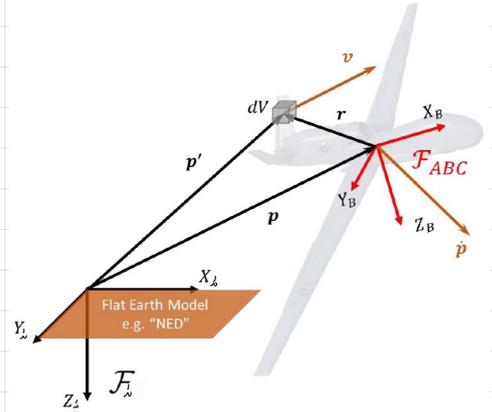
6 EQUAZIONI CARDINALI DELLA DINAMICA

6.1 EQUAZIONI VETTORIALI DEL MOTO

POSIZIONE DEL VEICOLO

SS definiscono le seguenti grandezze:

- vettore posizione del baricentro $p = [N, E, D]^T = [X_E, Y_E, Z_E]^T$
- vettore velocità del baricentro $\dot{p} = [\dot{N}, \dot{E}, \dot{D}]^T$
- matrice di rotazione da NED a ABC: \underline{B}_B (o \underline{B}_{E2B})
- vettore velocità di ABC rispetto a NED $\underline{v}_B = [u, v, w]^T$
- velocità angolare di ABC rispetto a NED $\underline{\omega}_B = [p, q, r]^T$
- risultante delle forze esterne in ass. corpo $\underline{F}_B = [f_x, f_y, f_z]^T$
- risultante dei momenti esterni in ass. corpo $\underline{M}_B = [L, M, N]^T$
- distanza di un elemento infinitesimo di massa dm (o del volume elementare dV) dal baricentro r
- vettore posizione di un elemento infinitesimo di massa del veicolo $p' = p + r$
- vettore velocità di un elemento infinitesimo di massa del veicolo \dot{p}'



Ricordando le DEM si può affermare che $\underline{v}_B = \underline{B}_B \dot{p} \Rightarrow \dot{p} = \underline{B}_B^T \underline{v}_B$, cioè la velocità inerziale \dot{p} (entità fissa) si può esprimere in un ass. corpo \underline{v}_B .

EQUAZIONI DI NAVIGAZIONE

Ricordando le relazioni cinematiche e le trasformazioni mediante gli angoli di Euler, si può scrivere: $\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{Bmatrix}_{NED} = \underline{B} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{Bmatrix}_{ABC} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{Bmatrix}_{NED} = \underline{B}_B^T \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}$

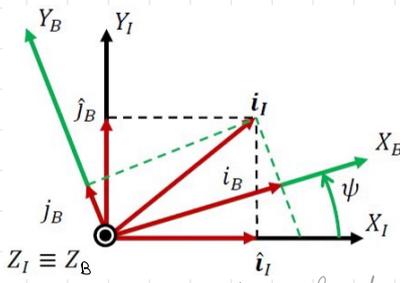
Per le componenti della velocità $\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{Bmatrix}_{NED} = \dot{p} = \underline{B}_B^T \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}$

Pertanto, a bordo (nel sistema di riferimento corpo) si misura la velocità esprimendola in ass. NED, e integrando si ottiene la posizione in ass. NED p . Manterrebbe l'effetto del vento che viene introdotto successivamente.

EQUAZIONI DELLA DINAMICA

Le equazioni del moto (equazioni cardinali della dinamica) sono derivate dalla 2^a legge di Newton:

$$\underline{F}_B = \frac{d}{dt}(\underline{Q}) = \frac{d}{dt}(m \underline{v}) = \underline{F}_{ext}; \quad \underline{M}_B = \frac{d}{dt}(\underline{K}) = \underline{M}_{ext} \quad \text{dove } \underline{Q}: \text{q.tà di moto, } \underline{K}: \text{momento della q.tà di moto}$$



Considerando due terne di riferimento F_I e F_B che siano coincidenti nell'istante di tempo iniziale t_0 . Considerando che laterna F_B sia animata da una velocità angolare $\underline{\omega}_B = [0, 0, \dot{\psi}]^T$; dopo un tempo Δt sarà descritto un angolo $\psi(t) = \dot{\psi} \Delta t$, pertanto si può ricavare i_B in funzione di i_I e j_I [per semplicità nel caso 2D]

$$\begin{aligned} i_B &= \cos \psi i_I + \sin \psi j_I \\ j_B &= -\sin \psi i_I + \cos \psi j_I \end{aligned} \Rightarrow \begin{Bmatrix} i_B \\ j_B \end{Bmatrix} = R(\psi) \begin{Bmatrix} i_I \\ j_I \end{Bmatrix}$$

SS valutiamo le derivate nel tempo dei versori in F_B :

$$\begin{aligned} \frac{d i_B}{dt} &= -\dot{\psi} \sin \psi i_I + \cos \psi \frac{d i_I}{dt} + \dot{\psi} \cos \psi j_I + \sin \psi \frac{d j_I}{dt} = \dot{\psi} (-\sin \psi i_I + \cos \psi j_I) = \dot{\psi} j_B \\ \frac{d j_B}{dt} &= -\dot{\psi} \cos \psi i_I - \dot{\psi} \sin \psi j_I = -\dot{\psi} (\cos \psi i_I + \sin \psi j_I) = -\dot{\psi} i_B \end{aligned}$$

Utilizzando la rotazione del prodotto vettoriale e generalizzando al caso 3D si può scrivere la formula di **BIBSON**:

$$\frac{d i_B}{dt} = \underline{\omega} \wedge i_B = \begin{vmatrix} i_B & j_B & k_B \\ 0 & 0 & \dot{\psi} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\dot{\psi} i_B + \dot{\psi} j_B + 0 k_B$$

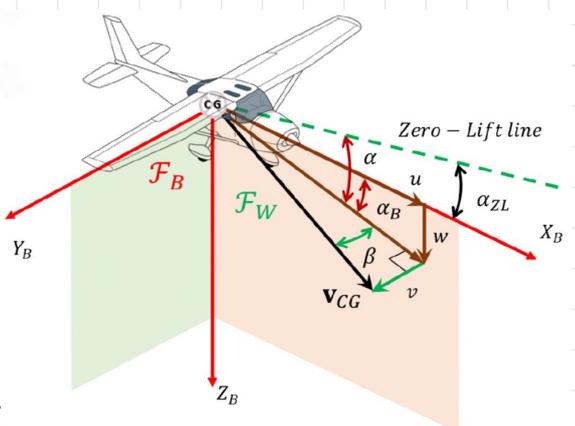
Un generico vettore (entità fissa) è rappresentabile in un qualsiasi sistema di riferimento: $p = \dot{N} i_I + \dot{E} j_I + \dot{D} k_I = u i_B + v j_B + w k_B$. La sua derivata temporale nel F_I è $\dot{p} = \underline{a}_i = \dot{N} i_I + \dot{E} j_I + \dot{D} k_I$, ma nel sistema mobile (23)

6.2 EQUAZIONI LINEARIZZATE DEL MOTO

TEORIA DEI PICCOLI DISTURBI

Spesso le equazioni della dinamica sono linearizzate per analisi di stabilità e controllo nell'intorno di una condizione di equilibrio [si dovrà ripetere l'analisi al variare del regime di moto]. Si assume che il moto del velivolo consista in piccole deviazioni da una condizione di volo di riferimento di equilibrio; ipotesi fondamentale: le perturbazioni sono piccole così da poter trascurare i termini di ordine superiore a 1. Nota bene: il valore di riferimento/equilibrio sono indicati con \cdot_0 o \cdot_{eq} , le perturbazioni con $\Delta \cdot$.

Questo approccio è di grande utilità perché fornisce risultati affidabili sia per lo studio della stabilità che per lo studio della risposta del velivolo (a comandi del pilota o disturbi esterni). Il limite della teoria è che bisogna tener presenti che l'addeve non verificano spostamenti significativi rispetto alla condizione di riferimento, la riduzione perde di affidabilità. Anche disturbi significativi (ad es. una raffica) non è detto che conducano a variazioni significative delle variabili coinvolte (ad es. delle velocità angolari). Il grande vantaggio è la linearizzazione del set di equazioni differenziali non lineari e delle forze e momenti aerodinamici.



CONDIZIONE INIZIALE E EQUILIBRIO

Lo studio della risposta dinamica del velivolo si considera a partire da una definita condizione di equilibrio iniziale (moto rettilineo uniforme). Per questo ragionamento le condizioni iniziali generiche che si considerano sono:

- i) $M_{eq} = V_{\infty} \cos \beta \cos \alpha_B \approx V_{\infty}$
- ii) $N_{eq} = V_{\infty} \sin \beta \approx 0$
- iii) $W_{eq} = V_{\infty} \cos \beta \sin \alpha_B \approx 0$
- iv) $p_{eq}, q_{eq}, r_{eq} = 0$

Se come sistema di riferimento body viene scelto quello degli assi di stabilità allora si avrà $M_{eq} = V_{\infty}$ e $N_{eq}, W_{eq} = 0$

Bisogna prestare attenzione alla definizione di angolo di attacco α_B e a quello aerodinamico α rispetto alla direzione di portanza nulla (velivolo o wing-body): si deve considerare la relazione $\alpha = \alpha_B - \alpha_{ZL}$ ad es. per valutare la portanza, dove α_{ZL} è nullo e negativo se il profilo è convenzionale.

CONDIZIONE DINAMICA

Adottando la teoria dei piccoli disturbi, si possono scrivere:

- $\cdot = \cdot_0 + \Delta \cdot \Rightarrow \dot{\cdot} = \Delta \dot{\cdot}$
- $u = u_0 + \Delta u \Rightarrow \dot{u} = \Delta \dot{u}$
- $v = v_0 + \Delta v \Rightarrow \dot{v} = \Delta \dot{v}$
- $w = w_0 + \Delta w \Rightarrow \dot{w} = \Delta \dot{w}$
- $p = p_0 + \Delta p = \Delta p$
- $q = q_0 + \Delta q = \Delta q$
- $r = r_0 + \Delta r = \Delta r$

Considerando di risolvere le equazioni in assi di stabilità si avrà $w_0 = 0 \Rightarrow w = \Delta w$

Considerando di risolvere le equazioni in assi vento (che non sono assi corpo) si avrà $M = V_{\infty}$ e $N, W, \Delta W = 0$

La velocità angolare della terna F_W intorno all'asse X_W è $q_W = \dot{\gamma}$ perché rappresenta la velocità angolare del vettore velocità rispetto ad un riferimento (ad es. all'orizzonte locale), mentre la velocità della terna F_B intorno all'asse X_B è sempre $q = \dot{\theta}$.

$$\begin{cases} \dot{x} = m(\dot{u} + qw - Yv) \\ \dot{y} = m(\dot{v} + Yv - pw) \\ \dot{z} = m(\dot{w} + pw - qv) \\ L = \dot{p}J_x - \dot{r}J_{xy} + q(rJ_z - J_{yz}) - p(qJ_{xz} - J_{xy}) \\ M = q(J_y - p(rJ_x - J_z)) - (Y^2 - p^2)J_{xz} \\ N = \dot{r}J_z - \dot{p}J_x + p(qJ_y - J_x) + q(rJ_{xz}) \end{cases}$$

Il sistema di sei equazioni differenziali (equazioni cardinali della dinamica) governa la dinamica (moto vario) del velivolo asimmetrico. Esso non è sufficiente a determinare la dinamica perché la posizione e l'orientamento nello spazio degli assi corpo è sconosciuto. In fatti le sconosciute cinematiche e di navigazione compaiono semplicemente $x_c = [N, E, D, \phi, \theta, \psi]^T$, mentre compaiono esplicitamente le sconosciute dinamiche $x_d = [M, N, W, p, q, r]^T$.

7. DINAMICA LONGITUDINALE

La trattazione che segue viene effettuata in **ass vento**.

Il sistema della dinamica longitudinale in **ass body** è

$$\begin{cases} \Delta F_x = m(\dot{v} + q_w w_{eq}) \\ \Delta F_z = m(\dot{w} - q_w v_{eq}) \\ M = \dot{q} J_y \end{cases}$$

Si vuole risolverlo in **ass vento** in quanto $Y_w \equiv Y_B \Rightarrow J_y = \text{cost}$,

$w = V, w = 0, q_w = \dot{\gamma}$, si ha che

$$F = m \frac{d}{dt} V_{CG} = m \frac{d}{dt} (V \hat{i}_w + 0 \hat{j}_w + 0 \hat{k}_w) = m(\dot{v} \hat{i}_w + w_w \wedge V_w)$$

dove $V_w = [V, 0, 0]^T$ e $w_w = [0, \dot{\gamma}, 0]^T$ da cui $F_x = m(\dot{v})$ e $F_z = m(-\dot{\gamma} V_{eq})$

$$M = \frac{d}{dt} K = \frac{d}{dt} (K_x \hat{i}_B + K_y \hat{j}_B + K_z \hat{k}_B) = \dot{K} + w_B \wedge K \text{ dove } w_B = [0, q, 0]^T \text{ da cui } M = J_y \dot{q} = J_y \ddot{\gamma} \text{ pertanto il sistema è}$$

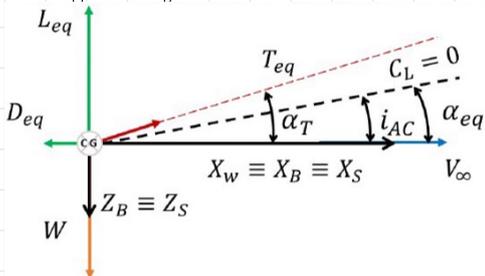
$$\begin{cases} \Delta F_x = m \dot{v} \\ \Delta F_z = m(-\dot{\gamma} V_{eq}) = m(-\dot{\gamma} V_{eq}) \\ M = \dot{q} J_y \end{cases}$$

Ricordando che $\ddot{\gamma} = \dot{\gamma}' - \dot{\alpha}$ si ha

$$\begin{cases} \Delta F_x = m \dot{v} \\ \Delta F_z = -m V_{eq} (\dot{\gamma}' - \dot{\alpha}) = -m V_{eq} \dot{q} + m V_{eq} \dot{\alpha} \\ M = \dot{q} J_y = \dot{\gamma}' J_y = (\dot{\gamma}' - \dot{\alpha}) J_y \end{cases}$$

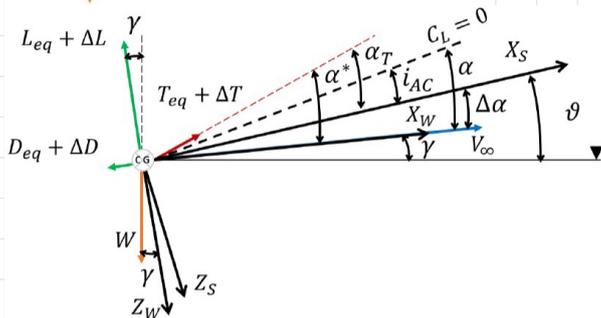
per poter risolvere il sistema di equazioni differenziali nelle variabili fondamentali v, α e γ occorre esplicitare forze e momenti in funzioni delle suddette variabili, per attuare

in ciò si ricorre all'espansione di Taylor trascurando i termini del 2° ordine in quanto viene adottata la teoria delle piccole perturbazioni.



Nella condizione iniziale (equilibrio, orizzontale), dove $\gamma, \gamma = 0^\circ$, si ha

$$\begin{cases} F_{x,eq} = T_{eq} \cos \alpha_T - D_{eq} = 0 \\ F_{z,eq} = -T_{eq} \sin \alpha_T - L_{eq} + W_{eq} = 0 \\ M = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_{T,eq} \cos \alpha_T - C_{D,eq} = 0 \\ -C_{T,eq} \sin \alpha_T - C_{L,eq} + C_{W,eq} = 0 \\ C_M = 0 \end{cases}$$



Nella condizione generica (perturbata), dove $\gamma, \gamma \neq 0^\circ$, si ha

$$\begin{cases} V = V_{eq} + \Delta V \\ T = T_{eq} + \Delta T \\ D = D_{eq} + \Delta D \\ \alpha = \alpha_{eq} + \Delta \alpha = i_{AC} + \Delta \alpha \\ \alpha^* = \alpha_T + \Delta \alpha \end{cases} \text{ dove } \Delta \alpha = \gamma - \gamma$$

pertanto il sistema della dinamica longitudinale in **ass vento**

$$\text{diventa } \begin{cases} F_x = (T_{eq} + \Delta T) \cos(\alpha_T + \Delta \alpha) - D_{eq} - \Delta D - W \sin \gamma = m \dot{v} \\ F_z = -(T_{eq} + \Delta T) \sin(\alpha_T + \Delta \alpha) - L_{eq} - \Delta L + W \cos \gamma = -m V_{eq} \dot{q} + m V_{eq} \dot{\alpha} \\ M = M_v \Delta V + M_\alpha \Delta \alpha + M_q \dot{q} + M_{\dot{\alpha}} \dot{\alpha} = \dot{q} J_y \end{cases}$$

$$\Delta F_x = F_x - F_{x,eq} = (T_{eq} + \Delta T) \cos(\alpha_T + \Delta \alpha) - D_{eq} - \Delta D - W \sin \gamma - T_{eq} \cos \alpha_T + D_{eq} = m \dot{v}$$

$$\Delta F_z = F_z - F_{z,eq} = -(T_{eq} + \Delta T) \sin(\alpha_T + \Delta \alpha) - L_{eq} - \Delta L + W \cos \gamma + T_{eq} \sin \alpha_T - L_{eq} - W = -m V_{eq} \dot{q} + m V_{eq} \dot{\alpha}$$

$$\Delta M = M - M_{eq} = M_v \Delta V + M_\alpha \Delta \alpha + M_q \dot{q} + M_{\dot{\alpha}} \dot{\alpha} = \dot{q} J_y$$

$$\Delta F_x = -T_{eq} \sin(\alpha_T) \Delta \alpha + \Delta T \cos(\alpha_T) - \Delta D - W(\gamma - \Delta \alpha) = m \dot{v}$$

$$\Delta F_z = -T_{eq} \cos(\alpha_T) \Delta \alpha - \Delta T \sin(\alpha_T) - \Delta L = -m V_{eq} \dot{q} + m V_{eq} \dot{\alpha}$$

$$\Delta M = M_v \Delta V + M_\alpha \Delta \alpha + M_q \dot{q} + M_{\dot{\alpha}} \dot{\alpha} = \dot{q} J_y$$

$$q = \dot{\gamma}$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{v} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{q} \end{Bmatrix} = \underline{\underline{A}} \underline{\underline{x}} \text{ dove } \underline{\underline{x}} = \{v, \alpha, q, \gamma\}^T \text{ è il vettore di stato, le sue componenti sono le variabili di stato}$$

$\underline{\underline{A}}$ è la matrice di sistema

Inoltre il sistema di equazioni differenziali linearizzato per la dinamica longitudinale in **ass vento** si può (27)