



centroappunti.it

CORSO LUIGI EINAUDI, 55/B - TORINO

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 2571A

ANNO: 2024

A P P U N T I

STUDENTE: Scaringi Nicolò

MATERIA: Guida e Controllo del Velivolo + Esercitazioni - Prof. Battipede

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTI E NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.



**Politecnico
di Torino**

GUIDA E CONTROLLO DEL VELIVOLO

Prof. ssa Manuela Battipede

2° anno

Nicolò Scaringi

INDICE

1.	RISPOSTA DEL VELIVOLO IN CAMPO LINEARE	1
1.1	Sistema non forzato	1
1.2	Sistema forzato (risposta a gradino)	4
1.3	Trasformata di Laplace	5
1.4	Risposta in frequenza	7
2.	PROGETTO DI UN SISTEMA DI CONTROLLO LINEARE	11
2.1	Sistemi di controllo automatici	11
2.2	Flying/handling qualities	12
2.3	Metodi del Root locus e del diagramma di Bode	16
2.4	Compensazione dinamica	28
2.5	Stability Augmentation System (SAS)	33
2.6	Control Augmentation System (CAS)	35
2.7	Autopilot	36
3.	ESERCITAZIONI	38
3.1	Eserc. dinamica longitudinale	38
3.2	Eserc. dinamica latero-direzionale	40
3.3	Eserc. risposta a gradino	41
3.4	Eserc. pitch damper SAS	43
3.5	Eserc. roll-yaw damper SAS	44
3.6	Eserc. pitch rate CAS	45
3.7	Eserc. ARI CAS	46

1. RISPOSTA DEL VELIVOLO IN CAMPO LINEARE

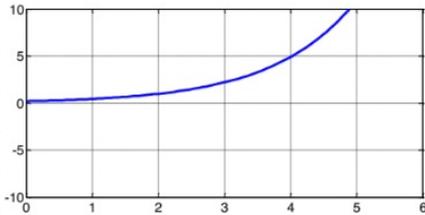
1.1 SISTEMA NON FORZATO

SISTEMA DINAMICO LTI DEL 1° ORDINE - RISPOSTA LIBERA

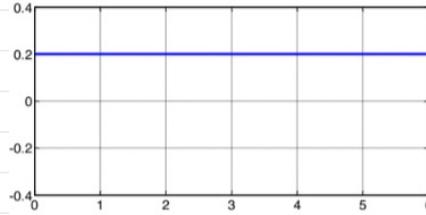
[LTI: Linear Time Invariant]

Se sistema è costituito da un'equazione di stato/del moto $\dot{x} = ax$ e dalla condizione iniziale (C.I.) $x(t=0) = x_0$ dove a è un coefficiente indipendente dal tempo l'omogenea associata è $x = \beta_x e^{\lambda t} \Rightarrow \dot{x} = \lambda \beta_x e^{\lambda t}$, che sostituita nell'eq del moto dà $\lambda \beta_x e^{\lambda t} = a \beta_x e^{\lambda t} \Rightarrow \lambda = a$, sostituita nella C.I. da $x(t=0) = x_0 = \beta_x e^{0t} \Rightarrow \beta_x = x_0$, per cui la soluzione è $x = x_0 e^{at}$. In base ad a la risposta è:

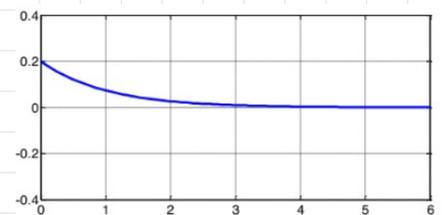
- se $a > 0$: $t \rightarrow \infty \Rightarrow x \rightarrow \infty$
- se $a = 0$: $x = x_0 \forall t$
- se $a < 0$: $t \rightarrow \infty \Rightarrow x \rightarrow 0$



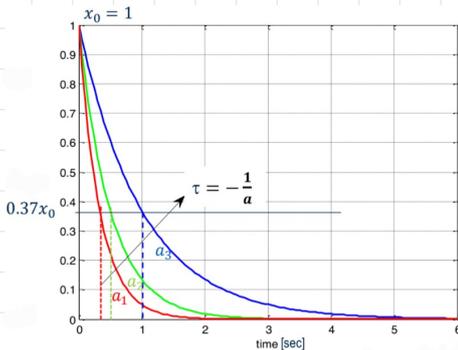
non oscillatoria - instabile



non oscillatoria - neutra

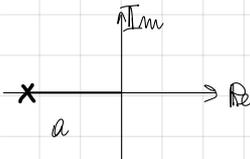


non oscillatoria - stabile



Il caso di interesse è quello con $a < 0$, per cui non oscillatoria - stabile. In questo caso si definisce **tempo caratteristico** $\tau = -\frac{1}{a}$ [sec].
 $x(t-\tau) = x_0 e^{-1} = \frac{x_0}{e} = 0.37 x_0$, cioè il sistema ha raggiunto il 63% della condizione di regime.
 Se $a \uparrow \Rightarrow \tau \downarrow$, il sistema è più veloce in quanto raggiunge prima la condizione di regime.

Il **root locus** è il piano Re-Im su cui vengono rappresentati gli autovalori $\lambda = a$. Non bisogna avere radici nel semipiano destro (Re(λ) > 0) in quanto con $a > 0$ si hanno risposte instabili. Le specifiche richiedono un sistema veloce, cioè elevata in valore assoluto.



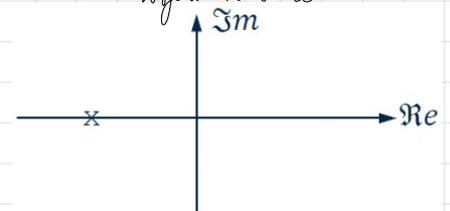
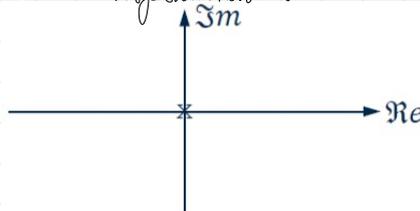
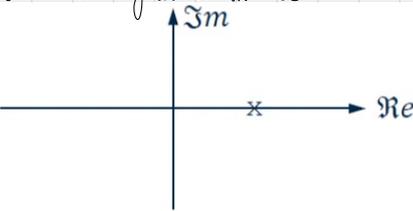
[λ : autovalore, p : autovettore]

3 root locus, in base ai valori di a , sono:

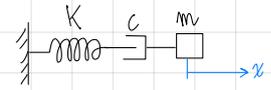
• $a > 0 \Rightarrow$ risposta instabile

• $a = 0 \Rightarrow$ risposta neutra

• $a < 0 \Rightarrow$ risposta stabile



SISTEMA DINAMICO LTI DEL 2° ORDINE - RISPOSTA LIBERA

Si considera il sistema massa-molla-smorzatore in cui $f = ma \Rightarrow -kx - b \frac{dx}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow$  $\Rightarrow m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = 0$ dove $[c] = \frac{N}{m/s}$ e $[k] = \frac{N}{m}$. Per cui il sistema (eq moto + C.I.) è:

$\begin{cases} m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \\ x(t=0) = x_0 \end{cases}$ l'omogenea associata è $x(t) = \beta_x e^{\lambda t} \Rightarrow \dot{x}(t) = \lambda \beta_x e^{\lambda t} \Rightarrow \ddot{x}(t) = \lambda^2 \beta_x e^{\lambda t}$ che sostituita nell'eq del moto

dà $m \lambda^2 \beta_x e^{\lambda t} + c \lambda \beta_x e^{\lambda t} + k \beta_x e^{\lambda t} = 0 \Rightarrow m \lambda^2 + c \lambda + k = 0$ che è l'eq caratteristica avente soluzioni

$$\lambda = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$$

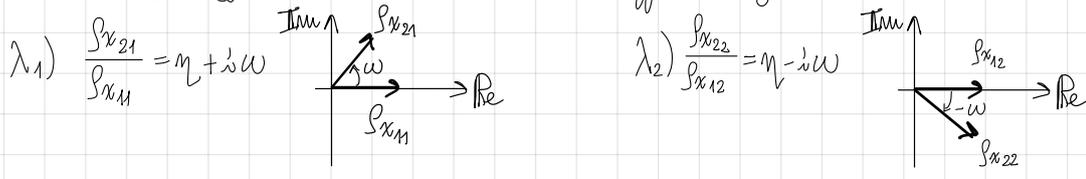
- se $\left(\frac{c}{2m}\right)^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow c^2 = 4mk \Rightarrow c = 2\sqrt{mk}$ è detto c_{cr} critico ($c_{cr} \stackrel{DEF}{=} 2\sqrt{mk}$), per cui si definisce **coefficiente di smorza-**

mento critico $\zeta \stackrel{DEF}{=} \frac{c}{c_{cr}} = \frac{c}{2\sqrt{mk}}$

(1)

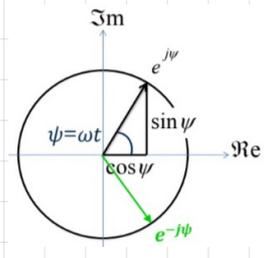
Il sistema oscilla e converge (oscillazione) ma non matematicamente alla condizione di stabilità.

Se sostituiamo λ_1 e λ_2 rispettivamente e si disegnamo i **diagrammi di Argand**, in cui sono rappresentati gli autovettori [ad differenza root locus in cui sono rappresentati gli autovalori], si ottiene:



Il sistema diventa $\begin{cases} x_1 = p_{x_{11}} e^{\lambda_1 t} + p_{x_{12}} e^{\lambda_2 t} \\ x_2 = p_{x_{21}} e^{\lambda_1 t} + p_{x_{22}} e^{\lambda_2 t} \end{cases}$ rispettivamente. Le condizioni iniziali si possono risolvere come velocità.

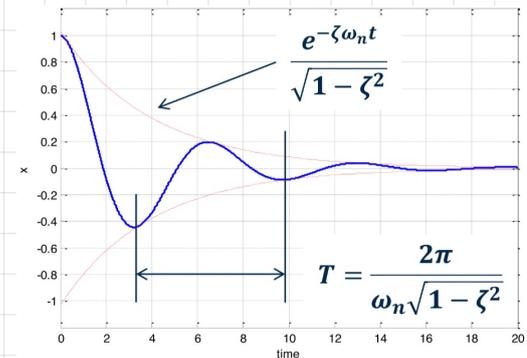
$$\begin{cases} x_0 = p_{x_{11}} + p_{x_{12}} \\ 0 = p_{x_{21}} + p_{x_{22}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_{x_{11}} = a + sb \\ p_{x_{12}} = a - sb \\ p_{x_{21}} = (a + sb)(\eta + j\omega) \\ p_{x_{22}} = (a - sb)(\eta - j\omega) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{x_0}{2} \\ b = \frac{\eta a}{\omega} = \frac{x_0 \eta}{2\omega} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_{x_{11}} = \frac{x_0}{2} + j \frac{x_0 \eta}{2\omega} = \frac{x_0}{2} \left(1 + j \frac{\eta}{\omega}\right) \\ p_{x_{12}} = \frac{x_0}{2} - j \frac{x_0 \eta}{2\omega} = \frac{x_0}{2} \left(1 - j \frac{\eta}{\omega}\right) \end{cases}$$



Si ricordano le proprietà di Eulero $\begin{cases} e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j \sin(\omega t) \\ e^{-j\omega t} = \cos(\omega t) - j \sin(\omega t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^{j\omega t} + e^{-j\omega t} = 2 \cos(\omega t) \\ e^{j\omega t} - e^{-j\omega t} = 2j \sin(\omega t) \end{cases}$

$$\begin{aligned} \text{È possibile sostituire } x_1 &= \frac{x_0}{2} \left(1 + j \frac{\eta}{\omega}\right) e^{(\eta + j\omega)t} + \frac{x_0}{2} \left(1 - j \frac{\eta}{\omega}\right) e^{(\eta - j\omega)t} \Rightarrow \\ \frac{x_1}{x_0/2} &= \left(1 + j \frac{\eta}{\omega}\right) e^{\eta t} e^{j\omega t} + \left(1 - j \frac{\eta}{\omega}\right) e^{\eta t} e^{-j\omega t} = e^{\eta t} \left[e^{j\omega t} + e^{-j\omega t} \right] + j \frac{\eta}{\omega} e^{\eta t} \left[e^{j\omega t} - e^{-j\omega t} \right] = \end{aligned}$$

$$= 2 e^{\eta t} \cos(\omega t) - 2 \frac{\eta}{\omega} e^{\eta t} \sin(\omega t) \Rightarrow x_1 = x_0 e^{\eta t} \left[\cos(\omega t) - \frac{\eta}{\omega} \sin(\omega t) \right] = x_0 \frac{e^{-\zeta \omega_n t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \cos(\omega_n t + \phi) \text{ con } \phi = \arctan\left(\frac{1 - \zeta^2}{\zeta}\right)$$



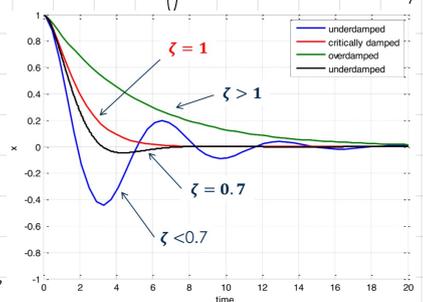
Pulsazione smorzata $\omega_d (= \omega) = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ [rad/sec]. $\omega_n \rightarrow$ se il sistema smorzato ha un periodo di oscillazione maggiore di un sistema non smorzato.

Periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$ [sec]

Smorzamento totale $\eta = -\zeta \omega_n$

Il tempo affinché l'ampiezza si dimezzi si ricava da $\frac{x_0}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{\eta t} = \frac{x_0}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{\eta t_{1/2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x_0}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{\eta t_{1/2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow e^{\eta t_{1/2}} = 2 \Rightarrow \eta t_{1/2} = \ln(2) \Rightarrow t_{1/2} = \frac{\ln(2)}{\eta}$ che è il tempo di dimezzamento.

legato al coefficiente di smorzamento $N_{1/2} = \frac{t_{1/2}}{T}$. In figura è possibile notare l'andamento in caso di sistema sottosmorzato, con smorzamento critico, sovrasmorzato.



FORMULAZIONE STATO-SPAZIO

La rappresentazione stato-spazio è un modello matematico composto da equazioni differenziali solo del 1° ordine.

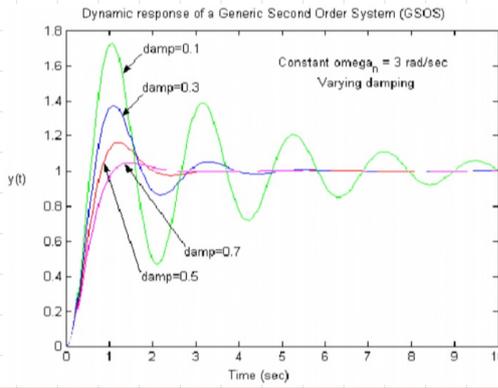
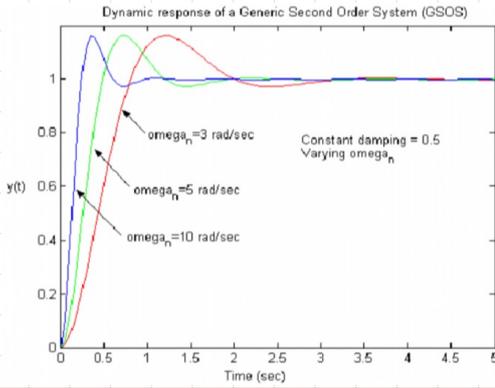
Dato le variabili di stato $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ si può scrivere $\dot{x}_s(t) = f(x_s(t), u(t))$

Se si definiscono:
 - vettore di stato $\bar{x}(t) = \{x_1(t), \dots, x_n(t)\}^T \in \mathbb{R}^{n \times 1}$
 - vettore di input $\bar{u}(t) = \{u_1(t), \dots, u_m(t)\}^T \in \mathbb{R}^{l \times 1}$
 - vettore di output $\bar{y}(t) = \{y_1(t), \dots, y_m(t)\}^T \in \mathbb{R}^{l \times 1}$
 allora la formulazione stato-spazio si scrive

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = \bar{f}(\bar{x}(t), \bar{u}(t)) \\ \bar{y}(t) = \bar{g}(\bar{x}(t), \bar{u}(t)) \end{cases} \text{ Sotto specifiche condizioni le funzioni } f \text{ e } g \text{ possono essere linearizzate separando gli effetti } \bar{x} \text{ e } \bar{u}, \text{ per cui la formulazione si diventa:}$$

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = A \bar{x}(t) + B \bar{u}(t) \\ \bar{y}(t) = C \bar{x}(t) + D \bar{u}(t) \end{cases} \text{ dove } \begin{cases} \text{matrice di stato } A \in \mathbb{R}^{n \times n} \\ \text{matrice di controllo } B \in \mathbb{R}^{n \times m} \end{cases} \text{ - } \begin{cases} \text{matrice di osservazione } C \in \mathbb{R}^{l \times n} \\ \text{matrice di output } D \in \mathbb{R}^{l \times m} \end{cases} \quad (3)$$

SISTEMA DINAMICO LTI DEL 2° ORDINE - RISPOSTA A GRADINO



Per un input passo a $V=1$, la soluzione analitica è

$$x(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \phi)$$

con $\phi = \arctan \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$

1.3 TRASFORMATA DI LAPLACE

Dato la funzione tempo-variante reale $f(t)$ definita in $0 \leq t < +\infty$ e definita $s \stackrel{\text{DEF}}{=} \sigma + j\omega$ variabile della frequenza complessa, la trasformata di Laplace è $L[f(t)] = f(s) \stackrel{\text{DEF}}{=} \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt$, se l'integrale è finito allora la funzione $f(t)$ è trasformabile.

Alcuni esempi sono:

- $f(t) = 1 \Rightarrow L[1] = \begin{cases} \frac{1}{s} & \text{se } \text{Re}(s) > 0 \\ \int & \text{se } \text{Re}(s) < 0 \end{cases}$

- $f(t) = C \Rightarrow L[C] = \begin{cases} \frac{C}{s} & \text{se } \text{Re}(s) > 0 \\ \int & \text{se } \text{Re}(s) < 0 \end{cases}$

- $f(t) = e^{kt} \Rightarrow L[e^{kt}] = \begin{cases} \frac{1}{s-k} & \text{se } \text{Re}(s) > 0 \\ \int & \text{se } \text{Re}(s) < 0 \end{cases}$

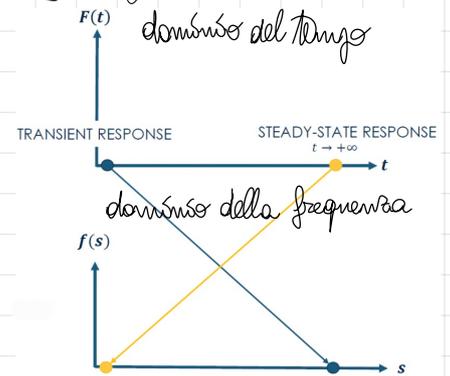
Le proprietà sono le seguenti:

i) la trasformata di Laplace è un operatore lineare, quindi può essere applicato al principio di sovrapposizione degli effetti $\rightarrow L[C f(t)] = C L[f(t)]$; $L[f_1(t) + f_2(t)] = L[f_1(t)] + L[f_2(t)]$; $L[\cos(\omega t)] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$; $L[\sin(\omega t)] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$

ii) Il formula fondamentale della trasformata di Laplace - derivata nel dominio del tempo - data $f(t) \in \mathbb{R} \forall t \in [0, +\infty)$ se $f(t)$ è continua e trasformabile $\forall t \in [0, +\infty)$ e $f'(t)$ è trasformabile, allora $L[f'(t)] = s L[f(t)] - f(t=0)$

iii) Teorema del valore finale ($t \rightarrow \infty$) $\rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s f(s)$

iv) Teorema del valore iniziale ($t \rightarrow 0$) $\rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow +\infty} s f(s)$



Time Domain Function		Laplace Transform
Unit Impulse	$\delta(t)$	1
Unit Step	$u(t)$	$1/s$
Unit Ramp	t	$1/s^2$
Polynomial	t^n	$n! / s^{n+1}$
Exponential	$e^{-\sigma t}$	$1 / (s + \sigma)$
Poly Exponential	$t^{n-1} e^{-\sigma t} / (n-1)!$	$1 / (s + \sigma)^n$
Sine Wave	$\sin \omega t$	$\omega / (s^2 + \omega^2)$
Cosine Wave	$\cos \omega t$	$s / (s^2 + \omega^2)$
Damped Sine Wave	$e^{-\sigma t} \sin \omega t$	$\omega / ((s + \sigma)^2 + \omega^2)$
Damped Cosine Wave	$e^{-\sigma t} \cos \omega t$	$(s + \sigma) / ((s + \sigma)^2 + \omega^2)$

SISTEMA DINAMICO LTI DEL 1° ORDINE - RISPOSTA A GRADINO

Come già visto $\begin{cases} \dot{x}(t) = -ax(t) + a u(t) & \text{con } a > 0 \\ y(t) = x(t) \end{cases}$ e $u(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{se } t < 0 \end{cases}$

con $C1: x(t=0) = 0$

Per la II formula fondamentale $s X(s) - x(t=0) = -a X(s) + a U(s)$ per cui il sistema diventa

⑤

si costruisce con $a_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ con M_{ij} - minore - pari al determinante della matrice che si ottiene eliminando la j -esima riga e la i -esima colonna

Quindi la funzione di trasferimento è $G(s) = [1 \ 0] \begin{bmatrix} s+2\zeta\omega_n & 1 \\ -\omega_n^2 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_n^2 \end{bmatrix} + [0] = [s+2\zeta\omega_n \ 1] \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_n^2 \end{bmatrix} \frac{1}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$

$= C \quad = [sI-A]^{-1} \quad = B \quad = D$

$\Rightarrow G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$, l'equazione caratteristica è $s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2=0$ quindi si può $\begin{cases} p_1 = -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \\ p_2 = -\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \end{cases}$

Poiché l'input è a gradino $u(t)=1 \Rightarrow U(s)=\frac{1}{s}$ si ha $Y(s) = G(s) \frac{1}{s} = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2} \frac{1}{s} = \frac{\omega_n^2}{[s-(\eta+\zeta\omega_n)][s-(\eta-\zeta\omega_n)]}$

Come prima $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot Y(s) = 1 = G(0)$

applicando il metodo delle frazioni parziali si ha $Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{\omega}{(s-\eta)^2 + \omega^2}$ da cui è semplice ricavare la trasformata

inversa $y(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t - \varphi)$ con $\varphi = \arctg\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{-\zeta}\right)$

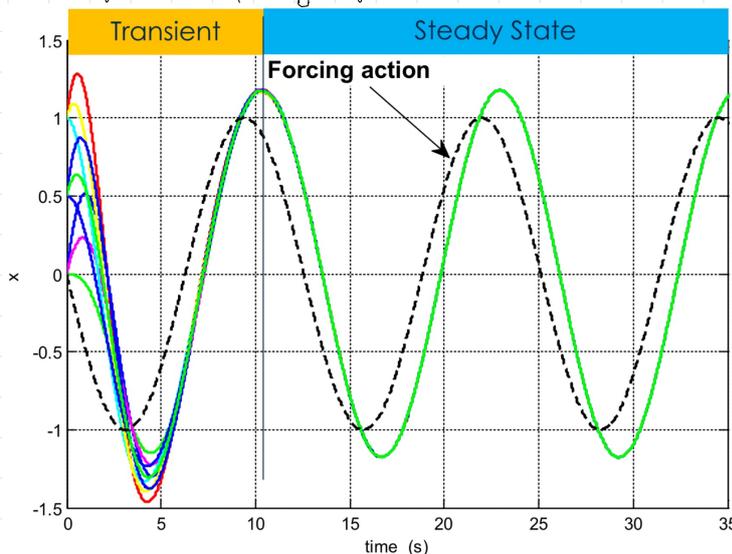
1.4

RISPOSTA IN FREQUENZA

La risposta in frequenza è la rappresentazione della risposta di un sistema dinamico ad un input sinusoidale, per valori della frequenza del segnale di input che variano tra 0 e ∞ .

Hip: 1) condizione di stazionarietà, 2) piccole perturbazioni. Le equazioni non lineari del moto possono essere linearizzate nella immediata vicinanza della condizione stazionaria, quindi può essere applicato il principio di sovrapposizione degli effetti.

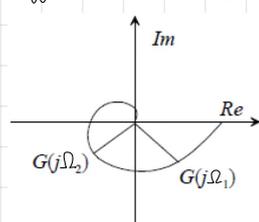
Risultato fondamentale. Dato un sistema dinamico linearizzato in un punto di equilibrio stabile sotto l'ipotesi delle piccole perturbazioni, e quindi descritto dalla funzione di trasferimento $G(s)$, ed applicato a tale sistema un input sinusoidale del tipo $u(t) = a \sin(\Omega t + \varphi)$ all'escluso del transitorio il sistema si metterà ad oscillare nell'intorno della condizione di equilibrio con stessa frequenza del segnale di input, il sistema avrà cioè risposta del tipo $y(t) = b \sin(\Omega t + \phi)$ con $b = a |G(j\Omega)|$ e $\phi = \varphi + \arg[G(j\Omega)]$.



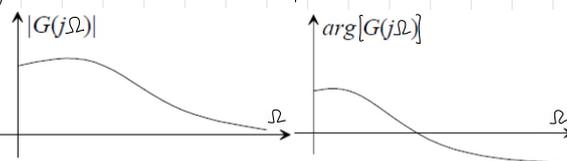
Oscillazione forzata con differenti condizioni iniziali

RAPPRESENTAZIONE GRAFICA

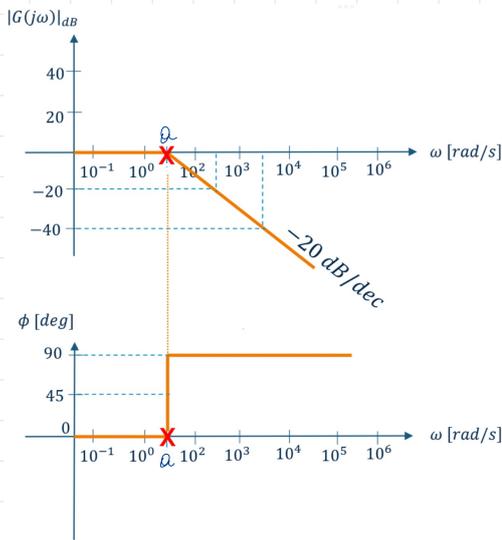
La risposta in frequenza è una funzione complessa della variabile Ω ; sono allora utilizzabili varie forme di rappresentazione grafica.



• **Diagrammi polari**
Per ogni valore di Ω si riporta il punto nel piano complesso, con l'ingombro il punto si ottiene la curva detta diagramma polare



• **Diagrammi cartesiani**
Coppia di diagrammi che rappresentano il modulo e la fase della risposta in frequenza rispetto alla pulsazione Ω



Il modulo/guadagno è uguale al polo stabile

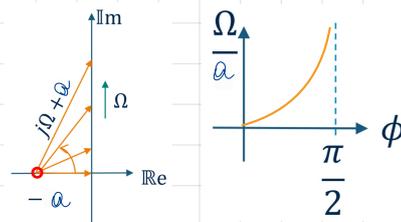
La fase ha segno opposto al polo stabile

Zero stabile

In questo caso la funzione di trasferimento è $G(s) = s+a$, zero $s = -a \Rightarrow G(j\Omega) = j\Omega + a$

Guadagno: $|G(j\Omega)|_{dB} = 20 \text{Log} |j\Omega + a| = 20 \text{Log} \sqrt{a^2 + \Omega^2}$

Fase: $\phi(j\Omega) = \arg [j\Omega + a] = \arctg \left[\frac{\Omega}{a} \right]$

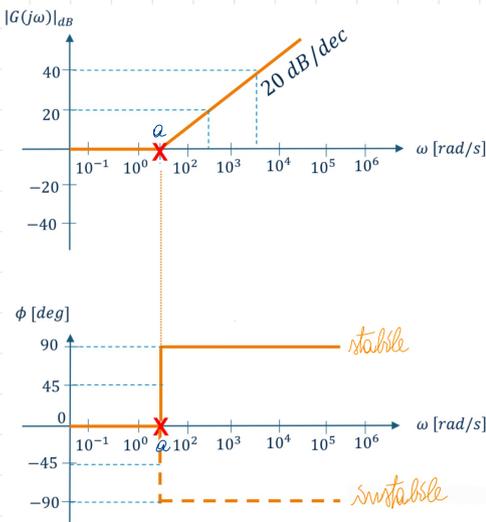
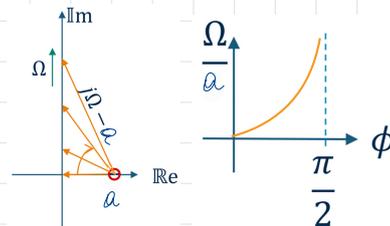


Zero instabile

In questo caso la funzione di trasferimento è $G(s) = s-a$, zero $s = a \Rightarrow G(j\Omega) = j\Omega - a$

Guadagno: $|G(j\Omega)|_{dB} = 20 \text{Log} |j\Omega - a| = 20 \text{Log} \sqrt{a^2 + \Omega^2}$

Fase: $\phi(j\Omega) = \arg [j\Omega - a] = \arctg \left[-\frac{\Omega}{a} \right] = -\arctg \left[\frac{\Omega}{a} \right]$



Il modulo/guadagno dello zero instabile coincide con quello dello zero stabile

La fase dello zero instabile ha segno opposto di quella dello zero stabile

DIAGRAMMA DI BODE DI SISTEMI DEL 2° ORDINE

A pag 7 si è visto che la funzione di trasferimento è $G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{\omega_n^2}{(s - \zeta\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2})(s - \zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2})} \Rightarrow$

$$G(j\Omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\Omega - \zeta\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2})(j\Omega - \zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2})} = \frac{\omega_n^2}{[-\zeta\omega_n + j(\Omega - \omega_n\sqrt{1-\zeta^2})][-\zeta\omega_n + j(\Omega + \omega_n\sqrt{1-\zeta^2})]}$$

2 PROGETTO DI UN SISTEMA DI CONTROLLO LINEARE

2.1 SISTEMI DI CONTROLLO AUTOMATICI FUNZIONE E CLASSIFICAZIONE

Il modo che coinvolge i gradi di libertà rotazionali sono i modi di corto periodo, rollio, Dutch roll: le loro frequenze naturali sono determinate dai momenti di inerzia del velivolo e dai momenti generati dalle superfici aerodinamiche; il loro smorzamento è determinato dai momenti aerodinamici dipendenti dalla velocità.
 Il modo longitudinale e spirale comportano cambiamenti nella traiettoria di volo e sono modi molto più lenti. Il modo longitudinale coinvolge i gradi di libertà traslazionali e dipende dalle forze aerodinamiche di portanza e resistenza e dalla loro variazione con la velocità. Il modo spirale dipende dai momenti aerodinamici, ma sono coinvolte solo deboli forze aerodinamiche.

Classificazione funzionale: la reattività di un aereo ai comandi di manovra è determinata in parte dalla velocità dei modi di rotazione. Le frequenze di questi modi tendono ad essere sufficientemente elevate da rendere difficile o impossibile per il pilota controllare l'aereo se i modi sono poco smorzati o instabili. Per questo motivo è necessario prevedere sistemi di controllo automatico per compensare a questi modi smorzamento e frequenze naturali adeguate, tali sistemi di controllo sono noti come Stability Augmentation System SAS. Se il sistema di potenziamento è destinato a controllare la modalità e a fornire al pilota un particolare tipo di risposta agli input di controllo, così è noto come Control Augmentation System CAS.
 I modi lenti (longitudinale e spirale) sono controllabili dal pilota, tuttavia è necessario un sistema di controllo automatico che fornisca al pilota un sollievo dal controllo di questi modi. L'autopilot è un sistema di controllo automatico che fornisce sia funzioni di assistenza al pilota che funzioni specializzate.

SAS	CAS	Autopilots
Roll damper	Roll rate	Pitch-attitude hold
Pitch damper	Pitch rate	Altitude hold
Yaw damper	Normal acceleration	Speed/Mach hold
	Lateral/directional	Automatic landing
		Roll angle hold
		Turn coordination
		Heading hold/VOR hold

- SAS → sistema non forzato, per affrontare ω_m con le handling qualities
- CAS → sistema forzato, che si vuole portare agli estremi e che risponde come un sistema del 1° ordine (es: si vuole che la rotazione a crolli ($\phi = 90^\circ$) si abbia in 1 s. In quanto è una manovra salvavita).
- Autopilot → sistema con input a gradino, di mantenimento

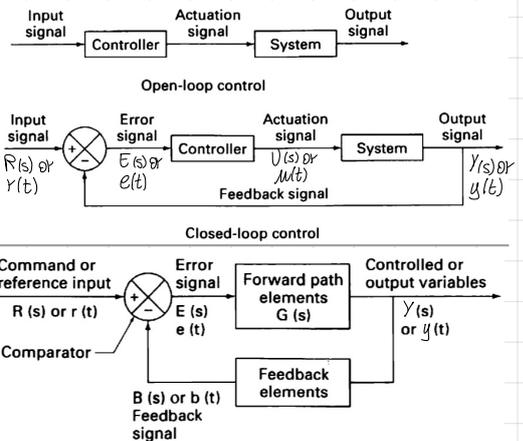
Classificazione per schema di controllo: Il feedback (retroazione) può essere $\left\{ \begin{array}{l} \text{proporzionale} \\ \text{PID-lead/lag, compensator's dynamics} \end{array} \right.$

Classificazione per metodo di progetto: Il controllo feedback può essere progettato con i metodi del $\left\{ \begin{array}{l} \text{root locus} \\ \text{diagramma di Bode} \end{array} \right.$

ELEMENTI DEL SISTEMA DI CONTROLLO

I sistemi di controllo possono essere classificati come sistemi open-loop o close-loop. Il sistema open-loop è il più semplice e meno complesso, ma l'azione di controllo è indipendente dall'uscita. Nel sistema close-loop l'azione di controllo dipende dall'uscita del sistema, sono chiamati sistemi di controllo a retroazione e hanno il vantaggio della maggior precisione.

Per ottenere un sistema di controllo più accurato è necessario stabilire una forma di feedback tra l'uscita e l'ingresso. Ciò può essere ottenuto confrontando il segnale controllato (uscita) con il segnale comandato o di riferimento (ingresso) generando un segnale di errore, per fare questo si utilizzano uno o più anelli di retroazione. Il segnale di errore viene utilizzato per far coincidere il segnale di uscita con il segnale di ingresso desiderato. Solitamente il sistema di feedback a close-loop è composto da un ramo di forward, da un ramo di feedback e da un dispositivo di rilevamento degli errori detto comparatore. Ogni componente del sistema di riferimento è definito in termini di funzione di trasferimento, definita come $TF = \frac{\text{trasformata Laplace uscita}}{\text{trasformata Laplace ingresso}}$ assumendo nulle le condizioni iniziali. Le funzioni di trasferimento (1)



celerazione normale alla traversata di volo; la manovrabilità è quindi strettamente legata alla controllabilità da essere inseparabile in qualsiasi moto reale.

REQUISITI CIVILI E MILITARI

I requisiti civili sono mandatori: devono essere rispettati. La CFR (FAA)/CS (EASA) ha pochi requisiti di flying qualities: si) la principale preoccupazione per FAA/EASA è la safety
 ii) i requisiti servono a garantire un adeguato livello di safety
 iii) la conformità è da dimostrare con una strumentazione limitata

I requisiti militari sono oggetto di contrattazione tra ente certificatore e progettista. Le specifiche militari hanno requisiti dinamici dettagliati: mirano all'efficacia della missione. Le risposte soddisfacenti in open-loop forniscono la sola certezza che l'a/m sarà idoneo a svolgere una missione ma non garantisce la sua efficacia, per cui è necessaria l'analisi in close-loop. Vengono testate le singole task di missione per valutare la capacità di eseguire il compito in termini di precisione e sforzo richiesto.

La normativa MIL-F-8785A/B/C del 1980 è stata superata con la MIL-STD-1797A/B del 1997, in cui non è possibile identificare un insieme unico di requisiti applicabili a tutti gli a/m ma poiché gli FCS moderni introducono dinamiche diverse questi devono essere trattati in modo diverso, quindi si tratta di linee guida.

Infine la MIL-F-8785C è stata concepita sulla base della risposta classica degli a/m: la soddisfazione dei requisiti dei parametri modali può portare a handling qualities soddisfacenti.

Per la normativa militare vale la seguente classificazione

Classification of airplanes:

- Class I: light aircraft, basic trainers
- Class II: medium transports, fighter-bombers
- Class III: heavy transports/bombers
- Class IV: fighters, advanced trainers

Flight Phase Categories

- A: Non-terminal, rapid maneuvering, precision tracking and flight-path control (combat, in-flight refueling receiver, terrain following, close formation)
- B: Non-terminal, gradual maneuvers and without precision tracking, although accurate flight-path control may be required (cruise, climb, descent, loiter)
- C: Terminal, gradual maneuvers and usually accurate flight-path control (takeoff and landing)

Levels of flying qualities

1. Flying qualities clearly adequate for the mission Flight Phase
2. Flying qualities adequate to accomplish the mission Flight Phase, but some increase in pilot workload or degradation in mission effectiveness, or both, exists
3. Flying qualities such that the airplane can be controlled safely, but pilot workload is excessive or mission effectiveness is inadequate, or both. Category A Flight Phases can be terminated safely, and Category B and C Flight Phases can be completed

REQUISITI PER CIASCUN MODO

Gli aerei classici presentano 5 modi dinamici: corto periodo, fugoide, dutch roll, rollio, spirale. Si utilizzano trim che a open-loop per misurare i parametri modali: tempo caratteristico τ , pulsazione ω /frequenza, coefficiente di smorzamento ζ .

Le flying/handling qualities sono legate alle caratteristiche dinamiche e di controllo dell'a/m: il coefficiente di smorzamento a corto e lungo periodo e le frequenze naturali non smorzate influenzano l'opinione del pilota sulla facilità e difficoltà di pilotaggio. Per stabilire un legame tra stabilità e controllo sono stati sviluppati dei sistemi di valutazione: scala Cooper-Harper, che va da 1 a 10 dove i bassi numeri corrispondono a buone flying/handling qualities; pilot's opinion, cioè grafici ad esempio S-W in cui sono individuate zone di flying/handling qualities buone, accettabili, nearse, inaccettabili. (13)

in pericolo l'a/m.

I requisiti militari nella MIL-F-8785C prevedono quanto riportato in tabella, questi requisiti possono non essere soddisfatti nel range transonico.

Requisiti del dutch roll - le oscillazioni laterali leggermente smorzate; influiscono negativamente sul comfort dell'equipaggio, influiscono sulla precisione di puntamento.

I requisiti civili nella 14 CFR/CS 23.2145(a)(2) prevedono che le oscillazioni del braco essere smorzate a 1/10 di ampiezza in 7 cicli - 13 cicli sopra i 18 000 ft (area più rarefatta implica smorzamenti più lenti) - con 5 comandi primari bloccati e liberi; la 14 CFR/CS 25.181 prevede smorzamento positivo.

I requisiti militari nella MIL-F-8785C prevedono quanto riportato in tabella, questi insieme a non compromettere le prestazioni della missione.

in pair mission performance

Time to damp

Level	Flight Phase Category	Class	Min ζ_d^*	Min $\zeta_d \omega_{nd}^*$ rad/sec	Min ω_{nd} rad/sec
1	A (CO and GA)	IV	0.4	---	1
	A	I, IV	0.19	0.35	1
		II, III	0.19	0.35	0.4**
	B	All	0.08	0.15	0.4**
C		I, II-C,	0.08	0.15	1
		II-L, III	0.08	0.1	0.4**
2	All	All	0.02	0.05	0.4**
3	All	All	0	---	0.4**

* Whichever yields larger ζ_d

** Class III aircraft requirement may be relaxed

Requisiti del roll mode. È auspicabile un valore basso di tempo caratteristico per raggiungere rapidamente la velocità di rollio desiderata, così influisce sulla capacità di catturare un bank angle.

Non vi sono requisiti civili della CFR/CS, ma ci sono requisiti separati per il time-to-bank (roll performance).

I requisiti militari nella MIL-F-8785C sono riportati in termini di tempo caratteristico τ .

Gli effetti del tempo caratteristico sono:

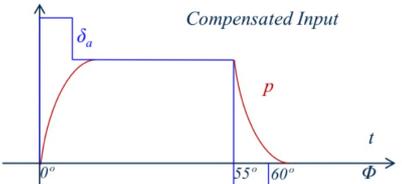
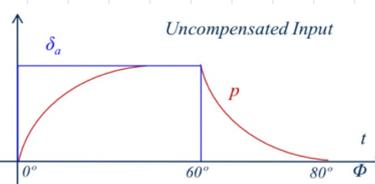
- corto (<0,2 s) \rightarrow risposta brusca, controllo preciso del bank con ingresso dolce, risposta a scatto con ingresso rapido, tendenza al PIO con tank di guadagno elevato

- medio (0,2-0,7 s) \rightarrow buon controllo del bank angle

- lungo (>0,7 s) \rightarrow risposta lenta, la tendenza all'over-rotate provoca un superamento del bank angle desiderato, è necessaria una compensazione del pilota per migliorare la risposta al bank angle.

Flight Phase Category	Class	Level		
		1	2	3
A	I, IV	1	1.4	N/A
	II, III	1.4	3	
B	All	1.4	3	10
C	I, II-C, IV	1	1.4	N/A
	II-L, III	1.4	3	

(-C: Carrier-based)
(-L: Land-based)



Requisiti dello spiral mode. Il modo è relativamente poco importante anche se divergente. Può essere controllata dal pilota se diverge lentamente; può essere mascherata da condizioni di assetto non perfette; una "spirale" può essere sinusoidale in IMC in quanto il movimento può essere impercettibile senza buoni punti di assetto; un autopilota per il livellamento delle ali può aumentare lo spiral mode.

Non vi sono requisiti civili della CFR/CS.

I requisiti militari della MIL-F-8785C sono riportati in tabella; si noti come i requisiti di puntamento siano meno stringenti nella categoria B (area corsa) e che siano più stringenti nelle categorie A e B a causa del fattore umano, in quanto il pilota si occupa di altro.

Minimum time to double amplitude

Flight Phase Category	Level 1	Level 2	Level 3
A & C	12 sec	8 sec	4 sec
B	20 sec	8 sec	4 sec

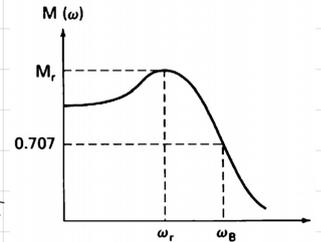
- rise time $t_r \rightarrow$ tempo richiesto alla risposta per passare dal 10% al 90% del proprio valore finale $t_r \approx \frac{1+1,1\zeta+1,4\zeta^2}{\omega_n}$
- time to peak amplitude $t_p = t_{max} \rightarrow$ tempo a cui si verifica il picco massimo della risposta $t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}$
- settling time $t_s \rightarrow$ tempo necessario alla risposta del sistema per rimanere confinata all'intorno di una banda di tolleranza del 5% rispetto al valore finale $t_s = \frac{3,0}{\omega_n \zeta}$
- peak overshoot $M_p \rightarrow$ misura della massima oscillazione rispetto al valore finale della risposta $M_p = \frac{y(t_p) - y(\infty)}{y(\infty)} \cdot 100\%$
per un input a gradino $M_p = 100 \cdot \exp\left(\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)$

Le equazioni di $y(t)$ e ϕ possono essere utilizzate per determinare le relazioni tra le specifiche t_d, t_r, t_p, M_p e i target di progetto ζ, ω_n che si devono confrontare con le handling qualities HQ.

Domínio delle frequenze

Nel dominio delle frequenze le specifiche di progetto, relative ad una risposta al gradino unitario, sono date in termini di:

- picco di risonanza $M_r = M_{max} \rightarrow$ massimo valore di $M(\omega)$ e rappresenta un'indicazione della stabilità relativa del sistema. Se M_r è elevato allora il sistema avrà un picco di overshoot molto grande come risposta all'input a gradino $M_r = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$
- frequenza di risonanza $\omega_r \rightarrow$ frequenza a cui si verifica M_r ed è correlata alla frequenza delle oscillazioni e alla velocità della risposta nel transitorio $\omega_r = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$
- larghezza di banda $\omega_B \rightarrow$ intervallo di frequenze, da 0 alla frequenza alla quale $M(\omega)$ scende al 70% del suo valore a frequenza nulla. Da un'indicazione della risposta del sistema nel transitorio: se la banda è ampia il sistema risponde più rapidamente, mentre la banda stretta è indice di un sistema "pigro" $\omega_B = \omega_n \left[(1-2\zeta^2) + \sqrt{4\zeta^4 + 4\zeta^2 + 2} \right]^{1/2}$



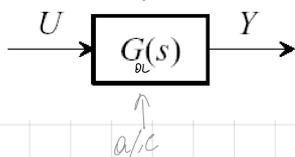
OPEN LOOP vs CLOSE LOOP, FEEDBACK vs FEEDFORWARD

Guadagno open loop vs close loop

A, B, C, D del sistema unitario

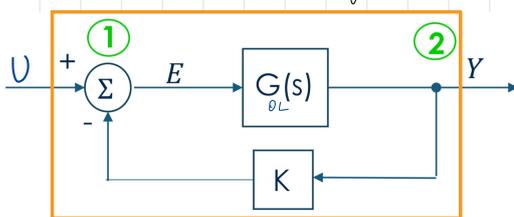
TF sistema open loop $G_{OL}(s) = \frac{Y}{U} = \frac{N(s)}{D(s)}$, equazione caratteristica $D(s) = 0$

[open loop = close loop con $K=0$]



Affinchè ci sia il controllo di un sistema open loop (privo di feedback) sono necessari sensori costosi, e tuttavia non si conosce l'input X perché fa parte della dinamica dell'aeroplano.

- lo scopo è fare in modo che il sistema finale abbia ζ e ω_n che rientrano nelle HQ: occorre elaborare il sistema di ingresso facendo una retroazione, cioè un sistema close loop (con feedback). All'ingresso dell'a/c non arriva U ma E : a seguito di disturbo non risponde l'open loop ma il close loop, il ramo di feedback caratterizzato da K "pulisce" il disturbo in modo che la risposta abbia ω_n e ζ accettabili per le HQ.



TF sistema close loop $G_{CL}(s) = \frac{Y}{U}$

TF del ramo open loop $G_{OL}(s) = \frac{Y}{E}$

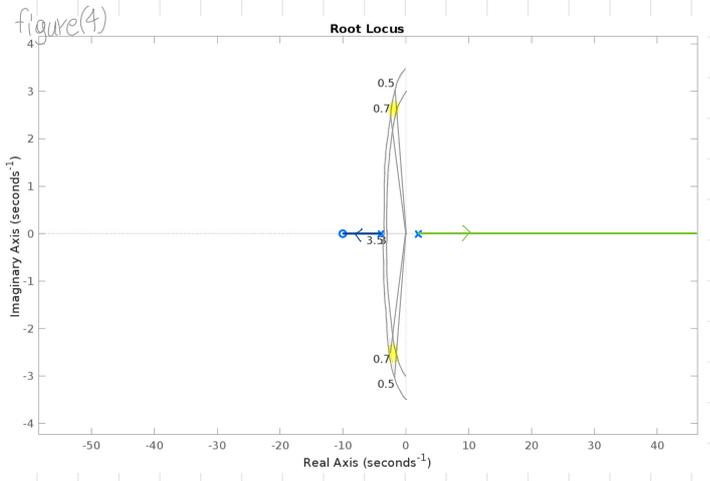
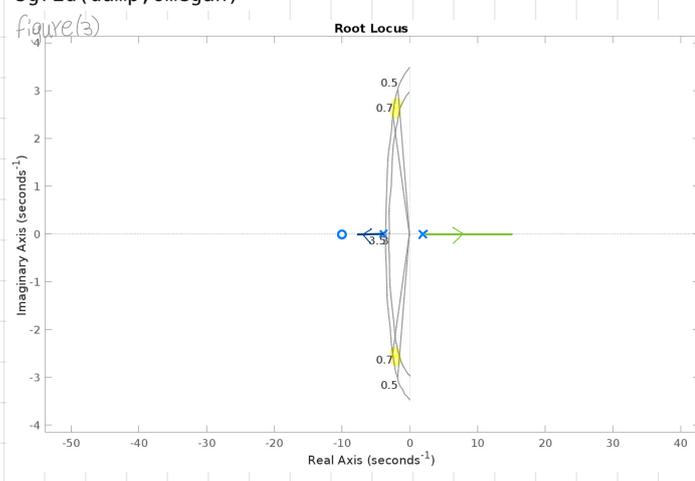
equazione caratteristica $1 + G_{OL}K = 0$ infatti

dalle equazioni di equilibrio ai nodi $\textcircled{1} E = U - KY$
 $\textcircled{2} Y = G_{OL} \cdot E \Rightarrow Y = G_{OL}(U - KY) = G_{OL}U - G_{OL}KY \Rightarrow \frac{Y}{1 + G_{OL}K} = \frac{G_{OL}U}{1 + G_{OL}K}$ per cui la scelta dei poli è influenzata da K

[Attenzione a non confondere il sistema open loop (sistema senza feedback) dal ramo di open loop (parte del sistema close loop)].

• l'eq caratteristica ds CL è $1+G_{ol}(s)K=0 \Rightarrow 1+\frac{s+10}{(s+4)(s-2)}K=0 \Rightarrow \frac{(s+4)(s-2)+(s+10)K}{(s+4)(s-2)}=0 \Rightarrow s^2+2s-8+sK+10K=0 \Rightarrow s^2+(2+K)s+(10K-8)=0$ Bisogna ricercare i valori ds K che soddisfanno l'eq caratteristica, si parte con considerazione ds intervalli $(-\infty, 0]$ e $[0, +\infty)$.

- $K \in (-\infty, 0] \Rightarrow$ con il comando `rlocus(G_ol, K_neg)` si ottiene il root locus in cui si è considerato un K negativo
`K_neg = [-10:0.01:0];`
`figure(3)`
`rlocus(G_ol, K_neg)`
`sgrid(damp, omegan)`
 sul ramo ds feedback; andamento simile si ottiene con `rlocus(-G_ol)`. In entrambi i casi si nota che all'aumentare del valore assoluto del gain K i poli ds CL partono dai poli ds OL e allontanano tra loro e uno va a ∞ mentre l'altro va a collapsare sullo zero del sistema.
 Pertanto con $K < 0$ non vi è la possibilità di trovare radici che soddisfanno le specifiche.



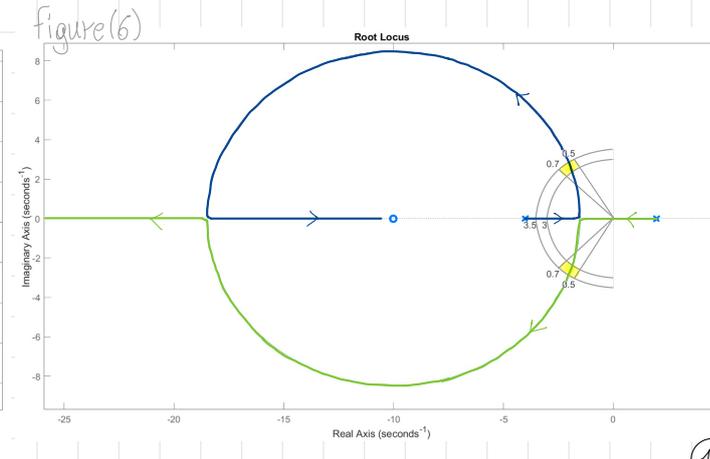
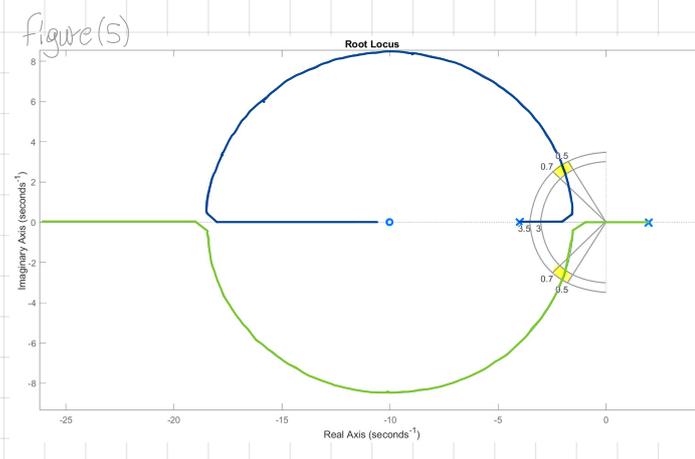
- $K \in [0, +\infty) \Rightarrow$ prima di utilizzare MATLAB per la ricerca del valore ds K, è possibile andare a studiare la tendenza del sistema agli estremi ds questo dominio scelto

$K=0 \Rightarrow 1+G_{ol}K=0 \Rightarrow 1+\frac{N(s)}{D(s)}K=0 \Rightarrow D(s)+N(s)K=0 \xrightarrow{K=0} D(s)=0$ che è l'eq caratteristica ds OL, cioè il sistema è senza feedback \rightarrow le radici del sistema sono i poli ds open loop

$K \rightarrow \infty \Rightarrow D(s)+N(s)K=0 \xrightarrow{D(s) \ll N(s)K} N(s)K=0 \Rightarrow N(s)=0 \rightarrow$ le radici del sistema sono gli zeri ds open loop

`K=[0:0.05:150];`
`figure(5)`
`rlocus(G_ol, K)`
`sgrid(damp, omegan)`
 Su MATLAB si implementa il metodo trial & error: si modifica l'intervallo K, si terminano di estremi gli step tra un valore e l'altro, fino a trovare un root locus "che si chiude" e che abbia lo stesso andamento del root locus con $K \in [0, +\infty)$.

`K=[0:0.01:150];`
`figure(6)`
`rlocus(G_ol, K)`
`sgrid(damp, omegan)`
 Nella figure(5) e figure(6) all'aumentare del gain K si nota che i poli ds CL partono dai poli ds OL e vanno incontro tra loro fino a diventare coincidenti (\rightarrow), una volta coincidenti diventano complessi coniugati e tendono ad avvicinarsi e superare lo zero del sistema fino a tornare nuovamente coincidenti e reali (\rightarrow), successivamente un polo va a ∞ mentre l'altro va a collapsare sullo zero del sistema

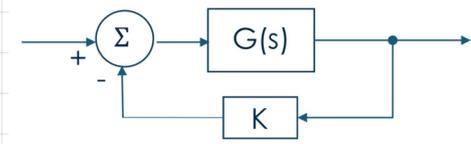


- 5) mediante il dato tip della figure individuare $s_{pasm} (=K)$ agli estremis dell'area che soddisfa le specifiche, andando ad individuare un intervallo di K che soddisfa le specifiche
- 6) definire la Tf di CI col comando $G_{ci} = \text{feedback}(G_a, K_*)$
- 7) tracciare i poli e gli zeri del sistema di CI col comando $\text{pzmap}(G_{ci})$
- 8) ricavare le radici dell'eq caratteristica del sistema di CI col comando $s = \text{roots}([\text{coeff eq caratteristica}])$
- 9) ricordando che $s = \lambda = -\eta \pm j\omega$ e che $\omega_n = \sqrt{\eta^2 + \omega^2}$ e $\zeta = -\eta/\omega_n$, calcolare ω_n e ζ e verificare che rispettino le specifiche
- 10) dato un input a gradino verificare che il sistema CI tenda ad una risposta a regime unitaria, analiticamente mediante $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$ e graficamente col comando $\text{step}(G_{ci}, t_{end})$

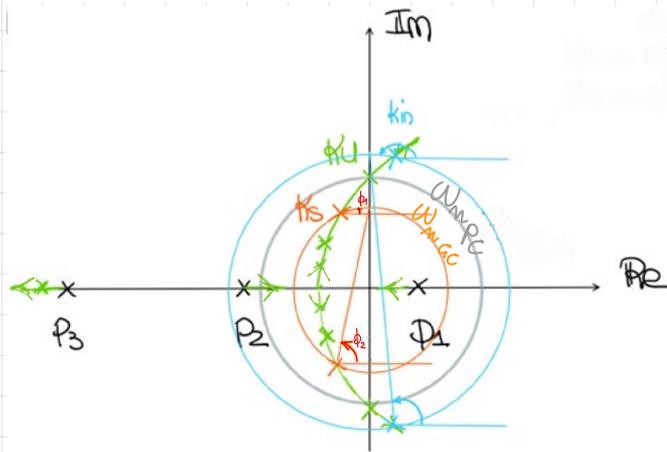
MARGINE DI GUADAGNO E MARGINE DI FASE

Altre importanti specifiche di progetto utilizzate per valutare la stabilità relativa di un sistema di controllo sono il margine di guadagno (gain margin GM) e il margine di fase (phase margin PM), entrambe ricavabili mediante le tecniche di risposta in frequenza.

Si consideri un generico sistema avente essenzialmente 2 poli stabili (p_2 e p_3) e 1 polo instabile (p_1), con $p_3 < p_2 < p_1$.



L'equazione caratteristica del sistema è $1 + G(s)K = 0 \Rightarrow G(s)K = -1$
 All'aumentare del gain K il root locus ha l'andamento mostrato in figura:



Il polo p_3 va a $-\infty$, i poli p_2 e p_1 vanno uno verso l'altro fino a diventare coincidenti, poi diventano complessi coniugati e si allontanano dal polo p_1 .

L'angolo di fase si ricava graficamente come $\phi = \phi_1 + \phi_2$ dove ϕ_1 è l'angolo tra l'orizzontale e la linea congiungente la soluzione e l'incrocio tra la circonferenza ω_n -frequenziale e l'asse Im positivo, ϕ_2 è l'analogo con la soluzione coniugata.

Si individuano 3 gain K :

- K_s con $\phi > -180^\circ$ che corrisponde al gain selezionato per il sistema affinché la risposta sia stabile
- K_u con $\phi = -180^\circ$ che corrisponde al gain che si ha

quando il ramo del root locus interseca l'asse Im

- K_{su} con $\phi < -180^\circ$, che corrisponde al gain indesiderato in cui si ha risposta instabile

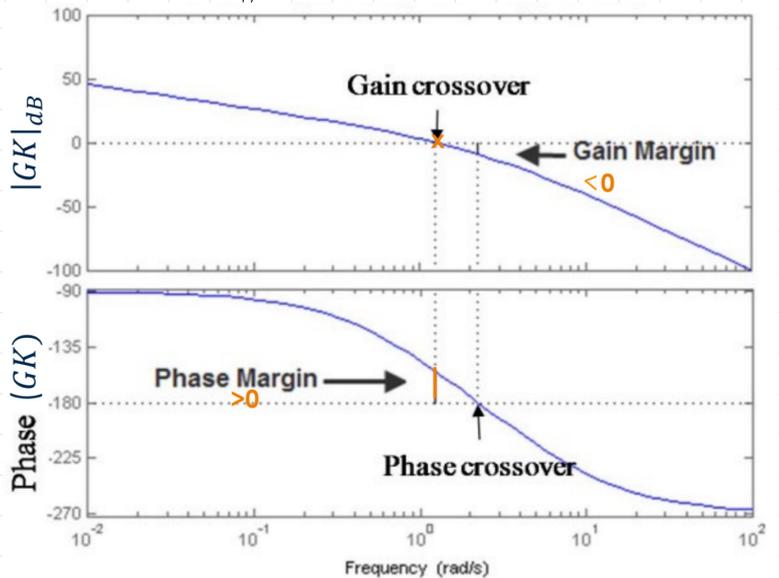
Il **gain margin** è $GM = \frac{K_u}{K_s}$, dove K_u identifica la pulsazione di fase-crossover ω_{pc} , quindi GM è il guadagno in corrispondenza di una fase pari a -180° (phase-crossover P_c) \Rightarrow

$|GM|_{dB} = |GK|_{dB}|_{\phi = -180^\circ} = |G(s\omega_{pc})K_s|_{dB}$
 Il **phase margin** si può determinare stimando la pulsazione ω_{gc} , detta pulsazione di gain-crossover e identificata da K_s , che soddisfa la relazione $|G(s\omega_{gc})K_s| = 1 \Leftrightarrow |G(s\omega_{gc})K_s|_{dB} = 0$ per cui si ha $PM = 180^\circ + \arg(G(s\omega_{gc})K_s)$, quindi PM è la fase in corrispondenza di un guadagno unitario, nullo in dB (gain crossover G_c) \Rightarrow

$$PM = 180^\circ + \phi|_{|GK|_{dB}=0} = 180^\circ + \phi|_{|G(s\omega_{gc})K_s|_{dB}}$$

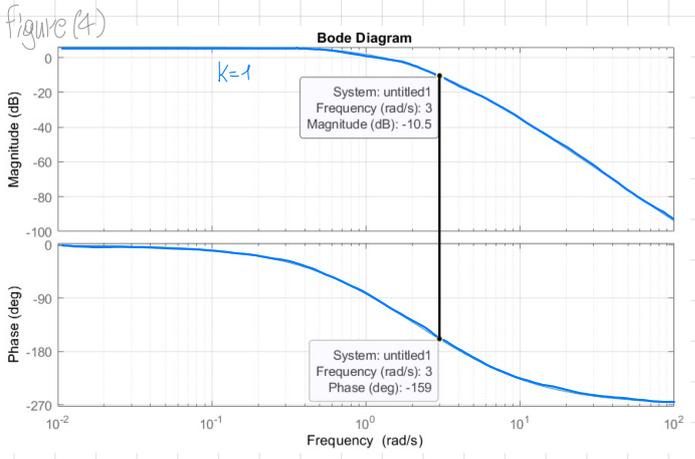
Il sistema è stabile se $|GM|_{dB} > 0$, $PM > 0$

Per un sistema del 2° ordine $G(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)}$ si ha $PM = \arctg\left(\frac{2\zeta}{\sqrt{4\zeta^2+1}-2\zeta^2}\right)$, per $\zeta < 0,707$ si può approssimare in $PM \approx 100\zeta$ (21)



figure(4)
bode(G_ol*K)
grid on

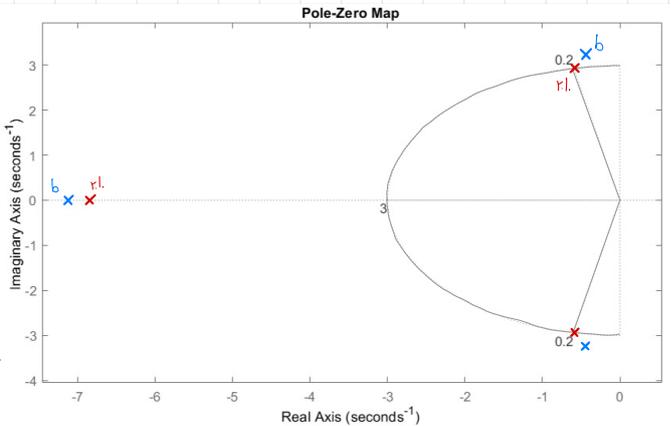
col data tip si legge la fase e l'ampiezza in corrispondenza della frequenza richiesta dalle specifiche, nell'esempio $\omega_n = 3 \text{ rad/s} \rightarrow \phi = -159^\circ, |K_b|_{dB} = -10,5 \text{ dB}$ per cui è possibile ricavare il $PM = 180^\circ + \phi = 21^\circ$ e gain dal diagramma di Bode $K_b: |K_b|_{dB} = -10,5 \text{ dB} \Rightarrow 20 \log |K_b| = -10,5 \Rightarrow K_b = 10^{-10,5/20} = 3,35$



G_cl_b=feedback(G_ol,K_b)*K_b
G_cl_rl=feedback(G_ol,K_rl)*K_rl

Si ricorda quanto visto a pag. 18 per cui per un sistema feedback $G_{cl} = \frac{G}{1+GK}$ mentre per un sistema feedforward $G_{cl} = \frac{GK}{1+GK}$

figure(5)
pzmap(G_cl_b)
hold on
pzmap(G_cl_rl)
sgrid(damp,omegan)
grid on



È possibile definire le TF di cose log col comando $G_{cl} = \text{feedback}(G_{ol}, K_x) \cdot K_x$

$$G_{cl,b} = \frac{66,99}{s^3 + 8s^2 + 17s + 76,99} \quad G_{cl,rl} = \frac{52,2}{s^3 + 8s^2 + 17s + 62,2}$$

le cui soluzioni rappresentiamo sul piano complesso col comando pzmap(G_cl)

s_b=roots([1, 8, 17, 76.99])
s_rl=roots([1, 8, 17, 62.2])

Prendendo i coeff. costanti dell'eq. caratteristica, col comando roots è possibile ottenere le sue radici $S_b = \begin{cases} -1,1301 \\ -0,4349 \pm 3,2571i \end{cases} \quad S_{r.l.} = \begin{cases} -0,5780 \pm 2,9587i \end{cases}$ [per entrambe le metodologie si ha una soluzione reale e una coppia cc]

Ricordando che $s = \lambda = -\zeta \pm j\omega$ da cui $\omega_n = \sqrt{\zeta^2 + \omega^2}$ e $\zeta = -\frac{\eta}{\omega_n}$ [come visto a pag. 2] si vuole verificare che ω_n e ζ ottenuti soddisfino le specifiche b) $\omega_{n,b} = 3,28 \quad \zeta_b = 0,1321 \quad ; r.l.) \quad \omega_{n,r.l.} = 3,0131 \frac{\text{rad}}{s} \quad \zeta_{r.l.} = 0,1918$

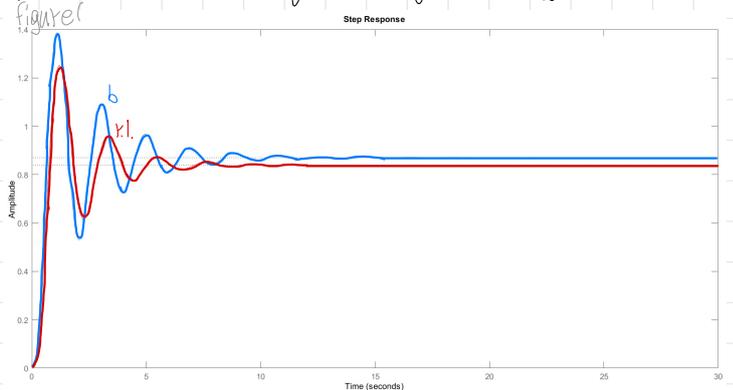
Ottenuti questi sistemi, viene dato un input a gradino $R = \frac{1}{s}$ per verificare che la risposta a regime sia effettivamente 1

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} G_{cl} \cdot r(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot G_{cl} \cdot R(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot G_{cl} \cdot \frac{1}{s} =$$

$$\begin{cases} \lim_{s \rightarrow 0} G_{cl} = \frac{66,99}{76,99} = 0,87 \quad \text{per } K_b \\ \lim_{s \rightarrow 0} G_{cl} = \frac{52,2}{62,2} = 0,84 \quad \text{per } K_{r.l.} \end{cases}$$

Graficamente si può ottenere con il comando step(G_cl,tend)

figure(6)
step(G_cl_b,30)
hold on
step(G_cl_rl,30,'r')



Quindi la traccia del diagramma di Bode prevede i seguenti punti:

- 1) definire la TF di DL col comando $G_{ol} = \text{tf}(\{s \text{ coeff } N(s)\}, \{s \text{ coeff } D(s)\})$ e le specifiche ω_n e ζ , fissare $K (= K_s) = 1$
- 2) tracciare il root locus col comando $rlocus(G_{ol})$ per capire l'andamento e verificare che K scelto di prima rispetti già le specifiche
- 3) tracciare il diagramma di Bode col comando $\text{bode}(G_{ol}, K)$, utilizzando il data tip ricavare l'ampiezza in corrispondenza di $\phi = -180^\circ$, ricordando che $|K_u|_{dB} = 20 \log |K_u| \Rightarrow K_u = 10^{|K_u|_{dB}/20}$, calcolare $GM = \frac{K_u}{K_s}$
- 4) sempre dal diagramma di Bode, ricavare la fase e l'ampiezza in corrispondenza della frequenza richiesta dalle specifiche, calcolare $PM = 180^\circ + \phi$, calcolare il gain ricavato dal diagramma di Bode $K_b = 10^{|K_b|_{dB}/20}$
- 5) definire la TF di CL, con ramo feedforward, col comando $G_{cl} = \text{feedback}(G_{ol}, K_b) \cdot K_b$
- 6) tracciare i poli e gli zeri del sistema di CL col comando $\text{pzmap}(G_{cl})$

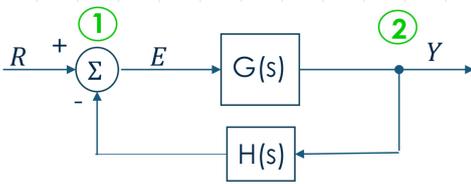
• Input a parabola $R = \frac{a}{s^3} \rightarrow e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1+GH} \frac{a}{s^3} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1+GH} \frac{a}{s^2} = \begin{cases} \infty & \text{se } L=0 \\ \infty & \text{se } L=1 \\ \frac{a}{k_a} & \text{se } L=2 \end{cases}$ - $k_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 GH$ costante nell'errore di accelerazione

TYPE	Step	Ramp	Parable
0	$\frac{a}{1+k_p}$	∞	∞
1	0	$\frac{a}{k_v}$	∞
2	0	0	$\frac{a}{k_a}$

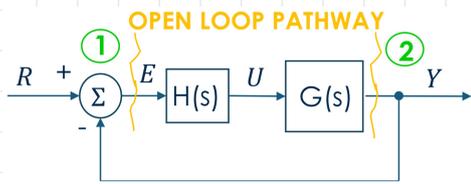
Quindi $e_{ss} = 0 \Leftrightarrow$
 - il sistema è almeno di tipo 1 per l'input a gradino
 - il sistema è almeno di tipo 2 per l'input a rampa
 Conoscendo il valore delle costanti nell'errore di posizione k_p , di velocità k_v e di accelerazione k_a e il tipo di sistema è possibile prevedere se il sistema avrà un valore finito di errore a regime.

RETI DI COMPENSAZIONE

Aggiunta di zeri e poli di compensazione al sistema close loop da compensazione viene effettuata dal blocco $H(s)$ che contiene poli e/o zeri di compensazione, a tal proposito si definiscono preliminarmente le TF e le equazioni caratteristiche per il sistema feedback e feedforward.



- Feedback: per l'equilibrio a.s. mod. $\begin{cases} 1) E = R - HY \\ 2) Y = GE \end{cases} \Rightarrow Y = G(R - HY) = GR - GHY \Rightarrow$
 $G_{cl} = \frac{Y}{R} = \frac{G}{1+GH}$ e l'equazione caratteristica è $1+GH=0$
 Il segnale di errore è $E = R - GHE \Rightarrow (1+GH)E = R \Rightarrow E = \frac{R}{1+GH}$



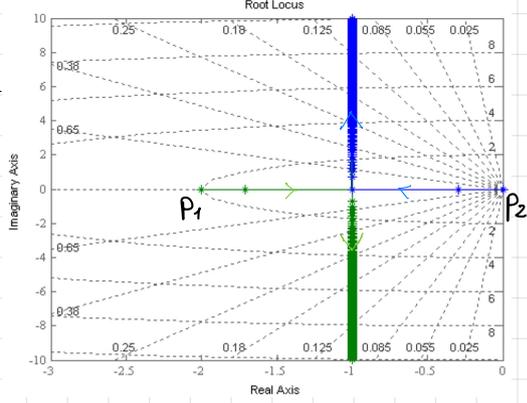
- Feedforward: per l'equilibrio a.s. mod. $\begin{cases} 1) E = R - Y \\ 2) Y = GHE \end{cases} \Rightarrow Y = GH(R - Y) \Rightarrow (1+GH)Y = GHR \Rightarrow$
 $G_{cl} = \frac{Y}{R} = \frac{GH}{1+GH}$ e l'equazione caratteristica è $1+GH=0$
 Il segnale di errore è $E = R - GHE \Rightarrow (1+GH)E = R \Rightarrow E = \frac{R}{1+GH}$

caso di feedback a guadagno unitario

la compensazione si effettua definendo $H(s)$ con poli e zeri di compensazione - oltre ad un blocco proporzionale K - basando $G(s)$ uguale - si considera una $G(s)$ avente due poli p_1 e p_2 con $p_1 < p_2$ e nessuno zero, ad esempio

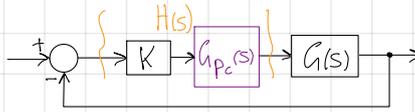
$$G(s) = \frac{1}{s(s+p)} \Rightarrow \begin{cases} p_1 = -p \\ p_2 = 0 \end{cases}$$

Come si nota anche dal root locus, il sistema non ha zeri e ha due poli di OL: p_1 e p_2 . All'aumentare del gain s i poli di CL partono dai poli di OL e si avvicinano fino a coincidere (\rightarrow) e poi vanno a $\pm \infty$, cioè diventano complessi coniugati con parte reale costante (\rightarrow).



La trattazione seguente è fatta disegnando sistemi feedforward, ma la trattazione è uguale per il sistema feedback in quanto l'eq caratteristica è la stessa e quindi anche il root locus.

EFFETTO DELL'AGGIUNTA DI UN POLO DI COMPENSAZIONE SUL SISTEMA C.L.

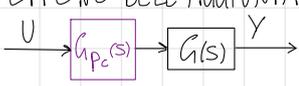


Se polo di compensazione ha TF della forma $G_{pc}(s) = \frac{p_c}{s+p_c}$ per cui $H(s) = \frac{K p_c}{s+p_c}$, quindi il sistema non ha zeri e ha tre poli di OL: p_1, p_2 e il polo di compensazione p_c .

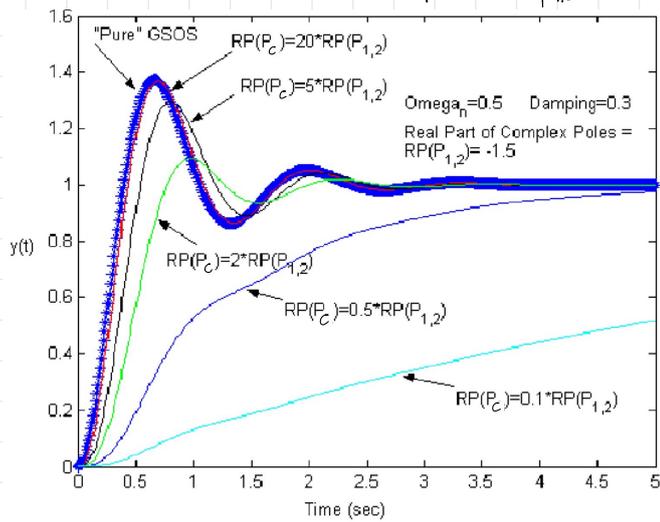
- Se $-p_c < p_1 < p_2 \rightarrow$ all'aumentare del gain K il polo minore (p_c) va a $-\infty$, gli altri due poli (p_1 e p_2) si avvicinano fino a coincidere e poi diventano complessi coniugati e si allontanano sempre - sia su Re che su Im - dal polo minore.

- Se $p_1 < -p_c < p_2 \rightarrow$ all'aumentare del gain K il polo minore (p_1) va a $-\infty$, gli altri due poli (p_c e p_2) si avvicinano fino a coincidere e poi diventano complessi coniugati e si allontanano sempre - sia su Re che su Im - dal polo minore. (25)

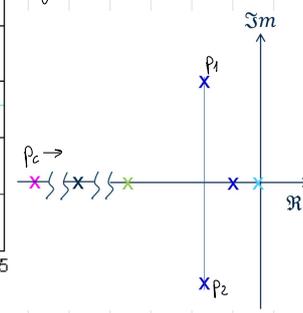
• EFFETTO DELL'AGGIUNTA DI UN POLO DI COMPENSAZIONE SUL SISTEMA O.L.



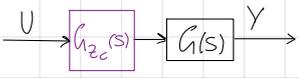
Se polo di compensazione ha TF della forma $G_{pc}(s) = \frac{P_c}{s + P_c}$
 - Per $Re(P_c) \ll Re(P_{1,2}) \rightarrow$ la dinamica prevalente è quella del sistema del 2° ordine perché i poli dominanti sono $P_{1,2}$ e la risposta ha lo stesso andamento di $G(s)$ puro



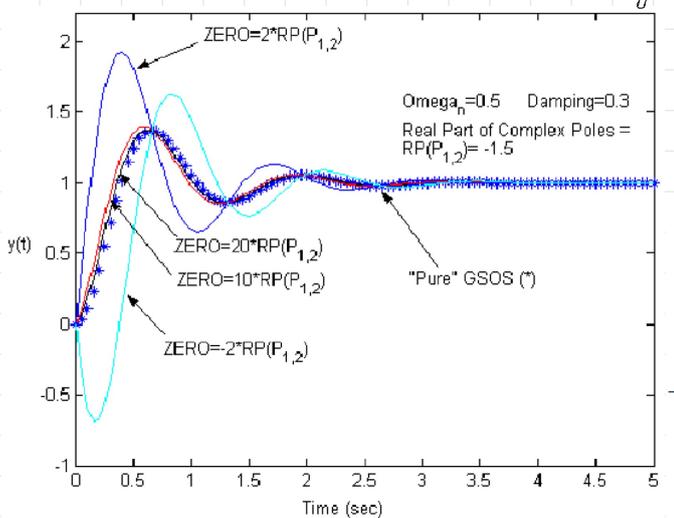
- Per $Re(P_c) < Re(P_{1,2}) \rightarrow$ la dinamica è sempre quella del 2° ordine perché i poli dominanti sono $P_{1,2}$, ma la risposta diventa sempre più lenta ($T \uparrow \Rightarrow f, \omega \downarrow$) e più smorzata ($\zeta \uparrow$)
 - Per $Re(P_c) > Re(P_{1,2}) \wedge Re(P_c) < 0 \rightarrow$ il polo dominante è P_c e si ha subsolenza, cambia la dinamica del sistema che assume sempre più l'andamento di quella di un sistema del 1° ordine.



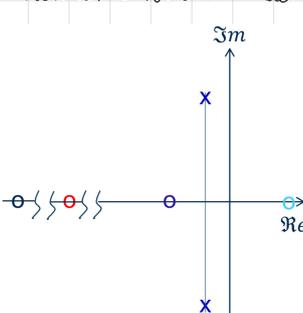
• EFFETTO DELL'AGGIUNTA DI UNO ZERO DI COMPENSAZIONE SUL SISTEMA O.L.



Se zero di compensazione ha TF della forma $G_{zc}(s) = \frac{s + Z_c}{Z_c}$
 - Per $Z_c \ll Re(P_{1,2}) \rightarrow$ la risposta ha la stessa forma di $G(s)$ puro



- Per $Z_c < Re(P_{1,2}) \wedge Z_c > 0 \rightarrow$ la risposta del sistema diventa sempre più veloce ($T \downarrow \Rightarrow f, \omega \uparrow$) e meno smorzata ($\zeta \downarrow$)
 - Per $Z_c > Re(P_{1,2}) \wedge Z_c > 0 \rightarrow$ la risposta del sistema diventa sempre più veloce ($T \downarrow \Rightarrow f, \omega \uparrow$) e meno smorzata ($\zeta \downarrow$) ma si ha una tendenza sinusale ad andare nel verso opposto a quello di $G(s)$ puro, si ha un zero non-minimum phase.



Risumando, per un sistema open loop valgono le seguenti regole:

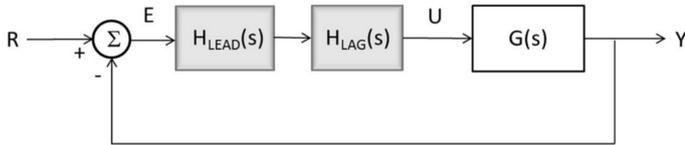
- i) l'aggiunta di un polo o di uno zero di compensazione negativo e molto lontano dai poli di $G(s)$ non cambia la dinamica del sistema e la risposta ha lo stesso andamento di quello di $G(s)$ puro
- ii) man mano che il polo di compensazione si avvicina ai poli di $G(s)$, la risposta diventa sempre più lenta ($\omega \downarrow$) e meno smorzata ($\zeta \uparrow$)
- iii) se il polo di compensazione supera i poli di $G(s)$ diventa il polo dominante, la dinamica cambia e la risposta è come quella di un sistema del 1° ordine
- iv) man mano che lo zero di compensazione si avvicina e supera i poli di $G(s)$ fino a diventare 0, la risposta diventa sempre più veloce ($\omega \uparrow$) e meno smorzata ($\zeta \downarrow$)
- v) se lo zero di compensazione è positivo si ha lo zero non-minimum phase: la risposta ha un tendenza sinusale ad andare nel verso opposto della risposta di $G(s)$.

gestato del sistema. Un controllore PID sarà chiamato PI, PD, P o I in assenza delle rispettive azioni di controllo.

Secondo quanto previsto dalla tabella, sarebbe incredibilmente efficace aumentare selettivamente K_I a bassa ω_c mentre per annullare e_{ss} , limitando invece il suo effetto ad alta frequenza dove ha l'effetto indesiderato di aumentare la sovranregolazione. Tuttavia i regolatori PID non hanno questa caratteristica. Il progetto del regolatore PID risolve nella determinazione degli zeri che meglio vanno a condizionare il sistema.

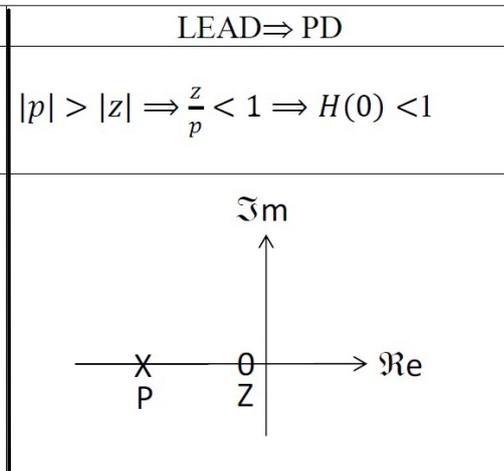
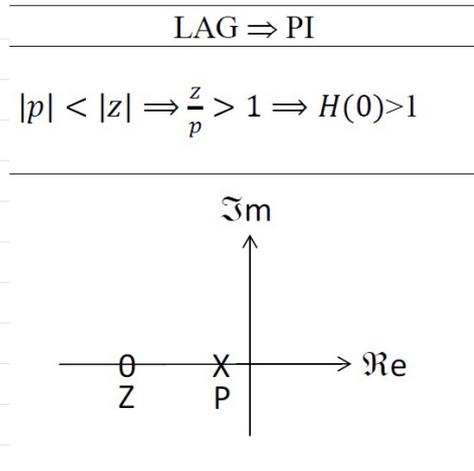
Parameter	Rise time	Overshoot	Settling time	Steady-state error	Stability
K_p	Decrease	Increase	Small change	Decrease	Degrade
K_i	Decrease	Increase	Increase	Eliminate	Degrade
K_d	Minor change	Decrease	Decrease	No effect in theory	Improve if K_d small

COMPENSATORI LEAD E LAG



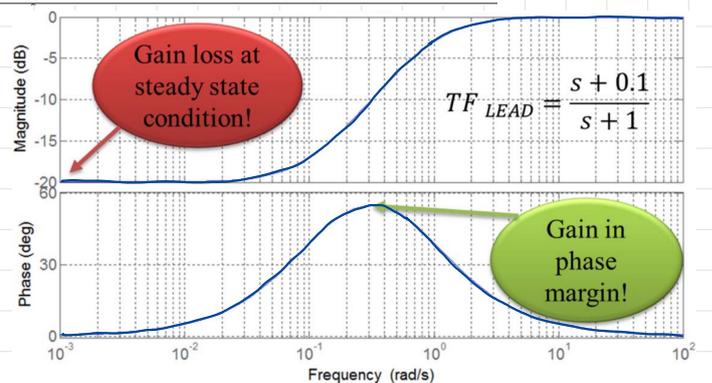
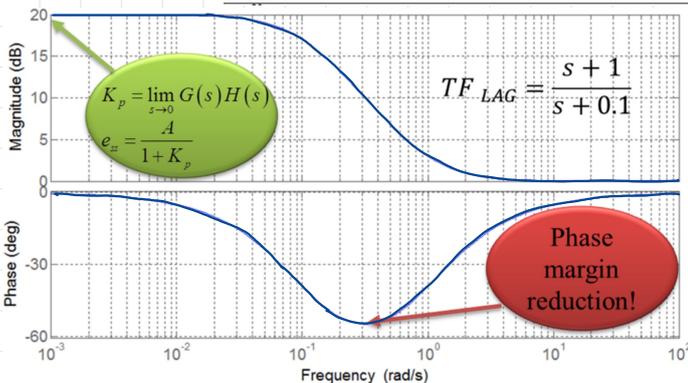
I compensatori lead-lag funzionano esattamente come i regolatori PID, ma in modo molto più intelligente - si mantengono dove è necessario - poiché l'effetto di ciascun termine può essere modulato sulla gamma di frequenze. Per rispettare questa caratteristica bisogna analizzare separatamente il diagramma di Bode dei due fattori, compensatore lead e compensatore lag, che possono essere utilizzati singolarmente o come sistema. Il compensatore lead e il compensatore lag sono definiti con la stessa equazione $H(s) = \frac{s+z}{s+p}$, dove p e z rappresentano i valori costanti di un polo e di uno zero. La differenza tra compensatore lead e compensatore lag risiede nell'ordine di grandezza del rapporto z/p .

Il compensatore lead e il compensatore lag sono definiti con la stessa equazione $H(s) = \frac{s+z}{s+p}$, dove p e z rappresentano i valori costanti di un polo e di uno zero. La differenza tra compensatore lead e compensatore lag risiede nell'ordine di grandezza del rapporto z/p .



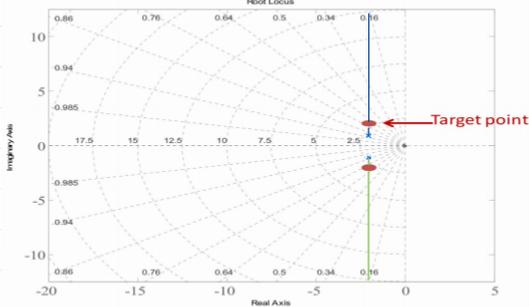
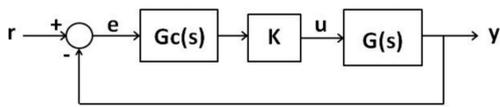
$H(0) > 1 \Rightarrow |H(0)|_{DB} > 0$

$H(0) < 1 \Rightarrow |H(0)|_{DB} < 0$



- Il COMPENSATORE LAG è caratterizzato da $\frac{z}{p} > 1$. Per la sua progettazione bisogna posizionare zero e polo nel modo migliore possibile: più si tengono distanti zero e polo ($\frac{z}{p}$ grande) più il guadagno statico aumenta, ma più la curva della fase scende tendendo a -90° ; più si avvicinano zero e polo ($\frac{z}{p}$ piccolo) meno la fase scende, ma il guadagno statico non aumenta tanto per cui non ha efficacia. Il compensatore lag funziona come un filtro PI, ma la parte integrale è particolarmente efficace solo dove è ω_c

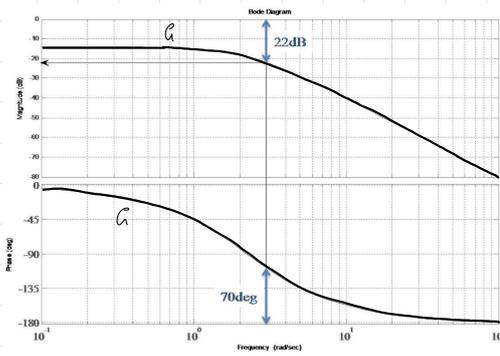
STAGE 2: CHIUSURA DEL LOOP



Nel secondo passaggio si scrive assumendo una forma semplice di compensatore, cioè $G_c(s)=1$, e se ne calcola il root locus. Il punto di design ($\omega_n=3 \frac{\text{rad}}{s}; \zeta=0,7$) è intersecato dal root locus [non è una coincidenza perché il plant è un sistema del secondo ordine, questo non vale nel caso generale], il valore del guadagno necessario per posizionare le radici nel punto di design si ricava con il metodo del root locus (pag. 18), nell'esempio si ricava $K=3,37$. Per confermare il soddisfacimento del valore ricavato, si calcola la step response.

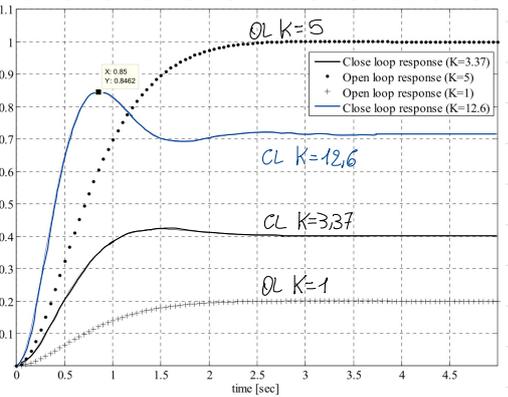
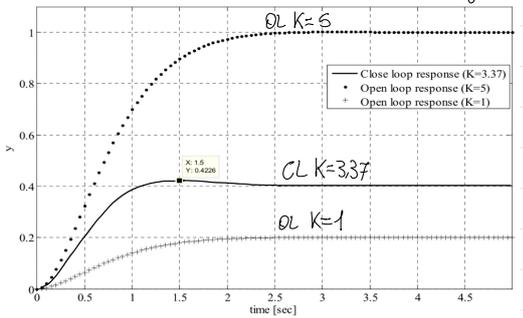
Dalla risposta a gradino si nota che le specifiche di t_p e M_p sono soddisfatte ma la specifica di e_{ss} non è assolutamente rispettata (~60%). Se le specifiche sono: $e_{ss} X$, $t_p V$, $M_p V$ si prova ad individuare K con il metodo del diagramma di Bode (pag. 22) di $G(s)$.

Se le specifiche sono: $e_{ss} X$, $t_p V$, $M_p V$ si prova ad individuare K con il metodo del diagramma di Bode (pag. 22) di $G(s)$.



Sul diagramma di Bode ($K=1$) si traccia il phase margin richiesto dalle specifiche ($PM=70^\circ$) e si nota che si ha in corrispondenza di una pulsazione circa pari a quella richiesta dalle specifiche. In corrispondenza di tale frequenza si ha un guadagno ad anello aperto non nullo (-22 dB), per cui è possibile aggiungere questa differenza di guadagno ($|K|_{dB} = 22 \text{ dB} \Rightarrow K = 10^{22/20} = 12,6$) per avere una frequenza di gain crossover ω_{gc} pari a quella richiesta dalle specifiche ($\omega_n=3 \frac{\text{rad}}{s}$). Si verifica tale valore con la step response.

Dalla risposta a gradino con $K=12,6$ si nota che questo ha ridotto e_{ss} ma a spese della morbidezza; inoltre ha reso la risposta più veloce ma il requisito del t_p ora più soddisfatto con $K=3,37$.



Sembra che il metodo del root locus preveda la caratteristica dinamica a cose long meglio del metodo del diagramma di Bode. Tuttavia in generale non esiste una chiara superiorità di un metodo rispetto all'altro e la scelta di quale utilizzare è una questione di preferenza personale; sebbene il metodo del root locus si rivolga alle specifiche nel dominio del tempo (peak time t_p , settling time t_s , peak overshoot M_p) in modo più diretto, mentre il metodo del diagramma di Bode si rivolge in modo più diretto alle specifiche nel dominio della frequenza (margine di guadagno GM, margine di fase PM, peso di risonanza M_r , larghezza di banda W_B). È meglio considerarli come metodi complementari.

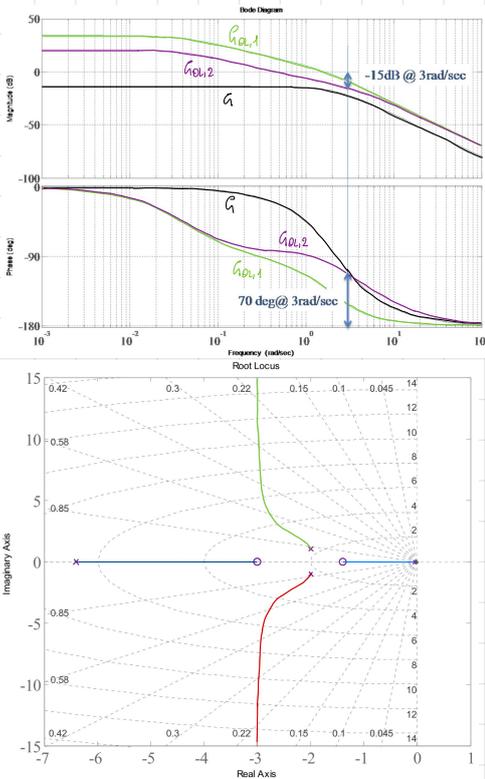
STAGE 3: UTILIZZO DI UN COMPENSATORE LAG

Lo steady-state error può essere migliorato utilizzando un compensatore lag: il principio consiste nell'aumentare selettivamente il guadagno del sistema a bassa frequenza - che influisce su e_{ss} - mantenendo invariato il suo valore ad alta frequenza, in modo da non influire sulla stabilità e sulla velocità di risposta. Occorre calcolare di quanto bisogna aumentare il guadagno a bassa frequenza, si considera $G_c(s)=1$ e si ricava la TF e poi e_{ss} da cui si ricava K :

$$TF \frac{Y}{R} = \frac{G(s)K}{1+G(s)K} = \frac{K}{s^2+4s+(5+K)} \Rightarrow Y = \frac{K}{s^2+4s+(5+K)} \cdot \frac{1}{s}$$

per il teorema del valore finale $Y_{\infty} = \frac{K}{5+K}$ da cui $e_{ss} = 1 - Y_{\infty} = \frac{5}{5+K}$. Per cui $e_{ss} < 0,02 \Rightarrow \frac{5}{5+K} < 0,02 \Rightarrow 5 < 0,1 + 0,02K \Rightarrow K > \frac{4,9}{0,02} = 245$.

Dal metodo del root locus dello stage 2 si è ricavato un valore di guadagno ($K=3,37$) valido in tutta la gamma di frequenze per avere una velocità di risposta corretta. Pertanto alle basse frequenze è necessario un guadagno supplementare ($\frac{245}{3,37} = 72,7 = 37 \text{ dB}$). Per evitare di influenzare il PM, il compensatore non deve apportare un PM significativo alla frequenza richiesta (31)

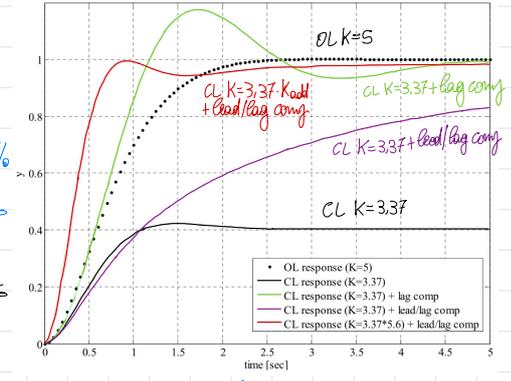


Come già antegato, dal Bode di \$G_{ol,2}\$ si nota che alla frequenza delle specifiche è necessario un guadagno ulteriore \$K_{add}\$ (di 15dB = \$10^{15/20} = 5,6\$) per ottenere il PM richiesto.

Quindi il sistema compensato si definisce come \$SUS_c = feedback(G_{ol,2} \cdot K_{add})\$

Sulla stessa risposta si nota che \$e_{ss} < 2\%\$ (il compensatore lead non ha influenzato il guadagno a bassa frequenza), la risposta al transitorio è migliorata: \$M_p < 2\%\$ e \$t_p \approx 0,3\$ s, quindi tutti i parametri rispettano le specifiche.

Il root locus di \$G_{ol,2}\$ è rappresentato in figura, si noti che l'effetto dello zero a -3 è quello di allontanare il locus dall'asse immaginario. La collocazione dei poli dominanti corrisponde a \$\omega_n = 4,3 \frac{rad}{s}\$ e \$\zeta = 0,63\$. È proprio lo zero a -3 a dare un'elevata velocità di risposta al sistema compensato.

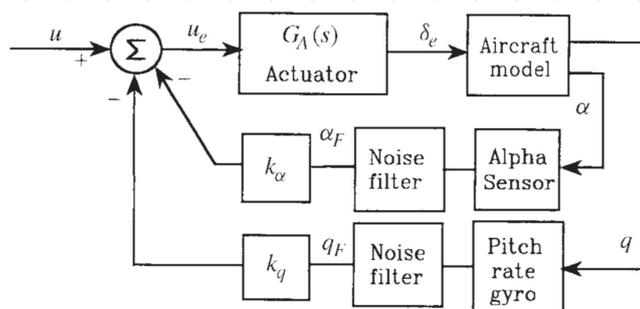


2.5 STABILITY AUGMENTATION SYSTEM (SAS)

La maggior parte dei velivoli commerciali e militari ad alte prestazioni richiedono alcune forme di potenziamento/aumento della stabilità. Alcuni aerei militari sono proprio instabili e sarebbe praticamente impossibile volare senza un sistema di controllo automatico. Il SAS utilizza tipicamente sensori per misurare la velocità angolare degli assi corpo del velivolo e trasmette versioni processate di questi segnali a servomeccanismi che azionano le superfici di controllo aerodinamiche. In questo modo si può generare e utilizzare un momento aerodinamico proporzionale alla velocità angolare e ai suoi derivati per produrre un effetto smorzante sul moto. Se il modo di base è instabile o se si desidera modificare sia lo smorzamento che la frequenza naturale in modo indipendente, saranno necessari ulteriori segnali di feedback.

I SAS sono convenzionalmente progettati separatamente per la dinamica longitudinale e la dinamica latero-dirigenziale, così è possibile il disaccoppiamento della dinamica dell'a/pm nella maggior parte delle condizioni di volo.

SAS LONGITUDINALE (PITCH DAMPER)



Lo scopo di un pitch SAS è quello di fornire frequenza naturale \$\omega_n\$ soddisfacente e smorzamento \$\zeta\$ per il corto periodo. Il modo di corto periodo coinvolge le variabili angolo di incidenza \$\alpha\$ e pitch rate \$q\$, il feedback di queste variabili all'attuatore dell'elevatore modifica la frequenza e lo smorzamento. Se il corto periodo è leggermente smorzato ma per sé non è adeguato, è richiesto solo il feedback del pitch rate \$q\$; se la frequenza e lo smorzamento sono entrambi insoddisfacenti o il modo è instabile, è necessario anche un feedback dell'angolo di incidenza \$\alpha\$. Il modo lungo periodo non è in gran parte influenzato da questi feedback.

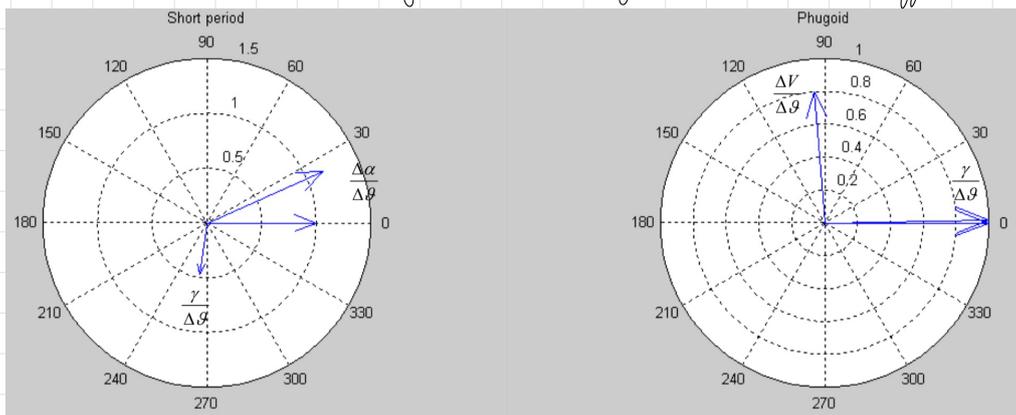
I loop di controllo del feedback esterno vengono spesso chiusi attorno al pitch SAS per fornire, ad esempio, funzioni di autopilota. La regolazione automatica del guadagno di feedback del loop di potenziamento interno può essere eseguita quando i loop di feedback esterni sono attivi, in modo che le prestazioni complessive siano ottimali.

La misurazione dell'angolo di incidenza \$\alpha\$ può essere ottenuta dal sistema dati arca della presa statica (33)

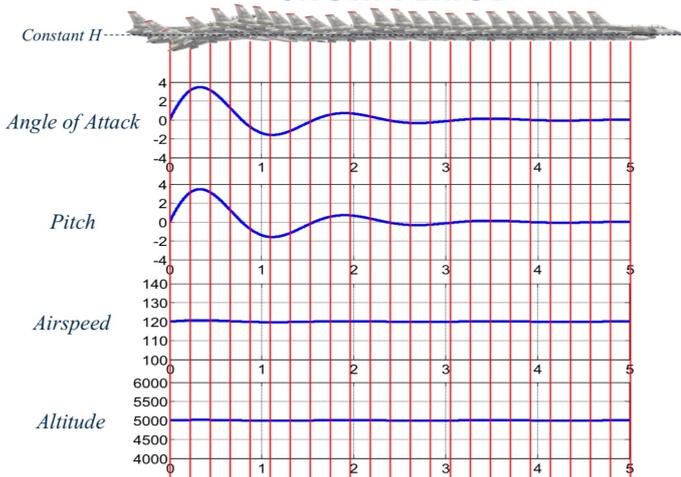
Modal Matrix
COLUMN VECTORS

$$M = [\bar{v}_1 \quad \bar{v}_2 \quad \bar{v}_3 \quad \bar{v}_4]$$

Come visto a pag 4, su M il primo elemento di ogni vettore colonna corrisponde a ΔV , il secondo elemento a $\Delta \alpha$ e così via secondo lo stato.
Non avendo le condizioni iniziali, gli autovalori vengono calcolati come rapporti relativi ΔV .

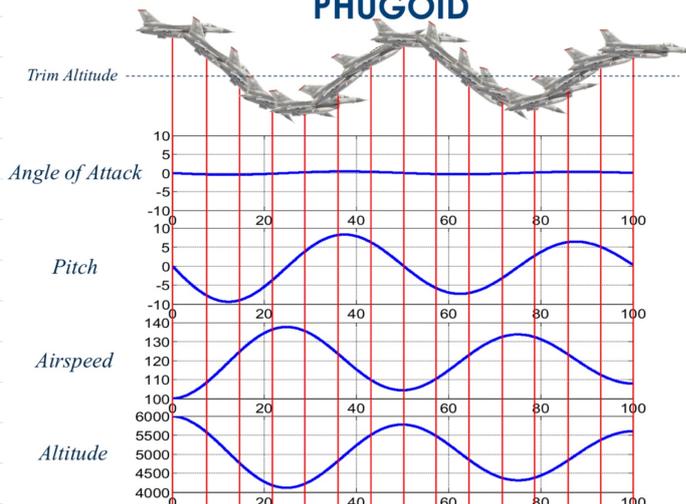


SHORT PERIOD



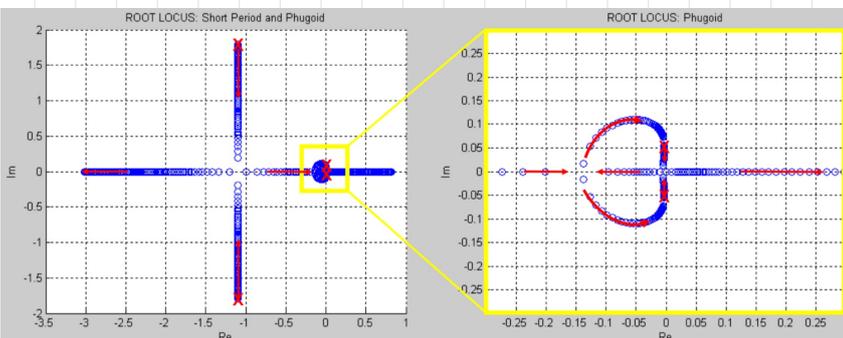
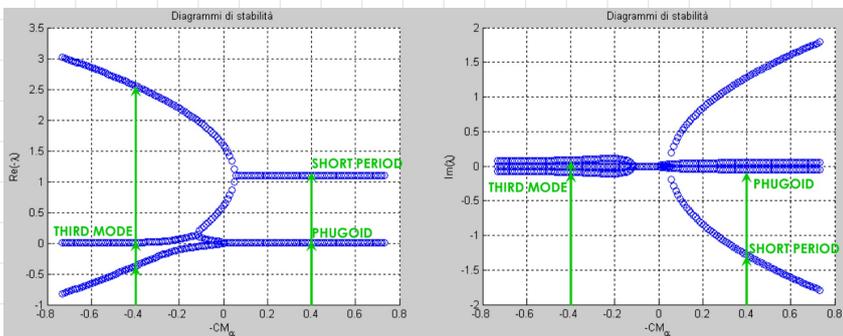
Il pitch θ è oscillatorio, ad alta frequenza, usualmente smorzato

PHUGOID

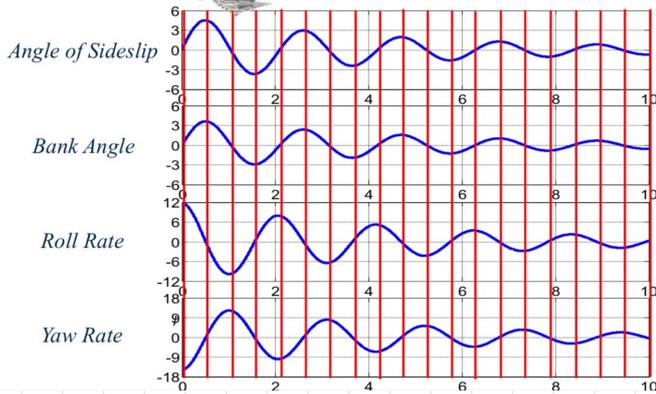


Il pitch θ è oscillatorio, a bassa frequenza, usualmente molto poco smorzato.

Si riportano i diagrammi di stabilità

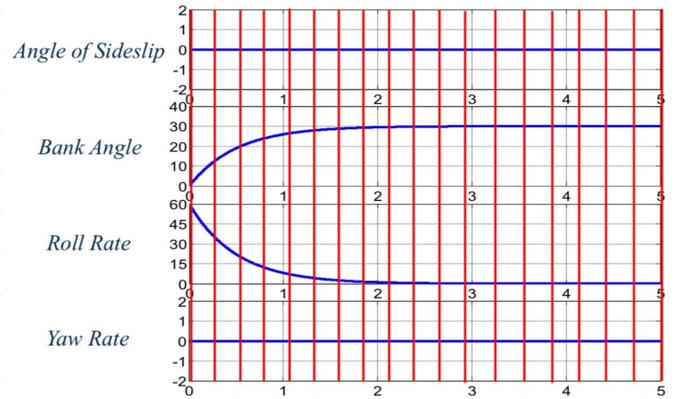


DUTCH ROLL



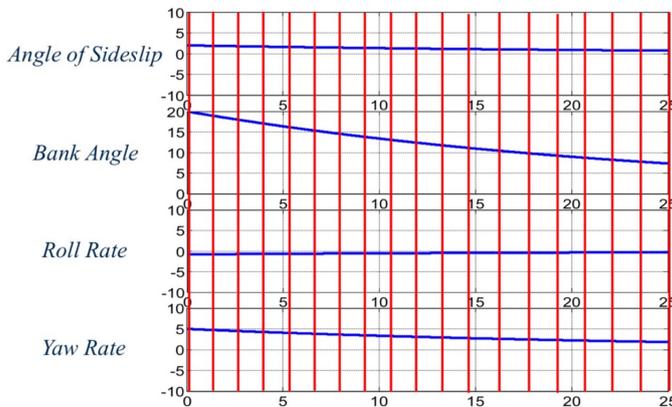
Il bank angle ϕ è: oscillatorio, accoppiato con il moto di rollio/simbardata, a frequenza moderata, da leggermente a fortemente smorzato

ROLL MODE



Il bank angle ϕ è: esponenziale (non oscillatorio), di moto di puro rollio, velocemente convergente

SPIRAL MODE



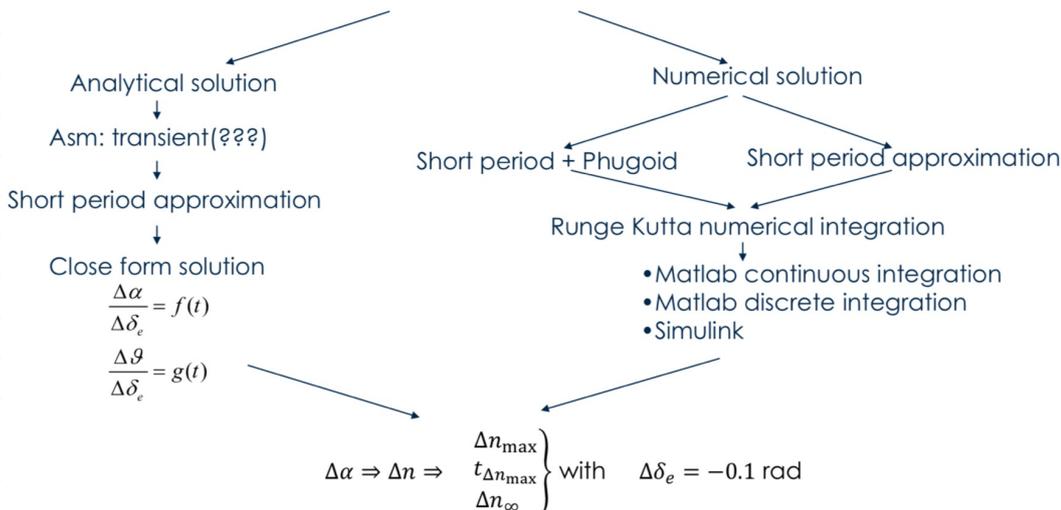
Il bank angle ϕ è: esponenziale (non oscillatorio), di moto a spirale, lentamente convergente o divergente

3.3

ESERC. STEP RESPONSE

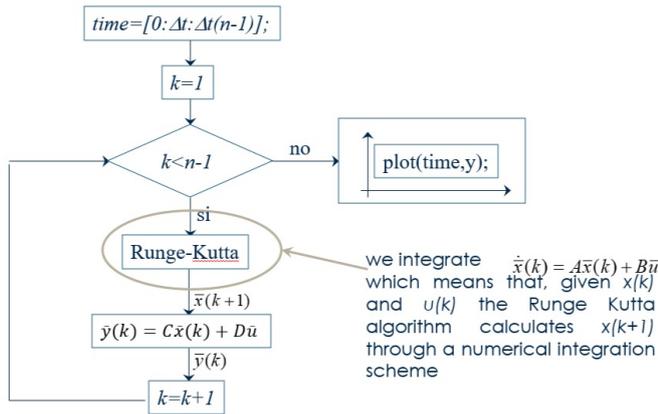
System response (longitudinal dynamics) to a step elevator input

$$\Delta\delta \Rightarrow \Delta\alpha \Rightarrow \Delta n \Rightarrow \text{Structural loads}$$



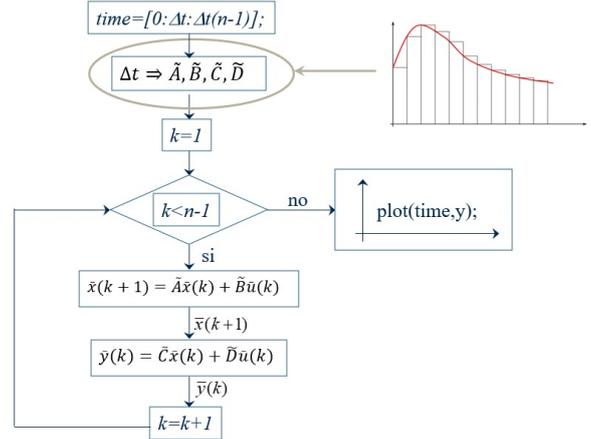
State space system: numerical integration

Matlab: State-Space system continuous $\dot{\bar{x}}(t) = A \cdot \bar{x}(t) + B \cdot \bar{u}(t)$
 $\bar{y}(t) = C \cdot \bar{x}(t) + D \cdot \bar{u}(t)$



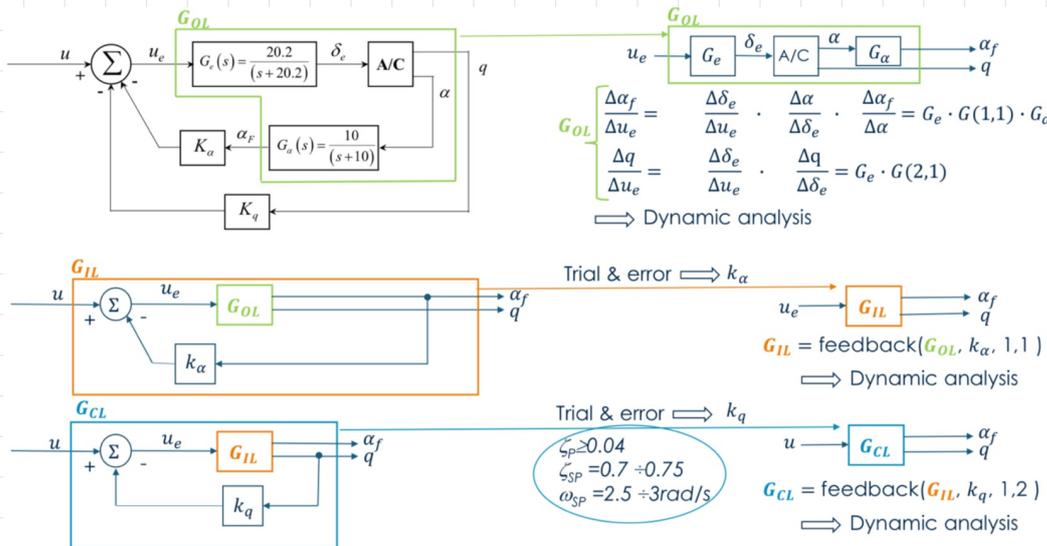
State space system: fixed step numerical integration

Matlab: State-Space system discrete $\bar{x}(k+1) = \tilde{A} \cdot \bar{x}(k) + \tilde{B} \cdot \bar{u}(k)$
 $\bar{y}(k) = \tilde{C} \cdot \bar{x}(k) + \tilde{D} \cdot \bar{u}(k)$



3.4

ESERC. PITCH DAMPER SAS



Qe è il modello di un attuatore con un polo del 1° ordine, rappresenta un sistema fisico: c'è una dinamica del 1° ordine. L'α è il filtro del segnale, va progettato perché non fa parte dell'apm, filtra le alte frequenze date da disturbi esterni all'apm e che disturbano il sistema.

STATE - SPACE FORMULATION

A/C

$$\dot{\bar{x}}(t) = A\bar{x}(t) + B\bar{u}(t) \quad A \in \mathbb{R}^{4 \times 4} \quad B \in \mathbb{R}^{4 \times 1}$$

$$\bar{y}(t) = C\bar{x}(t) + D\bar{u}(t)$$

$$\bar{x} = \{V \quad \alpha \quad \vartheta \quad q\}^T$$

$$\bar{u} = \{\delta_e\}^T$$

$$\bar{y} = \{\alpha \quad q\}^T$$

Actuator

$$G_e = \frac{1}{\tau_e} = \frac{\delta_e}{s + \frac{1}{\tau_e} u_e}$$

$$\delta_e \left(s + \frac{1}{\tau_e} \right) = \frac{1}{\tau_e} u_e$$

$$\delta_e s + \frac{1}{\tau_e} \delta_e = \frac{1}{\tau_e} u_e \Rightarrow \delta_e = -\frac{1}{\tau_e} \delta_e + \frac{1}{\tau_e} u_e$$

$$\bar{x}_e = \{\delta_e\}^T$$

$$\bar{u}_e = \{u_e\}^T$$

$$\bar{y}_e = \{\delta_e\}^T$$

Filter

$$G_f = \frac{1}{\tau_f} = \frac{\alpha_f}{s + \frac{1}{\tau_f} \alpha}$$

$$\alpha_f \left(s + \frac{1}{\tau_f} \right) = \frac{1}{\tau_f} \alpha$$

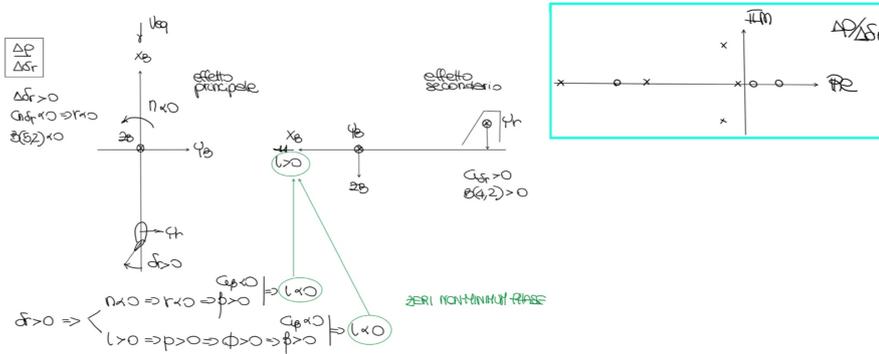
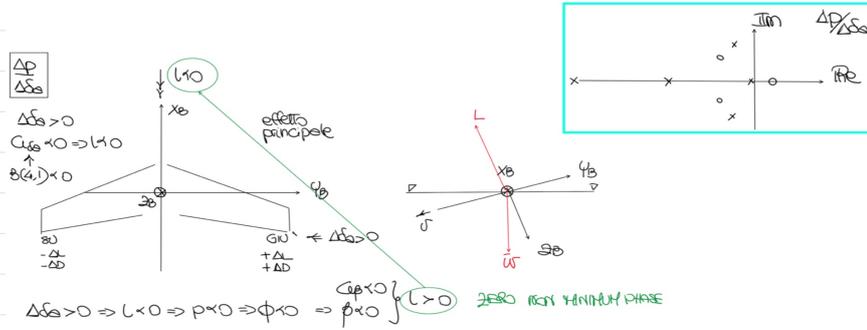
$$\alpha_f s + \frac{1}{\tau_f} \alpha_f = \frac{1}{\tau_f} \alpha \Rightarrow \dot{\alpha}_f = -\frac{1}{\tau_f} \alpha_f + \frac{1}{\tau_f} \alpha$$

$$\bar{x}_f = \{\alpha_f\}^T$$

$$\bar{u}_f = \{\alpha\}^T$$

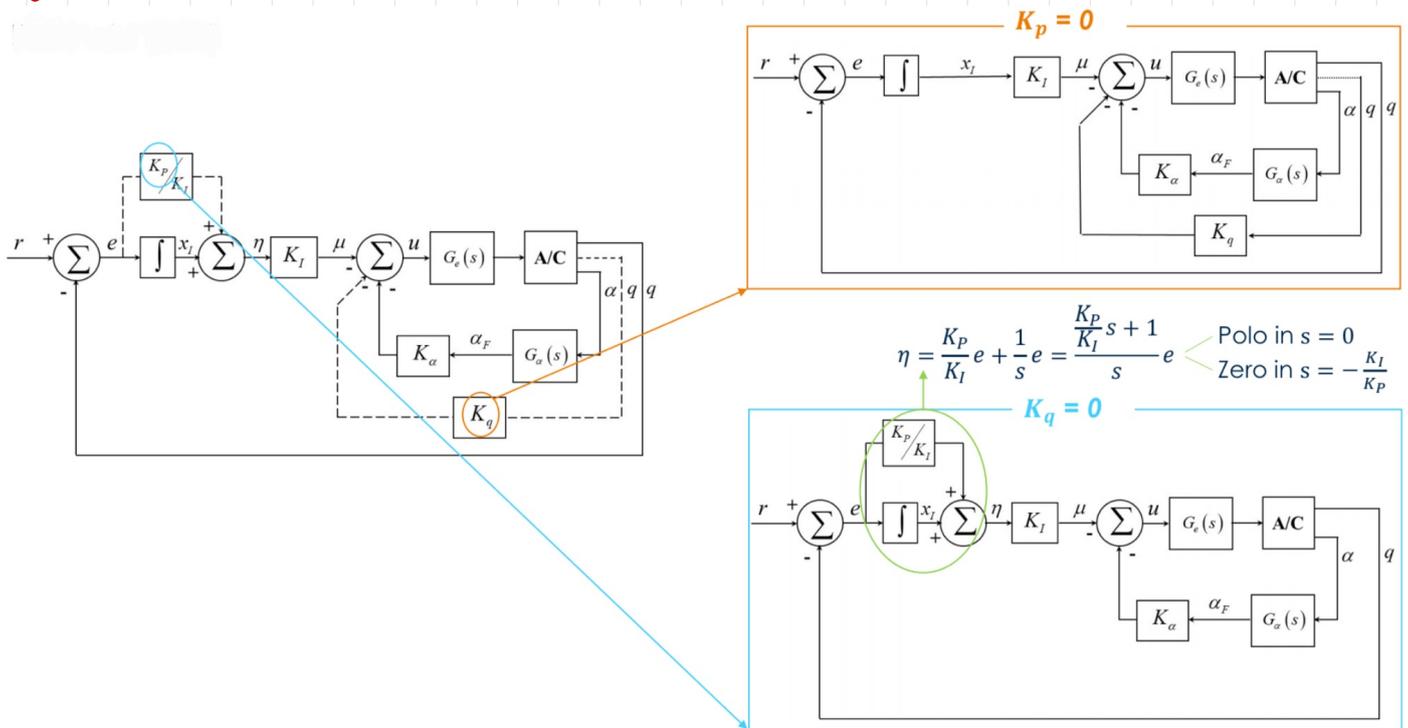
$$\bar{y}_f = \{\alpha_f\}^T$$

ZERO NON-MINIMUM PHASE



3.6

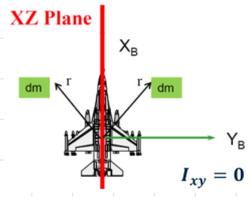
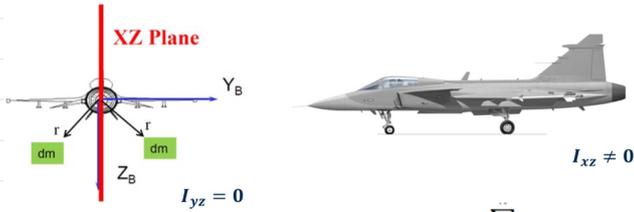
ESERC. PITCH RATE CAS



Il filtro integrativo per annullare l'errore stazionario
 Il feedback a guadagno unitario è un elemento fondamentale nel CAS

Nel SAS l'a/pm ss deve comportarsi come un modello, all'impianto del CAS non c'è l'input del pilota ma una referencia ss $Y=q$ comandata, per cui bisogna essere sicuri che il q prodotto dall'a/pm sia uguale al q comandato, in quanto l'errore deve essere quasi nullo.

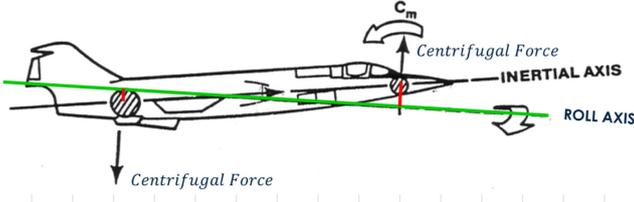
ss) effetto di I_{xz}



$$I_{xz} = \sum_{i=1}^n x_i z_i \cdot m_i$$

$$I_{xy} = \sum_{i=1}^n x_i y_i \cdot m_i$$

$$I_{yz} = \sum_{i=1}^n y_i z_i \cdot m_i$$



Se sistema di riferimento assi principali è un particolare riferimento ad assi corpo, ruotato rispetto al corpo intorno a Y_B .
Le matrici di inerzia valgono rispettivamente
assi corpo
assi principali d'inerzia

$$\bar{I}_B = \begin{bmatrix} I_{xxB} & 0 & -I_{xzB} \\ 0 & I_{yyB} & 0 \\ -I_{xzB} & 0 & I_{zzB} \end{bmatrix}$$

$$\bar{I}_P = \begin{bmatrix} I_{xxP} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yyP} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zzP} \end{bmatrix}$$

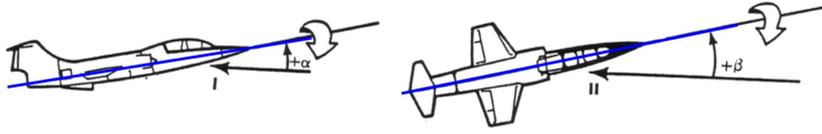
invece non si prodotta d'inerzia l'asse corpo e l'asse principale coincidono. I valori di I_{xx} , I_{zz} , p e Y cambiano leggermente, ma si ha ancora accoppiamento inerziale.

L'accoppiamento inerziale si ha quando l'asse di rollio e l'asse principale di inerzia non coincidono, quindi non dipende dall'asse corpo scelto.

Se l'a/im rollasse intorno all'asse principale di inerzia non ci sarebbe accoppiamento inerziale. Se l'a/im rollasse intorno all'asse di stabilità (vettore vento relativo) la forza centrifuga

ga converrebbe un accoppiamento inerziale.
L'entità dell'accoppiamento inerziale dipende da: offset tra i due assi, distribuzione della massa nel piano XZ, roll rate

sss) accoppiamento cinematico-aerodinamico



Ad α elevato (velo lento), l'accoppiamento cinematico aerodinamico è l'effettivo scambio di angolo di incidenza α e sideslip β durante una manovra di rollio. Lo scopo principale del rollio è di attivare una virata mediante l'utilizzo dell'angolo di attacco

per generare portanza che genera l'accelerazione centripeta richiesta, in questa situazione il sideslip creato dall'accoppiamento cinematico è un sideslip avverso poiché opposto al rollio stesso.
L'entità dell'accoppiamento cinematico-aerodinamico dipende da: roll rate, inerzia, stabilità statica direzionale $C_{m\dot{\beta}}$ e longitudinale $C_{m\dot{\alpha}}$.

Short Period

$$\omega_{n_{sp}} \approx \sqrt{-M_\alpha} = \sqrt{\frac{-\bar{q}_0 S c}{I_{yy}} C_{m\alpha}}$$

$$\zeta_{sp} \approx \frac{-M_q}{2\sqrt{-M_\alpha}} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \frac{-C_{m\dot{\alpha}}}{\sqrt{-C_{m\alpha}}} \sqrt{\frac{\rho S c^3}{I_{yy}}}$$

Dutch Roll

$$\omega_{n_{dr}} \approx \sqrt{N_\beta} = \sqrt{\frac{\bar{q}_0 S b}{I_z} C_{n\beta}}$$

$$\zeta_{dr} = -\frac{N_r}{2\sqrt{N_\beta}} = -\frac{1}{4\sqrt{2}} \frac{C_{n\dot{\beta}}}{\sqrt{C_{n\beta}}} \sqrt{\frac{\rho S b^3}{I_z}}$$

In realtà qualsiasi roll rate provoca uno scambio di α e β ; la sua entità dipende dai relativi valori di I , $C_{m\dot{\alpha}}$, $C_{m\dot{\beta}}$ e $p \rightarrow p \uparrow \Rightarrow$ accoppiamento cinematico \uparrow

Quando il roll rate si approssima un punto in cui la stabilità del velivolo non è sufficiente a contrastare l'accumulo di α e β , questa divergenza può portare all'allontanamento dal controllo del volo.

$$\begin{bmatrix} P \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_S = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix}_B$$

$$\begin{cases} P_S = P \cdot \cos\alpha + R \cdot \sin\alpha \\ 0 = -P \cdot \sin\alpha + R \cdot \cos\alpha \end{cases} \Rightarrow R = P \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = P \cdot \tan\alpha \Rightarrow$$

Aileron
Rudder
Interconnection

$$\dot{Q} = \frac{\Sigma M}{I_{yy}} + \frac{I_{zz} - I_{xx}}{I_{yy}} PR - (P^2 - R^2) \frac{I_{xz}}{I_{yy}} \Rightarrow \text{Pitch departure!}$$

ES. 1: DINAMICA LONGITUDINALE

Table of Contents

Dati aeromobile.....	1
REQU. #1.....	1
Definizione matrice di stato A	2
A adimensionata.....	2
A dimensionata.....	3
Analisi del moto libero.....	4
Root locus.....	5
Analsi del Corto Periodo (SP).....	6
Analsi del Fugoide (PH).....	7
REQU. #2.....	9
Diagramma di Argand Corto Periodo.....	9
Diagramma di Argand Fugoide.....	10
REQU. #3.....	11
Root locus.....	12
Diagrammi di stabilità.....	12

```
clear all
close all
clc
```

Dati aeromobile

Si consideri un velivolo da trasporto con i dati seguenti:

```
c = 4.7; %m
S = 154.7; %m2
eAR = 7;
xg_c = 0.35;
xn_c = 0.5;

m = 45360; % Kg
Jy = 1.7535e6; % kg*m2

alpha_T = 0;
CD_0 = 0.016;
CL_alpha = 4.88;
CL_alphadot = 0;
CM_alphadot = -4.2;
CL_q = 0;
CM_q = -22.9;

g = 9.81; %m/s2
```

REQU. #1

```

A_ad(1,1) = (1/(2*mu))*(CT_V*cos(alpha_eq-alpha_T)-CD_V);
A_ad(1,2) = (1/(2*mu))*(CL_eq-CD_alpha);
A_ad(1,3) = (1/(2*mu))*(-CW_eq);
A_ad(1,4) = 0;

A_ad(2,1) = (-1/(2*mu+CL_alphadot))*(CT_V*sin(alpha_eq-alpha_T)+CL_V+2*CW_eq);
A_ad(2,2) = (-1/(2*mu+CL_alphadot))*(CL_alpha+CD_eq);
A_ad(2,3) = 0;
A_ad(2,4) = (1/(2*mu+CL_alphadot))*(2*mu-CL_q);

A_ad(3,1) = 0;
A_ad(3,2) = 0;
A_ad(3,3) = 0;
A_ad(3,4) = 1;

A_ad(4,1) = (1/Jy_ad)*(CM_V-(CM_alphadot*(CT_V*sin(alpha_eq-alpha_T)+CL_V+2*CW_eq))/(2*mu+CL_alphadot));
A_ad(4,2) = (1/Jy_ad)*(CM_alpha-(CM_alphadot*(CL_alpha+CD_eq))/(2*mu+CL_alphadot));
A_ad(4,3) = 0;
A_ad(4,4) = (1/Jy_ad)*(CM_q+(CM_alphadot*(2*mu-CL_q))/(2*mu+CL_alphadot));
    
```

A dimensionata

Per poter scrivere la matrice di stato A in forma dimensionale, bisogna calcolare diversi parametri:

derivate all'equilibrio

```

t_star = c/(2*V_eq);
t_ad = c/(2*V_eq);

CM_alpha = CL_alpha*(xg_c-xn_c);
CM_eq = 0;

CL_eq = (2*m*g/S)/(rho_eq*V_eq^2);
alpha_eq = CL_eq/CL_alpha;
CD_eq = CD_0+CL_eq^2/(pi*eAR);
CD_alpha = 2*CL_alpha*CL_eq/(pi*eAR);
CT_eq = CD_eq;
CT_V = -2*CT_eq;

%assegnati dalla traccia
CD_V = 0;
CL_V = 0;
CM_V = 0;
    
```

grandezze dimensionate

```

const = 0.5*rho_eq*V_eq*S; %per comodità

L_V = const*(2*CL_eq+CL_V);
L_alpha = const*V_eq*CL_alpha;
L_alphadot = const*V_eq*CL_alphadot*t_ad;
    
```

quest'ultima si può ottenere anche da $\lambda_i = \frac{\hat{\lambda}_i}{t^*}$

Si ottengono i seguenti autovalori:

- 1 coppia complessa coniugata di Short Period (SP) $\lambda_{1,2}$
- 1 coppia complessa coniugata di Phugoid (PH) $\lambda_{3,4}$

Le soluzioni sono della forma $sol_i = Re\left(\rho_i e^{\lambda_i t^*}\right) = \rho_i e^{Re(\lambda_i)t^*} \cos(Im(\lambda_i)t^*)$

Root locus

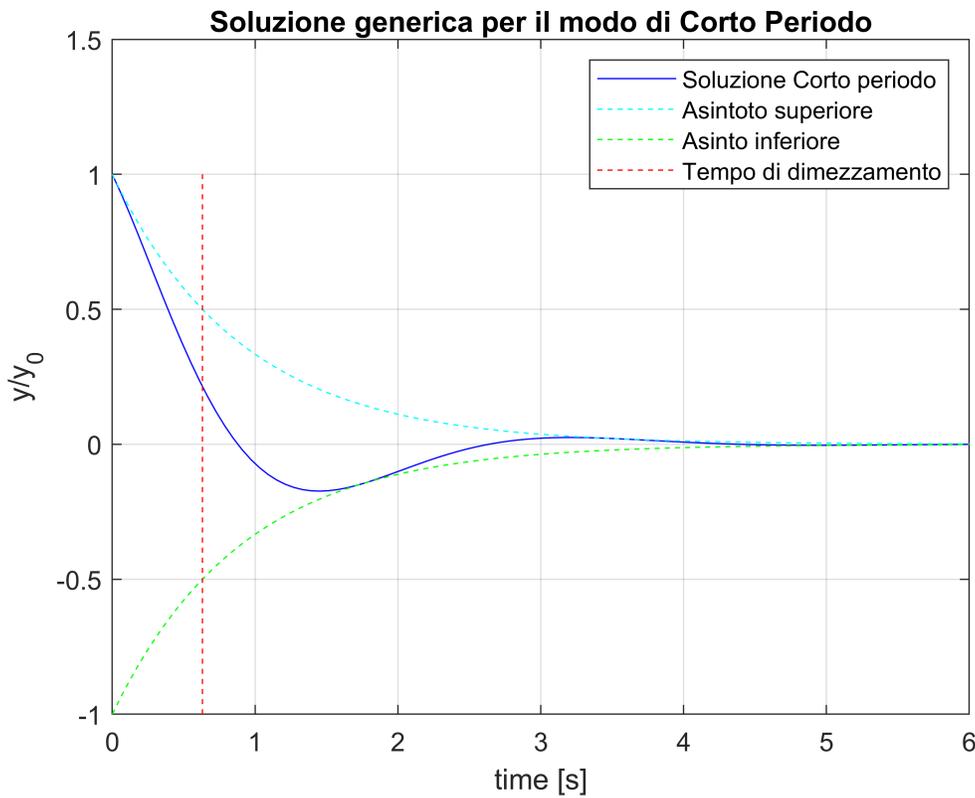
```
figure
scatter(real(lambda(1)), imag(lambda(1)), 80, 'xc', 'LineWidth', 1.5)
hold on
scatter(real(lambda(2)), imag(lambda(2)), 80, 'xg', 'LineWidth', 1.5)
scatter(real(lambda(3)), imag(lambda(3)), 80, 'xb', 'LineWidth', 1.5)
scatter(real(lambda(4)), imag(lambda(4)), 80, 'xr', 'LineWidth', 1.5)
hold off
grid on
title('Root loci')
legend('SP \lambda_1', 'SP \lambda_2', 'PH \lambda_3', 'PH \lambda_4')
xlabel('Re(\lambda)')
ylabel('Im(\lambda)')
```

```

t_ad_SP = t_SP/t_star;
rho_SP = norm(M_ad(:,1));
sol_SP = rho_SP*exp(real(J_ad(1,1)).*t_ad_SP).*cos(imag(J_ad(1,1)).*t_ad_SP);
asintoto1_SP = rho_SP*exp(real(J_ad(1,1)).*t_ad_SP);
asintoto2_SP = -rho_SP*exp(real(J_ad(1,1)).*t_ad_SP);

figure
plot(t_SP,sol_SP,'b',t_SP,asintoto1_SP,'c--',t_SP,asintoto2_SP,'g--')
hold on
plot(t12_SP*ones(100,1),linspace(-1,1),'r--')
grid on
legend('Soluzione Corto periodo','Asintoto superiore','Asinto inferiore','Tempo di dimezzamento')
xlabel('time [s]')
ylabel('y/y_0')
title('Soluzione generica per il modo di Corto Periodo')

```



Analsi del Fugoide (PH)

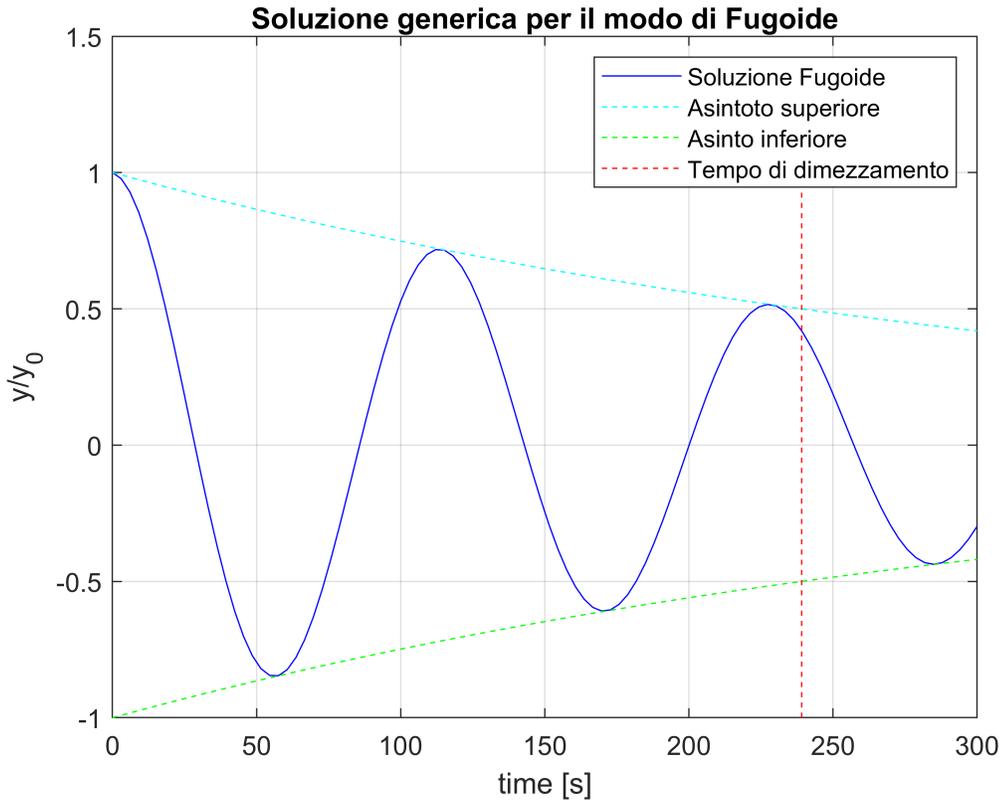
Parametri del PH calcolati considerando A adimensionata

(se si considera A dimensionata bisogna cancellare t^* oppure $/t^*$)

```

T_PH = 2*pi*t_star/abs(imag(J_ad(3,3)));
t12_PH = log(2)*t_star/abs(real(J_ad(3,3)));
N12_PH = t12_PH/T_PH;
omegan_PH = sqrt((real(J_ad(3,3)))^2+(imag(J_ad(3,3)))^2)/t_star;
zita_PH = (-real(J_ad(3,3))/t_star)/omegan_PH;

```

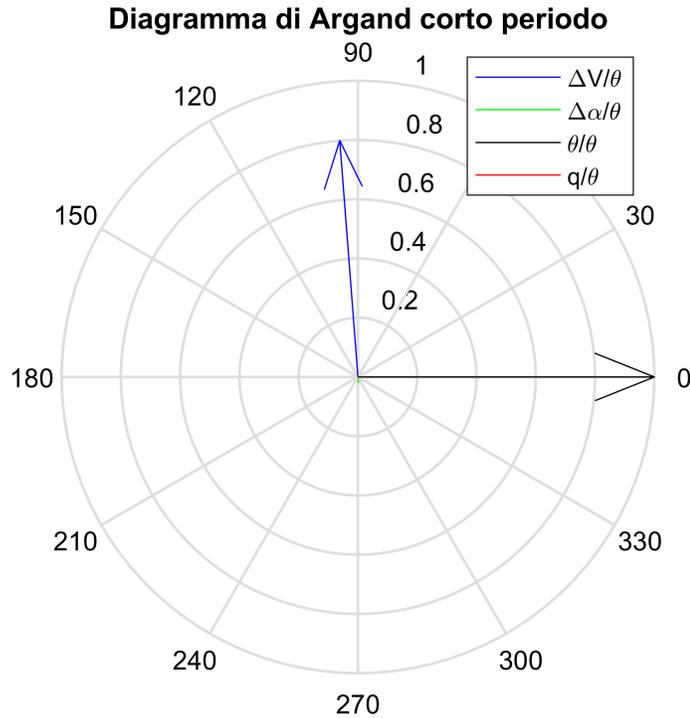


REQU. #2

Costruire i diagrammi di Argand corrispondenti alle soluzioni della quartica di stabilità ottenute precedentemente. La rappresentazione delle variabili $\Delta \hat{V}$ e $\Delta \alpha$ sia fatta assumendo $\theta = 1$ e adottando un verso antiorario per la pulsazione delle oscillazioni, cioè prendendo dei quattro autovalori complessi coniugati i due con la parte immaginaria positiva.

Diagramma di Argand Corto Periodo

```
figure
grafico1=compass(M_ad(:,1)/M_ad(3,1));
set(grafico1(1), 'color', 'b')
set(grafico1(2), 'color', 'g')
set(grafico1(3), 'color', 'k')
set(grafico1(4), 'color', 'r')
legend('\Delta V/\theta', '\Delta alpha/\theta', '\theta/\theta', 'q/\theta')
title('Diagramma di Argand corto periodo')
```



REQU. #3

Tracciare inoltre il luogo delle radici ed il diagramma di stabilità facendo variare il margine statico K_N e quindi la stabilità statica del velivolo.

```
xg_c_new = linspace(0.35,0.54);
CM_alpha_new = CL_alpha*(xg_c_new-xn_c);
M_alpha_new = const*V_eq*c*CM_alpha_new;

lambda_new = zeros(length(xg_c_new),8);
```

8 colonne perché si hanno 8 valori legati agli autovalori: 4 parti reali + 4 parti immaginarie.

Definizione nuova A e J

```
A_new = A;

for i=1:length(xg_c_new)
    a32_new = (1/Jy)*(M_alpha_new(i)-M_alphadot*(L_alpha+T_eq*cos(alpha_eq-alpha_T))/(m*V_eq+L);
    A_new(4,2) = a32_new;
    J_new = eig(A_new);
    lambda_new(i,:) = [real(J_new(1)) imag(J_new(1)) real(J_new(2)) imag(J_new(2)) real(J_new(3)) imag(J_new(3)) real(J_new(4)) imag(J_new(4))];
    if i==73
        temp1 = lambda_new(i, [1 2 3 4]);
        lambda_new(i, [1 2 3 4]) = lambda_new(i, [5 6 7 8]);
        lambda_new(i, [5 6 7 8]) = temp1;
```

Diagramma di stabilità parte reale

```
figure
plot(-CM_alpha_new,-lambda_new(:,1),'b',-CM_alpha_new,-lambda_new(:,3),'b')
hold on
plot(-CM_alpha_new,-lambda_new(:,5),'m',-CM_alpha_new,-lambda_new(:,7),'m')
grid on
title('Diagramma di stabilità ReRe(\lambda)')
xlabel('-C_{M\alpha}')
ylabel('-Re(\lambda)')
legend('SP', '', 'PH', '')
```

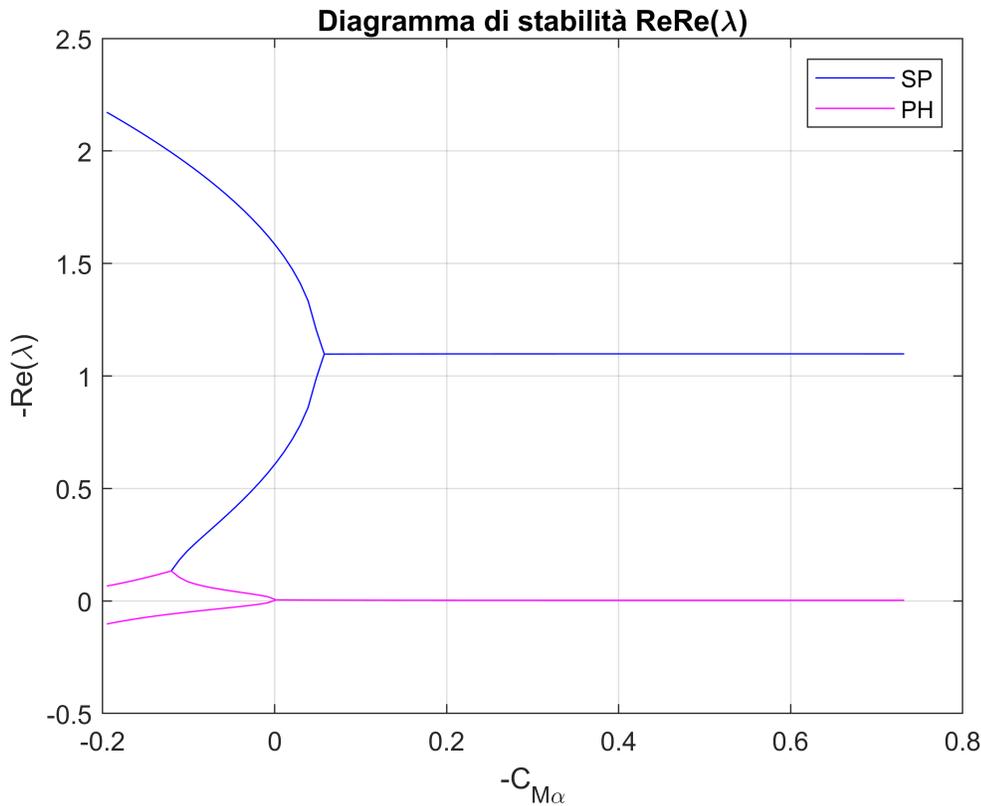


Diagramma di stabilità parte immaginaria

```
figure
plot(-CM_alpha_new,-lambda_new(:,2),'r',-CM_alpha_new,-lambda_new(:,4),'r')
hold on
plot(-CM_alpha_new,-lambda_new(:,6),'g',-CM_alpha_new,-lambda_new(:,8),'g')
grid on
title('Diagramma di stabilità ReRe(\lambda)')
xlabel('-C_{M\alpha}')
ylabel('-Im(\lambda)')
legend('SP', '', 'PH', '')
```

ES. 2: DINAMICA LATERO-DIREZIONALE

Table of Contents

Dati aeromobile.....	1
REQU. #1.....	1
Definizione matrice di stato A	2
A adimensionata.....	2
A dimensionata.....	3
Analisi del moto libero.....	4
Root locus.....	5
Analsi del Roll Mode (RM).....	6
Analsi del Dutch Roll (DR).....	7
Analsi del Modo Spirale (SM).....	8
REQU. #2.....	10
Diagramma di Argand Dutch Roll.....	10

```
clear all
close all
clc
```

Dati aeromobile

Si consideri un velivolo da trasporto con i dati seguenti:

```
b = 9.40; %m
c = 1.6; %m
S = 14.67; % m2

m= 1134; % Kg
Jx = 1285; % kg*m2
Jz = 2667; % kg*m2
Jxz = 220; % kg*m2

CY_b = -0.384;
CY_p = -0.037;
CY_r = 0.21;
Cn_b = 0.065;
Cn_p = -0.024;
Cn_r = -0.092;
Cl_b = -0.098;
Cl_p = -0.5;
Cl_r = 0.105;

g = 9.81; %m/s
```

REQU. #1

```

A_ad(2,5) = 0;

A_ad(3,1) = Cn_b/Jz_addot+Jxz_addot*C1_b;
A_ad(3,2) = Cn_p/Jz_addot+Jxz_addot*C1_p;
A_ad(3,3) = Cn_r/Jz_addot+Jxz_addot*C1_r;
A_ad(3,4) = 0;
A_ad(3,5) = 0;

A_ad(4,1) = 0;
A_ad(4,2) = c/b;
A_ad(4,3) = 0;
A_ad(4,4) = 0;
A_ad(4,5) = 0;

A_ad(5,1) = 0;
A_ad(5,2) = 0;
A_ad(5,3) = c/b;
A_ad(5,4) = 0;
A_ad(5,5) = 0;

```

A dimensionata

Per poter scrivere la matrice di stato A in forma dimensionale, bisogna calcolare diversi parametri:

derivate all'equilibrio

```

%all'equilibrio
V_eq = sqrt((2*m*g/S)/(rho_eq*CL_eq));
CY_eq = 0;
Cl_eq = 0;
Cn_eq = 0;

t_star = c/(2*V_eq);
t_ad = b/(2*V_eq);

Jx_dot = (Jx*Jz-Jxz^2)/(Jz);
Jz_dot = (Jx*Jz-Jxz^2)/(Jx);
Jxz_dot = (Jxz)/(Jx*Jz-Jxz^2);

```

grandezze dimensionate

```

const = 0.5*rho_eq*V_eq*S; %per comodità

Y_V = const*(2*CY_eq+CY_b);
Y_p = const*V_eq*CY_p*t_ad;
Y_r = const*V_eq*CY_r*t_ad;

L_V = const*b*(2*Cl_eq+Cl_b);
L_p = const*V_eq*b*Cl_p*t_ad;
L_r = const*V_eq*b*Cl_r*t_ad;

```

quest'ultima si può ottenere anche da $\lambda_i = \frac{\hat{\lambda}_i}{t^*}$

Si ottengono i seguenti autovalori:

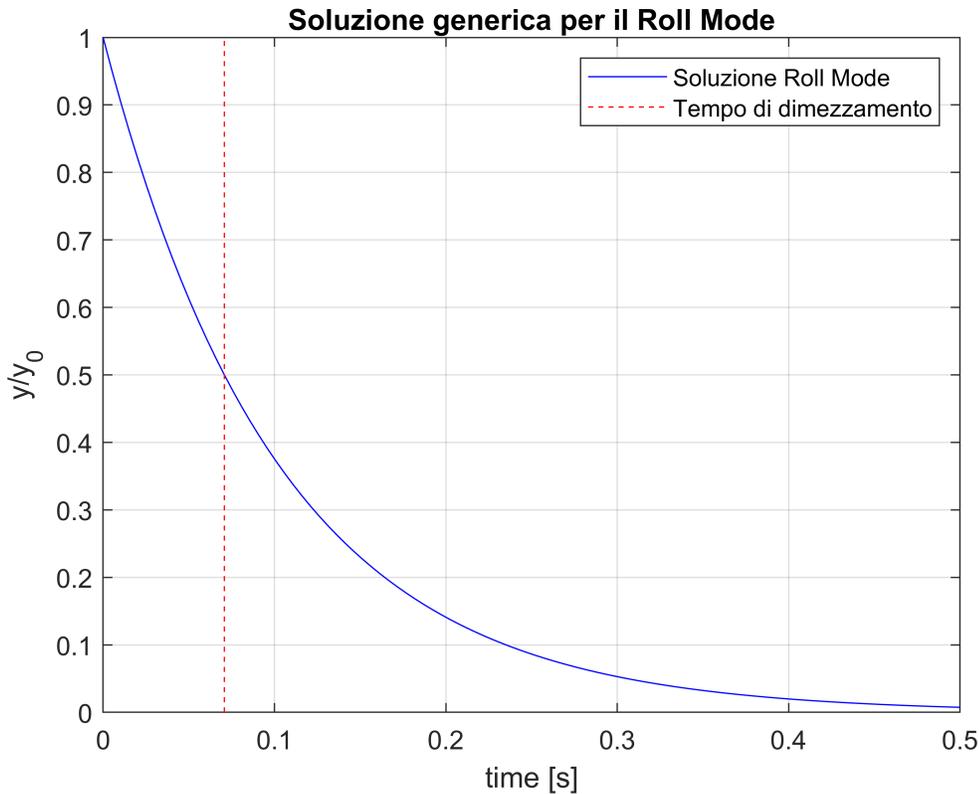
- 1 nullo $\lambda_1 = 0$
- 1 reale di Roll Mode (RM) λ_2
- 1 coppia complessa coniugata di Dutch Roll Mode (DR) $\lambda_{3,4}$
- 1 reale di Spiral Mode (SP) λ_5

Le soluzioni sono della forma $soli = Re(\rho_i e^{\lambda_i t^*}) = \rho_i e^{Re(\lambda_i)t^*} \cos(Im(\lambda_i)t^*)$

Root locus

```
figure
scatter(real(lambda(2)),imag(lambda(2)),80,'xc','LineWidth',1.5)
hold on
scatter(real(lambda(3)),imag(lambda(3)),80,'xb','LineWidth',1.5)
scatter(real(lambda(4)),imag(lambda(4)),80,'xr','LineWidth',1.5)
scatter(real(lambda(5)),imag(lambda(5)),80,'xg','LineWidth',1.5)
hold off
grid on
title('Root loci')
legend('RM \lambda_2','DR \lambda_3','DR \lambda_4','SP \lambda_5','Location','northwest')
xlabel('Re(\lambda)')
ylabel('Im(\lambda)')
```

```
grid on
legend('Soluzione Roll Mode','Tempo di dimezzamento')
xlabel('time [s]')
ylabel('y/y_0')
title('Soluzione generica per il Roll Mode')
```



Analisi del Dutch Roll (DR)

Parametri del DR calcolati considerando A adimensionata

(se si considera A dimensionata bisogna cancellare t^* oppure $/t^*$)

```
T_DR = 2*pi*t_star/abs(imag(J_ad(3,3)));
t12_DR = log(2)*t_star/abs(real(J_ad(3,3)));
N12_DR = t12_DR/T_DR;
omegan_DR = sqrt((real(J_ad(3,3)))^2+(imag(J_ad(3,3)))^2)/t_star;
zita_DR = (-real(J_ad(3,3))/t_star)/omegan_DR;
% stampa valori
fprintf(['T_DR = %.4f s\n' ...
        't12_DR = %.4f s\n' ...
        'N12_DR = %.4f cicli\n ' ...
        'omegan_DR = %.4f rad/s\n' ...
        'zita_DR = %.4f '], ...
        T_DR, t12_DR,N12_DR,omegan_DR,zita_DR);
```

```
T_DR = 2.0519 s
t12_DR = 1.8674 s
```

(se si considera A dimensionata bisogna cancellare $*t^*$ oppure $/t^*$)

```
t12_SM = log(2)*t_star/abs(real(J_ad(5,5)));
tau_SM = -1/(real(J_ad(5,5))*t_star);
% stampa valori
fprintf(['t12_SM = %.4f s\n' ...
        'tau_SM = %.4f s\n'], ...
        t12_SM,tau_SM);
```

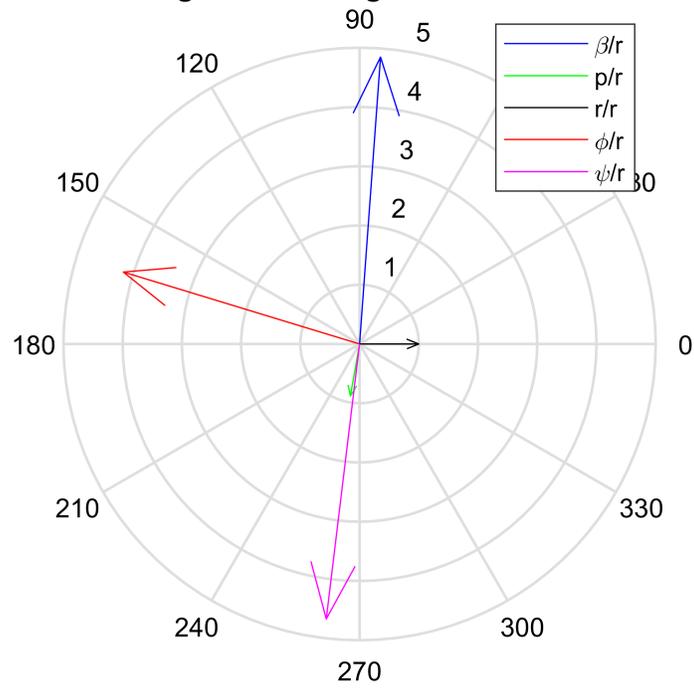
```
t12_SM = 80.0829 s
tau_SM = 115.5352 s
```

Andamento soluzione

```
t_SM = linspace(0,500);
t_ad_SM = t_SM/t_star;
rho_SM = norm(M_ad(:,5));
sol_SM = rho_SM*exp(real(J_ad(5,5)).*t_ad_SM).*cos(imag(J_ad(5,5)).*t_ad_SM);

figure
plot(t_SM,sol_SM,'b')
hold on
plot(t12_SM*ones(100,1),linspace(0,1),'r--')
grid on
legend('Soluzione Spirale','Tempo di dimezzamento')
xlabel('time [s]')
ylabel('y/y_0')
title('Soluzione generica per il modo spirale')
```

Diagramma di Argand Dutch Roll



```
CL_alphadot = 0;
CM_alphadot = -4.2;
CL_q = 0;
CM_q = -22.9;
a_T = 3.82; %[rad-1]
CL_delta = 0;
tau = 0.24;

g = 9.81; %m/s2
```

Il volo rettilineo uniforme orizzontale è caratterizzato da $z_{eq} = 30\,000\text{ ft}$ e $V_{eq} = 800\text{ km/h}$ e si ipotizza che in tali condizioni la spinta T e i coefficienti aerodinamici C_D , C_L e C_M non dipendano dalla velocità.

```
z_eq = 30000*0.3048; %m
V_eq = 800/3.6; %m/s
T_V = 0;
CD_V = 0;
CL_V = 0;
CM_V = 0;
CD_delta = 0;
```

e si ricava la densità alla z_{eq}

```
rho0 = 1.225; %kg/m3
T0 = 288.15; %K
h = 0.0065;
rho_eq = rho0*(1-h*z_eq/T0)^4.256; %kg/m3
```

Di questo velivolo, studiare la risposta a tempo breve ad una manovra istantanea non scontrata **-a gradino-** dell'equilibratore.

REQU. #1, #2

Si determinino: #1 la funzione $\frac{\Delta\alpha}{\Delta\delta_e}$, #2 $\frac{\theta}{\Delta\delta_e}$.

Sistema completo stato-spazio

Occorre innanzitutto definire il sistema stato-spazio.

$$\text{Il sistema è } \begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = A\bar{x}(t) + B\bar{u}(t) \\ \bar{y}(t) = C\bar{x}(t) + D\bar{u}(t) \end{cases}$$

dove il vettore di stato è $\bar{x} = \{\Delta V, \Delta\alpha, \theta, q\}^T$, vettore dei comandi è $\bar{u} = \{\delta_e, \delta_{th}\}^T$, il vettore di output è $\bar{y} = \{\Delta\alpha, \theta, \Delta n\}^T$.

Le condizioni iniziali dei vettori sono:

```
delta_V = 0;
```

```

A(3,1) = 0;
A(3,2) = 0;
A(3,3) = 0;
A(3,4) = 1;

A(4,1) = (1/Jy_ad)*(CM_V-(CM_alphadot*(CT_V*sin(alpha_eq-alpha_T)+CL_V+2*CW_eq))/
(2*mu+CL_alphadot));
A(4,2) = (1/Jy_ad)*(CM_alpha-(CM_alphadot*(CL_alpha+CD_eq))/(2*mu+CL_alphadot));
A(4,3) = 0;
A(4,4) = (1/Jy_ad)*(CM_q+(CM_alphadot*(2*mu-CL_q))/(2*mu+CL_alphadot));

```

Definizione matrice dei comandi B

Per poter scrivere la matrice di stato B in forma adimensionale, bisogna prima calcolare diversi parametri:

```

VV = S_t/S*1_t/c;
mu = m/(rho_eq*S*c/2);
Jy_ad = Jy/(rho_eq*S*(c/2)^3);

CD_delta = 0;
CM_delta = CL_delta*(xg_c-xa_c)-a_T*tau*VV;

% non c'è manetta quindi si annullano tutte le relative derivate
CL_deltath = 0;
CD_deltath = 0;
CT_deltath = 0;
CM_deltath = 0;

t_star = c/(2*V_eq);

```

Il vettore dei comandi è: $\bar{u} = \{\delta_e, \delta_{th}\}^T$ e il vettore di stato è: $\bar{x} = \{\Delta V, \Delta\alpha, \theta, q\}^T$.

Allora è possibile definire la matrice dei comandi B adimensionata:

```

B = zeros(4,2);

B(1,1) = (-1/(2*mu))*CD_delta;
B(1,2) = -CD_deltath/(2*mu)+CT_deltath/(2*mu)*cos(alpha_T);

B(2,1) = (-1/(2*mu+CL_alphadot))*CL_delta;
B(2,2) = -CL_deltath/(2*mu+CL_alphadot)-CT_deltath/(2*mu+CL_alphadot);

B(3,1) = 0;
B(3,2) = 0;

B(4,1) = CM_delta/Jy_ad;
B(4,2) = CM_deltath/Jy_ad;

```

dove il vettore di stato è $\bar{x}_r = \{\Delta\alpha, \theta, q\}^T$, vettore dei comandi è $\bar{u}_r = \{\delta_e\}$, il vettore di output è $\bar{y}_r = \{\Delta\alpha, \theta, \Delta n\}^T$.

Nella seguente definizione si fanno le modifiche ai rispettivi vettori e matrici al fine di ridurli, per cui è necessario prima ridurre il sistema completo per poi farne la riduzione.

Si definiscono:

```
x Rid = x;
x Rid(1) = [];

u Rid = u;
u Rid(2) = [];
```

Definizione matrici ridotte

```
A Rid = A;
A Rid(1,:) = [];
A Rid(:,1) = [];

B Rid = B;
B Rid(1,:) = [];
B Rid(:,2) = [];

C Rid = C;
C Rid(:,1) = [];

D Rid = D;
D Rid(:,2) = [];
```

Definizione sistema stato-spazio ridotto

```
state Rid = {'alpha', 'theta', 'q'};
input Rid = {'elevon'};
output Rid = {'delta_alpha', 'theta', 'delta_n'};
sys Rid Long =
ss(A Rid, B Rid, C Rid, D Rid, 'StateName', state Rid, 'InputName', input Rid, 'OutputName',
output Rid);
```

Funzioni di trasferimento specifiche

Per ricavare le funzioni di trasferimento specifiche occorre prima ricavare la funzione di trasferimento globale del sistema:

```
G = tf(sys Long);
G Rid = tf(sys Rid Long);
```

Funzione alpha/delta_e

L'output è dato dal comando step essendo un comando a gradino. Attenzione che l'input non è unitario ma

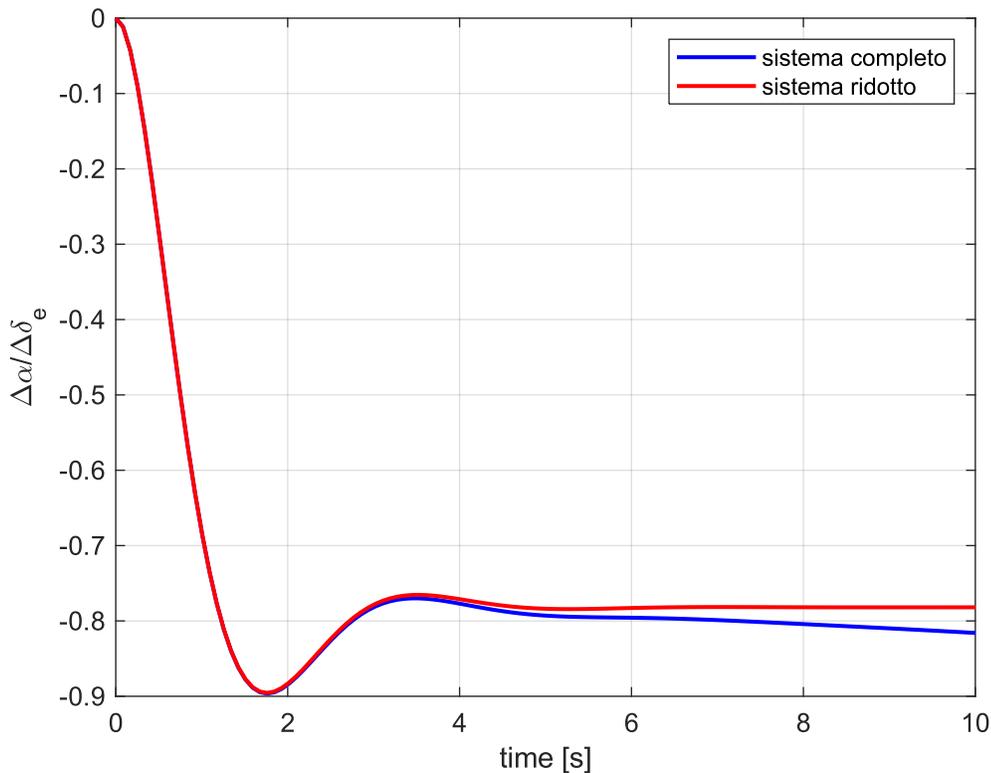
$$\delta_e = -0.1 \text{ rad}$$

```
[Y,tout] = step(sys_long,50000);
Y = Y*delta_e;           %perché l'input non è unitario
t = tout*t_star;

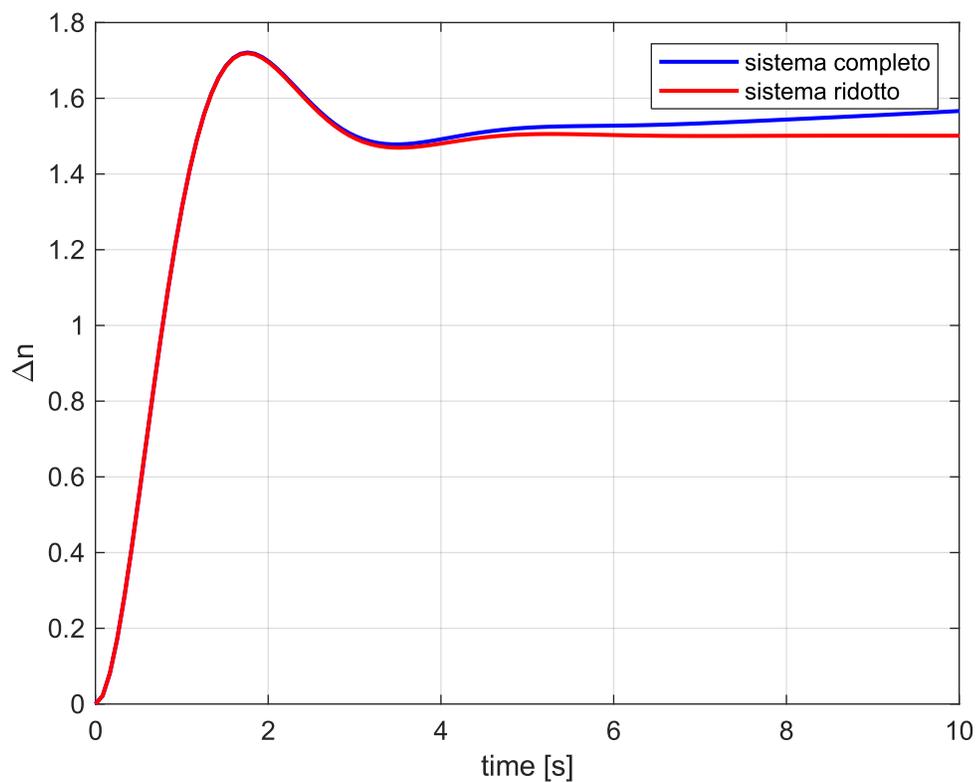
[Y_rid,tout_rid] = step(sysrid_long,50000);
Y_rid = Y_rid*delta_e;   %perché l'input non è unitario
t_rid = tout_rid*t_star;
```

Rappresentazione grafica degli output $\bar{y} = \{\Delta\alpha, \theta, \Delta n\}^T$, i primi due rapportati all'input δ_e

```
figure
plot(t,Y(:,1)/u(1),'b','LineWidth',1.5)
hold on
plot(t_rid,Y_rid(:,1)/u(1),'r','LineWidth',1.5)
grid on
xlim([0 10])
xlabel('time [s]')
ylabel('\Delta\alpha/\Delta\delta_e')
legend('sistema completo','sistema ridotto')
```



```
figure
plot(t,Y(:,2)/u(1),'b','LineWidth',1.5)
```



```

figure
plot(t,Y(:,1)/u(1), 'LineWidth',1.5)
hold on
plot(t,Y(:,2)/u(1), 'LineWidth',1.5)
plot(t,Y(:,3), 'LineWidth',1.5)
grid on
xlim([0 500])
xlabel('time [s]')
legend('\Delta\alpha/\Delta\delta_e', '\theta/\Delta\delta_e', '\Delta\tau')
    
```

```
fprintf('La massima variazione di n si verifica al tempo t_nmax = %0.2f s',t_nmax)
```

La massima variazione di n si verifica al tempo $t_{nmax} = 1.76$ s

REQU. #5

Fattori di contingenza max e min

Si determinino poi i fattori di contingenza massimo Δn_{max} e minimo Δn_{min} raggiunti supponendo l'escursione dell'equilibratore δ da -20° a $+15^\circ$, e un $\delta_{eq} = -4^\circ$

```
delta = CM_delta*CL_alpha-CL_delta*CM_alpha;
delta_n = -CL_alpha/delta*(1-CL_q/(2*mu))*CL_eq*(xg_c-xn_c+CM_q/(2*mu-CL_q));

delta1 = -20*pi/180;    %[rad] posizione limite inferiore equilibratore
delta2 = 15*pi/180;    %[rad] posizione limite superiore equilibratore
delta_eq = -4*pi/180;  %[rad] posizione di equilibrio dell'equilibratore

delta_nmax = (delta1-delta_eq)/delta_n;
delta_nmin = (delta2-delta_eq)/delta_n;

fprintf(['Fattore di contingenza massimo delta_nmax = %0.2f\n' ...
        'Fattore di contingenza minimo delta_nmin = %0.2f\n'], ...
        delta_nmax,delta_nmin)
```

Fattore di contingenza massimo $\delta_{nmax} = 4.20$
 Fattore di contingenza minimo $\delta_{nmin} = -4.98$

Diagramma di manovra

Si tracci il diagramma di manovra considerando i seguenti dati:

```
CL_max = 1.55;
CL_min = -0.88;
V_max = 303;    % [m/s]
nmax_sup = 2;
nmax_inf = -0.5;
```

Si ricorda che $L = nW \Rightarrow nW = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L \Rightarrow n = \frac{\rho V^2 S C_L}{2W}$

```
n_sup = @(V) (rho_eq.*V.^2.*S.*CL_max)./(2*m*g);
n_inf = @(V) (rho_eq.*V.^2.*S.*CL_min)./(2*m*g);
% ricerca degli estremi dei "segmenti"
V = 0:0.1:V_max;
V_supLim = interp1(n_sup(V),V,nmax_sup);
V_infLim = interp1(n_inf(V),V,nmax_inf);

V_sup = 0:0.1:V_supLim;
V_inf = 0:0.1:V_infLim;
```

ES. 4: RISPOSTA IN FREQUENZA

Table of Contents

Dati aeromobile e di volo.....	1
REQU. #1.....	2
Sistema completo stato-spazio.....	2
Definizione matrice di stato A	3
Definizione matrice dei comandi B	4
Definizione matrice di osservazione C.....	5
Definizione matrice di output D.....	5
Definizione sistema stato-spazio completo.....	5
Sistema ridotto stato-spazio.....	5
Definizione matrici ridotte.....	6
Definizione sistema stato-spazio ridotto.....	6
Analisi risposta in frequenza.....	6
Polo-Zero Map.....	7
Diagramma di Bode.....	8

```
clear all
close all
clc
```

Dati aeromobile e di volo

Si consideri il velivolo da trasporto analizzato nelle esercitazioni sulla dinamica longitudinale, quindi con i dati seguenti:

```
c = 4.7; %m
S = 154.7; %m2
eAR = 7;
xg_c = 0.35;
xn_c = 0.50;
xa_c = 0;
S_t = 30.94; %[m2]
l_t = 18.8; %[m]

m = 45360; % Kg
Jy = 1.7535e6; % kg*m2

alpha_T = 0;
CD_0 = 0.016;
CL_alpha = 4.88;
CL_alphadot = 0;
CM_alphadot = -4.2;
CL_q = 0;
CM_q = -22.9;
a_T = 3.82; %[rad-1]
```

per cui si definiscono

```
x = [delta_V; delta_alpha; theta; q];
u = [delta_e; delta_th];
```

Definizione matrice di stato A

Per poter scrivere la matrice di stato A in forma dimensionale, bisogna calcolare diversi parametri:

derivate all'equilibrio

```
t_ad = c/(2*V_eq);

CM_alpha = CL_alpha*(xg_c-xn_c);
CM_eq = 0;

CL_eq = (2*m*g/S)/(rho_eq*V_eq^2);
alpha_eq = CL_eq/CL_alpha;
CD_eq = CD_0+CL_eq^2/(pi*eAR);
CD_alpha = 2*CL_alpha*CL_eq/(pi*eAR);
CT_eq = CD_eq;
CT_V = -2*CT_eq;

%assegnati dalla traccia
CD_V = 0;
CL_V = 0;
CM_V = 0;
```

grandezze dimensionate

```
const = 0.5*rho_eq*V_eq*S; %per comodità

L_V = const*(2*CL_eq+CL_V);
L_alpha = const*V_eq*CL_alpha;
L_alphadot = const*V_eq*CL_alphadot*t_ad;
L_q = const*V_eq*CL_q*t_ad;

D_V = const*(2*CD_eq+CD_V);
D_alpha = const*V_eq*CD_alpha;

T_eq = const*V_eq*CT_eq;
T_V = const*(2*CT_eq+CT_V);

M_V = const*c*(2*CM_eq+CM_V);
M_alpha = const*V_eq*c*CM_alpha;
M_alphadot = const*V_eq*c*CM_alphadot*t_ad;
M_q = const*V_eq*c*CM_q*t_ad;
```

Il vettore di stato è: $\bar{x} = \{V, \alpha, \theta, q\}^T$

```
B = zeros(4,1);

B(1,1) = -D_delta/m;
B(2,1) = -L_delta/(m*V_eq+L_alphadot);
B(3,1) = 0;
B(4,1) = M_delta/Jy;
```

Definizione matrice di osservazione C

Il vettore di stato è: $\bar{x} = \{\Delta V, \Delta\alpha, \theta, q\}^T$ e il vettore di output in questa esercitazione è $\bar{y} = \{\theta\}$.

Allora è possibile definire la matrice di osservazione C dimensionata, estraendo solo la seconda riga della matrice C valida nel caso generico (vedi [Eserc3](#)):

```
C = [0 0 1 0];
```

Definizione matrice di output D

In questo caso specifico il vettore dei comandi è: $\bar{u} = \{\delta_e\}$ e il vettore di output è $\bar{y} = \{\theta\}$.

Allora è possibile definire la matrice di output D adimensionata:

```
D = [0];
```

Definizione sistema stato-spazio completo

```
state = {'V', 'alpha', 'theta', 'q'};
input = {'elevon'};
output = {'theta'};
sys_long = ss(A,B,C,D, 'StateName', state, 'InputName', input, 'OutputName', output);
```

Sistema ridotto stato-spazio

si effettua l'approssimazione di corto periodo.

$$\text{Il sistema ridotto è } \begin{cases} \dot{\bar{x}}_r(t) &= A_r \bar{x}_r(t) + B_r \bar{u}_r(t) \\ \dot{\bar{y}}_r(t) &= C_r \bar{x}_r(t) + D_r \bar{u}_r(t) \end{cases}$$

dove il vettore di stato è $\bar{x}_r = \{\Delta\alpha, \theta, q\}^T$, vettore dei comandi è $\bar{u}_r = \{\delta_e\}$, il vettore di output è $\bar{y}_r = \{\theta\}$.

Nella seguente definizione si fanno le modifiche ai rispettivi vettori e matrici al fine di ridurli, per cui è necessario prima runnare il sistema completo per poi farne la riduzione.

Si definiscono:

```
x_rid = x;
x_rid(1) = [];

u_rid = u;
```