



*centroappunti.it*

**CORSO LUIGI EINAUDI, 55/B - TORINO**

**Appunti universitari**

**Tesi di laurea**

**Cartoleria e cancelleria**

**Stampa file e fotocopie**

**Print on demand**

**Rilegature**

**NUMERO: 2570A**

**ANNO: 2024**

# **A P P U N T I**

**STUDENTE: Scaringi Nicolò**

**MATERIA: Gasdinamica - Prof. Cafiero**

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

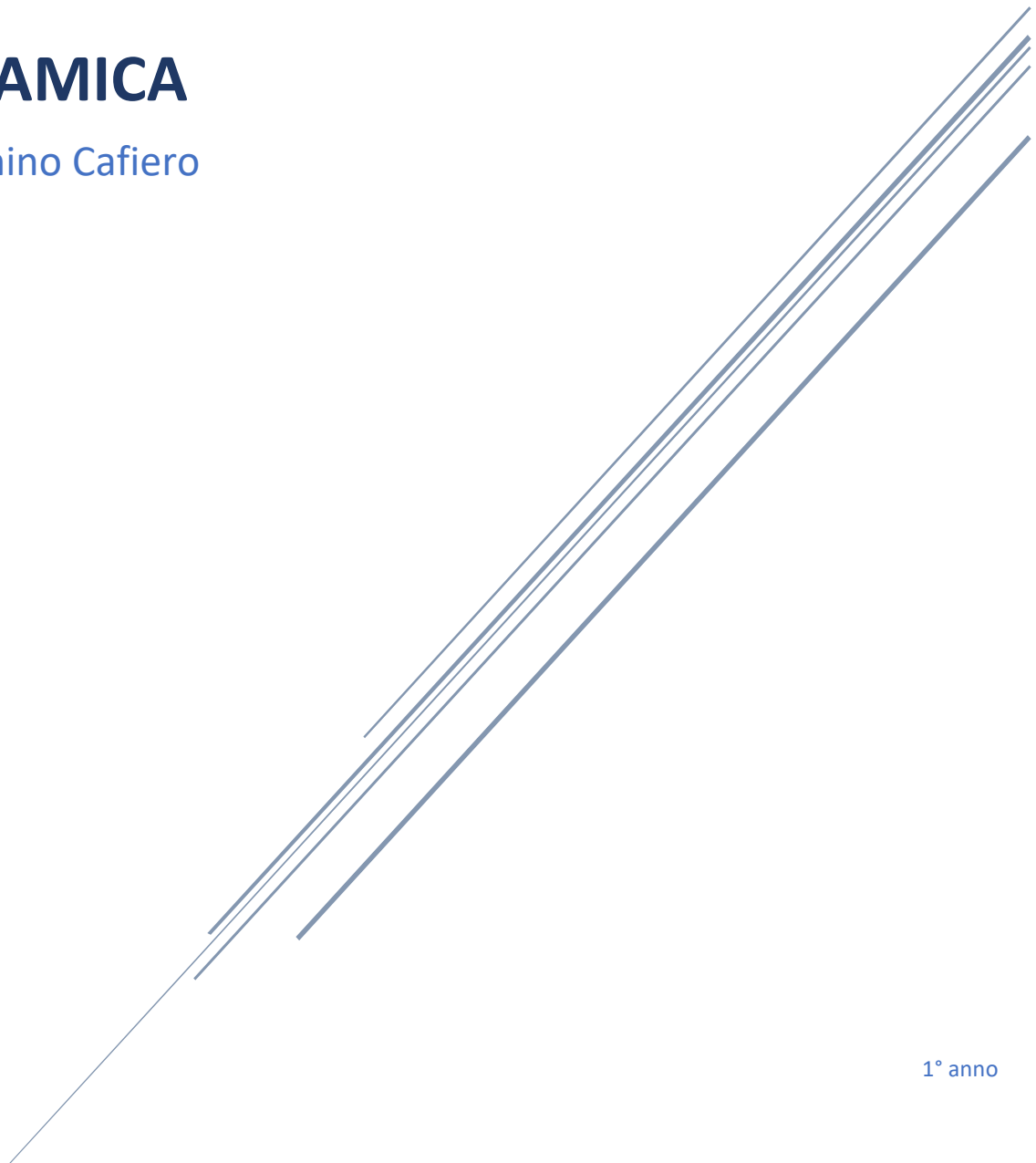
ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTI E NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.  
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.



**Politecnico  
di Torino**

# **GASDINAMICA**

Prof. Gioacchino Cafiero



1° anno

*Nicolò Scaringi*

# INDICE

1.	CONCETTI INTRODUTTIVI	1
1.1	Struttura e teoria cinetica dei gas	1
1.2	Proprietà di trasporto dei fluidi	3
1.3	Risultati di termodinamica	5
2.	EQUAZIONI DI BILANCIO	8
2.1	Ipotesi di approccio al problema	8
2.2	Forma integrale e differenziale delle leggi di bilancio	8
2.3	Teorema di Crocco	10
2.4	Potenziale di velocità	11
3.	FLUSSI UNIDIMENSIONALI	13
3.1	Onda sonora	13
3.2	Moto normale	15
3.3	Flusso di Rayleigh	18
3.4	Flusso di Fanno	19
4.	ONDE D'URTO OBLIQUE IN FLUSSI SUPERSONICI	22
4.1	Moto obliquo	22
4.2	Expansione supersonica	27
4.3	Condizioni di scarico dell'ugello	30
5.	FLUSSI LINEARIZZATI	33
5.1	Potenziale di velocità linearizzato	33
5.2	Coefficiente di pressione linearizzato	33
5.3	Linearizzazione del flusso subsonico compressibile	34
5.4	Linearizzazione del flusso supersonico	35
6.	FLUSSO TRANS-SUPER-IPERSONICO	38
6.1	Flusso transonico e supersonico	38
6.2	Flusso ipersonico	40
7.	EFFETTI DELLA VISCOSITÀ E DELLA CONDUCIBILITÀ IN FLUSSI COMPRESSIBILI	42
7.1	Equazioni del flusso compressibile e viscoso	42
7.2	Strato limite compressibile	43

# 1 CONCETTI INTRODUTTIVI

Si occupa dello studio dei flussi viscosi ad elevate velocità, quindi è di fondamentale importanza il parametro adimensionale numero di Mach  $Mi = V/a$ , dove  $a$ : velocità di propagazione dei piccoli disturbi = velocità del suono.

a) Considerando una particella che si muove a bassa velocità ( $M \ll 1$ , flusso spaziale), il moto della particella è regolato dall'eq. di Bernoulli  $p_0 = p + \frac{1}{2} \rho V^2$   
 L'eq dell'energia  $H = h + \frac{V^2}{2}$  dove  $H$ : entalpia di arresto / ristagno e  $h$ : entalpia sensibile essendo  $\frac{V^2}{2} \ll h$  diventa  $H \approx h = c_p T$ . Quindi  $\begin{cases} T \sim \text{cost} & \text{sistema} \\ p_0 = p + \frac{1}{2} \rho V^2 = \text{cost} & \text{isentrofica} \end{cases}$

b) Considerando valori sufficientemente elevati del no di Mach ( $M > 0,3 \div 0,4$ ) la densità è una funzione di campo e l'eq di Bernoulli non è più valida e si ha  $\begin{cases} p_0 = p \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \text{cost} & \text{isentrofica} \\ H = h + \frac{V^2}{2} = \text{cost} & \text{entalpica} \end{cases}$   
 il termine correttivo non è più trascurabile

## 1.1 STRUTTURA E TEORIA CINETICA DEI GAS

### STRUTTURA DEL GAS

Il gas è uno stato di aggregazione della materia caratterizzato da: molecole libere di muoversi le une rispetto alle altre e fra loro non fissate. Il gas possono assumere caratteristiche sia di incomprimibilità ( $M \ll 1$ ) che di compressibilità ( $M > 0,3 \div 0,4$ ).  
 Spesso si si riferisce al concetto di particella fluida: insieme di molecole che occupano un volume quasi uniforme. L'estensione del volume deve essere: sufficientemente estesa, tale da valutare statisticamente le grandezze medie sul volume della particella di fluido; sufficientemente piccola, in modo da poter assumere ragionevolmente costanti le grandezze all'interno di tale volume. La dimensione della particella viene associata al concetto di volume infinitesimo. La particella porta con sé tutte le informazioni relative alle proprietà del fluido che si possono ritenere ritenere uniformi.

Sfruttando il concetto di mole: una mole contiene un numero di molecole pari al numero di Avogadro:  $N_A = 6,023 \cdot 10^{23}$ ; una grande mole contiene un numero di molecole pari a 1000  $N_A$ . Il litro è:  $1 \text{ Mol} = 1 \cdot 10^3 \text{ mol} = 1 \text{ kmol}$ . In condizioni normali ( $p = 760 \text{ mmHg} = 101325 \text{ Pa}$  e  $T = 273 \text{ K}$ ) 1 mol occupa  $22,4 \text{ l} = 22,4 \text{ dm}^3$ ; 1 Mol occupa  $22,4 \text{ m}^3$ .  
 Si introduce il concetto di densità volumetrica  $n = \frac{\text{mols molecole}}{\text{unità di volume}} = \frac{6,023 \cdot 10^{26}}{22,4} = 2,69 \cdot 10^{25} \frac{\text{molecole}}{\text{m}^3}$ . Un volume  $\rho_0 =$  cubico contiene un numero elevatissimo di molecole,

così consente di considerare il gas come un mezzo continuo di particelle e relative proprietà termofluidodinamiche. La distanza media tra due urti consecutivi costituisce il libero cammino medio molecolare. Per l'aria in condizioni standard ( $p = 760 \text{ mmHg}$  e  $T = 15^\circ = 288 \text{ K}$ )  $\ell = 6,35 \cdot 10^{-7} \text{ mm}$ . Il concetto di fluido continuo è legato al confronto tra la condizione locale di urti successivi e la condizione globale del comportamento del moto baricentrico, il concetto è risultato dato dal rapporto tra il libero cammino medio molecolare  $\ell$  e la lunghezza caratteristica del problema  $L$  (cerca alzo) che prende il nome di numero di Knudsen  $Kn = \frac{\ell}{L}$  -  $Kn < 0,01$  continuo flow (vale ipotesi del continuo)  
 -  $0,01 < Kn < 0,1$  slip flow regime (regime parafatto)  
 -  $0,1 < Kn < 10$  transitional regime (moderatamente parafatto)  
 -  $Kn > 10$  free molecular flow (altamente parafatto)

- Valori tipici sono:
- volo aeronautico  $Kn = O(10^{-2})$
  - volo spaziale  $Kn = O(1)$
  - microfluidodinamica  $Kn = O(1-10)$

Descrizione del comportamento di una massa gassosa: a livello macroscopico si descrive il movimento del baricentro di un insieme di molecole, a livello molecolare si descrivono le interazioni tra le molecole.

La velocità del gas è  $\vec{V}_s = \vec{V} + \vec{V}'$  dove  $\vec{V}$  è la velocità media baricentrica,  $\vec{V}'$  è la velocità di fluttuazione/agitazione termica.  
 Considerando una trama cartesiana si ha  $V = \bar{V} + V' \Rightarrow \begin{cases} u \\ v \\ w \end{cases} = \begin{cases} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{w} \end{cases} + \begin{cases} u' \\ v' \\ w' \end{cases}$

### ENERGIA DEL GAS

Si consideri una trama cartesiana, quindi  $u = \bar{u} + u'$ ,  $v = \bar{v} + v'$ ,  $w = \bar{w} + w'$ . La velocità di fluttuazione media si annulla ( $\bar{v}' = 0$ ) e si ha da  $\overline{uu} = \overline{(\bar{u} + u')(\bar{u} + u')} = \bar{u}\bar{u} + 2\bar{u}u' + u'u' = \bar{u}\bar{u} + \overline{u'u'}$ , idem per le altre componenti  $\overline{vv} = \bar{v}\bar{v} + \overline{v'v'}$ ,  $\overline{ww} = \bar{w}\bar{w} + \overline{w'w'}$ . L'ipotesi  $\overline{u'u'}$ ,  $\overline{v'v'}$ ,  $\overline{w'w'} = 0$  comporta che il moto locale non è correlato al moto locale. L'energia cinetica trascurabile che compete alla singola molecola vale  $\frac{1}{2} m V^2 = \frac{1}{2} m (\bar{V} + V')^2 \Rightarrow \frac{1}{2} m (\bar{u}\bar{u} + \bar{v}\bar{v} + \bar{w}\bar{w}) + \frac{1}{2} m (u'u' + v'v' + w'w')$  dove le prime termine (1)

L'energia interna specifica rappresenta il totale energetico che il sistema può immagazzinare attraverso i gradi di libertà traslazionali e rotazionali.

## CALORI SPECIFICI

Il calore può essere fornito a pressione o a volume costante, in particolare:

• calore specifico per unità di massa  $\left[\frac{J}{kg \cdot K}\right]$

• calore specifico molare  $C = c \cdot M \left[\frac{J}{mol \cdot K}\right]$

$$c_{v,r} = \left(\frac{\partial q}{\partial T}\right)_{v=cost} = \frac{\partial e}{\partial T} = \frac{L}{2} \frac{R}{M}$$

$$C_{v,r} = c_{v,r} M = \frac{\partial E}{\partial T} = \frac{L}{2} R$$

$$c_p = \left(\frac{\partial q}{\partial T}\right)_{p=cost} = \frac{\partial h}{\partial T} = \frac{L+2}{2} \frac{R}{M}$$

$$C_p = c_p M = \frac{\partial H}{\partial T} = \frac{L+2}{2} R$$

[dipende solo dai gdl]

Quindi l'energia interna e l'entalpia possono essere riscritte come:

$$E = \frac{L}{2} RT = C_{v,r} T \Rightarrow e = \frac{L}{2} \frac{R}{M} T = c_{v,r} T$$

$$H = E + RT = \frac{L+2}{2} RT \Rightarrow h = \frac{L+2}{2} \frac{R}{M} T = c_p T$$

Il gas si dice monoatomico perfetto se i calori specifici si possono ritenere costanti con la temperatura, questo succede per  $T < 1000 K$ :  $e = c_{v,r} T \Rightarrow de = c_{v,r} dT \Rightarrow de = c_{v,r} dT$

$$h = c_p T \Rightarrow dh = c_p dT \Rightarrow dh = c_p dT$$

Il rapporto tra i calori specifici definisce il valore della costante  $\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{L+2}{L}$

- per molecole monoatomiche ( $m=1$ )  $L=3 \Rightarrow \gamma=1,67$

$$L=3 \Rightarrow \gamma=1,67$$

- per molecole biatomiche e poliatomiche allineate ( $m=2$  o  $>3$  allineate)  $L=5 \Rightarrow \gamma=1,40$

$$L=5 \Rightarrow \gamma=1,40$$

- per molecole poliatomiche ( $m \geq 3$  non allineate)  $L=6 \Rightarrow \gamma=1,33$

$$L=6 \Rightarrow \gamma=1,33$$

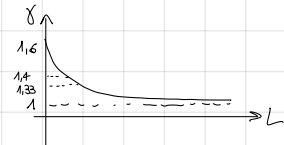
Si illustrano le legami tra  $c_p$ ,  $c_v$  e  $\gamma$ :  $h = e + \frac{p}{\rho} = e + \frac{R}{M} T \Rightarrow c_p T = c_v T + \frac{R}{M} T \Rightarrow c_p - c_v = \frac{R}{M} \Rightarrow$

$$a) \Rightarrow c_p \left(1 - \frac{c_v}{c_p}\right) = \frac{R}{M} \Rightarrow c_p \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) = \frac{R}{M} \Rightarrow c_p = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{R}{M}$$

$$b) \Rightarrow c_v \left(\frac{c_p}{c_v} - 1\right) = \frac{R}{M} \Rightarrow c_v (\gamma - 1) = \frac{R}{M} \Rightarrow c_v = \frac{1}{\gamma-1} \frac{R}{M}$$

L'aria è una miscela composta da:  $\sim 80\%$  di  $N_2$  +  $\sim 20\%$  di  $O_2$ , quindi:  $L=5 \Rightarrow \gamma=1,4$

$$M=29 \frac{kg}{mol} \Rightarrow \frac{R}{M} = \frac{287}{29} \frac{J}{kg \cdot K}$$



## COMPRESSIBILITÀ

Considerando un volumetto di fluido sottoposto ad una determinata pressione  $p$ , si definisce fattore di compressibilità del volume  $\beta = -\frac{1}{v} \frac{dv}{dp} \left[\frac{m^2}{N}\right]$  e rappresenta la variazione percentuale del volume subisce per una variazione unitaria di pressione applicata al volume. Nelle specifiche bisogna aggiungere come è avvenuta la trasformazione: a temperatura costante  $\beta = \beta_T$ , o a entropia costante  $\beta = \beta_s$ . Per i liquidi il valore di  $\beta$  è molto piccolo, pertanto sono da considerare incompressibili; per i gas il valore di  $\beta$  è di 4 ordini di grandezza superiore, pertanto sono altamente compressibili. Ricordando che  $v = \frac{1}{\rho}$  è possibile riscrivere  $\beta$  come:  $\beta = -\frac{1}{v} \frac{dv}{dp} = -\frac{1}{\rho} \frac{d(\frac{1}{\rho})}{dp} = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dp} \Rightarrow \rho dp = \frac{d\rho}{\beta}$

$$\beta > 0 \text{ infatti: } \begin{cases} dp > 0 \text{ produce } dv < 0 \Rightarrow dv/dp < 0 \Rightarrow \beta > 0 \\ dp < 0 \text{ produce } dv > 0 \Rightarrow dv/dp > 0 \Rightarrow \beta > 0 \end{cases}$$

Parametro importante per lo studio della compressibilità è il modo Mach  $M = \frac{V}{a}$ , dove la velocità del suono (lofocromo) è  $a^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{s=const}$  che è legata a  $\beta_s = \frac{1}{\rho} \left(\frac{d\rho}{dp}\right)_{s=const}$ . Se considera un flusso non viscoso, lungo una linea di corrente vale l'eq di Eulero:  $dp = -\rho v dv$

$$a) \text{ se } \rho = const \Rightarrow p + \frac{1}{2} \rho v^2 = p_0 = const \text{ equazione di Bernoulli}$$

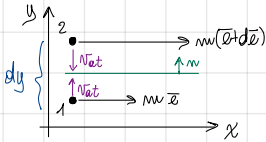
$$b) \text{ se } \rho \neq const \Rightarrow p[\rho(M, \gamma)] = const, \text{ in particolare } dp = -\rho v dv \Rightarrow \frac{dp}{\rho} = -v dv \Rightarrow a^2 = -\frac{v}{\rho} \frac{d\rho}{dv} \Rightarrow \frac{d\rho}{\rho} = -M^2 \frac{dv}{v} \Rightarrow \frac{d\rho}{\rho} = -M^2 \frac{dv}{v} \left[ \begin{matrix} v \uparrow \Rightarrow \text{espanso} \\ v \downarrow \Rightarrow \text{compresso} \end{matrix} \right]$$

In funzione del valore di  $M$  si classificano i seguenti campi di moto:

- $M < 0,3-0,4$  incompressibile
- $M > 0,4$  compressibile  $\Rightarrow$ 
  - $0,4 < M < 0,8$  alto subsonico
  - $0,8 < M < 1,2$  transonico (ci sono sia campi subsonici che supersonici; quando si formano onde d'urto)
  - $1,2 < M < 4$  ipersonico
  - $M > 4$  ipersonico (grande problema di flussi di calore, cambia l'aspetto geometrico)

## 1.2 PROPRIETÀ DI TRASPORTO DEI FLUIDI

Durante la sua evoluzione un gas è caratterizzato da un proprio valore di quantità di moto, energia e massa. Nel caso grandezze sono trasportate dalle singole molecole e scambiato mediante flussi che avvengono per le collisioni a livello per la pressione idrostatica si considerano gli sforzi normali (del tipo  $\sigma_{xx}$ ). Per le proprietà di trasporto si considerano sforzi tangenziali (del tipo  $\tau_{xy}$ ). In correnti gassose dove sono presenti gradienti si generano flussi e ci fanno capo le proprietà di 3

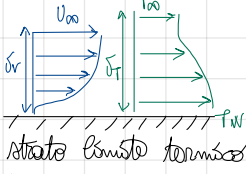


assuma  $n' \approx N_{at}$  e  $dy \approx l$ , la differenza tra il flusso di energia trasportato verso il basso e quello trasportato verso l'alto è:  $-m(\bar{e} + d\bar{e})N_{at} + m\bar{e}N_{at} = -m d\bar{e} N_{at}$  [J/m² s], dove errore per il flusso di calore lungo y  $q_y \approx -m d\bar{e} N_{at} / l$ , stimando  $d\bar{e} = \frac{d\bar{e}}{dy} dy = \frac{dT}{dy} l = c_{vr} \frac{dT}{dy} l$  risulta  $q_y \approx -m c_{vr} N_{at} \frac{dT}{dy}$ . Confrontandola con la legge di Fourier  $q_y = -\lambda \frac{dT}{dy}$  si ricava  $\lambda \approx m c_{vr} N_{at} c_{vr} l = \rho N_{at} l c_{vr} = \mu c_{vr}$

Come per il flusso di qdm anche in questo caso il flusso di energia è diretto dalle zone ad alta T verso zone a bassa T.

La simultanea presenza degli effetti della conducibilità e degli effetti della viscosità sono tenuti in conto da un parametro adimensionale detto n° di Prandtl (rapporto di diffusività)  $Pr = \frac{\mu c_p}{\lambda}$

$Pr = \frac{\mu c_p}{\lambda} \cdot \frac{\rho}{\rho} = \nu \frac{c_p \rho}{\lambda} = \frac{\nu}{K}$  essendo  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$  viscosità cinematica e  $K = \frac{\lambda}{c_p \rho}$  coefficiente di dilatazione termica



L'estensione normale alla parete del campo di velocità entro cui si risentono gli effetti viscosi definisce lo spessore dello strato limite cinematico/viscoso  $\delta_v = \delta_v$  tale che  $u(y = \delta_v) = 99\% U_{\infty}$ . L'estensione del campo di temperatura entro cui si risentono gli effetti della conducibilità definisce lo spessore dello strato limite termico  $\delta_T = \delta_T$  tale che  $T(y = \delta_T) = 99\% T_w$ . Nel caso di strato limite laminare  $\frac{\delta_T}{\delta_v} \propto \sqrt{Pr}$

- In condizioni di compressibilità:
- per  $Pr < 1$  l'energia diffonde più della qdm  $\Rightarrow \delta_T < \delta_v$
  - per  $Pr = 1$  la qdm e l'energia diffondono nello stesso modo  $\Rightarrow \delta_T = \delta_v$
  - per  $Pr > 1$  la qdm diffonde più dell'energia  $\Rightarrow \delta_T > \delta_v$

Un metodo empirico per il calcolo del n° di Prandtl è la formula di Eucken  $Pr = \frac{2L+4}{2L+9} = \frac{48}{88-5}$   
 Per l'aria se il valore ottenuto dalla formula è  $Pr = 0,74$ , sperimentalmente  $Pr = 0,71$

### DIFFUSIVITA' DI MASSA D

In presenza di gradienti di specie, si ha un flusso di specie: il flusso della specie procede da zone ad elevata concentrazione verso zone a bassa concentrazione di quella specie. Questa fenomenologia è regolata dalla legge di Fick:

$J_x = -D \frac{\partial \rho}{\partial x} \left[ \frac{kg}{m^2 s} \right]; J_y = -D \frac{\partial \rho}{\partial y}; J_z = -D \frac{\partial \rho}{\partial z}$

## RICHIAMI DI TERMODINAMICA

### 1.3

#### EQUAZIONI DI STATO DEI GAS PERFETTI

È detto perfetto se qual gas soddisfa la legge che ha il nome di equazione di stato dei gas perfetti  $pV = n \frac{R}{M} T$   
 essendo  $n = \frac{\nu}{M}$  si può scrivere  $pV = \frac{R}{M} T$ , poiché  $\rho = \frac{1}{V}$  allora  $\frac{p}{\rho} = \frac{R}{M} T$ . Ricordando che  $N = \frac{m}{M}$ , allora  $pV = nRT$   
 e poiché  $m = \frac{N}{\rho}$  si può scrivere  $p = \rho RT$

#### PROCESSI REVERSIBILI E IRREVERSIBILI

I processi si rappresentano sul piano di Clapeyron (p,v) o [preferibilmente] sul piano di Gibbs (T,s)

- Uno stato si dice in equilibrio termodinamico se sono assenti  $\nabla p, \nabla T, \nabla s$ .
- Una trasformazione si dice reversibile se nel passaggio dalla condizione iniziale a quella finale non ci sono dissipazioni di energia ( $D_{int} = 0$ ), cioè non sono presenti gradienti  $\Rightarrow$  il passaggio avviene in maniera quasi statica, tra stati successivi di equilibrio (è possibile tornare dalla condizione finale a quella iniziale)
  - Una trasformazione si dice irreversibile se nel passaggio dalla condizione iniziale a quella finale ci sono dissipazioni di energia ( $D_{int} > 0$ ), cioè sono presenti gradienti  $\Rightarrow$  il passaggio avviene in maniera non statica e non quasi statica, non possono stati di equilibrio successivi. (non è possibile tornare dalla condizione finale a quella iniziale)
- Una trasformazione reversibile e adiabatica si dice isentropica.

#### I e II PRINCIPIO

I:  $de = \delta q + \delta L$  l'energia e è una variabile di stato, il suo valore dipende solo dallo stato iniziale e finale; il calore q e il lavoro L non sono variabili di stato, il loro valore dipende dal tipo di trasformazione

Per compressione  $q > 0$  quando fornito dall'ambiente al sistema  
 $L > 0$  quando fornito dal sistema all'ambiente

Considerando la compressione di un sistema  $\delta L = -p dv \Rightarrow de = \delta q - p dv$   
 In un processo adiabatico  $\delta q = 0 \Rightarrow de = \delta L = -p dv$

- $gde$ 
  - $m=1$   $L_t=3; L_r=0 \Rightarrow L=3 \Rightarrow \gamma=1,67$
  - $m=2$  o  $\geq 3$  allineati  $L_t=3; L_r=2 \Rightarrow L=5 \Rightarrow \gamma=1,40$
  - $m \geq 3$  non allineati  $L_t=3; L_r=3 \Rightarrow L=6 \Rightarrow \gamma=1,33$

- compressibilità  $\beta = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dp} = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dp}$ 
  - se  $\rho = \text{cost} \Rightarrow p_0 = p + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{cost}$  eq Bernoulli
  - se  $\rho \neq \text{cost} \Rightarrow \frac{d\rho}{\rho} = -M^2 \frac{dv}{v}$
- $M < 0,3 \rightarrow 0,4$  incompressibile
- $M > 0,4$  compressibile  $\rightarrow 0,4 < M < 0,8$  alto subsonico
- $0,8 < M < 1,2$  transonico
- $1,2 < M < 4$  supersonico
- $M > 4$  ipersonico

### PROPRIETÀ DI TRASPORTO DEI FLUIDI

- IV  $\Rightarrow$  flusso qdm  $\Rightarrow$  sforzo viscoso  $\sim \mu$
- IT  $\Rightarrow$  flusso energia  $\Rightarrow$  scambio calore  $\sim \lambda$
- IS  $\Rightarrow$  flusso massa  $\Rightarrow$  meccanismi diffusivi  $\sim D$

- viscosità dinamica  $\mu$ 
  - Legge di Newton  $\tau_{xy} = \mu \frac{du}{dy}$   $\mu \approx \rho L \text{Re} \left[ \frac{v_{\text{ref}}}{m/s} \right]$   $\mu \propto T^{\frac{1}{2}}$
  - viscosità cinematica  $\nu = \frac{\mu}{\rho} \left[ \frac{m^2}{s} \right]$
- formula di Sutherland  $\mu = S \frac{T^{3/2}}{T + X} \left( \begin{array}{l} \text{aria} \\ S = 1,46 \cdot 10^{-6} \text{ m/s}^2 \text{K} \\ X = 110 \text{ K} \end{array} \right)$  formula monomica  $\frac{\mu}{\mu_{ref}} = \left( \frac{T}{T_{ref}} \right)^{0,7}$
- formula di Wilke  $\mu = \sum_{s=1}^N \mu_s \left( 1 + \sum_{k=1, k \neq s}^N G_{sk} \frac{\mu_k}{\mu_s} \right)^{-1}$  con  $G_{sk} = \frac{\left[ 1 + \left( \frac{\mu_s}{\mu_k} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{M_k}{M_s} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2}{2 \left[ 1 + \left( \frac{M_s}{M_k} \right) \right]^{\frac{1}{2}}}$

- conducibilità termica  $\lambda$ 
  - Legge di Fourier  $q_y = -\lambda \frac{dT}{dy}$   $\lambda = \mu c_v$
  - no di Prandtl  $Pr = \frac{\mu c_p}{\lambda} = \frac{\nu}{\alpha}$ , formula di Eucken  $Pr = \frac{2L+4}{2L+9} = \frac{4\gamma}{8\gamma-5}$
  - stato laminare  $\frac{\nu_r}{\nu_T} \propto \sqrt{Pr}$ , in condizioni di compressibilità
    - $Pr < 1 \Rightarrow \nu_r < \nu_T$
    - $Pr = 1 \Rightarrow \nu_r = \nu_T$
    - $Pr > 1 \Rightarrow \nu_r > \nu_T$

### RICHIAMI DI TERMODINAMICA

- Equazione di stato dei gas perfetti  $pV = m \frac{R}{M} T$ ;  $pV = NRT$ ;  $pN = \frac{R}{M} T$ ;  $\frac{p}{\rho} = \frac{R}{M} T$
- no mole  $N_s = \frac{m_s}{M_s}$ ; concentrazione generale  $\rho_s = \frac{m_s}{M_s}$ ; frazione molare  $x_s = \frac{N_s}{N_t} = \frac{p_s}{p_t} = \frac{V_s}{V_t}$
- Legge di Dalton  $p_t = \sum p_s$   $M_t = \sum (x_s M_s) = \frac{1}{\sum \frac{x_s}{M_s}}$ ;  $x_s = \frac{\rho_s}{M_s} M_t$ ;  $\rho_s = x_s \frac{M_s}{M_t}$

• Processo reversibile: no dissipazione di energia, passaggio tra stati successivi di equilibrio

Processo irreversibile: dissipazione di energia, passaggio repentino

- IPT:  $de = \delta q + \delta L = \delta q - p dV$ ;  $dh = \delta q + v dp$  II PT  $ds \geq \frac{\delta q}{T}$
- $\Rightarrow T ds = dh - v dp$



- Condizioni di arresto: condizioni che soddisfano annullando la velocità di una corrente in maniera isentropica. Lungo ogni linea di corrente si conservano tutte le grandezze di arresto tra cui  $H = h + \frac{V^2}{2} = \text{cost}$ ;  $T_0 = T + \frac{V^2}{2c_p} = \text{cost}$

$$\frac{T_0}{T} = \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)$$

o isentropico  $\frac{p_0}{p} = \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$



## CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO

$$h = m \underline{V} \Rightarrow f = \frac{m \underline{V}}{V} = \rho \underline{V} \quad (\text{eq vettoriale})$$

La variazione temporale del flusso nell'unità di volume è pari alla somma dei flussi di qd m attraverso la superficie e delle forze agenti su superficie e volume.

Le forze agenti sulla superficie sono quelle legate alla pressione  $p$  [quella viscosa si trascurava perché si considera il fluido incompressibile]; le forze di volume  $f$  sono quelle di massa, attrattive, come quella gravitazionale e quella magnetica.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \underline{V} dV = - \int_S \rho \underline{V} \cdot (\underline{V} \cdot \underline{n}) dS - \int_S p \underline{n} dS + \int_V \rho \underline{f} dV \quad \text{eq di bilancio della qd m in forma integrale euleriana}$$

La variazione temporale del flusso è il termine di stazionarietà, legato al m di  $S_r = \frac{f \cdot L_{eq}}{V_0}$ ; il flusso attraverso la superficie è il termine convettivo, rende tutto accoppiato e non lineare; le forze di superficie e volume sono legate al m di  $f_r = \frac{V_0}{g \cdot L_{eq}}$

Se  $S_r \ll 1$  il flusso è stazionario, se  $f_r \gg 1$  le forze di volume sono trascurabili e si ottiene  $\int_S \rho \underline{V} \cdot (\underline{V} \cdot \underline{n}) dS + \int_S p \underline{n} dS = 0$

Si effettua il passaggio alla forma differenziale:  $\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \underline{V} dV = - \int_S \rho \underline{V} \cdot (\underline{V} \cdot \underline{n}) dS - \int_S p \underline{n} dS + \int_V \rho \underline{f} dV \Rightarrow$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \underline{V} dV = - \int_V \nabla \cdot (\rho \underline{V} \underline{V}) dV - \int_V \nabla p dV + \int_V \rho \underline{f} dV = \int_V [-\nabla \cdot (\rho \underline{V} \underline{V}) - \nabla p + \rho \underline{f}] dV = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} (\rho \underline{V}) + \nabla \cdot (\rho \underline{V} \underline{V}) = -\nabla p + \rho \underline{f} \quad \text{eq di bilancio della qd m in forma differenziale euleriana}$$

Le componenti lungo  $x, y, z$  sono:  $x) \frac{\partial}{\partial t} (\rho u) + \nabla \cdot (\rho u \underline{V}) = -\frac{\partial}{\partial x} p + \rho f_x$  con  $\nabla \cdot (\rho u \underline{V}) = \frac{\partial}{\partial x} (\rho u u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho u v) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho u w)$ , quindi si ha

$$x) \frac{\partial}{\partial t} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho u v) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho u w) = -\frac{\partial}{\partial x} p + \rho f_x$$

$$y) \frac{\partial}{\partial t} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v v) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v w) = -\frac{\partial}{\partial y} p + \rho f_y$$

$$z) \frac{\partial}{\partial t} (\rho w) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho w u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho w v) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w w) = -\frac{\partial}{\partial z} p + \rho f_z$$

Si effettua il passaggio alla forma lagrangiana: per semplicità di calcolo si considera un campo 2D

$$x) \frac{\partial}{\partial t} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho u v) = \rho \frac{Du}{Dt} + u \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho u) \frac{\partial u}{\partial x} + (\rho v) \frac{\partial u}{\partial y} + \rho u \frac{\partial \rho}{\partial y} \quad \text{con } u \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial (u)}{\partial x} + \frac{\partial (v)}{\partial y} \right] = u \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{V}) \right] = 0$$

$$\text{quindi si può scrivere } \left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{Du}{Dt} + u \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho u) \frac{\partial u}{\partial x} + (\rho v) \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial x} p + \rho f_x \\ \rho \frac{Dv}{Dt} + v \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho u) \frac{\partial v}{\partial x} + (\rho v) \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y} p + \rho f_y \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial}{\partial x} p + \rho f_x \\ \rho \frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial}{\partial y} p + \rho f_y \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \rho \frac{D\underline{V}}{Dt} = -\nabla p + \rho \underline{f} \quad \text{eq di bilancio della qd m in forma lagrangiana}$$

L'equazione in forma lagrangiana coincide con il II principio della dinamica scritto per unità di volume

Per un fluido in quiete  $\underline{V} = 0$  ( $u = v = w = 0$ ), lungo  $y$  si ha  $\rho = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho f_y$  che integrata conduce alla legge di Stevin  $\Delta p = \rho g \Delta y$

trascurando le forze di volume si ottiene  $\rho \frac{D\underline{V}}{Dt} + \rho \underline{V} \cdot \nabla \underline{V} = -\nabla p$ , e se il flusso è anche stazionario si ha  $\rho \underline{V} \cdot \nabla \underline{V} = -\nabla p \Rightarrow \rho \underline{V} \cdot \nabla \underline{V} = -\nabla p$  da cui si ricava l'equazione di Bernoulli

## CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA

$$h = m \left( e + \frac{V^2}{2} \right) \Rightarrow f = \frac{m \left( e + \frac{V^2}{2} \right)}{V} = \rho \left( e + \frac{V^2}{2} \right) \quad (\text{eq scalare})$$

La variazione temporale del flusso è pari alla somma dei flussi di energia attraverso la superficie, del lavoro delle forze superficiali  $\underline{b}(p)$  e di volume  $(f)$ , del calore  $(\dot{q})$  e della produzione di energia ( $\dot{w}_{visc}$ ,  $\dot{w}_{diff}$ ), per cui si ha:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \left( e + \frac{V^2}{2} \right) dV = - \int_S \rho \left( e + \frac{V^2}{2} \right) (\underline{V} \cdot \underline{n}) dS - \int_S p (\underline{V} \cdot \underline{n}) dS + \int_V \rho (\underline{f} \cdot \underline{V}) dV + \int_V \rho \dot{q} dV - \dot{w}_{visc} - \dot{w}_{diff} \quad \text{eq di bilancio dell'energia in forma integrale euleriana}$$

Si ricava la forma differenziale: per il th di Gauss  $\int_S \rho \left( e + \frac{V^2}{2} \right) (\underline{V} \cdot \underline{n}) dS = \int_V \nabla \cdot \left[ \rho \left( e + \frac{V^2}{2} \right) \underline{V} \right] dV$ ,  $\int_S p (\underline{V} \cdot \underline{n}) dS = \int_V \nabla \cdot (p \underline{V}) dV$

$$\text{per cui } \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \left( e + \frac{V^2}{2} \right) dV = - \int_V \nabla \cdot \left[ \rho \left( e + \frac{V^2}{2} \right) \underline{V} \right] dV - \int_V \nabla \cdot (p \underline{V}) dV + \int_V \rho (\underline{f} \cdot \underline{V}) dV + \int_V \rho \dot{q} dV \Rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \left( e + \frac{V^2}{2} \right) \right] + \nabla \cdot \left[ \rho \left( e + \frac{V^2}{2} \right) \underline{V} \right] = -\nabla \cdot (p \underline{V}) + \rho (\underline{f} \cdot \underline{V}) + \rho \dot{q} \quad \text{eq di bilancio dell'energia in forma differenziale euleriana}$$

Si rifà al I principio della termodinamica per sistemi stazionari ( $\underline{V} = 0$ )  $de = \delta l + \delta q$

$$\text{Per una serie di passaggi matematici } \rho \frac{D}{Dt} \left( e + \frac{V^2}{2} \right) = -\nabla \cdot (p \underline{V}) + \rho (\underline{f} \cdot \underline{V}) + \rho \dot{q} \quad \text{eq di bilancio dell'energia in forma lagrangiana} \quad \textcircled{3}$$

- $\nabla s \neq 0$  se :
- a)  $\nabla H \neq 0$ , cioè se il campo non è omotetico ed è stazionario
  - b) se il campo è stazionario  $\frac{\partial V}{\partial t} \neq 0$
  - c) se il campo è irrotazionale  $\nabla \times V \neq 0$  [La irrotazionalità del campo non è data dalla viscosità ma da  $\nabla s$ ]
- a) Se il flusso è stazionario ( $\partial V / \partial t = 0$ )  $\Rightarrow \nabla \cdot \nabla s = \nabla H - \nabla \times (\nabla \times V)$
- aa) se  $\nabla \times V = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \nabla s = \nabla H$
  - ab) se  $\nabla H \neq 0$  e / o  $\nabla s \neq 0 \Rightarrow \nabla \times (\nabla \times V) = \nabla H - \nabla \cdot \nabla s$  il campo è irrotazionale
  - ac) se  $\nabla H = 0$  e  $\nabla s = 0 \Rightarrow \nabla \times (\nabla \times V) = -\nabla \cdot \nabla s$  il campo è ancora irrotazionale per i gradienti di entropia
- b) Se il flusso è stazionario ( $\partial V / \partial t \neq 0$ )
- ba) se  $\nabla H = 0$  e  $\nabla \times V = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \nabla s = \frac{\partial V}{\partial t}$  la sorgente di entropia è l'instazionarietà del flusso
  - bb) se  $\nabla H = 0$  e  $\nabla s = 0 \Rightarrow \nabla \times (\nabla \times V) = \frac{\partial V}{\partial t}$  l'instazionarietà del flusso lo rende irrotazionale
- campo irrotazionale  $\nabla \times V = 0$   
 campo omotetico  $\nabla H = 0$   
 campo omocentrico  $\nabla s = 0$

## EQUAZIONE DI EULERO

Si riprende l'eq del bilancio della qdm su forma lagrangiana  $\rho \frac{dV}{dt} = \rho \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \nabla \cdot \nabla V \right) = -\nabla p + f$  e si assume: forze di massa nulle  $f=0$ , campo stazionario  $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$ , campo irrotazionale  $\nabla \times V = 0$  quindi  $\rho \nabla \cdot \nabla V = -\nabla p$ . Sfruttando l'identità vettoriale  $\nabla \times (\nabla \times V) = \nabla(\nabla \cdot V) - \nabla \cdot \nabla V$  si ottiene  $\rho \nabla(\frac{V^2}{2}) = -\nabla p \Rightarrow \rho d(\frac{V^2}{2}) = -dp \Rightarrow$

$dp = -\rho V dV$  eq di Eulero

per cui si ha  $\begin{cases} dp > 0 \Rightarrow dV < 0 \\ dp < 0 \Rightarrow dV > 0 \end{cases}$  se  $\rho = \text{cost}$   $d(\rho \frac{V^2}{2}) = -dp \Rightarrow d(\rho + \rho \frac{V^2}{2}) = 0 \Rightarrow \rho + \rho \frac{V^2}{2} = p_0 = \text{cost}$  eq di Bernoulli

### 2.4

## POTENZIALE DI VELOCITÀ

Se data la grandezza  $A$ . Se il campo è irrotazionale  $\nabla \times A = 0$ , allora il campo può essere espresso come il gradiente di una scalare  $A = \nabla \phi$ , infatti  $\nabla \times \nabla \phi = 0$ , lo scalare prende il nome di potenziale.

Se  $V(x, y, z)$  un campo vettoriale di velocità per il quale risulta  $\nabla \times V = 0$  (campo irrotazionale). In base all'identità vettoriale si può esprimere  $V = \nabla \phi$ , dove  $\phi$  è il potenziale di velocità.

$$\begin{cases} V = u \hat{i} + v \hat{j} + w \hat{k} \\ V = \nabla \phi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \phi_x \\ v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \phi_y \\ w = \frac{\partial \phi}{\partial z} = \phi_z \end{cases}$$

Per un flusso stazionario l'eq di continuità in forma differenziale euleriana è  $\nabla \cdot (\rho V) = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0 \Rightarrow$

$$\rho \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho \frac{\partial w}{\partial z} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0$$

se  $\nabla \times V = 0$  si può scrivere  $\rho \left[ \phi_{xxx} + \phi_{yyy} + \phi_{zzz} \right] + \phi_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + \phi_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + \phi_z \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0$  (\*)

L'eq di Eulero diventa:  $dp = -\rho dV = -\rho d(\frac{V^2}{2}) = -\rho d(\frac{u^2 + v^2 + w^2}{2}) = -\rho d(\frac{\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2}{2})$ , considerando l'evoluzione in un campo staz. irrotazionale e incompressibile il processo è anche isentropico, portando  $a^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{s, \text{cost}} = \frac{dp}{d\rho} \Rightarrow dp = a^2 d\rho$ , uguagliando si ottiene

$$dp = -\rho d\left(\frac{\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2}{2}\right) = a^2 d\rho \Rightarrow d\rho = -\frac{\rho}{a^2} d\left(\frac{\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2}{2}\right)$$

dunque le componenti sono:

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = -\frac{\rho}{a^2} (\phi_x \phi_{xxx} + \phi_y \phi_{xyx} + \phi_z \phi_{zx}) ; \frac{\partial \rho}{\partial y} = -\frac{\rho}{a^2} (\phi_x \phi_{xyx} + \phi_y \phi_{yyy} + \phi_z \phi_{zy}) ; \frac{\partial \rho}{\partial z} = -\frac{\rho}{a^2} (\phi_x \phi_{xzx} + \phi_y \phi_{yzy} + \phi_z \phi_{zzz})$$

Sostituendo nella (\*) dopo un numero

$$\text{fatto di passaggi algebrici si ottiene } \left(1 - \frac{\phi_x^2}{a^2}\right) \phi_{xxx} + \left(1 - \frac{\phi_y^2}{a^2}\right) \phi_{yyy} + \left(1 - \frac{\phi_z^2}{a^2}\right) \phi_{zzz} - 2 \frac{\phi_x \phi_y}{a^2} \phi_{xyx} - 2 \frac{\phi_x \phi_z}{a^2} \phi_{xzx} - 2 \frac{\phi_y \phi_z}{a^2} \phi_{zyz} = 0$$

Per ricavare la funzione  $a^2 = a^2(\phi)$  si parte dall'eq dell'energia  $H = h + \frac{V^2}{2} \Rightarrow c_p T + \frac{V^2}{2} \Rightarrow \frac{a_0^2}{\gamma - 1} = \frac{a^2}{\gamma - 1} + \frac{V^2}{2}$  [vedi pag 10]

$$\Rightarrow a^2 = a_0^2 - \frac{\gamma - 1}{2} (u^2 + v^2 + w^2) \Rightarrow a^2 = a_0^2 - \frac{\gamma - 1}{2} (\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2)$$

fatto le condizioni di contorno  $a_0$ , si ricava  $a$ .

L'eq del potenziale di velocità ingloba le eq di bilancio della massa, della qdm e dell'energia. Anche se è un'eq non lineare in generale, vale indistintamente in campo subsonico, transonico, supersonico e ipersonico; in campo subsonico e supersonico è possibile linearizzare il problema, nelle dovute ipotesi ipotesi come profilo aerodinamicamente sottile e piccole perturbazioni; in campo transonico e ipersonico non è linearizzabile, in problemi si valuta strato limite + resto del mondo, per il "resto del mondo" si valuta la soluzione euleriana.

I termini  $\frac{\phi_x^2}{a^2}$  rappresentano "la presenza del no di Mach lungo quella direzione", se  $M > 0$  il termine è pre-sufficente, se  $M \rightarrow 0$  il termine ne influenza significativamente. Se il campo è incompressibile ( $M \rightarrow 0$ )  $\Rightarrow a^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{s, \text{cost}} \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{\phi_x^2}{a^2} \rightarrow 0$  e l'eq del potenziale di velocità si riduce a  $\phi_{xxx} + \phi_{yyy} + \phi_{zzz} = 0 \Rightarrow \nabla^2 \phi = 0$  eq di Laplace

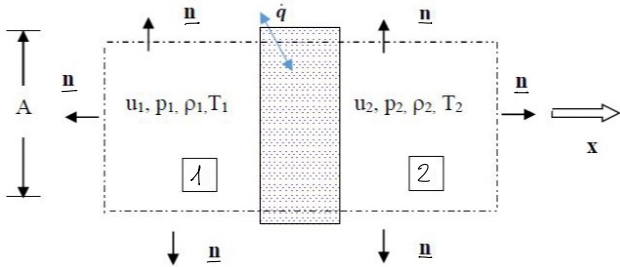
# 3

# FLUSSI UNIDIMENSIONALI

$V = \{u, 0, 0\}$  caso  $u, w \rightarrow 0$   
 $\frac{\partial}{\partial y}(\cdot) > 0, \frac{\partial}{\partial z}(\cdot) > 0 \Rightarrow \rho = \rho(x)$   
 $\frac{\partial}{\partial t}(\cdot) > 0$  flusso stazionario  $\Rightarrow$  basta considerare  $Re \gg 1$   
 $f = 0$  forze di volume nulle  
 flusso unidimensionale

I flussi unidimensionali da saranno trattati sono:  
 1) onda sonora / piccolo disturbo di pressione  
 2) urto normale / netto (normal shock wave NSW)  
 3) flusso di Rayleigh [con adduzione di calore]  
 4) flusso di Stanton [con attrito]

## EQUAZIONI DI BILANCIO DEL FLUSSO 1D



Se considero un volume di volume di controllo finito al cui interno sono presenti:  
 1) zona 1 (monte) con grandezze termofluidodinamiche costanti  
 2) pressione centrale rappresentativa di una variazione delle grandezze termofluidodinamiche della corrente; tale variazione può avvenire per la presenza di un'onda sonora, presenza di un'onda d'urto, fornitura/ sottrazione di calore, azione delle forze d'attrito  
 3) zona 2 (valle) con grandezze termofluidodinamiche costanti

I contributi laterali sono uguali e opposti quando la loro somma algebrica è nulla. Nella scrittura delle eq di bilancio ci si ripresenta solo 2 termini non nulli, quindi riferiti alla superficie d'ingresso e alla superficie d'uscita.

• eq bilancio massa:  $\int_S \rho(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dS = 0 \Rightarrow \rho_1(-u_1)A_1 + \rho_2 u_2 A_2 = 0$ , data la generalità del problema  $A_1 = A_2 = A \Rightarrow$

$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 \Rightarrow h := \rho u = \text{cost}$ ,  $h$ : flusso di massa

• eq bilancio qd/m  $\int_S \rho \mathbf{V}(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dS + \int_S p \mathbf{n} dS = 0 \Rightarrow \rho_1 u_1(-u_1)A_1 + \rho_2 u_2(u_2)A_2 - p_1 A_1 + p_2 A_2 = 0 \Rightarrow$

$-\rho_1 u_1^2 A_1 + \rho_2 u_2^2 A_2 - p_1 A_1 + p_2 A_2$ , essendo  $A_1 = A_2 = A \Rightarrow p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2 \Rightarrow I := p + \rho u^2 = \text{cost}$ ,  $I$ : impulso [specifico]

• eq bilancio energia  $-\int_S \rho(e + \frac{V^2}{2})(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dS - \int_S p(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dS + \int_V \rho q dV = 0$

$-\rho_1(e_1 + \frac{u_1^2}{2})(-u_1)A_1 + \rho_2(e_2 + \frac{u_2^2}{2})u_2 A_2 - [p_1(-u_1)A_1 + p_2(u_2)A_2] + Q = 0 \Rightarrow \rho_1 u_1 A_1 (e_1 + \frac{u_1^2}{2}) - \rho_2 u_2 A_2 (e_2 + \frac{u_2^2}{2}) + p_1 u_1 A_1 - p_2 u_2 A_2 + Q = 0$

sfruttando la generalità  $A_1 = A_2 = A$  e il bilancio della massa  $\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 \Rightarrow e_1 + \frac{u_1^2}{2} - e_2 - \frac{u_2^2}{2} + \frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{Q}{\rho u A} = 0$  dove  $\frac{Q}{\rho u A} = q$  [J/kg]

$\Rightarrow e_1 + \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{u_1^2}{2} + q = e_2 + \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{u_2^2}{2} \Rightarrow h_1 + \frac{u_1^2}{2} + q = h_2 + \frac{u_2^2}{2}$  Se  $q = 0 \Rightarrow H = h + \frac{u^2}{2} = \text{cost}$

Riassumendo, le eq di bilancio sono
 

$\left\{ \begin{aligned} & h = \rho u = \text{cost} \\ & I = p + \rho u^2 = \text{cost} \\ & H = h + \frac{u^2}{2} = \text{cost} \end{aligned} \right.$	per flussi di Stanton	$I_1 - f_c = I_2$
	per flussi di Rayleigh	$H_1 + q = H_2$

## 3.1

# ONDA SONORA

### MECCANISMO DI GENERAZIONE

Il suono può essere considerato come una piccola perturbazione per il mezzo entro cui si propaga, è assimilabile a infinitesime variazioni di pressione, infatti l'onda sonora è un piccolo disturbo di pressione.

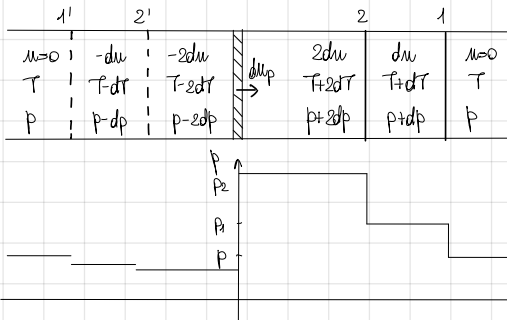
Localmente, nella immediate vicinanze della sorgente, viene trasferita alle molecole energia meccanica dovuta alla sorgente vibrante; le molecole a loro volta la trasferiscono a quelle prossime a loro che in cascata la trasferiscono ad altre sempre più lontane, e così via senza trasporto di massa; si genera un "fronte d'onda sferico" che si propaga nel mezzo in quiete e che "trasporta per via delle collisioni molecolari" la perturbazione che si manifesta come suono. Tale fronte si propaga con la velocità del suono e può essere considerato come onda debole di pressione; tra monte e valle dell'onda sonora le variazioni delle proprietà del mezzo sono di lievissima entità tanto da poter considerare la propagazione dell'onda come un fenomeno non dissipativo; la propagazione avviene anche in condizioni adiabatiche e pertanto

# 3.2 URTO NORMALE (NSW)

## MECCANISMO DI GENERAZIONE DELLE ONDE D'URTO

Dallo studio del cono di Mach, si è visto che se la sorgente si muove a velocità supersonica, si crea forma, prima prima la sorgente e poi i disturbi di pressione. L'aria non è informata dai disturbi che la sorgente sta creando, ma la sorgente deve passare per cui l'aria deve aprirsi per farla passare; da ciò deriva la presenza di superfici di discontinuità - onde d'urto - che, rendendo la corrente subsonica e/o deviando la corrente supersonica, consentono al fluido di aprirsi per far passare il corpo [le onde d'urto si generano anche in altre situazioni fluidodinamiche].

In un sistema di riferimento nel quale il corpo è fermo, perché si abbia un'onda d'urto, la corrente che lo investe deve essere supersonica, e se la velocità della corrente è costante nel tempo l'onda d'urto resta ferma (onda d'urto stazionaria) ⇒ le onde d'urto stazionarie sono possibili solo se la corrente a monte è supersonica; se la corrente fosse subsonica non sarebbe necessaria un'onda d'urto, in quanto i piccoli disturbi di pressione riuscirebbero a risalire la corrente e a farla aprire in tempo. Onde d'urto stazionarie possono originarsi anche su una corrente non necessariamente supersonica ma, al limite, ferma. Le onde d'urto si chiamano normali quando sono perpendicolari al vettore velocità a monte dell'onda, oblique in caso contrario. Nei campi di moto esaminati le onde d'urto sono considerate come superfici di discontinuità.



Si consideri un tubo d'urto (con pistone). Se il pistone viene mosso improvvisamente verso dx di  $du_p$ , ciò provoca una piccola perturbazione a dx e sx del pistone: dal pistone verso dx parte un'onda elementare di compressione (1) e verso sx parte un'onda elementare di espansione (1').

La valle dell'onda dell'onda di compressione si ha un aumento sufficiente, simile delle grandezze, a valle dell'onda di espansione si ha una diminuzione sufficiente delle grandezze. A seguito di un secondo impulso del pistone si genera una seconda onda di compressione (2) e di espansione (2').

(2) che provoca le variazioni riportate in figura. In presenza di una sequenza d'impulsi del pistone molto ravvicinata tra loro si genererebbero moltissime onde:

(dx) le successive onde di compressione saranno sempre più veloci delle precedenti perché si propagano in un gas a temperatura decrescente ( $a = a(T)$ ), che le porterà a coalescere / compattarsi generando un'onda d'urto; le singole onde elementari di espansione seguono un processo isentropico ma una volta generato l'urto, per effetto della coalescenza, il processo diventa dissipativo.

(sx) le successive onde di espansione saranno sempre meno veloci perché si propagano in un gas a temperatura crescente, che le porterà a dilatarsi non potendo mai generare una struttura unica; le onde di espansione si propagano seguendo un processo isentropico.

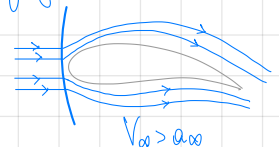
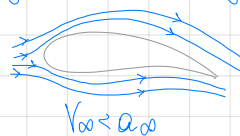
### ES Profilo alare su una corrente gassosa

a) Caso subsonico  $V_{00} < a_{00}$ . Le molecole collidano tra loro e contro la parete del profilo alare, questi urti vengono riflessi in ogni direzione e quindi anche in avanti in direzione opposta a quella del moto medio di monte. Poiché  $V_{00} < V_{00} \approx a_{00}$ , le molecole che sono riflesse in avanti continuano a scambiare qdm ed energia con quelle provenienti dalla regione a monte, pertanto il fronte delle collisioni risale la corrente verso monte deflettendo le linee di corrente e facendo sentire la presenza del corpo anche a monte.

b) Caso supersonico  $V_{00} > a_{00}$ . Le molecole che si urtano sulla superficie alare sono riflesse anche in avanti ma non riescono a fare risalire lo scambio di qdm ed energia molto a monte perché  $V_{00} > V_{00} \approx a_{00}$ . I fronti d'onda delle collisioni molecolari che tendono a risalire verso monte vanno in coalescenza tra loro formando un'onda d'urto, pertanto a monte dell'onda d'urto il flusso non è avvertito dalla presenza del corpo e le linee di corrente si mantengono ancora parallele, solo a valle dell'onda d'urto la corrente deflette in accordo a forma del profilo e incidendo.

Le eq di bilancio per l'urto netto sono

$$\begin{cases} h + cu = cost \\ I = p + \rho u^2 = cost \\ H = h + \frac{u^2}{2} = cost \end{cases}$$



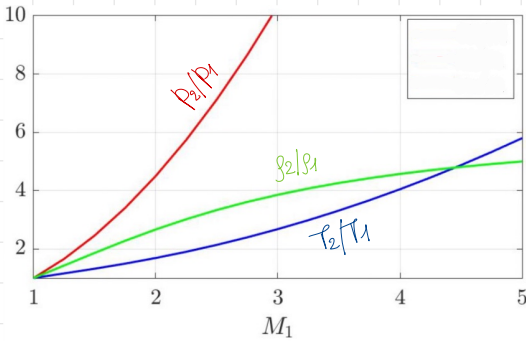
## GRANDEZZE CARATTERISTICHE

• **Grandezze statiche:**

- **Densità:**  $\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 \Rightarrow \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{M_1}{M_2} = \frac{M_1^2}{M_2^2} = \frac{M_1^2}{\alpha^2} = M_1^2 = \frac{(\gamma+1)M_1^2}{2+(\gamma-1)M_1^2} \Rightarrow \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma+1)M_1^2}{2+(\gamma-1)M_1^2}$  se  $M_1=1 \Rightarrow \frac{\rho_2}{\rho_1}=1$   
 se  $M_1 \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{\rho_2}{\rho_1} \rightarrow \frac{\gamma+1}{\gamma-1}$  per aria  $\gamma=1.4 \Rightarrow \frac{\rho_2}{\rho_1}=6$

- **Pressione:**  $\frac{P_2}{P_1} = \frac{\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right) \frac{\rho_2}{\rho_1} - 1}{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} - \frac{\rho_2}{\rho_1}} = \frac{\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right) \frac{(\gamma+1)M_1^2}{2+(\gamma-1)M_1^2} - 1}{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} - \frac{(\gamma+1)M_1^2}{2+(\gamma-1)M_1^2}}$  dopo vari passaggi algebrici  $\Rightarrow \frac{P_2}{P_1} = \frac{2\gamma M_1^2 - (\gamma-1)}{\gamma+1}$  se  $M_1=1 \Rightarrow \frac{P_2}{P_1}=1$   
 se  $M_1 \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{P_2}{P_1} \rightarrow \infty$

- **Temperatura:**  $\frac{h_2}{h_1} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{P_2}{P_1} \frac{\rho_1}{\rho_2} \left[ \frac{a_2}{a_1} \right]^2 = \frac{2\gamma M_1^2 - (\gamma-1)}{\gamma+1} \cdot \frac{2+(\gamma-1)M_1^2}{(\gamma+1)M_1^2} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{[2\gamma M_1^2 - (\gamma-1)][2+(\gamma-1)M_1^2]}{(\gamma+1)^2 M_1^2}$  se  $M_1=1 \Rightarrow \frac{T_2}{T_1}=1$   
 se  $M_1 \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} \rightarrow \infty$

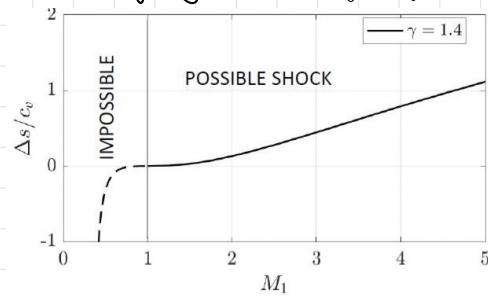


Riassumendo:  $\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{u_1}{u_2} = M_1^2 = \frac{(\gamma+1)M_1^2}{2+(\gamma-1)M_1^2}$  converge a  $\frac{\gamma+1}{\gamma-1}$   
 $\frac{T_2}{T_1} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{[2\gamma M_1^2 - (\gamma-1)][2+(\gamma-1)M_1^2]}{(\gamma+1)^2 M_1^2}$  diverge  
 $\frac{P_2}{P_1} = \frac{2\gamma M_1^2 - (\gamma-1)}{\gamma+1}$  diverge

Elaborando l'eq della pressione si ottiene:  $\frac{P_2}{P_1} = \frac{2\gamma M_1^2 - (\gamma-1)}{\gamma+1} = 1 + \frac{2\gamma M_1^2 - 2\gamma + (\gamma+1)}{\gamma+1} \Rightarrow \frac{P_2}{P_1} - 1 = \frac{P_2 - P_1}{P_1} =$

$= \frac{\Delta P}{P_1} = \frac{2\gamma M_1^2 - 2\gamma}{\gamma+1}$  che rappresenta l'intensità dell'urto

• **Salto d'entropia  $\Delta s$ :** dal I-II passaggio della termodinamica  $T ds = dh - v dp \Rightarrow ds = \frac{dh}{T} - \frac{v}{T} dp \Rightarrow ds = \frac{c_p dT}{T} - \frac{R dp}{M P} \Rightarrow$



$s_2 - s_1 = c_p \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) - \frac{R}{M} \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right)$  Ricordando che  $\frac{R}{M} = c_p \cdot c_v$  e  $\frac{c_p}{c_v} = \gamma$  si ha  
 $s_2 - s_1 = c_p \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) - c_p \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right) + c_v \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right) \Rightarrow s_2 - s_1 = c_p \ln\left(\frac{T_2}{T_1} \cdot \frac{P_1}{P_2}\right) + c_v \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right)$   
 $\Rightarrow s_2 - s_1 = \gamma c_v \ln\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right) + c_v \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right) \Rightarrow \Delta s = c_v \ln\left[\frac{P_2}{P_1} \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^\gamma\right] \Rightarrow$

$\Delta s = s_2 - s_1 = c_v \ln\left[\frac{2\gamma M_1^2 - (\gamma-1)}{\gamma+1} \left(\frac{2+(\gamma-1)M_1^2}{(\gamma+1)M_1^2}\right)^\gamma\right]$

a) se  $M_1=1 \Rightarrow \Delta s=0 \Rightarrow$  urto isentropico, non vi sono variazioni termodinamiche

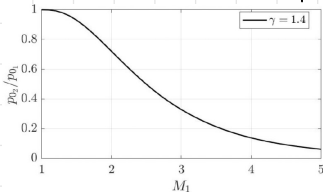
b) se  $M_1 > 1 \Rightarrow \Delta s > 0 \Rightarrow$  onda d'urto con aumento di entropia e di grandezze statiche  $\Rightarrow$  l'onda d'urto è un fenomeno dissipativo

c) se  $M_1 < 1 \Rightarrow \Delta s < 0$  non si genera l'urto

• **Grandezze d'urto:**

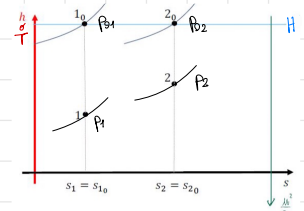
- **Temperatura:**  $H = \text{cost} \Rightarrow \rho_p T_0 = \rho_p T_0 \Rightarrow T_0 = T_0$  se NSW è una trasformazione adiabatica

- **Pressione:** ricordando che  $p_0 = p \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$  si ha  $\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{p_2}{p_1} \frac{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}} \Rightarrow \frac{p_{02}}{p_{01}} = \left(1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_1^2 - 1)\right)^{-\frac{1}{\gamma-1}} \left(\frac{(\gamma+1)M_1^2}{2+(\gamma-1)M_1^2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$

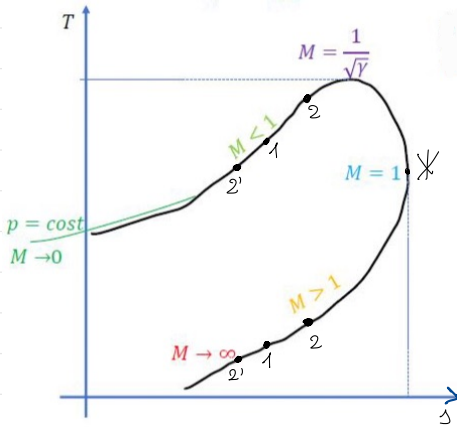


se  $M_1=1 \Rightarrow \frac{p_{02}}{p_{01}}=1$ , se  $M_1 \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{p_{02}}{p_{01}} \rightarrow 0$

se campo 1 è isentropico, il campo 2 è isentropico, il campo 1-2 (l'onda) non è isentropico.



## CURVA DI RAYLEIGH



Dalle eq. de forme cap. al flusso 1D si ricava  $\left(\frac{\partial T}{\partial s}\right)_{q, T=const} = \frac{T}{\gamma} \frac{\gamma M^2 - 1}{M^2 - 1}$  che descrive la pendenza della curva

se  $M \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial s} \rightarrow \frac{T}{\gamma}$  la curva di R. tende all'isobara  $p = const$

se  $M \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial s} \rightarrow 0$

se  $M > 1 \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial s} > 0$  il flusso è subsonico (condensazione ostica / ds choking)

se  $M \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial s} \rightarrow \gamma \frac{T}{\gamma}$  la curva di R. tende all'isocora  $\rho = const$

Si identificano il ramo subsonico ( $M < 1$ ) e il ramo supersonico ( $M > 1$ ) della curva di Rayleigh.

L'area sottesa dalla curva rappresenta il calore  $q = \int_A^B T ds$

Nel ramo subsonico  $M_1 < 1$ : se  $q > 0$  ( $s_2 > s_1$ )  $\Rightarrow M_2 > M_1$ , se  $q < 0$  ( $s_2 < s_1$ )  $\Rightarrow M_2 < M_1$ , se  $q = q_{max} = q^* \Rightarrow M_2 = M_1^* = 1$

Nel ramo supersonico  $M_1 > 1$ : se  $q > 0$  ( $s_2 > s_1$ )  $\Rightarrow M_2 < M_1$ , se  $q < 0$  ( $s_2 < s_1$ )  $\Rightarrow M_2 > M_1$ , se  $q = q_{max} = q^* \Rightarrow M_2 = M_1^* = 1$

Quando  $q < 0 \Rightarrow \Delta s < 0$ , ciò è possibile perché il flusso di Rayleigh è un processo reversibile.

Se si fornisce calore da 1 subsonico a \* e poi si sottrae calore, si percorrerà il ramo subsonico e supersonico in base alla pressione d'uscita  $p_2$ .

## 3.4

## FLUSSO DI FANNO

È un flusso 1D che si sviluppa in un condotto in modo adiabatico e in presenza degli effetti, gli effetti della viscosità si traducono in una distribuzione di sforzi di attrito a parete lungo tutto il condotto da considerare nella bilancia della qdm (NSK + attrito)

Le eq. di bilancio sono  $\begin{cases} \rho_1 = \rho_2 \\ T = const \\ H = const \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho_1 M_1 = \rho_2 M_2 \\ p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2 \\ h_1 + \frac{u_1^2}{2} = h_2 + \frac{u_2^2}{2} \end{cases}$  (si focalizza sull'eq. di bilancio della qdm)

$$\int_S \rho V(V \cdot n) dS = - \int_S p n dS - \int_S \tau_w dS \Rightarrow -\rho_1 M_1^2 A_1 + \rho_2 M_2^2 A_2 = p_1 A_1 - p_2 A_2 - \int_S \tau_w dS, \text{ poiché } A_1 = A_2 = A = \pi \frac{D^2}{4} \int_S \tau_w dS = \pi D \int_0^L \tau_w dx$$

$$\text{si ha } -\rho_1 M_1^2 + \rho_2 M_2^2 = (p_2 - p_1) - \frac{4}{D} \int_0^L \tau_w dx \Rightarrow (p_2 - p_1) + (\rho_2 M_2^2 - \rho_1 M_1^2) = -\frac{4}{D} \int_0^L \tau_w dx, \text{ definendo il coeff. d'attrito } c_f = c_f(x) = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho u^2}$$

$$\text{si ricava } (p_2 - p_1) + (\rho_2 M_2^2 - \rho_1 M_1^2) = -\frac{4}{D} \int_0^L \left(\frac{1}{2} \rho u^2 c_f\right) dx \Rightarrow dp + d(\rho u^2) = -\frac{4}{D} (c_f \frac{1}{2} \rho u^2) dx, \text{ essendo } d(\rho u^2) = \rho u d(\rho u) + \rho u du$$

$$\text{si ottiene } dp + \rho u du = -\frac{4}{D} (c_f \frac{1}{2} \rho u^2) dx, \text{ che diventa } \frac{4 c_f dx}{D} = \frac{2}{\gamma M^2} (1 - M^2) \left[ 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right]^{-1} \frac{dM}{M} \Rightarrow \int_0^L \frac{4 c_f dx}{D} = \left[ \frac{1}{\gamma M^2} - \frac{\gamma + 1}{2 \gamma} \ln \left( \frac{M^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2} \right) \right]_{M_1}^{M_2}$$

## GRANDEZZE CARATTERISTICHE

• Grandezze statiche:

- Temperatura:  $\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_0}{T_0} \frac{T_0}{T_1} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_2^2\right)^{-1} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2\right) \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \frac{2 + (\gamma - 1) M_1^2}{2 + (\gamma - 1) M_2^2}$

- Pressione:  $a^2 = \gamma \frac{p}{\rho} \Rightarrow \frac{p}{\rho} = \frac{p_1 M_1^2}{\rho_1 M_1^2} = \frac{p_2 M_2^2}{\rho_2 M_2^2} \Rightarrow \frac{p_2}{p_1} = \frac{\rho_2 M_2^2}{\rho_1 M_1^2} = \frac{M_1}{M_2} \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{1/2} \Rightarrow \frac{p_2}{p_1} = \frac{M_1}{M_2} \left(\frac{2 + (\gamma - 1) M_1^2}{2 + (\gamma - 1) M_2^2}\right)^{1/2}$

- Densità:  $\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{p_2}{p_1} \frac{T_1}{T_2} \Rightarrow \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{M_1}{M_2} \left(\frac{2 + (\gamma - 1) M_1^2}{2 + (\gamma - 1) M_2^2}\right)^{-1/2}$

• Grandezze totali

- Temperatura:  $H = const \Rightarrow \rho_p T_0 = \rho_p T_0 \Rightarrow T_0 = T_0$  il flusso di Fanno è una trasformazione adiabatica

- Pressione:  $\frac{p_0}{p_1} = \frac{p_2}{p_1} \frac{p_1}{p_1} \frac{p_1}{p_0} \Rightarrow \frac{p_0}{p_1} = \frac{M_1}{M_2} \left(\frac{2 + (\gamma - 1) M_1^2}{2 + (\gamma - 1) M_2^2}\right)^{-\frac{\gamma + 1}{2}}$  con  $\frac{p_0}{p_1} < 1$  sempre

• Salto d'entropia:  $\Delta s = s_2 - s_1 = c_p \ln \left(\frac{T_2}{T_1}\right) - \frac{R}{M} \ln \left(\frac{p_2}{p_1}\right)$ , e anche  $\Delta s = s_2 - s_1 = c_p \ln \left(\frac{T_0}{T_0}\right) - \frac{R}{M} \ln \left(\frac{p_0}{p_0}\right) \Rightarrow \Delta s = s_2 - s_1 = -\frac{R}{M} \ln \left(\frac{p_0}{p_1}\right)$

$\Delta s > 0$  sempre perché il flusso è dissipativo

- Temperatura totale:  $T_{01} = T_{02}$  perché la trasformazione è adiabatica
- Salto d'entropia  $\Delta S = S_2 - S_1 = -\frac{R}{M} \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right)$ 
  - a) se  $M_1 = 1 \Rightarrow \Delta S = 0 \Rightarrow$  vortice irrotazionale, non vi sono variazioni termodinamiche
  - b) se  $M_1 > 1 \Rightarrow \Delta S > 0 \Rightarrow$  onda d'urto con aumento di entropia e di grandezze statiche  $\Rightarrow$  l'onda d'urto è un fenomeno dissipativo
  - c) se  $M_1 < 1 \Rightarrow \Delta S < 0$  non si genera l'urto

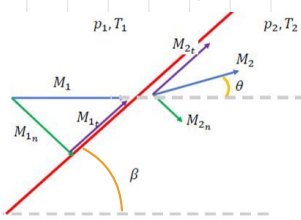
### FUSSO DI RAYLEIGH (NSW + calore)

- Le eq di bilancio sono  $\begin{cases} h = \text{cost} \\ I = \text{cost} \\ H_1 + q = H_2 \end{cases}$  Per i calcoli non si utilizzano le formule ma i valori tabellati: dato  $M$  si ingressa si ha  $P/P^*, \rho/\rho^*, T/T^*, P_0/P_0^*, T_0/T_0^*$  e si applica  $\frac{f_2}{f_1} = \frac{f_2^*}{f_1^*} \frac{f_1}{f_1^*}$
- Temperatura totale:  $T_{01} \neq T_{02}$  perché la trasformazione non è reversibile
- Salto d'entropia  $\Delta S = S_2 - S_1 = c_p \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) - \frac{R}{M} \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right)$
- Curva di Rayleigh  $\left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_{q, I = \text{cost}} = \frac{T}{c_p} \frac{M^2 - 1}{M^2 - 1}$ 
  - Nel ramo subsonico  $M_1 < 1$ : se  $q > 0$  ( $S_2 > S_1$ )  $\Rightarrow M_2 > M_1$ , se  $q < 0$  ( $S_2 < S_1$ )  $\Rightarrow M_2 < M_1$ , se  $q = q_{\text{max}} = q^* \Rightarrow M_2 = M_1^* = 1$
  - Nel ramo supersonico  $M_1 > 1$ : se  $q > 0$  ( $S_2 > S_1$ )  $\Rightarrow M_2 < M_1$ , se  $q < 0$  ( $S_2 < S_1$ )  $\Rightarrow M_2 > M_1$ , se  $q = q_{\text{max}} = q^* \Rightarrow M_2 = M_1^* = 1$
  - Quando  $q < 0 \Rightarrow \Delta S < 0$ , ciò è possibile perché il flusso di Rayleigh è un processo reversibile

### FUSSO DI FANNO (NSW + attrito)

- Le eq di bilancio sono  $\begin{cases} G = \text{cost} \\ I_1 - f_2 = I_2 \\ H = \text{cost} \end{cases}$  Per i calcoli non si utilizzano le formule ma i valori tabellati: dato  $M$  si ingressa si ha  $P/P^*, \rho/\rho^*, T/T^*, P_0/P_0^*, 4fL^*/D$  e si applica  $\frac{f_2}{f_1} = \frac{f_2^*}{f_1^*} \frac{f_1}{f_1^*}$  e  $L_2^* = L_1^* - L$
- Temperatura totale:  $T_{01} = T_{02}$  perché la trasformazione è adiabatica
- Salto d'entropia  $\Delta S = S_2 - S_1 = -\frac{R}{M} \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right)$   $\Delta S > 0$  sempre perché il flusso è dissipativo
- Curva di Fanno  $\left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_{q, H = \text{cost}} = \frac{T}{c_p} \frac{M^2}{M^2 - 1}$
- Gli unici spostamenti permessi sono quelli ad entropia crescente  $S_2 > S_1 \Rightarrow \Delta S > 0$ , infatti se calore da si sviluppa a causa dell'attrito è sempre un calore fornito ( $q > 0$ ).

## GRANDEZZE CARATTERISTICHE



Se preferisce esprimere la velocità con il n° di Mach, da relazioni geometriche si ha:

$$\begin{aligned} V_{1n} &= V_1 \sin \beta \\ V_{2n} &= V_2 \sin(\beta - \theta) \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} M_{1n} = M_1 \sin \beta \\ M_{2n} = M_2 \sin(\beta - \theta) \end{cases}$$

Le formule dell'urto obliquo si ottengono considerando la sola componente normale cioè sostituendo  $M_1$  con  $M_{1n} = M_1 \sin \beta$ .

- Relazione di Prandtl

$$M_2 = \frac{1}{\sin^2(\beta - \theta)} \left[ \frac{2 + (\gamma - 1) M_1^2 \sin^2 \beta}{2\gamma M_1^2 \sin^2 \beta - (\gamma - 1)} \right]$$

- Densità

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_{1n}}{V_{2n}} = \frac{(\gamma + 1) M_1^2 \sin^2 \beta}{(\gamma - 1) M_1^2 \sin^2 \beta + 2}$$

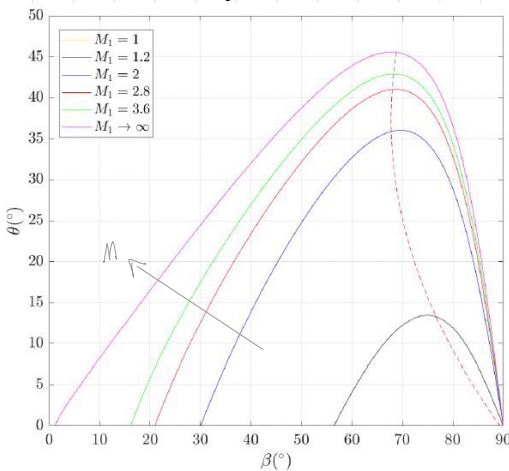
- Pressione

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (M_1^2 \sin^2 \beta - 1)$$

- Temperatura

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1} \frac{\rho_1}{\rho_2} = \left[ 1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (M_1^2 \sin^2 \beta - 1) \right] \left[ \frac{(\gamma + 1) M_1^2 \sin^2 \beta}{(\gamma - 1) M_1^2 \sin^2 \beta + 2} \right]$$

Si evidenzia che  $\frac{p_2}{p_1} = f(M_{1n}) = f(M_1 \sin \beta) = f(M_1, \beta)$



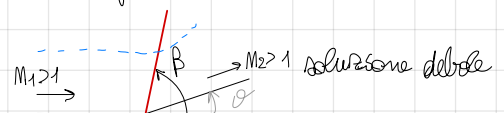
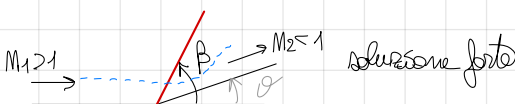
Il diagramma  $M-\beta-\theta$  mostra la relazione tra queste grandezze.

$$\begin{aligned} \frac{V_{1n}}{V_{1t}} &= \tan \beta, \quad \frac{V_{2n}}{V_{2t}} = \tan(\beta - \theta) \Rightarrow \frac{\tan(\beta - \theta)}{\tan \beta} = \frac{V_{2n}}{V_{1n}} \frac{V_{1t}}{V_{2t}} = \frac{V_{1t}}{V_{2t}} \frac{\rho_1}{\rho_2} \\ \Rightarrow \tan \theta &= \frac{2}{\tan \beta} \left[ \frac{M_1^2 \sin^2 \beta - 1}{M_1^2 (\gamma + \cos(2\beta)) + 2} \right] \end{aligned}$$

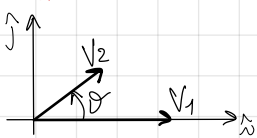
$\tan \theta = 0$  se a)  $M_1^2 \sin^2 \beta - 1 = 0 \Rightarrow \beta = \arcsin(1/M_1)$   
 b)  $1/\tan \beta = 0 \Rightarrow \beta = 90^\circ$

Se  $M_1 > \infty \Rightarrow \exists \theta = \theta_{max}$

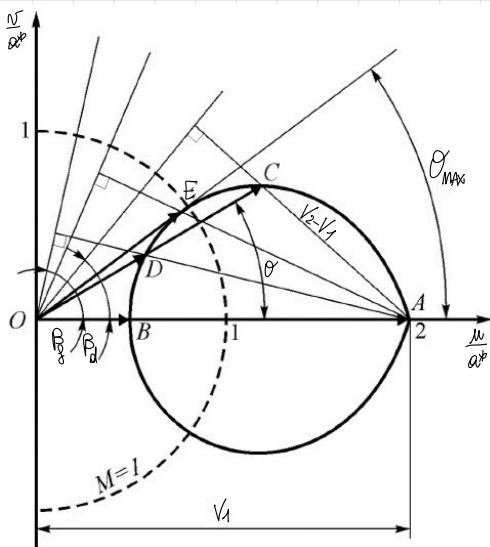
- a) se  $\theta < \theta_{max}(M_1) \Rightarrow \exists 2$  possibili soluzioni dato dallo OSW
  - i) una soluzione debole (sx) per la quale  $M_2 > 1$ ,  $\beta$  verso  $\arcsin(1/M_1)$
  - ii) una soluzione forte (dx) per la quale  $M_2 < 1$ ,  $\beta$  verso  $90^\circ$
- b) se  $\theta = \theta_{max}(M_1) \Rightarrow \exists 1$  soluzione per l'OSW



## POLARE D'URTO



Nel piano adimensionale  $(u, v)$  la velocità come  $V = \{u, v\}$  per cui  $V_1 = M_1 \hat{i}$  e  $V_2 = M_2 \hat{i} + M_2 \hat{j}$ , si preferisce utilizzare variabili normalizzate rispetto a  $a^* = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$  in modo che per  $M \rightarrow \infty \Rightarrow M^* \text{ finito}$ .



La polare d'urto/corona stagnante è il luogo dei vertici del vettore velocità a valle dell'onda d'urto per un'assegnata velocità della corrente a monte e della deflessione  $\left(\frac{V_2}{a^*}\right)^2 = \left(M_1^* - \frac{M_2}{a^*}\right)^2 \frac{M_1^* \frac{M_2}{a^*} - 1}{\gamma + 1 M_1^{*2} - M_1^* \frac{M_2}{a^*} + 1}$

Ogni curva/polare è simmetrica rispetto all'asse orizzontale e presenta una cuspidate sull'asse orizzontale in corrispondenza di  $M_1$ , tipica della polare. Ogni punto della curva connesso con l'origine rappresenta il vettore velocità a valle dell'urto obliquo e la corrispondente deflessione della corrente.

Per  $\theta = 0$ :  $OA$  (corrisponde alla soluzione debole)  $\Rightarrow$  onda di Mach

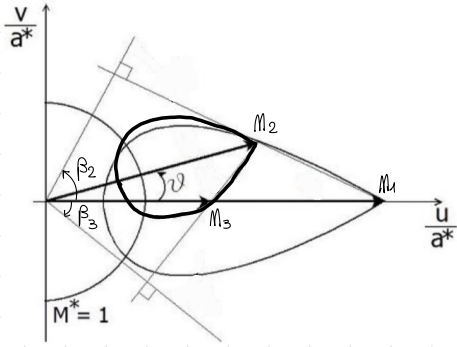
$OB$  (corrisponde alla soluzione forte)  $\Rightarrow$  OSW

Per  $\theta = \theta_{max}$ :  $OC$  è la soluzione debole  $\Rightarrow$  OSW con  $M_2 > 1$

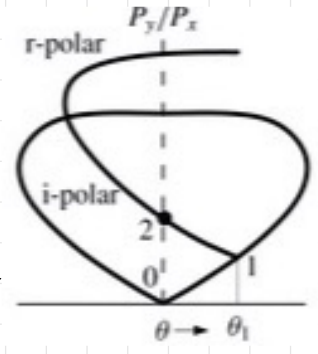
$OD$  è la soluzione forte  $\Rightarrow$  OSW con  $M_2 < 1$

Per  $\theta = \theta_{max}$ :  $OE$  è l'unica soluzione  $\Rightarrow$  OSW

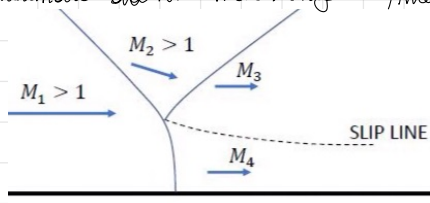




corrente, per un assegnato valore del n° di Mach della corrente di monte  $M_1$  e della pressione  $p_1$ . La parte superiore, rispetto a  $\vartheta_{max}$  è il ramo degli urti deboli, mentre la parte inferiore è il ramo degli urti forti. Per  $\vartheta > 0$  si ha una deflessione oraria della corrente: rampe positive; per  $\vartheta < 0$  si ha una deflessione antioraria della corrente: rampe negative.

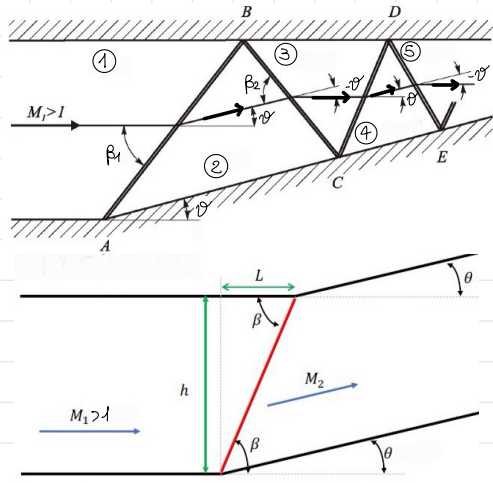


Se  $\vartheta > \vartheta_{max}$  non si può la riflessione dell'onda d'urto ma una riflessione di Mach. Se la regione 1 è caratterizzata da un moto uniforme, mentre nelle regioni 2, 3 e 4 - poiché la corrente attraversa onde d'urto oblique con suddivisione variabile - il vettore velocità varierà da punto a punto.



Sentiamo dalla parete si ha un urto quasi planare, invece vicino alla parete si ha un urto localmente normale che porta ad un campo subsonico. Dall'interazione tra i due urti si genera un'onda d'urto riflessa che si propaga verso valle oppure termina sulla parete suddivisa come urto normale.

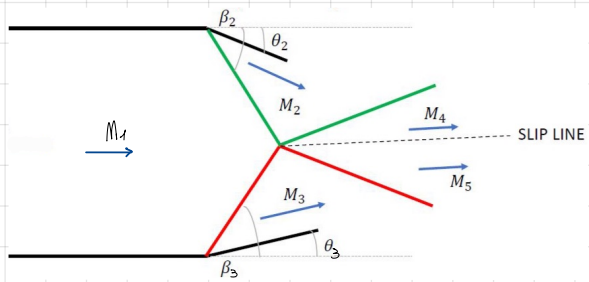
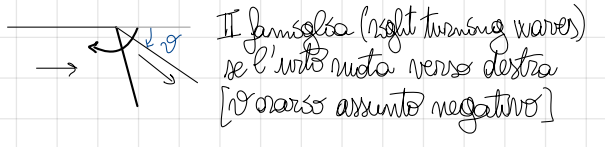
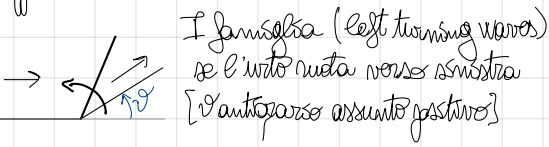
I campi a valle 3 e 4 sono caratterizzati da  $M_3 \neq M_4$ ,  $\beta_3 \neq \beta_4$ ,  $p_3 \neq p_4$ , ma  $p_3 = p_4$ ; tuttavia non si generano spresioni di taglio tra questi due campi perché il fluido si considera inviscido. La linea che separa questi due campi a valle è detta linea di slip.



La corrente si mantiene a lungo supersonica, a seguito di multiple riflessioni di OSW [deboli], se  $\vartheta$  è relativamente piccolo e  $M_1$  è sufficientemente alto. Questo comportamento continua fino a quando il n° di Mach - che per successivi urti obliqui va progressivamente diminuendo - è tale che si relativi  $\vartheta \leq \vartheta_{max}$ .  
 In presenza di urti riflessi multiple bisogna fare in modo che la corrente a valle dell'urto sia parallela al condotto, così si fa ruotare la parete superiore di  $\vartheta$  in modo che diventi parallela alla parete superiore, da dopo una distanza  $L = \frac{h}{\tan \beta}$ . In questo modo si ha la cancellazione dell'urto.

### INTERSEZIONE DI URTI OBLIQUI

Gli urti si possono classificare a seconda dell'orientamento della parete rispetto all'urto, così distinguere la famiglia d'appartenenza:



Si considerano intersezioni tra urti di famiglie opposte. Due onde d'urto deboli, aventi in generale suddivisione diversa  $\vartheta_2 > \vartheta_3 \Rightarrow M_2 < M_3 \Rightarrow \beta_2 > \beta_3$  si intersecano, le due correnti supersoniche nelle regioni 2 e 3 hanno proprietà diverse, se e le direzioni delle correnti sono diverse. Nel punto d'intersezione le due onde si riflettono ottenendo altre due OSW, nei campi 4 e 5 le correnti devono avere stessa direzione, la

linea di slip divide le caratteristiche dei due campi  $M_4 \neq M_5$ ,  $\beta_4 \neq \beta_5$ , ma  $M_4 // M_5$  e  $p_4 = p_5$ .  
 Se  $\vartheta_2, \vartheta_3 > \vartheta_{max}$  si ha due riflessioni di Mach che si intersecano, così prende il nome di intersezione di Mach.

## 4.2

# ESPANSIONE SUPERSONICA

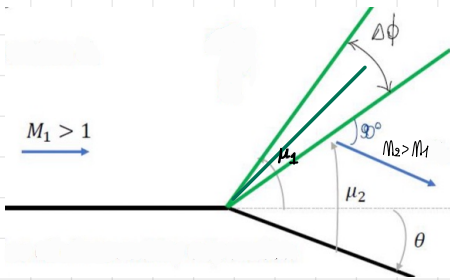
### MECCANISMO DI GENERAZIONE

Come già illustrato a pag. 15, nel tubo d'urto in cui il fluido si sposta impulsivamente  $dx$ , a  $dx$  si hanno onde elementari di compressione che tendono a compattarsi generando l'onda d'urto, invece a  $-x$  si hanno onde elementari di espansione che tendono a separarsi.

Le onde di compressione che si uniscono nell'onda d'urto provocano una forte variazione della quantità del flusso, quindi è una trasformazione non conservativa con una grossa variazione di entropia. Le onde di espansione non si compattano in un'onda di espansione, ma le variazioni del flusso avvengono attraverso un numero infinito di piccoli step isentropici.

### ONDE D'ESPANSIONE DI PRANDTL-MEYER

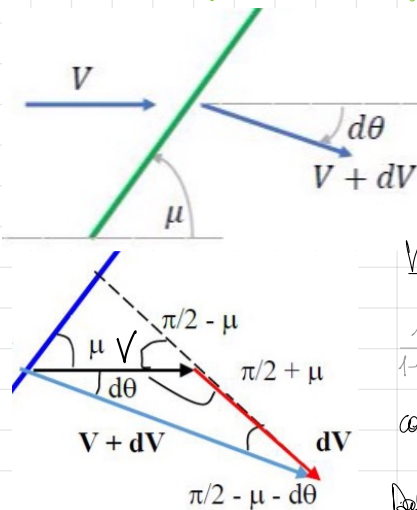
Nella compressione la corrente si deflette avvicinandosi rispetto alla direzione della corrente a monte, compiendo sia gli urti che le compressioni elementari. Nell'espansione la corrente si deflette allontanandosi rispetto alla direzione della corrente a monte. *[Nella trattazione delle onde d'espansione si assume  $\theta > 0$  e provoca l'espansione.]*



L'espansione che si genera dallo spigolo dà luogo ad una deflessione continua della corrente che avviene attraverso onde elementari di espansione associate a onde di Mach; tali onde sono deflesse di una quantità infinitesima rispetto alla precedente attraverso cui ogni proprietà della corrente passa subisce variazioni infinitesime senza alcuna dissipazione di energia, pertanto l'espansione supersonica è un'evoluzione isentropica (adiabatica e reversibile). La deflessione della corrente si conclude quando la

direzione della corrente ha raggiunto la direzione della parete deflessa per il rispetto della condizione di tangenza. Le onde di espansione divergono sempre dando luogo al ventaglio d'espansione: serie di onde elementari che partono dallo stesso punto. L'ampiezza dell'intero fan/ventaglio d'espansione è  $\Delta\phi = \mu_1 - (\mu_2 - \theta)$ .

Attraverso il ventaglio d'espansione si ha  $M_2 > M_1$ ,  $p_2 < p_1$ ,  $T_2 < T_1$ , essendo isentropica  $T_0, p_0 = \text{cost}$ . *d'onde di Mach può produrre al più variazioni infinitesime dello stato termofluidodinamico del fluido, ma può essere sia di compressione che di espansione.*



Si considera una singola onda elementare d'espansione che provoca variazioni infinitesime.

Per il th des sinus  $\frac{V+dV}{V} = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} + \mu)}{\sin(\frac{\pi}{2} - \mu - d\theta)} \Rightarrow \frac{V+dV}{V} = \frac{\cos \mu}{\cos(\mu - d\theta)} = \frac{\cos \mu}{\cos \mu \cos d\theta - \sin \mu \sin d\theta}$

considerando  $d\theta$  piccolo  $\Rightarrow \cos d\theta \approx 1$  e  $\sin d\theta \approx d\theta$  si ha

$$\frac{V+dV}{V} = \frac{1}{\cos \mu - d\theta \sin \mu} = \frac{1}{1 - d\theta \tan \mu} \Rightarrow 1 + \frac{dV}{V} = \frac{1}{1 - d\theta \tan \mu}$$

utilizzando l'espansione di Taylor  $\frac{1}{1-x} = 1+x+o(x)$  si ha  $1 + \frac{dV}{V} = 1 + d\theta \tan \mu \Rightarrow \frac{dV}{V} = d\theta \tan \mu$ , ricordando che  $\sin \mu = \frac{1}{M} \Rightarrow \cos \mu = \sqrt{1 - \frac{1}{M^2}} \Rightarrow \tan \mu = \frac{\sin \mu}{\cos \mu} = \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}}$  si ottiene  $\frac{dV}{V} = \frac{d\theta}{\sqrt{M^2 - 1}} \Rightarrow d\theta = \sqrt{M^2 - 1} \frac{dV}{V}$  (#)

Dall'eq di stato  $p = \rho \frac{R}{M} T$  combinata con la relazione del suono  $a^2 = \gamma \frac{R}{M} T$  si ha

$p = \rho \frac{a^2}{\gamma} \Rightarrow \rho = \frac{\gamma p}{a^2}$ ; l'eq di Eulero  $dp = -\rho V dV$  può essere scritta come  $\frac{dp}{\rho V^2} = -\frac{dV}{V}$ , sostituendo quanto appena ricavato dall'eq

di stato si ottiene  $\frac{dp}{\gamma p V^2} = \frac{dp}{\gamma p M^2} = -\frac{dV}{V} \Rightarrow \boxed{\frac{dV}{V} = -\frac{1}{\gamma M^2} \frac{dp}{p}}$  e  $\boxed{\frac{dp}{p} = -\gamma M^2 \frac{dV}{V}}$  se  $d\theta > 0$  (espansione)  $\Rightarrow dV > 0$  ( $dM > 0$ )  $\Rightarrow dp < 0$   
 se  $d\theta < 0$  (compressione)  $\Rightarrow dV < 0$  ( $dM < 0$ )  $\Rightarrow dp > 0$

Si vuole esprimere  $\frac{dV}{V}$  in funzione del n° di Mach per la sostituzione di  $d\theta$ :  $\left(\frac{a_0}{a}\right)^2 = \frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \Rightarrow a = a_0 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{-1/2}$

$da = a_0 \left[-\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{-3/2} \gamma \frac{\gamma-1}{2} M dM\right] \Rightarrow \frac{da}{a} = \frac{-\frac{\gamma-1}{2} M dM}{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{3/2}}$  (\*) Da  $V = Ma \Rightarrow \ln(V) = \ln(M) + \ln(a)$