



centroappunti.it

CORSO LUIGI EINAUDI, 55/B - TORINO

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 2566A

ANNO: 2024

A P P U N T I

STUDENTE: Binetti Thomas

MATERIA: Meccanica del Volo - Prof. Lerro

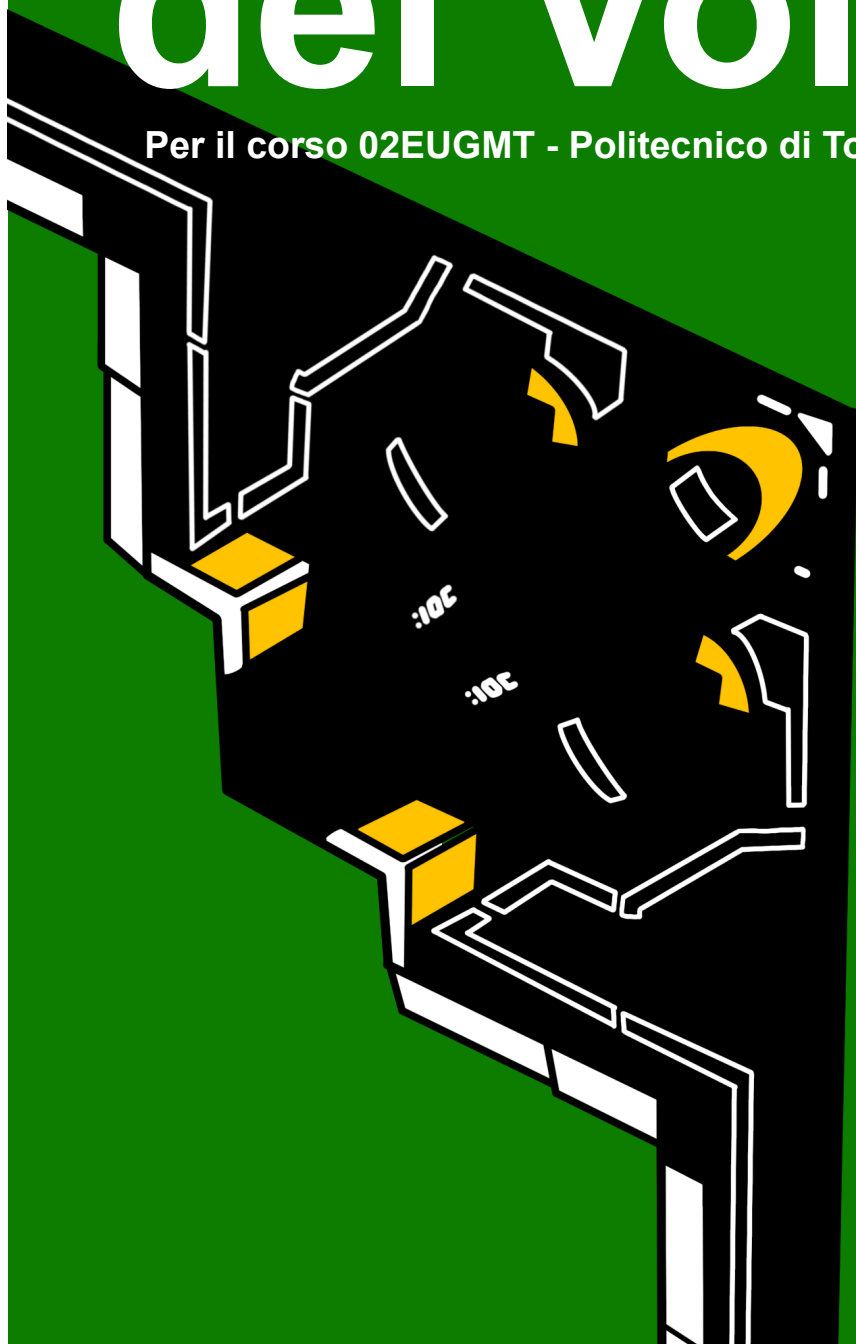
Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTI E NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.

Meccanica del Volo

Per il corso 02EUGMT - Politecnico di Torino



Thomas Binetti

Indice

1	Introduzione	1
1.1	Sistema di Riferimento	2
2	Stabilità Statica	3
2.1	Equilibrio	3
2.2	Equilibrio di un Velivolo	4
2.2.1	Coefficiente di Portanza	7
2.2.2	Punto Neutro	7
2.3	Comando Longitudinale	8
2.3.1	Valutazione sperimentale del Punto Neutro	11
2.3.2	Speed Stability	11
2.4	Moto Non-Uniforme	13
2.4.1	Studio del Raggio	15
2.4.2	Studio della Velocità Angolare	16
2.5	Virata	18
2.5.1	Virata Corretta	18
2.5.2	Altri Tipi di Virata	21
2.5.3	Virata Ascendente e Discendente	22
2.6	Manovra e Raffica	26
2.6.1	Raffica a Scalino	27
2.6.2	Raffica Lineare	29
2.6.3	Diagrammi	30
3	Momento di Cerniera	31

INDICE	2	INDICE
3.1 Aletta di Coda (Tab)		32
3.2 Comandi Liberi		33
3.3 Free Elevator Factor		34
3.3.1 Velivolo Ala-Coda		34
3.3.2 Velivolo Tutt'Ala		38
3.4 Aletta Correttrice		38
3.4.1 Determinazione del Punto Neutro a Comandi Liberi		40
3.5 Aletta Compensatrice		40
3.5.1 Aletta Scompensatrice		42
3.6 Sforzo di Barra		44
3.6.1 Sforzo e Velocità		45
3.7 Moto Accelerato II		50
3.7.1 Rotazione del velivolo e carichi sull'Ala		50
3.7.2 Sforzi e angoli in moto accelerato		53
3.8 Punto di Manovra		55
3.8.1 Punto di manovra a comandi bloccati		55
3.8.2 Stick Force Gradient		57
3.8.3 Effetto suolo in Manovra		60
3.8.4 Stick Force Gadgets		60
3.9 Conclusioni Generali		62
4 Dinamica del Volo		63
4.1 Sistemi di Riferimento		63
4.2 Orientamento del Velivolo		66
4.3 Equazioni Cinematiche		68
4.4 Equazioni vettoriali del Moto		69
4.4.1 Tensore di Inerzia		74
4.5 Piccole Perturbazioni		75
4.6 Dinamica Longitudinale in assi vento		77
4.7 Disamina del problema		78
4.7.1 Derivate delle Forze		80
4.7.2 Derivate e variazione dell'incidenza		85
4.8 Soluzioni del Sistema		89
4.8.1 Modi della dinamica longitudinale		91
4.9 Root Locus e Stabilità Dinamica		94

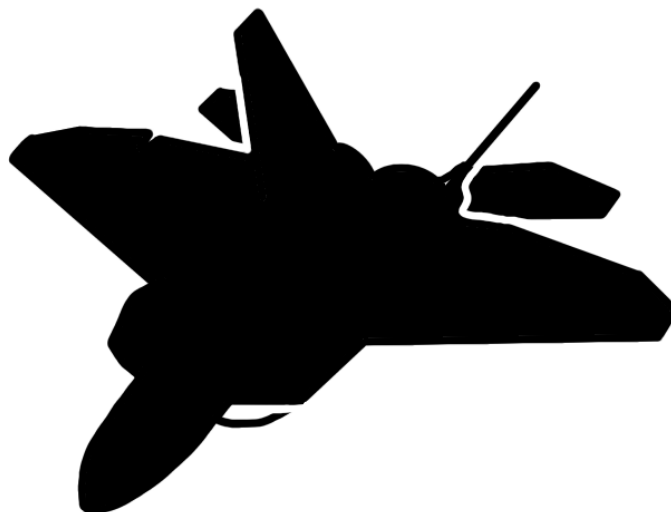
4.9.1	Stabilità Statica e Dinamica	95
5	Dinamica Forzata	97
5.1	Effetti sulle Variabili	98
5.1.1	Soluzioni di Corto Periodo	98
5.1.2	Diagramma di Manovra	100
5.2	Dinamica dei Comandi	101
5.2.1	Comandi Liberi	101
6	Dinamica Latero-Direzionale	105
6.1	Comandi Latero-Direzionali	106
6.1.1	Timone	106
6.1.2	Alettoni	107
6.2	Descrizione delle Azioni	107
6.3	Adimensionalizzazioni	108
6.4	Soluzioni del Problema	111
6.4.1	Analisi della Soluzione	111
6.5	Derivate Aerodinamiche	112
6.6	Derivate di β	112
6.6.1	Forze laterali	112
6.6.2	Derivate di rollio	113
6.6.3	Derivate di imbardata	119
6.7	Derivate in p	123
6.7.1	Forze laterali	123
6.7.2	Smorzamento del Rollio	124
6.7.3	Derivata incrociata di imbardata	126
6.8	Derivate in r	129
6.8.1	Forze Laterali	129
6.8.2	Derivata incrociata di rollio	130
6.8.3	Smorzamento dell'Imbardata	131
6.9	Effetto dei Propulsori	133
6.10	Studio dei modi propri	134
6.10.1	Modo Spirale approssimato	134
6.10.2	Modo di Rollio approssimato	135
6.10.3	Dutch Roll	136

INDICE	4	INDICE
6.11 Root Locus Latero-Direzionale		137
6.12 Handling Qualities		137

Chapter 1

Introduzione

Lo scopo di questo libro è racchiudere lo studio delle prestazioni statiche e dinamiche del velivolo ed è, quindi determinante per un Ingegnere Aerospaziale al fine di apprendere la teoria e le tecniche per valutare la **stabilità**, la **controllabilità** e le **qualità di volo** di un velivolo. La Meccanica del Volo, pertanto, è uno dei pilastri fondanti per la corretta progettazione di un velivolo e dei suoi sottosistemi nonché per la definizione di prove idonee a identificarne/verificarne le caratteristiche di volo.



Chapter 2

Stabilità Statica

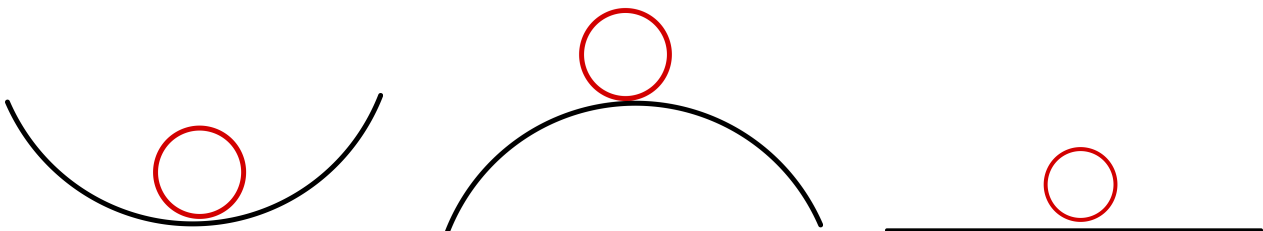
Section 2.1: Equilibrio

Definizione 2 Un sistema si dice *in equilibrio* se:

1. la sommatoria delle forze è nulla;
2. la sommatoria dei momenti è nulla;

A seguito di una perturbazione del sistema rispetto alle condizioni iniziali, un sistema si dice in equilibrio:

- **stabile**, se tende a tornare alla situazione iniziale;
- **instabile**, se tende ad allontanarsi dalla situazione iniziale;
- **indifferente**, se non varia la situazione iniziale;



Di seguito si analizza la condizione di **stabilità statica**, ossia la condizione di equilibrio in cui il sistema ha superato la situazione *transitoria* e ne osserva l'evoluzione successiva.

Geometricamente,

$$\alpha_t = \alpha_{wb} - i_{wb} + i_t - \epsilon = \alpha_{wb}(1 - \epsilon_\alpha) - i, \quad i = i_{wb} - i_t + \epsilon_0$$

$$\ell'_t = \ell_t - (x_G - x'_a)$$

Schematizzando

1. ala : L_{wb} ;

2. propulsore : M_p ;

3. coda : L_t

(a) $L_t = \frac{1}{2} \rho_{eff} V_{eff}^2 S_t a_t \alpha_t$;

(b) definito $\eta_t = \frac{\rho_{eff} V_{eff}^2}{\rho_\infty V_\infty^2} \implies L_t = \frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 S \frac{S_t}{S} a_t \alpha_t \eta_t$;

(c) per cui $C_t = a_t \alpha_t \eta_t \approx a_t \alpha_t$.

Per l'equilibrio

$$M = M_{0wb} + M_p + L_{wb}(x_G - x'_a) - L_t \ell'_t$$

Adimensionalizzando

$$C_M = C_{M0wb} + C_{M_p} + C_{L_{wb}} \frac{x_G - x'_a}{c} - C_{L_t} \frac{S_t}{S} \frac{\ell'_t}{c},$$

$$C_M = C_{M0wb} + C_{M_p} + C_{L_{wb}} \frac{x_G - x'_a}{c} - C_{L_t} \frac{S_t}{S} \frac{\ell_t - (x_G - x'_a)}{c},$$

$$C_M = C_{M0wb} + C_{M_p} + \left(C_{L_{wb}} + \frac{S_t}{S} C_{L_t} \right) \frac{x_G - x'_a}{c} - C_{L_t} \frac{S_t}{S} \frac{\ell_t}{c},$$

$$C_M = C_{M0wb} + C_{M_p} + C_L \frac{x_G - x'_a}{c} - C_{L_t} \bar{V}.$$

La forma trovata è una delle varie formulazioni del coefficiente di portanza. Si vuole in particolare osservare la dipendenza da α .

1. Se

$$\begin{aligned} C_L &= C_{L_{wb}} + \frac{S_t}{S} C_{L_t} \\ &= a_{wb} \alpha_{wb} + \frac{S_t}{S} a_t \alpha_t \\ &= a_{wb} \alpha_{wb} + \frac{S_t}{S} a_t (\alpha_{wb}(1 - \epsilon_\alpha) - i) \\ &= a_{wb} \left(1 + \frac{S_t}{S} \frac{a_t}{a_{wb}} \alpha_{wb}(1 - \epsilon_\alpha) \right) \alpha_{wb} - \frac{S_t}{S} a_t i \end{aligned}$$

2.2.1 Coefficiente di Portanza

Osservazione 2 Si può trovare un **Coefficiente di Portanza Globale** del velivolo con

$$C_L = C_{L_{wb}} + \frac{S_t}{S} C_{L_t} = a\alpha \quad (2.5)$$

ove

$$a = a_{wb}(1 + F)$$

$$\alpha = \alpha_{wb} - \frac{S_t}{S} \frac{a_t}{a} i$$

$$F = \frac{S_t}{S} \frac{a_t}{a_{wb}} (1 - \epsilon_\alpha) \quad (2.6)$$

2.2.2 Punto Neutro

Definizione 3 Si definisce **Punto Neutro** il luogo in cui si identifica il fuoco del velivolo.

$$\frac{x_N}{c} = \frac{x'_a}{c} + \frac{a_t}{a} (1 - \epsilon_\alpha) \bar{V} - \frac{C_{M\alpha_p}}{a} \quad (2.7)$$

2. un velivolo tutt'ala

$$\boxed{C_{L\delta} = \frac{\partial C_{Lwb}}{\partial \delta_e}} \quad \boxed{C_{M\delta} = \frac{\partial C_{M0wb}}{\partial \delta_e} + \frac{\partial C_{Mp}}{\partial \delta_e} + \frac{\partial C_{Lwb}}{\partial \delta_e} \frac{x_G - x'_a}{c}} \quad (2.10)$$

Dim 2 Il C_L di coda

$$C_{L_t} = a_t \alpha + a_t \tau \delta_e$$

e quello del Velivolo,

$$C_L = C_{Lwb} + \frac{S_t}{S} C_{L_t} \implies C_{L\delta} = \frac{\partial C_{Lwb}}{\partial \delta_e} + \frac{S_t}{S} \frac{\partial C_{L_t}}{\partial \delta_e} = \frac{\partial C_{Lwb}}{\partial \delta_e} + \frac{S_t}{S} a_t \tau.$$

Si osserva che

$$C_M = C_{M0wb} + C_{M_p} + C_{Lwb} \frac{x_G - x'_a}{c} - C_{L_t} \frac{l'_t}{c} \frac{S_t}{S},$$

$$C_{M\delta} = \frac{\partial C_{M0wb}}{\partial \delta_e} + \frac{\partial C_{M_p}}{\partial \delta_e} + \frac{\partial C_{Lwb}}{\partial \delta_e} \frac{x_G - x'_a}{c} - a_t \tau \frac{l'_t}{c} \frac{S_t}{S}$$

Per un velivolo ala coda $\frac{\partial C_{Lwb}}{\partial \delta_e} \ll \frac{\partial C_{L_t}}{\partial \delta_e}$ e viceversa per un velivolo tutt'ala $\frac{\partial C_{L_t}}{\partial \delta_e} = 0$, non avendo la coda.

Dim 4 Da

$$\alpha = \frac{C_L C_M \delta}{\Delta} + \frac{C_{M0} C_L \delta}{\Delta}$$

si ricava $C_L = \alpha \frac{\Delta}{C_{M\delta}} - \frac{C_{M0} C_L \delta}{C_{M\delta}}$.

2.3.1 Valutazione sperimentale del Punto Neutro

Strategie:

1. Prove di volo modificando la posizione del baricentro;
2. Si stima la derivata $\frac{\partial \delta_e}{\partial C_L} \approx \frac{\Delta \delta_e}{\Delta C_L} = \frac{C_{M\alpha}}{\Delta} = \frac{a}{\Delta} \left(\frac{x_G}{c} - \frac{x_N}{c} \right)$

2.3.2 Speed Stability

Proposizione 6 Considerando costante quota e peso, si esplicita la dipendenza di δ_e dalla velocità come

$$\delta_e = -C_{L\alpha} \frac{C_{M0}}{\Delta} - \left(\frac{2W/S}{\rho_0 V_{EAS}^2} \right) \frac{C_{M\alpha}}{\Delta} \tag{2.13}$$

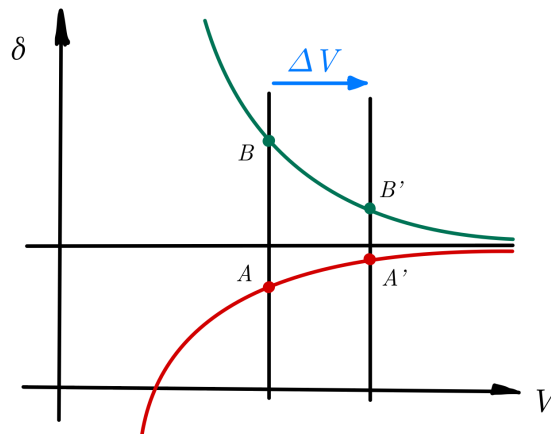


Figura 2.5: Grafico $\delta_e - V_{EAS}$

Dim 5 Poichè all'equilibrio, supponendo VRO

$$C_L = \frac{2W/S}{\rho_0 V_{EAS}^2}$$

FOCUS 1 Caso Transonico

In caso Transonico è possibile osservare una pendenza differente delle curve $\delta_e - V_{EAS}$. Ad esempio, prendendo il grafico in figura è possibile riequilibrare il sistema a velocità più alte. Esistono quindi diverse condizioni di equilibrio (condizione sfavorevole durante la guida).

Ciò nonostante, nel transonico, queste situazioni sono accettate dalla normativa.

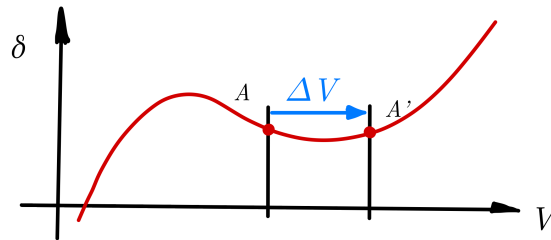
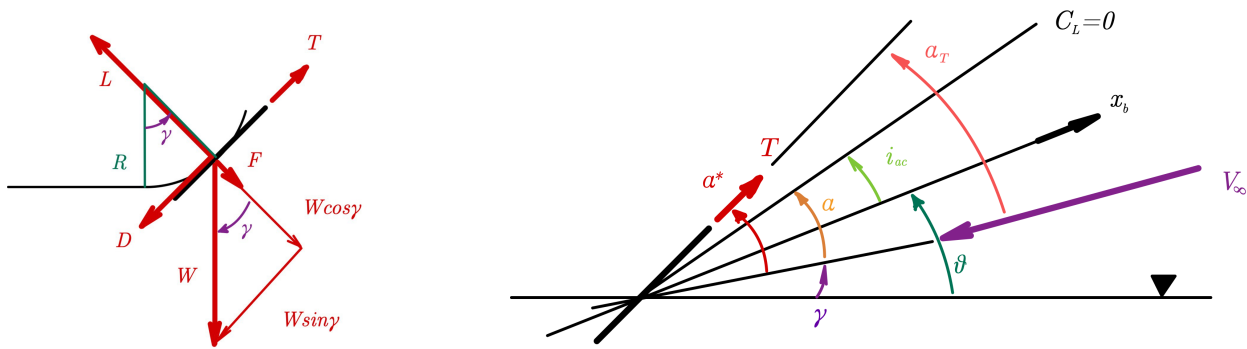


Figura 2.7: Grafico $\delta_e - V_{EAS}$ in transonico

Section 2.4: Moto Non-Uniforme

Proposizione 7 Dato un velivolo in moto circolare, raggio di curvatura e velocità angolare dipendono dal fattore di carico che si riesce a creare.

$$R = \frac{V_\infty^2}{g} \frac{1}{n - \cos\gamma} \qquad q = \frac{\rho}{2} V_\infty^2 (n - \cos\gamma) \qquad (2.14)$$



2.4.1 Studio del Raggio

Per prima cosa si analizza il Raggio di curvatura.

Proposizione 8 *Il raggio di curvatura è limitato inferiormente.*

$$R = \frac{\kappa(C_L)}{g} \frac{n}{n-1} \geq \frac{\kappa(C_{L_{max}})}{g} \frac{n_{max}}{n_{max}-1} \quad (2.15)$$

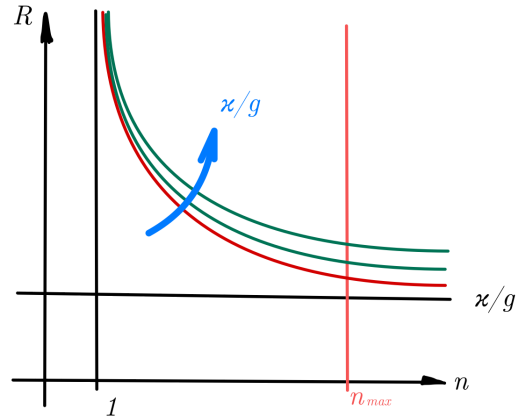


Figura 2.8: Grafico $R - n$

Dim 7 *Poichè*

$$L = nW = \frac{1}{2} \rho_{\infty} V_{\infty}^2 S C_L \implies V_{\infty}^2 = \frac{2W/S}{\rho_0 \delta C_L} n = \kappa n$$

ove $\kappa = \kappa(C_L)$

per cui

$$R = \frac{V_{\infty}^2}{g} \frac{1}{n-1} = \frac{\kappa}{g} \frac{n}{n-1}$$

per cui si hanno le seguenti casistiche:

1. per $n \gg 1$: Il raggio tende ad un valore $R = \kappa/g$;
2. per $n \approx 1$: Il raggio cresce notevolmente.

Per ragioni strutturali però, il fattore di carico è limitato $n \leq n_{max}$ quindi non si arriva al limite $R = \kappa/g$.

Fissata la polare, è possibile definire κ . Difatti

$$\kappa = \kappa_{min} \iff C_L = C_{L_{max}}$$

per cui il minimo raggio teoricamente realizzabile è $R_{min} = \kappa(C_{L_{max}})/g$

Per considerazioni vettoriali,

$$\Delta\alpha_t = \text{atan} \left(\frac{q\ell'_t}{V_{eff}} \right) \approx \frac{q\ell'_t}{V_\infty}$$

Per cui,

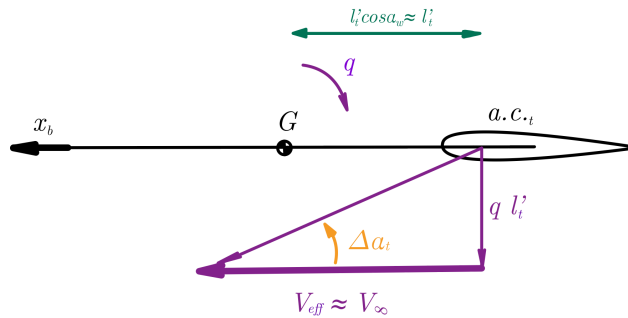
$$C_{L_t} = a_t \left(\alpha_s + \tau\delta_e + \frac{q\ell'_t}{V_\infty} \right) \implies \frac{\partial C_{L_t}}{\partial q} = \frac{a_t\ell'_t}{V_\infty}$$

Allora

$$C_{L_{\dot{q}}} = \frac{2V_\infty}{c} \frac{\partial C_L}{\partial q} = \frac{2V_\infty}{c} \frac{\partial}{\partial q} \left(C_{L_{wb}} + \frac{S_t}{S} C_{L_t} \right) = \frac{2V_\infty}{c} \frac{a_t\ell'_t}{V_\infty} \frac{S_t}{S} = 2 \frac{S_t}{S} \frac{\ell'_t}{c} a_t$$

$$C_{M_{\dot{q}}} = \frac{2V_\infty}{c} \frac{\partial C_M}{\partial q} = \frac{2V_\infty}{c} \frac{\partial}{\partial q} \left(C_{M0_{wb}} + C_{M_P} + C_{L_{wb}} \left(\frac{x_c - x'_a}{c} \right) - C_{L_t} \frac{\ell'_t}{c} \frac{S_t}{S} \right) = -2 \frac{S_t}{S} \frac{\ell'_t}{c} a_t \frac{\ell'_t}{c}$$

Osservazione 3 $C_{M_{\dot{q}}}$ è una derivata di **smorzamento** perchè attenua la **cabrata** inducendo una picchiata tramite aumento di portanza in coda.



$$\frac{V_{\infty}^2}{R} = \Omega V_{\infty} = g\sqrt{n^2 - 1}$$

da questa equazione si ottengono quindi

$$\begin{cases} R = \frac{V_{\infty}^2}{g} \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}} \\ \Omega = \frac{g}{V_{\infty}} \sqrt{n^2 - 1} \end{cases}$$

La virata descritta in questo paragrafo è detta **virata corretta** poichè, definito l'angolo di sideslip β come l'angolo tra la direzione del vento e l'asse x_b è possibile osservare che la virata che minimizza la resistenza sul velivolo è quella corretta e corrisponde per velivoli convenzionali a $\beta = 0$.

FOCUS 2 Virobandometro

La virata corretta non è l'unica virata possibile. Può capitare in fase di volo di avere un angolo di sideslip diverso dal valore nullo. Esso infatti è

1. **positivo** se $F_c > F_{c_0}$ e quindi il raggio di curvatura aumenta;
2. **negativo** se $F_c < F_{c_0}$ e quindi il raggio di curvatura diminuisce.

*Lo strumento di bordo che tiene conto di questo effetto è il **Virobandometro**.*

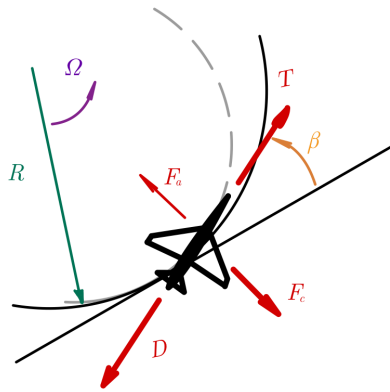
*Esso è formato da una pallina incapsulata in un piccolo condotto che si alza di un angolo sospinta dall'azione centrifuga **eguale e contraria** a quella del velivolo (la pallina si trova in un sistema di riferimento mobile).*

*Si prenda ora in esempio una virata a sinistra, come indicata nelle immagini seguenti. Nel caso di $F_c < F_{c_0}$ sul velivolo, la pallina ruoterà a verso sinistra poichè sospinta maggiormente dal suo stesso peso. Il pilota dovrà quindi azionare il **comando verticale di coda** premendo il pedale sinistro. Viceversa, se $F_c > F_{c_0}$ sul velivolo, la pallina ruoterà a verso destra poichè sospinta maggiormente dall'azione centripeta. Il pilota dovrà quindi azionare il **comando verticale di coda** premendo il pedale destra.*

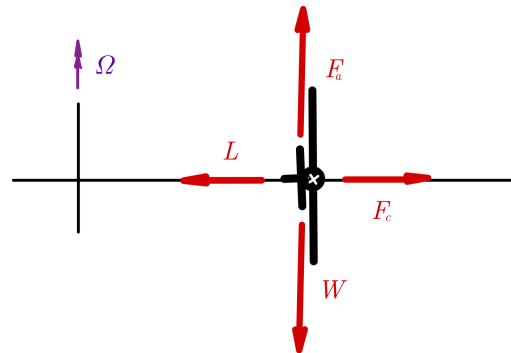
In generale in aeronautica si usa la dicitura "Step on ball" per indicare questa manovra.

2.5.2 Altri Tipi di Virata

Esistono altri tipi di virata così mostrati:



(a) Virata piatta



(b) Virata a coltello

Definito il piano contenente F_c e perpendicolare a V_∞ si decompone la Portanza in una componente $L \cos \varphi$ e si proietta il Peso (non contenuto nel piano) in una componente $W \cos \gamma$. Tale Piano è chiamato piano n - n .

Osservazione: per $\beta = 0$ il piano n - n corrisponde al piano $y_b - z_b$.

Per l'equilibrio:

$$L \cos \varphi = W \cos \gamma \quad L \sin \varphi = F_c = \frac{W}{g} V_\infty^2 \frac{\cos^2 \varphi}{r_c} \quad T + W \sin \gamma + \frac{W}{g} \frac{dV_\infty}{dt} = D$$

Dalla prima equazione,

$$n = \frac{L}{W} = \frac{\cos \gamma}{\cos \varphi}$$

Dalla somma dei quadrati delle prime due equazioni,

$$L^2 = W^2 \cos^2 \gamma + F_c^2 = W^2 \left(\cos^2 \gamma + \left(\frac{1}{g} \frac{V_\infty^2 \cos^2 \gamma}{r_c} \right)^2 \right),$$

$$\frac{V_\infty^2 \cos^2 \gamma}{r_c} = g \sqrt{n^2 - \cos^2 \gamma}$$

Si vogliono ora trovare i parametri caratteristici che descrivono il moto. Si parte da Ω : Poichè

$$u = V_\infty \cos \gamma = \Omega r_c = \Omega \rho \cos^2 \gamma \implies \frac{V_\infty}{\rho} = \Omega \cos \gamma$$

allora

$$\frac{V_\infty^2 \cos^2 \gamma}{r_c} = V_\infty \frac{V_\infty}{\rho} = V_\infty \Omega \cos \gamma = g \sqrt{n^2 - \cos^2 \gamma}$$

per cui

$$\Omega = \frac{g}{V_\infty} \sqrt{\frac{n^2 - \cos^2 \gamma}{\cos^2 \gamma}}$$

Risolvendo questa equazione in n

$$n = \cos \gamma \sqrt{\Omega^2 \frac{V_\infty^2}{g^2} + 1} = \cos \gamma \sqrt{\left(\frac{V_\infty^2 \cos^2 \gamma}{r_c^2} \right) \frac{V_\infty^2}{g^2} + 1}$$

Il raggio di curvatura quindi,

Osservazione 4 Nel caso di virata nel piano ($\gamma = 0$)

$$r_c = R = \frac{V_\infty^2}{g} \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}} \qquad \Omega = \frac{g}{V_\infty} \sqrt{n^2 - 1} \qquad (2.19)$$

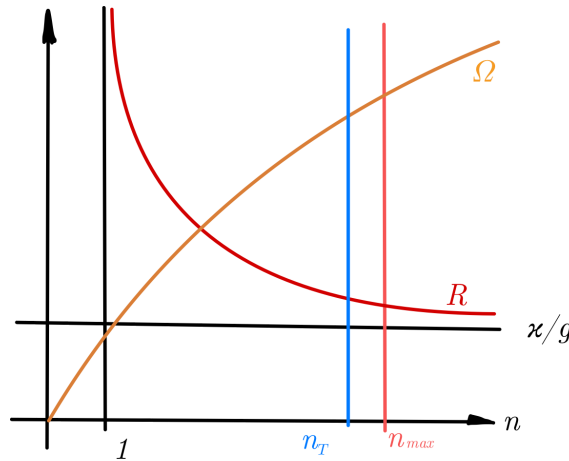


Figura 2.14: Grafico di r_c e Ω per $\gamma = 0$

Osservazione 5 Al fine di ottenere il raggio minimo al variare di C_L si costruisce numericamente la relazione.

Dim 11 Dall'equazione,

$$T + W \sin \gamma + \frac{W}{g} \frac{dV_\infty}{dt} = D = \frac{L}{E} = \frac{nW}{E} \implies n = \frac{T}{W} E \leq \frac{T_{max}}{W} E_{max}$$

che è un limite differente dal limite strutturale.

Contestualmente si osserva che questa condizione implica che, affinché la spinta sia massima,

$$C_L = C_{L_{E_{max}}} \neq C_{L_{max}}$$

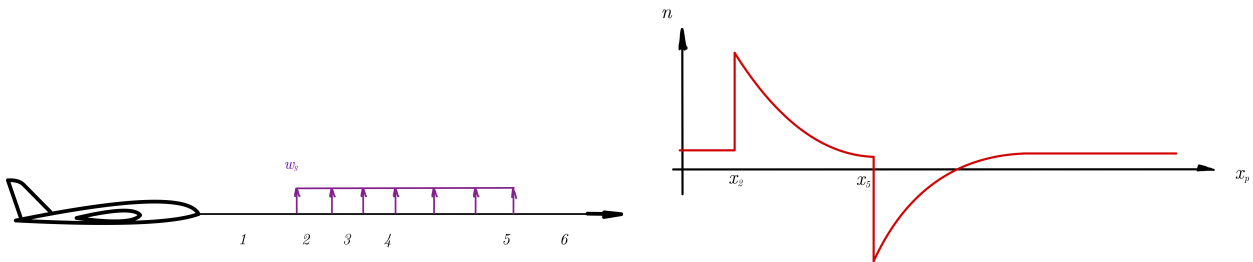
Quindi si sceglie una condizione nel range tra i due valori. Ad esempio

1. ci si pone nella condizione $C_{L_{E_{max}}} \implies n_{E_{max}} = \frac{\chi_1 \psi_1 \phi_1}{W/T_{s0}} E_{max}$;
2. conoscendo $\chi_1 \implies V_\infty$
3. a questo punto $r_c = r_c(V_\infty)$ e $\Omega = \Omega(V_\infty)$;
4. si ripete numericamente sino al $C_{L_{max}}$.

2.6.1 Raffica a Scalino

Proposizione 12 *Immaginando una raffica a scalino si ottiene un esubero nel fattore di carico pari a*

$$\boxed{\Delta n_{max} = \frac{V_{\infty} w_g}{gh}} \quad \boxed{h = \frac{2W/S}{\rho_{\infty} C_L g}} \quad (2.20)$$



Dim 12 *Si ha che, per piccole raffiche*

$$\Delta\alpha_2 \approx \frac{w_g}{V_{\infty}}$$

Questo aumento di incidenza genera un avanzo di portanza

$$\Delta L_2 = \frac{1}{2} \rho_{\infty} V_{\infty}^2 S C_{L\alpha} \Delta\alpha_2 = \frac{W}{g} \dot{w}$$

per il Secondo Principio della dinamica

Allora

$$\Delta n = \frac{\Delta L}{W} = \frac{1}{2} \rho_{\infty} S C_{L\alpha} w_g V_{\infty} = \frac{\dot{w}}{g}$$

Pertanto \$\Delta n_{max}\$ quando \$\Delta\alpha_{max} = \Delta\alpha_2\$. Nelle altre condizioni,

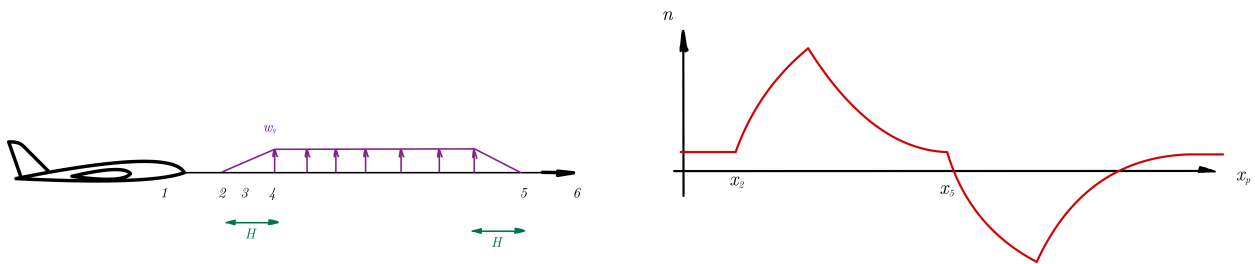
$$\begin{aligned} \Delta L_3 &= \frac{1}{2} \rho_{\infty} V_{\infty}^2 S C_{L\alpha} \Delta\alpha_3 = \frac{1}{2} \rho_{\infty} V_{\infty}^2 S C_{L\alpha} (\Delta\alpha_2 - \Delta\alpha_{2-3}) = \frac{1}{2} \rho_{\infty} V_{\infty}^2 S C_{L\alpha} \left(\frac{w_g}{V_{\infty}} - \frac{w}{g} \right) \\ &= \frac{W}{g} \dot{w} \end{aligned}$$

che è sempre pari alla variazione della quantità di moto. Quindi per cui,

2.6.2 Raffica Lineare

Proposizione 13 *Di solito la normativa tiene conto di un fattore di attenuazione, considerando la raffica non a scalino, ma inizialmente lineare. Il massimo fattore di carico è quindi attenuato da un fattore di attenuazione pari a:*

$$n_{max} = 1 \pm \Delta n_{max,scalino} \mathcal{F} \qquad \mathcal{F} = \frac{h}{H} \left(1 - e^{-\frac{H}{h}} \right) \qquad (2.21)$$



Dim 13 *Dalla equazione precedente,*

$$\dot{w} + \frac{V_\infty}{h} w - \frac{V_\infty}{h} \tilde{w}_g = 0$$

ove questa volta

$$\tilde{w}_g = w_g \frac{x_p}{H} = w_g \frac{V_\infty t}{H}$$

Per cui, associando la medesima condizione iniziale, si trova la seguente soluzione del problema di Cauchy

$$w = w_g \frac{h}{H} \left(\frac{V_\infty}{h} t + e^{-\frac{V_\infty t}{h}} - 1 \right),$$

$$\dot{w} = w_g \frac{h}{H} \frac{V_\infty}{h} \left(1 - e^{-\frac{V_\infty t}{h}} \right),$$

$$\Delta n_{max} = \frac{\dot{w}_{max}}{g} = \frac{1}{g} w_g \frac{V_\infty}{h} \frac{h}{H} \left(1 - e^{-\frac{H}{h}} \right)$$

il parametro

$$\mathcal{F} = \frac{h}{H} \left(1 - e^{-\frac{H}{h}} \right)$$

è detto **fattore di attenuazione** poichè attenua il cambiamento brusco rispetto alla condizione $\Delta n_{scalino}$.

È mostrato un grafico esemplificativo.

Chapter 3

Momento di Cerniera

Definizione 4 Il **Momento di Cerniera** è il momento che si forma a causa della forza che l'aria esercita sulla parte mobile (per esempio sugli alettoni delle ali o l'equilibratore).

$$H = \frac{1}{2} \rho_{\infty} V_{\infty}^2 S_e c_e C_H \quad (3.1)$$

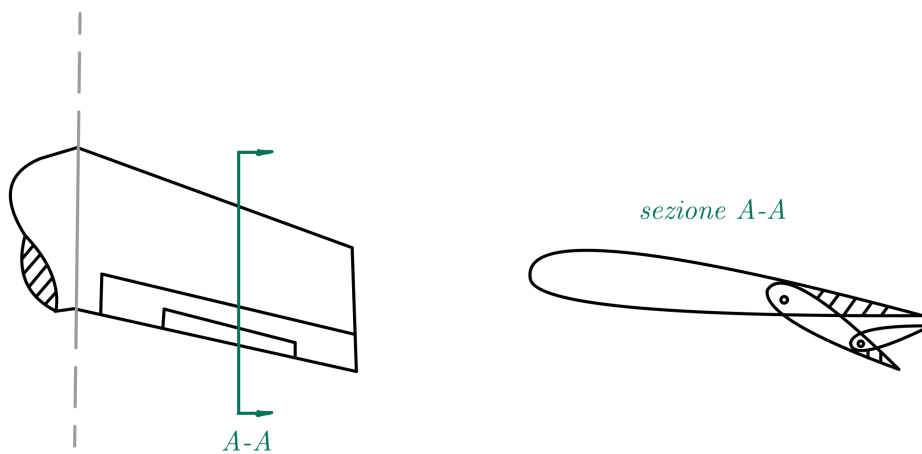


Figura 3.1: Vista in sezione dell'impennaggio orizzontale di coda

Se si pensa ai piani di coda, e in particolare agli equilibratori degli aerei, su di essi si esercita una certa forza quando non sono allineati al flusso della corrente (e quindi generano Portanza).

Per equilibrare un aereomobile, supponendo di voler mantenere quota costante, bisogna annullare oltre alle forze anche i momenti, diversamente l'aereo assumerà un angolo di picchiata o cabrata.

Per far ciò l'equilibratore è fondamentale, il problema è che deve essere mantenuto in una posizione in cui le forze aerodinamiche tenderebbero a riportarlo in modo da annullare il momento

$$a = a_{wb}(1 + F),$$

$$F = \frac{S_t}{S} \frac{a_t}{a_{wb}} (1 - \epsilon_\alpha);$$

Per cui, sostituendo opportunamente, in modo da trovare $\alpha_s = \alpha_s(\alpha)$

$$\begin{aligned} \alpha_s &= \left(\alpha + \frac{S_t}{S} \frac{a_t}{a_{wb}} \frac{i}{1 + F} \right) (1 - \epsilon_\alpha) - i \\ &= \alpha(1 - \epsilon_\alpha) - i \left(1 - \frac{S_t}{S} \frac{a_t}{a_{wb}} (1 - \epsilon_\alpha) \frac{1}{1 + F} \right) \\ &= \alpha(1 - \epsilon_\alpha) - i \left(1 - \frac{F}{1 + F} \right) \\ &= \alpha(1 - \epsilon_\alpha) - i \frac{1}{1 + F} \end{aligned}$$

Trovata quindi tale relazione

$$\begin{aligned} C_H &= b_0 + b_1(1 - \epsilon_\alpha)\alpha - \frac{b_1 i}{1 + F} + b_2 \delta_e + b_3 \delta_{tab} \\ &= \left(b_0 - \frac{b_1 i}{1 + F} \right) + b_1(1 - \epsilon_\alpha)\alpha + b_2 \delta_e + b_3 \delta_{tab} \\ &= C_{H0} + C_{H\alpha}\alpha + b_2 \delta_e + b_3 \delta_{tab} \end{aligned}$$

Osservazione 6 Se il velivolo è tutt'ala allora non esiste la mutua induzione, e quindi

$$\boxed{C_{H0} = b_0} \quad \boxed{C_{H\alpha} = b_1} \quad (3.3)$$

Section 3.2: Comandi Liberi

La situazione a comandi liberi è quella in cui il pilota smette di toccare il volantino, il quale è quindi libero di muoversi.

Proposizione 15 In una condizione a comandi liberi, avendo 4 gradi di libertà, se ne fissano 3. In particolare, fissato α_s e δ_{tab} , si ha

$$\boxed{\delta_{e, float} = -\frac{1}{b_2}(C_{H0} + C_{H\alpha}\alpha + b_3\delta_{tab})} \quad \boxed{C_{L, float} = C_{L\alpha} \left(1 - \frac{C_{L\delta}}{b_2} \frac{C_{H\alpha}}{C_{L\alpha}} \right) \alpha - \frac{C_{L\delta}}{b_2} (C_{H0} + b_3\delta_{tab})} \quad (3.4)$$

$$\boxed{a'_t = a_t f = a_t \left(1 - \tau \frac{C_{H\alpha}}{b_2}\right)} \quad \boxed{C'_{M\alpha} = C_{M\alpha} \left(1 - \frac{C_{M\delta}}{b_2} \frac{C_{H\alpha}}{C_{M\alpha}}\right)} \quad (3.6)$$

Spiegazione 1 *Per il velivolo ala-coda,*

Se $C_L = C_{L_{wb}} + S_t/SC_{L_t}$

e

$$C_{L_t} = a_t \alpha_s + a_t \tau \delta_{e,float}$$

$$\delta_{e,float} = -\frac{1}{b_2} (C_{H0} + C_{H\alpha} \alpha_s + b_3 \delta_{tab}).$$

Allora

$$C_{L_t} = a_t \alpha_s + a_t \tau \left(-\frac{1}{b_2} (C_{H0} + C_{H\alpha} \alpha_s + b_3 \delta_{tab})\right)$$

$$= a_t \left(1 - \tau \frac{C_{H\alpha}}{b_2}\right) \alpha_s - a_t \tau \left(\frac{1}{b_2} (C_{H0} + b_3 \delta_{tab})\right)$$

$$= a_t f - a_t \tau \left(\frac{1}{b_2} (C_{H0} + b_3 \delta_{tab})\right)$$

$$= a'_t - a_t \tau \left(\frac{1}{b_2} (C_{H0} + b_3 \delta_{tab})\right)$$

Osservazione: $a'_t < a_t$.

Il momento

$$C_M = C_{M0} + C_{M\alpha} \alpha + C_{M\delta} \delta_{e,float}$$

$$= C_{M0} + C_{M\alpha} \alpha + C_{M\delta} \left(-\frac{1}{b_2} (C_{H0} + C_{H\alpha} \alpha + b_3 \delta_{tab})\right)$$

$$= C_{M0} - \left(\frac{1}{b_2} (C_{H0} + b_3 \delta_{tab})\right) + C_{M\alpha} \left(1 - \frac{C_{M\delta}}{b_2} \frac{C_{H\alpha}}{C_{M\alpha}}\right) \alpha$$

$$= C'_{M0} + C'_{M\alpha} \alpha$$

Osservazione: $|C'_{M\alpha}| < |C_{M\alpha}|$.

Osservazione 8 *Anche il punto neutro del velivolo ala-coda si ha un cambiamento perché*

$$\frac{x'_N}{c} = \frac{x'_a}{c} + \frac{a'_t}{a'} (1 - \epsilon_\alpha) \bar{V} - \frac{C_{M\alpha p}}{a}$$

Proposizione 18 *Volendo valutare il free elevator factor per un velivolo a comandi liberi, si trova la seguente relazione*

$$\frac{x'_N}{c} = \frac{x_N}{c} - \frac{C_{H\alpha} a_t \tau}{b_2 a'} \left(\bar{V} + \frac{S_t x'_a - x_N}{S c} \right)$$

Poiché il secondo termine è positivo, quando sottratto al punto neutro lo riduce, $x'_N < x_N$.

Considerando la parentesi,

$$\bar{V} + \frac{S_t x'_a - x_N}{S c} = \bar{V} + \frac{S_t x'_a}{S c} - \frac{S_t x'_a}{S c} - \frac{S_t a'_t}{S a} (1 - \epsilon_\alpha) \bar{V} + 0$$

Allora, sostituendo,

$$\frac{x'_N}{c} = \frac{x_N}{c} - \frac{C_{H\alpha} a_t \tau}{b_2 a'} \frac{\bar{V}}{1 + F}$$

in cui $C_{H\alpha} = b_1(1 - \epsilon_\alpha)$, allora

$$\begin{aligned} \frac{x'_N}{c} &= \frac{x'_a}{c} + \frac{a_t}{a} (1 - \epsilon_\alpha) \bar{V} - \frac{b_1(1 - \epsilon_\alpha) a_t \tau}{b_2 a'} \frac{\bar{V}}{1 + F} \\ &= \frac{x'_a}{c} + \bar{V} a_t (1 - \epsilon_\alpha) \frac{1}{a'} \left(\frac{a'}{a} - \frac{b_1 \tau}{b_2 (1 + F)} \right) \end{aligned}$$

In cui

$$\frac{a'}{a} = 1 - \frac{1}{b_2 a_w b (1 + F)} \frac{S_t}{S} a_t \tau b_1 (1 - \epsilon_\alpha) = 1 - \frac{b_1 \tau}{b_2} \frac{F}{1 + F},$$

allora,

$$\begin{aligned} \frac{x'_N}{c} &= \frac{x'_a}{c} + \bar{V} a_t (1 - \epsilon_\alpha) \frac{1}{a'} \left(1 - \frac{b_1 \tau}{b_2} \frac{F}{1 + F} - \frac{b_1 \tau}{b_2 (1 + F)} \right), \\ &= \frac{x'_a}{c} + (1 - \epsilon_\alpha) \frac{a_t}{a'} \left(1 - \frac{b_1 \tau}{b_2} \right) \bar{V}, \end{aligned}$$

Volendo quindi imporre

$$\frac{x'_N}{c} = \frac{x'_a}{c} + \frac{a_t f}{a} (1 - \epsilon_\alpha) \bar{V} \stackrel{!}{=} \frac{x'_a}{c} + (1 - \epsilon_\alpha) \frac{a_t}{a'} \left(1 - \frac{b_1 \tau}{b_2} \right) \bar{V}$$

Si trova

$$f = 1 - \frac{b_1 \tau}{b_2}$$

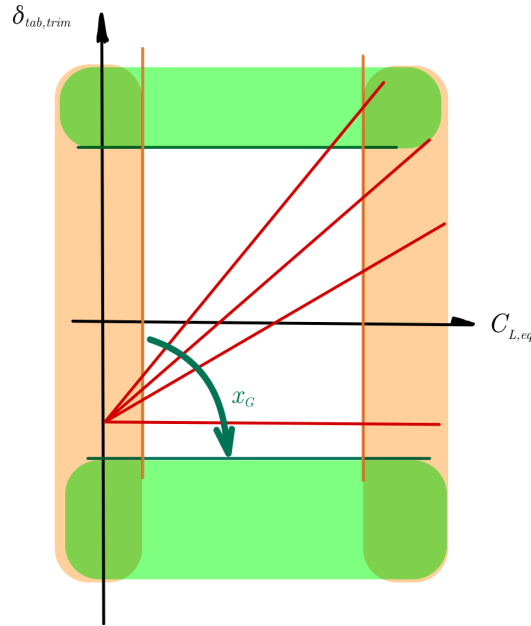


Figura 3.2: Grafico $\delta_{tab} - C_{L,eq}$

Dim 18 All'equilibrio

$$\begin{cases} C_L = C_{L\alpha}\alpha + C_{L\delta}\delta_e = C_{L,eq} \\ C_M = C_{M0} + C_{M\alpha}\alpha + C_{M\delta}\delta_e = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \delta_e = -C_{L\alpha}\frac{C_{M0}}{\Delta} - C_L\frac{C_{M\alpha}}{\Delta} \\ \alpha = \frac{C_L C_{M\delta}}{\Delta} + \frac{C_{M0} C_{L\delta}}{\Delta} \end{cases}$$

e per garantire il trim

$$C_H = C_{H0} + C_{H\alpha}\alpha_{eq} + b_2\delta_e + b_3\delta_{tab} = 0$$

Sicchè,

$$C_{H0} + C_{H\alpha}C_{M0}\frac{C_{L\delta}}{\Delta} + C_{H\alpha}\frac{C_{M\delta}}{\Delta}C_{L,eq} - b_2\frac{C_{L\alpha}C_{M0}}{\Delta} - b_2\frac{C_{M\alpha}}{\Delta}C_{L,eq} + b_e\delta_{tab} = 0$$

l'angolo della aletta,

$$\begin{aligned} \delta_{tab} &= -\frac{1}{b_3} \left(C_{H0} + \frac{C_{M0}}{\Delta} (C_{H\alpha}C_{L\delta} - b_2C_{L\alpha}) + \frac{C_{L,eq}}{\Delta} (C_{H\alpha}C_{M\delta} - b_2C_{M\alpha}) \right) \\ &= -\frac{1}{b_3} \left(C_{H0} + \frac{C_{M0}}{\Delta} (C_{H\alpha}C_{L\delta} - b_2C_{L\alpha}) - \frac{C_{L,eq}}{\Delta} C'_{M\alpha} b_2 \right) \end{aligned}$$

Osservazione 9 La derivata dell'angolo dell'aletta di trim è positiva rispetto al $C_{L,eq}$.

Osservazione 10 La relazione è medesima per un velivolo tutt'ala.

$$\delta_{tab} = k\delta_e$$

Proposizione 21 *Al fine di garantire la validità dei comandi,*

$$\boxed{|kb_3| < |b_2| \quad k > 0} \tag{3.11}$$

Dim 19 *Schematicamente,*

$$\delta_{tab} = k\delta_e$$

Osservazione: Solitamente $k \approx 1$. Allora,

$$C_H = b_0 + b_1\alpha_s + b_2\delta_e + b_3(-k\delta_e) = b_0 + b_1\alpha_s + b_2\left(1 - k\frac{b_3}{b_2}\right)\delta_e$$

Per la stabilità del comando, affinché il nuovo termine che regola δ_e deve essere negativo,

$$b_2\left(1 - k\frac{b_3}{b_2}\right) < 0$$

$$\left(1 - k\frac{b_3}{b_2}\right) > 0$$

perchè $b_2 < 0$,

$$k\frac{b_3}{b_2} < 1$$

Ma poichè

$$\left|k\frac{b_3}{b_1}\right| < 1$$

$$|kb_3| < |b_2|$$

Osservando inoltre tale disuguaglianza, è ovvio come la parentesi degradi il termine che moltiplica b_2 ($b'_2 < b_2$).

Ciò significa che quindi $k < 1$, per cui

Ma poiché,

$$\left| k \frac{b_3}{b_1} \right| > 1$$

$$|kb_3| > |b_2|$$

Allora si aumenta il $b'_2 > b_2$ in modulo.

$$P = -HG = -\frac{1}{2}\rho_{\infty}V_{\infty}^2 S_e c_e C_H G \tag{3.14}$$

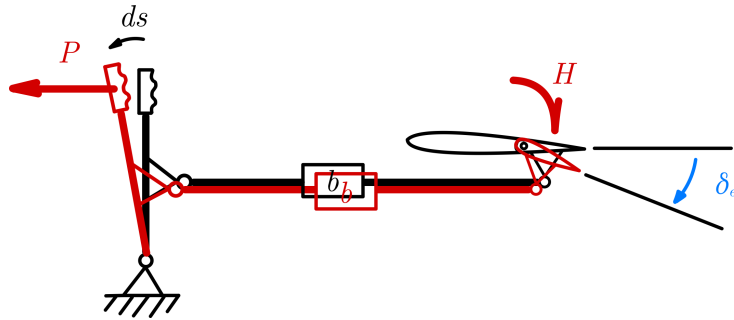


Figura 3.7: Barra con Attuatore

FOCUS 3 Lavoro dell'Attuatore

a È possibile misurare il lavoro dell'attuatore (booster), difatti

$$Pds + dW_b + Hd\delta_e = 0,$$

$$P = -\left(G_1 + \frac{dW_b/ds}{H}\right) H = -(G_1 + G_2)H = -GH$$

ove G_2 prende il nome di **power boost**.

Per cui è possibile diminuire lo sforzo di un pilota anche mediante sistema attuato.

3.6.1 Sforzo e Velocità

Proposizione 24 Rispetto alla velocità è possibile definire lo sforzo di barra

$$P = P_0 + B\frac{1}{2}\rho_{\infty}V_{\infty}^2 \tag{3.15}$$

in cui

$$P_0(x_G, W/S) = S_e c_e G \frac{W/S}{\Delta} a' \frac{x_G - x'_N}{c} b_2 \tag{3.16}$$

allora,

$$P = \frac{1}{2}\rho_{\infty}V_{\infty}^2 \left(-S_e c_e \left(b_3 \delta_{tab} + \left(C_{H0} + \frac{C_{M0}}{\Delta} (C_{H\alpha} C_{L\delta} - b_2 C_{L\alpha}) \right) \right) \right) G + S_e c_e \frac{W/S}{\Delta} C'_{M\alpha} b_2 G$$

$$= P_0 + B \frac{1}{2}\rho_{\infty}V_{\infty}^2$$

in cui

$$P_0 = S_e c_e G \frac{W/S}{\Delta} a' \frac{x_G - x'_N}{c} b_2 = P_0(x_G, W/S)$$

$$B = -S_e c_e G \left(b_3 \delta_{tab} + C_{H0} + \frac{C_{M0}}{\Delta} (C_{H\alpha} C_{L\delta} - b_2 C_{L\alpha}) \right) = B(\delta_{tab})$$

Studio del segno di P_0 :

1. $b_2 < 0$;
2. $\Delta < 0$;
3. $x_G - x'_N < 0$;

allora va da se che $P_0 < 0$.

Studio del segno di B . Immaginando che $\delta_{tab} = 0$ e trascurando C_{H0} :

1. $C_{H\alpha} > 0$;
2. $C_{L\delta} > 0$;
3. $b_2 < 0$;
4. $C_{L\alpha} < 0$;
5. $C_{M0} > 0$;
6. $\Delta < 0$;

allora va da se che $B > 0$.

Osservazione 12 Fissata la posizione del baricentro, la velocità di trim dipende solo dall'angolo dell'aletta.

$$\boxed{V_{\infty,trim}^2 = -\frac{2P_0}{\rho_{\infty}B}} \quad \boxed{B = -\frac{2P_0}{\rho_{\infty}V_{\infty,trim}^2}} \quad (3.18)$$

Al fine di dimensionare opportunamente il comando, si utilizzano quindi i seguenti comandi.

FOCUS 5 **Attrito del comando**

Anche gli attriti interni debbono essere superati dal pilota. Avendo una banda degli attriti elevata significa avere una *bassa sensibilità* del comando (e quindi del pilota) poichè si intercorre un grande range di velocità.

Alternativamente, un qualche disturbo che muove il comando da una velocità di trim alla successiva all'interno della banda di attrito viene equilibrato dagli attriti stessi (senza conferire nessuna informazione al pilota).

Per ridurre questo effetto dell'attrito si possono **ridurre gli attriti interni** oppure **aumentare il SF Gradient**, in modo da diminuire il range di velocità che intercorre nella banda.

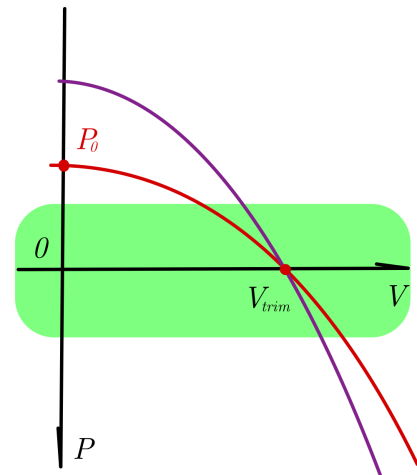


Figura 3.9: Grafico $P - V_\infty$ con attrito

$$\boxed{\frac{z}{c} = \hat{q} \left(\frac{x}{c}\right)^2} \quad (3.19)$$

Dim 23 *Immaginando di incurvare l'ala,*

$$\tan\gamma = \frac{\partial z}{\partial x}$$

Si scompone quindi la velocità tangente alla superficie in una normale e una tangenziale. La componente normale,

$$v_n = u_0 \sin\gamma \approx u_0 \tan\gamma = u_0 \frac{\partial z}{\partial x}$$

Poichè, nell'ala non incurvata

$$v_n = qx$$

affinchè l'ala incurvata sia equivalente a quella equivalente

$$qx \stackrel{!}{=} u_0 \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{q}{u_0} x$$

$$\int_0^x \frac{\partial z}{\partial x} dx = \int_0^x \frac{q}{u_0} x dx$$

$$z = \frac{q}{2u_0} x^2$$

Adimensionalizzando nuovamente

$$\hat{q} = qt^*$$

ove

$$t^* = \frac{c}{2u_0}$$

si ha

$$z = \hat{q} \frac{x^2}{c}$$

3.7.2 Sforzi e angoli in moto accelerato

Definizione 7 Si definiscono rispettivamente *elevator angle per g* e *stick force per g* le quantità

$$\boxed{\frac{\partial \delta_e}{\partial n} \approx \frac{\Delta \delta_e}{n - 1}} \quad \boxed{\frac{\partial P}{\partial n} \approx \frac{\Delta P}{n - 1}} \quad (3.20)$$

Tali quantità sono estremamente utili nel definire le variazioni di queste due grandezze in moto accelerato.

Proposizione 25 Nel moto curvo in salita si ha,

$$\boxed{q = \frac{g}{V_\infty}(n - 1)} \quad (3.21)$$

Dim 24 Si ha che, a seguito di una manovra,

$$L = L_{eq} + \Delta L \implies n = 1 + \Delta n.$$

Se il moto è curvo,

$$\Delta L = F_c = \frac{W}{g} \frac{V_\infty^2}{R} = \frac{W}{g} V_\infty q$$

per cui,

$$\Delta n = \frac{V_\infty}{g} q = n - 1,$$

$$q = \frac{g}{V_\infty}(n - 1).$$

Coefficiente di peso

Definizione 8 Si definisce il **coefficiente di peso** come il coefficiente di Portanza per un moto orizzontale.

Section 3.8: Punto di Manovra

3.8.1 Punto di manovra a comandi bloccati

Proposizione 28 *L'elevator angle per g a comandi bloccati è pari a,*

$$\frac{\Delta\delta_e}{n-1} = -\frac{C_{L\alpha} C_{Mq}}{\Delta} \frac{C_W}{2\mu} - \frac{C_{M\alpha}}{\Delta} \left(1 - \frac{C_{Lq}}{2\mu}\right) C_W \quad (3.26)$$

od anche

$$\frac{\Delta\delta_e}{n-1} = -\frac{C_W C_{L\alpha}}{\Delta} \frac{C_{Mq}}{2\mu} (2\mu - C_{Lq}) \left(\frac{x_G}{c} - \left(\frac{x_N}{c} - \frac{C_{Mq}}{2\mu - C_{Lq}} \right) \right) \quad (3.27)$$

Dim 27 *Al'equilibrio*

$$\begin{cases} \Delta C_L = C_{L\alpha} \Delta\alpha + C_{L\delta} \Delta\delta_e + C_{Lq} \Delta\hat{q} \\ \Delta C_M = C_{M\alpha} \Delta\alpha + C_{M\delta} \Delta\delta_e + C_{Mq} \Delta\hat{q} = 0 \end{cases}$$

fissato il fattore di carico, e quindi \hat{q} , perchè

$$\hat{q} = (n-1) \frac{C_W}{2\mu}$$

si ha che,

$$\begin{cases} (n-1)C_W \left(1 - \frac{C_{Lq}}{2\mu}\right) = C_{L\alpha} \Delta\alpha + C_{L\delta} \Delta\delta_e \\ (n-1)C_W \left(-\frac{C_{Mq}}{2\mu}\right) = C_{M\alpha} \Delta\alpha + C_{M\delta} \Delta\delta_e \end{cases}$$

mediante Cramer,

$$\begin{aligned} \Delta &= C_{L\alpha} C_{M\delta} - C_{M\alpha} C_{L\delta}, \\ \frac{\Delta\delta_e}{n-1} &= -\frac{C_{L\alpha} C_{Mq}}{\Delta} \frac{C_W}{2\mu} - \frac{C_{M\alpha}}{\Delta} \left(1 - \frac{C_{Lq}}{2\mu}\right) C_W \end{aligned}$$

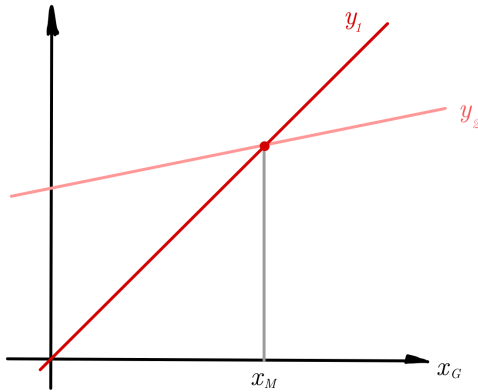
Osservazione: $\mu \gg C_{Lq} \implies C_{Lq}/\mu \approx 0$

L'angolo,

$$\frac{\Delta\alpha}{n-1} = \frac{C_W}{C_{L\alpha}} \left(1 - \frac{C_{Lq}}{2\mu}\right) - \frac{C_{L\delta}}{C_{L\alpha}} \Delta \frac{\Delta\delta_e}{n-1}$$

Poichè

FOCUS 6 Non linearità del problema



Nel caso in cui fosse impossibile distinguere la definizione della posizione del baricentro dal punto di manovra ($x_M = x_M(x_G)$), allora si procede a trovare il punto in cui l'elevator angle si annulla. Definendo difatti le due funzioni

$$\begin{cases} y_1(x_G) = x_G/c \\ y_2(x_G) = x_N/c - C_{Mq}/(2\mu - C_{Lq}) \end{cases}$$

allora,

$$\frac{\Delta\delta_e}{n-1} = -\frac{C_W}{\Delta} \frac{C_{L\alpha}}{2\mu} (2\mu - C_{Lq})(y_1 - y_2) = 0 \iff y_1 = y_2.$$

Figura 3.14: Definizione del punto di manovra per via grafica

3.8.2 Stick Force Gradient

Proposizione 29 *Lo stick force per g dipende dalla variazione del momento di cerniera con il carico. Difatti,*

$$\frac{\Delta C_H}{n-1} = -\frac{a'b_2}{2\mu} \frac{C_W}{\Delta} (2\mu - C_{Lq}) \left(\frac{x_G}{c} - \frac{x_M}{c} - \frac{\Delta}{a'b_2} \left[\frac{C_{H\alpha}}{C_{L\alpha}} + \frac{C_{Hq}}{2\mu - C_{Lq}} \right] \right) \quad (3.30)$$

Dim 28 Poichè

$$P = -HG \propto C_H \implies \frac{\partial P}{\partial n} = Q = \frac{\Delta P}{n-1} \propto \frac{\Delta C_H}{n-1}$$

Allora, se

$$\begin{aligned} \Delta C_H &= C_{H\alpha} \Delta\alpha + b_2 \Delta\delta_e + C_{Hq} \hat{q} \\ \frac{\Delta C_H}{n-1} &= C_{H\alpha} \frac{\Delta\alpha}{n-1} + b_2 \frac{\Delta\delta_e}{n-1} + C_{Hq} \frac{\hat{q}}{n-1} \end{aligned}$$

ove

$$\frac{\Delta\delta_e}{n-1} = -\frac{C_W}{\Delta} \frac{C_{L\alpha}}{2\mu} (2\mu - C_{Lq}) \left(\frac{x_G}{c} - \frac{x_M}{c} \right),$$

$$Q = \frac{\Delta P}{n-1} = S_e c_e G \frac{W/S}{\Delta} \frac{a' b_2}{2\mu} (2\mu - C_{Lq}) \left(\frac{x_G}{c} - \frac{x'_M}{c} \right) \quad (3.33)$$

Dim 29 Allora,

$$\begin{aligned} \frac{\Delta P}{n-1} &= -G \frac{\Delta H}{n-1} = -\frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 S_e c_e G \frac{\Delta C_H}{n-1} \\ &= -\frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 S_e c_e G \left(-\frac{a' b_2}{2\mu} \frac{C_W}{\Delta} (2\mu - C_{Lq}) \left(\frac{x_G}{c} - \frac{x'_M}{c} \right) \right) \\ &= +S_e c_e G \frac{W/S}{\Delta} \frac{a' b_2}{2\mu} (2\mu - C_{Lq}) \left(\frac{x_G}{c} - \frac{x'_M}{c} \right) \end{aligned}$$

Osservazione:

1. $\Delta < 0$;
2. $b_2 < 0$;

allora $Q < 0 \iff x_G < x'_M$.

Stima di C_{Hq}

Si ha che

$$C_H = b_0 + b_1 \alpha_s + b_2 \delta_e + b_3 \delta_{tab}$$

ma se si considerano piccoli angoli,

$$\Delta \alpha_s = \text{atan} \left(\frac{q \ell'_t}{V_\infty} \right) \approx \frac{q \ell'_t}{V_\infty}$$

e quindi

$$C_{Hq} = \frac{\partial C_H}{\partial \hat{q}} = \frac{\partial C_H}{\partial q} \frac{2V_\infty}{c} = 2b_1 \frac{\ell'_t}{c} < 0$$

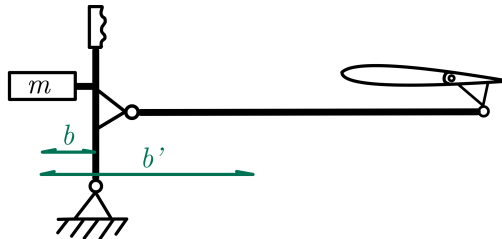


Figura 3.16: Bob Weight

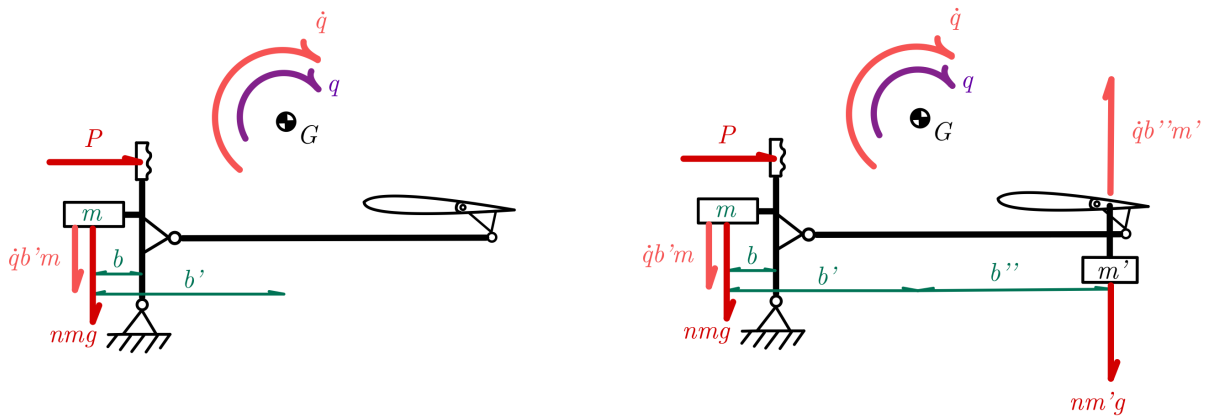


Figura 3.17: Equilibrage dell'inerzia del Bob Weight

Chapter 4

Dinamica del Volo

Fino a questo punto si è trattato della trattazione puramente statica. È però necessario La base per lo studio della risposta dinamica e la simulazione di un velivolo è un modello matematico del velivolo «affidabile». La risposta di un velivolo alle azioni esterne è mostrato in diversi **modi**. Si analizzeranno quindi in questo capitolo la natura di ogni singolo modo e osservare come questi si evolvono. Lo scopo di questo capitolo è definire un modello matematico (rappresentabile da un **simulatore di volo**) che meglio rappresenti la dinamica del velivolo. Esso è rappresentabile da

1. le equazioni del moto;
2. un modello aerodinamico;
3. un modello propulsivo;
4. Modello geometrico / strutturale (per velivolo flessibile)
5. Altri sottosistemi (LDG, comandi, attuatori, sensori, ecc.)

Section 4.1: Sistemi di Riferimento

Lo studio della dinamica si basa sulla risoluzione di equazioni differenziali che, essendo ricavate dalle equazioni cardinali della dinamica ed essendo in forma vettoriale, hanno una validità generale e, quindi, indipendente dal sistema di riferimento scelto per la loro rappresentazioni.

Ci sono principalmente 3 tipi di terne di riferimento:

1. **Inerziale** (no accelerazioni lineari, no rotazioni)
2. **Fissa** sul velivolo (o superfici di comando per lo studio a comandi liberi)
3. **Intermedia** (ad esempio, un riferimento alla fine della pista che ruoterà con la Terra)

Per quanto riguarda i sistemi "terrestri" si definiscono dei sistemi di riferimento che prendono come caratteristiche quelle della Terra. In particolare,

2. Sistema di Riferimento **Aerodinamico** \mathcal{F}_a , un particolare sistema Corpo in cui

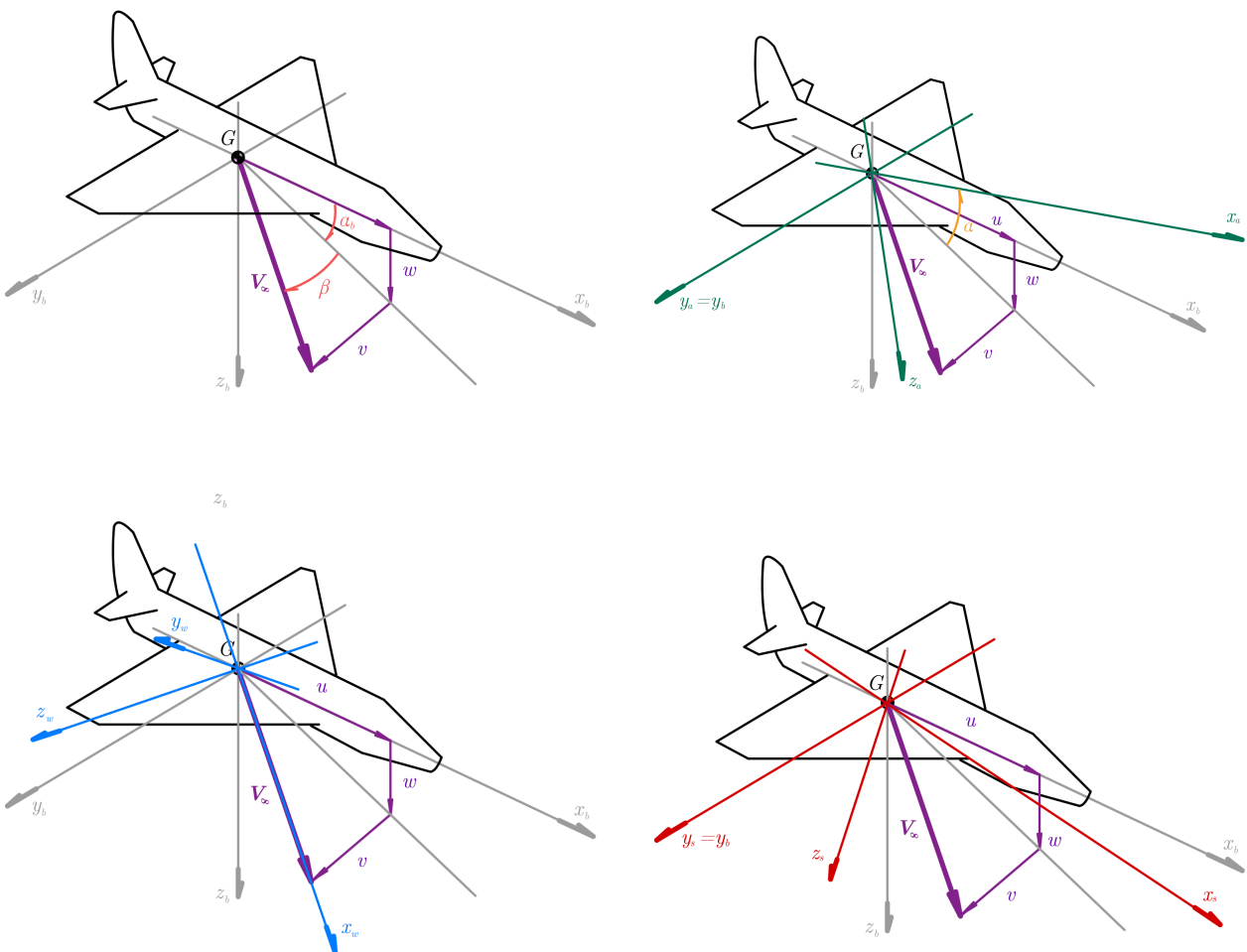
- (a) asse x lungo la direzione $C_L = 0$;
- (b) asse y a completare;
- (c) asse z normale a x presa verso il basso;

3. Sistema di Riferimento **Vento** \mathcal{F}_v , avente

- (a) origine nel baricentro;
- (b) asse x lungo la direzione del vento;
- (c) asse y a completare;
- (d) asse z normale a x presa verso il basso;

4. Sistema di Riferimento **Stabilità** \mathcal{F}_s , un particolare sistema Corpo in cui si fissa la direzione della x per garantire la stabilità del velivolo;

È mostrato un esempio



Proposizione 32 Per passare dagli assi inerziali agli assi body, si effettua una trasformazione:

$$\boxed{x_1 = \mathbf{R}(1, \phi)\mathbf{R}(2, \theta)\mathbf{R}(3, \psi)x_f = \mathbf{R}_{f \rightarrow b}x_f = \mathbf{B}_{E2B}x_f} \quad (4.2)$$

Dim 30 Seguendo la notazione $3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$:

$$x_b = \mathbf{R}(1, \phi)x_2,$$

$$x_2 = \mathbf{R}(2, \theta)x_1, \text{ e}$$

$$x_1 = \mathbf{R}(3, \psi)x_f$$

in cui

$$\mathbf{R}(3, \psi) = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{R}(2, \theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{R}(1, \phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix},$$

allora

$$x_1 = \mathbf{R}(1, \psi)\mathbf{R}(2, \theta)\mathbf{R}(1, \phi)x_f = \mathbf{R}_{f \rightarrow b}x_f$$

Osservazione 18 È vero che,

$$\boxed{\mathbf{B}_{E2B}^T = \mathbf{B}_{E2B}^{-1} = \mathbf{B}_{B2E}} \quad (4.3)$$

Definizione 16 La matrice \mathbf{B}_{E2B} è chiamata **matrice dei coseni direttori** (direction cosine matrix, DCM).

Osservazione 19 *Ovviamente è vero il viceversa,*

$$\begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \mathbf{G}^{-1} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$$

in cui

$$\mathbf{G}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sin\phi\sin\theta}{\cos\theta} & \frac{\cos\phi\sin\theta}{\cos\theta} \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \frac{\sin\phi}{\cos\theta} & \frac{\cos\phi}{\cos\theta} \end{pmatrix}$$

Questa relazione è comoda quando anziché misurare gli le variazioni degli angoli di Eulero e ricavare (p, q, r) , ci si trova a bordo e si vuol misurare tali sbandamenti.

Section 4.4: Equazioni vettoriali del Moto

Il punto cruciale della trattazione è l'analisi della dinamica di un velivolo. Come un qualsiasi sistema fisico, è possibile descrivere la propria dinamica attraverso diversi metodi. Il più semplice ed intuitivo è mediante le **equazioni cardinali della Dinamica**, introdotte da Newton per la prima volta nei *Principia Matematica* nel 1687.

Ai fini della trattazioni si definiscono le seguenti grandezze,

1. la **posizione del baricentro** nel sistema inerziale (NED):
 $\mathbf{p} = (N, E, D)^T = (x_{NED}, y_{NED}, z_{NED})^T,$
2. la **velocità del baricentro** nel sistema inerziale (NED):
 $\mathbf{v}_{NED} = \dot{\mathbf{p}} = (\dot{N}, \dot{E}, \dot{D})^T = (\dot{x}_{NED}, \dot{y}_{NED}, \dot{z}_{NED})^T,$
3. la **velocità del baricentro** nel sistema corpo: $\mathbf{v}_G = (u, v, w)^T$
4. la **velocità angolare del sistema body** nel baricentro: $\boldsymbol{\omega} = (p, q, r)^T$
5. un generico vettore nel sistema inerziale (NED): \mathbf{v}

L'arbitrarietà di rappresentazione di un vettore impone la possibilità di rappresentare in assi corpo o in assi inerziali la velocità. Il vettore rappresenta la stessa grandezza, ma espresso in maniera differente.

$$\mathbf{v}_G = \mathbf{v}_{NED} = \dot{\mathbf{p}}$$

Teorema 1 *Le equazioni cardinali della dinamica affermano che,*

$$\boxed{\frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \mathbf{F}_{ext}} \quad \boxed{\frac{d\mathbf{L}_G}{dt} + \mathbf{p} \times \mathbf{v}_G = \mathbf{M}_{ext}} \quad (4.5)$$

Considerando un generico vettore

$$\mathbf{u} = x_f \mathbf{i}_f + y_f \mathbf{j}_f + z_f \mathbf{k}_f = x_b \mathbf{i}_b + y_b \mathbf{j}_b + z_b \mathbf{k}_b$$

è possibile derivare in assi body e nel sistema inerziale. Presi gli assi body,

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \dot{x}_b \mathbf{i}_b + x_b \frac{d\mathbf{i}_b}{dt} + \dot{y}_b \mathbf{j}_b + y_b \frac{d\mathbf{j}_b}{dt} + \dot{z}_b \mathbf{k}_b + z_b \frac{d\mathbf{k}_b}{dt} = \dot{x}_b \mathbf{i}_b + x_b \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i}_b + \dot{y}_b \mathbf{j}_b + y_b \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j}_b + \dot{z}_b \mathbf{k}_b + z_b \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}_b$$

definita $\dot{\mathbf{u}} = (\dot{x}_b, \dot{y}_b, \dot{z}_b)^T$,

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \dot{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}$$

Osservazione: per l'arbitrarietà di rappresentazione di un vettore

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \dot{x}_f \mathbf{i}_f + \dot{y}_f \mathbf{j}_f + \dot{z}_f \mathbf{k}_f.$$

Questo risultato è noto come **formula di Poisson** (o **Teorema di Poisson**) e mette in relazione la derivata nel tempo in un sistema inerziale e in un sistema non inerziale. Difatto, ai fini della trattazione si definiscono le due derivate nel tempo in maniera differente:

1. la **derivata relativa** al sistema mobile (body): $\dot{\mathbf{u}}$;
2. la **derivata assoluta** nel sistema inerziale: $du/dt = \dot{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}$;

La relazione tra queste due grandezze risiede nella formula di Poisson.

Osservazione 20 La stessa formula può assumere anche la seguente formula. Tale risultato è noto come **Teorema di Coriolis** o **Teorema di Rivals**,

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \ddot{\mathbf{p}} + (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{p} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p})) + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{p}}$$

(4.7)

Dim 33 Preso un sistema inerziale e definita la posizione \mathbf{p}

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \dot{\mathbf{p}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p},$$

e derivando una seconda volta nel sistema inerziale,

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{p}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}) \\ &= (\dot{\mathbf{p}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p})' + \boldsymbol{\omega} \times (\dot{\mathbf{p}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}) \\ &= \ddot{\mathbf{p}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{p} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{p}} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{p}} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}) \end{aligned}$$

Proposizione 35 *Un velivolo rigido, a massa costante, descrive le sue rotazioni osservando le variazioni di velocità angolare del Baricentro.*

$$\boxed{M_{ext} = \frac{d\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}}{dt} = \mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega})} \quad (4.9)$$

Dim 35 *Per la Seconda equazione Cardinale,*

$$M_{ext} = \frac{d\mathbf{L}_G}{dt} + \mathbf{p} \times \mathbf{v}_G.$$

Si procede a calcolare il momento della quantità di moto (o momento angolare) nel centro di massa L_G . Il secondo termine è nullo in quanto $\mathbf{p} \parallel \mathbf{v}_G$. Come si è visto, $\mathbf{v} = \mathbf{v}_G + \dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \mathbf{v}_G + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, per definizione di corpo rigido

$$M_{ext} = \frac{d}{dt} \left(-\mathbf{v}_G \times \int_m \mathbf{r} dm \right) + \frac{d}{dt} \int_m \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) dm$$

Ricordando che, in generale

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}), \\ \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) &= \boldsymbol{\omega}r^2 - \mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{\omega}r^2, \end{aligned}$$

poichè $\mathbf{r} \perp \boldsymbol{\omega}$.

$$\begin{aligned} \int_m \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) dm &= \int_m (\boldsymbol{\omega}r^2 - \mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega})) dm = \boldsymbol{\omega} \int_m r^2 dm \\ &= \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}, \end{aligned}$$

*il tensore \mathbf{I} è chiamato **Tensore di Inerzia**. Allora,*

$$M_{ext} = \frac{d\mathbf{L}_G}{dt} = \frac{d\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}}{dt} = \mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}).$$

Osservazione: Avendo scelto assi corpo il momento di inerzia non cambia nel tempo supponendo un velivolo rigido (le distanze pesate tra le varie componenti del velivolo sono le stesse)

Osservazione 21 *Utilizzando le relazioni definite prima,*

$$\boxed{\mathbf{F}_{ext} = m\dot{\mathbf{v}}_G + m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}} \quad \boxed{M_{ext} = \dot{\mathbf{L}}_b + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}} \quad (4.10)$$

La seconda equazione è interessante perchè definisce le tre rotazioni attorno agli assi corpo,

$$\begin{cases} M_{x,b} = \dot{L}_x + qL_z - rL_y & \rightarrow \text{"rollio (roll)"} \\ M_{y,b} = \dot{L}_y + rL_z - pL_x & \rightarrow \text{"beccheggio (pitch)"} \\ M_{z,b} = \dot{L}_z + pL_x - qL_y & \rightarrow \text{"imbardata (yaw)"} \end{cases}$$

Section 4.5: Piccole Perturbazioni

Il sistema di sei equazioni differenziali che governa la dinamica del velivolo è il seguente.

$$\begin{cases} \mathbf{F}_{ext} = m\dot{\mathbf{v}}_G + m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_G \\ \mathbf{M}_{ext} = \mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}) \end{cases} \quad (4.12)$$

$$\begin{cases} F_x = m(\dot{u} + qw - rv) \\ F_y = m(\dot{v} + ru - pw) \\ F_z = m(\dot{w} + pv - qu) \\ M_x = I_x\dot{p} - I_{xz}\dot{r} + qr(I_z - I_y) - I_{xz}pq \\ M_y = I_y\dot{q} + pr(I_x - I_z) - I_{xz}(p^2 - r^2) \\ M_z = I_z\dot{r} - I_{xz}\dot{p} + pq(I_y - I_x) + I_{xz}qr \end{cases} \quad (4.13)$$

Le equazioni descritte sinora racchiudono una natura non lineare. La risoluzione di tali equazioni è spesso difficile da operare.

Si procedono quindi ad osservare non grandi disturbi del sistema, ma si introduce una teoria detta **Teoria delle Piccole Perturbazioni** che linearizza il problema identificato. Allora una grandezza è la somma del valore in una condizione di equilibrio e dei disturbi ad essa associati.

$$\Lambda = \Lambda_{eq} + \Delta\Lambda$$

in assi corpo, ad esempio

$$\begin{cases} u = u_{eq} + \Delta u \\ v = 0 + \Delta v \\ w = w_{eq} + \Delta w \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_b = \alpha_{b,eq} + \Delta\alpha_b \\ \beta = 0 + \Delta\beta \\ \theta = \theta_{eq} + \Delta\theta \end{cases} \quad \begin{cases} p = 0 + \Delta p \\ q = 0 + \Delta q \\ r = 0 + \Delta r \end{cases}$$

La situazione di equilibrio può identificare una qualsiasi condizione. Spesso è conveniente riferirsi al moto rettilineo uniforme orizzontale, data la semplicità del problema. Per questo motivo all'equilibrio alcuni parametri (come v_{eq} e β_{eq}) sono nulli.

Notazione 2 Di seguito si indicano condizioni di equilibrio con il pedice "0" o "eq".

Le funzioni trigonometriche ad esempio sono risolte come segue

$$\begin{cases} \sin\theta = \sin(\theta_0 + \Delta\theta) = \sin\theta_0\cos\Delta\theta + \cos\theta_0\sin\Delta\theta \approx \sin\theta_0 + \Delta\theta\cos\theta_0 \\ \cos\theta = \cos\theta_0\cos\Delta\theta - \sin\theta_0\sin\Delta\theta \approx \cos\theta_0 - \Delta\theta\sin\theta_0 \end{cases}$$

Osservazione 24 La velocità angolare attorno all'asse y_b rappresenta:

1. $\dot{\gamma}$ se misurata in assi vento (angolo tra la direzione x_w e x_{NED});

$$\begin{cases} \Delta F_x = m(\dot{u} + qw_{eq}) \\ \Delta F_y = m(\dot{v} + ru_{eq} - pw_{eq}) \\ \Delta F_z = m(\dot{w} + pv_{eq} - qu_{eq}) \\ M_x = I_x \dot{p} - I_{xz} \dot{r} \\ M_y = I_y \dot{q} \\ M_z = I_z \dot{r} - I_{xz} \dot{p} \end{cases} \quad (4.17)$$

Proposizione 39 *In teoria linearizzata le variazioni degli angoli di Eulero corrispondono alle componenti di velocità angolare in assi body.*

L'ultima semplificazione che si adopera è espandere il problema in serie. Ad esempio,

$$\Lambda = \frac{\partial \Lambda}{\partial V} \Delta V + \frac{\partial \Lambda}{\partial \alpha} \Delta \alpha + \frac{\partial \Lambda}{\partial \beta} \Delta \beta + \frac{\partial \Lambda}{\partial \theta} \Delta \theta + \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{V}} \Delta \dot{V} + \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{\alpha}} \Delta \dot{\alpha} + \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{\beta}} \Delta \dot{\beta} + \frac{\partial \Lambda}{\partial q} \Delta q$$

Section 4.6: Dinamica Longitudinale in assi vento

Proposizione 40 *Le equazioni della dinamica longitudinale in assi corpo restituiscono,*

$$\begin{cases} \Delta F_x = m(\dot{u} + qw_{eq}) \\ \Delta F_z = m(\dot{w} + pv_{eq} - qu_{eq}) \\ M_y = I_y \dot{q} \end{cases} \quad (4.18)$$

e in assi vento,

$$\begin{cases} \Delta F_x = m\dot{V} \\ \Delta F_z = -mV\dot{\gamma} = -mV(\dot{\theta} - \dot{\alpha}) \\ M_y = I_y \dot{q} = I_y \ddot{\theta} = I_y(\ddot{\gamma} + \ddot{\alpha}) \end{cases} \quad (4.19)$$

Dim 36 *Si suppone che, in assi vento*

$$u = V_\infty, \quad w = 0, \quad y_b = y_w$$

L'ultima assunzione prevede che quindi il momento d'inerzia attorno a y rimanga costante anche in assi vento.

Si introducono due velocità angolari differenti:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\omega}_b = (0 \quad \dot{\theta} \quad 0)^T \\ \boldsymbol{\omega}_w = (0 \quad \dot{\gamma} \quad 0)^T \end{cases}$$

per cui, scritte le equazioni cardinali con il sistema di riferimento vento

$$\begin{cases} \Delta F_x = m\dot{V} \\ \Delta F_z = -mV\dot{\gamma} = -mV(\dot{\theta} - \dot{\alpha}) \\ M_y = I_y \dot{q} = I_y \ddot{\theta} = I_y(\ddot{\gamma} + \ddot{\alpha}) \end{cases}$$

per cui in **assi vento**, questa volta differenti dagli assi corpo

$$\begin{cases} \Delta F_x = m\dot{V} = T_{eq}\cos(\alpha_T + \Delta\alpha) + \Delta T\cos(\alpha_T + \Delta\alpha) - \Delta D - W\sin\gamma - T\cos\alpha_T \\ \Delta F_z = mV_{eq}q - mV_{eq}\dot{\alpha} = -T_{eq}\sin(\alpha_T + \Delta\alpha) - \Delta L + W\cos\gamma - T\sin\alpha_T \\ \Delta M = \dot{q}I_y = M_V\Delta V + M_\alpha\Delta\alpha + M_q\Delta q + M_{\dot{\alpha}}\Delta\dot{\alpha} \end{cases}$$

Si esplicitano quindi le funzioni trigonometriche, adoperando le assunzioni viste prima,

$$\begin{cases} \sin\theta = \sin(\theta_0 + \Delta\theta) = \sin\theta_0\cos\Delta\theta + \cos\theta_0\sin\Delta\theta \approx \sin\theta_0 + \Delta\theta\cos\theta_0 \\ \cos\theta = \cos\theta_0\cos\Delta\theta - \sin\theta_0\sin\Delta\theta \approx \cos\theta_0 - \Delta\theta\sin\theta_0 \end{cases}$$

Si assumono piccoli calettamenti della spinta ($\alpha_T \approx 0$) e si eliminano i termini di ordine superiore (come ad esempio $\Delta T\Delta\alpha \ll T\Delta\alpha$). Si ottiene quindi il seguente sistema,

$$\begin{cases} m\dot{V} = -T_{eq}\sin(\alpha_T)\Delta\alpha + \Delta T\cos\alpha_T - \Delta D - W(\theta - \Delta\alpha) \\ mV_{eq}q - mV_{eq}\dot{\alpha} = -T_{eq}\cos(\alpha_T)\Delta\alpha - \Delta T\sin\alpha_T - \Delta L \\ \dot{q}I_y = M_V\Delta V + M_\alpha\Delta\alpha + M_q\Delta q + M_{\dot{\alpha}}\Delta\dot{\alpha} \end{cases}$$

a queste equazioni è stata implicitamente aggiunta la relazione

$$\Delta\gamma = \gamma = \Delta\theta - \Delta\alpha = \theta - \Delta\alpha$$

e va aggiunta ancora la relazione cinematica

$$\dot{\theta} = q$$

Tale sistema inculde le variabili (V, α, q, θ) che vengono racchiuse in un vettore x detto **vettore di stato**. Tali variabili sono presenti anche derivate, e quindi rappresentano la derivata del vettore di stato. I coefficienti di questo vettori sono racchiusi nella **matrice del sistema**, A .

Allora in generale,

$$\dot{x} = Ax$$

Proposizione 43 *La variazione della resistenza è pari a*

$$\Delta D = \frac{\partial D}{\partial V} \Delta V_{eq} + \frac{\partial D}{\partial \alpha} \Delta \alpha_{eq} \quad (4.22)$$

$$\frac{\partial D}{\partial V} = \frac{1}{2} \rho_{\infty,eq} V_{\infty,eq} S (2C_{Deq} + C_{DV,eq})$$

$$\frac{\partial D}{\partial \alpha} = \frac{1}{2} \rho_{\infty,eq} V_{\infty,eq}^2 \left(2 \frac{a_{eq}^2}{\pi \lambda e} \alpha_{eq} \right)$$

Dim 39 *Definito un coefficiente di resistenza*

$$C_D = \frac{D}{(1/2) \rho_{\infty} V_{\infty}^2 S}$$

valido sempre, anche all'equilibrio

$$C_{D,eq} = \frac{D_{eq}}{(1/2) \rho_{\infty,eq} V_{\infty,eq}^2 S}$$

Allora, volendo espandere in serie la resistenza si osserva che essa dipende da:

1. *il numero di Reynolds (e quindi la velocità);*
2. *il numero di Mach (e quindi la velocità);*
3. *l'incidenza;*

$$\Delta D = \frac{\partial D}{\partial V} \Delta V + \frac{\partial D}{\partial \alpha} \Delta \alpha \approx \frac{\partial D}{\partial V} \Delta V_{eq} + \frac{\partial D}{\partial \alpha} \Delta \alpha_{eq}$$

Per la velocità si ripete il ragionamento precedente,

$$\frac{\partial D}{\partial V} \approx \frac{1}{2} \rho_{\infty,eq} V_{\infty,eq} S (2C_{Deq} + C_{DV,eq})$$

Per l'incidenza, invece, supponendo che valga la relazione parabolica,

$$C_D = C_{D0} + \frac{a^2}{\pi \lambda e} \alpha^2,$$

$$\frac{\partial D}{\partial \alpha} = \frac{1}{2} \rho_{\infty} V_{\infty}^2 \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(C_{D0} + \frac{a^2}{\pi \lambda e} \alpha^2 \right) = \frac{1}{2} \rho_{\infty} V_{\infty}^2 \left(2 \frac{a^2}{\pi \lambda e} \alpha \right) \approx \frac{1}{2} \rho_{\infty,eq} V_{\infty,eq}^2 \left(2 \frac{a_{eq}^2}{\pi \lambda e} \alpha_{eq} \right)$$

Osservazione: *La velocità non viene presa in considerazione perchè è una variabile indipendente.*

Osservazione: La velocità non viene presa in considerazione perchè è una variabile indipendente.

Infine per q ,

$$\frac{\partial L}{\partial q} = \frac{1}{2}\rho_{\infty}V_{\infty}^2S\frac{\partial C_L}{\partial q} \approx \frac{1}{2}\rho_{\infty,eq}V_{\infty,eq}^2S\frac{\partial C_L}{\partial q}$$

in cui

$$\frac{\partial C_L}{\partial q} = \frac{\partial C_L}{\partial qt^*}t^* = C_{Lq}t^*$$

con $t^ = c/(2V_{\infty})$ per cui,*

$$\frac{\partial L}{\partial q} = \frac{1}{2}\rho_{\infty,eq}V_{\infty,eq}^2\frac{\partial C_L}{\partial q} = \frac{1}{2}\rho_{\infty,eq}V_{\infty,eq}^2C_{Lq}\frac{c}{2V_{\infty,eq}}$$