NUMERO: **2559A** ANNO: 2023

A P P U N T I

STUDENTE: Coutandin Arianna

MATERIA: Fisica - Prof. Bianco

~ Videolezione_1 21 Feb

FISICA

cos'é ? é lo studio dei fenomeni della natura → é nata come Filosofia della Natura (φυσις)

ACUSTICA | OTTICA | MECCANICA | TERMODINAMICA | ELETTROMAGNETISMO

MECCANICA → moto degli oggetti e le sue cause

TERMODINAMICA → trasformazioni che coinvolgono scambi di calore

ma in molti casi la distinzione netta tra queste branche é puramente convenzionale

$\boxed{\text{XX° sec. profondo progresso scientifico}}$

↳
- proprietá della materia riconducibili a particelle fondamentali e alle loro interazioni
- meccanica newtoniana cessa di valere su scala atomica e subatomica → meccanica quantistica
- meccanica classica non vale per fenomeni relativistici

A. Einstein: relatività < ristretta / generale

COSA SAPPIAMO OGGI?

Mattoni costituenti della materia:

elettrone	e^-	$m_e \simeq 10^{-30}$ Kg	carica $-e$
protone	p^+	$m_p \simeq 2000\, m_e$	carica $+e$
neutrone	n	$m_n \simeq m_p$	carica 0

Atomo (10^{-10} m) → nucleo centrale (10^{-15} m) immerso in una distribuzione di elettroni → atomo é un sist. neutro

↓

molecola

↓

materia
- solido
- liquido
- gassoso

SISTEMI DIVERSI

sist. solare $\sim 10^{10}$ Km

galassie $\sim 10^{18}$ Km

Lezione 1 27 Feb

Le basi della FISICA MODERNA sono fondate nel XVII sec. da Galileo Galilei
é una scienza fondamentale
e si basa sul metodo scientifico

METODO SCIENTIFICO

METODO SPERIMENTALE (galileiano): il criterio di verità è il risultato dell'osservazione e dell'esperienza

Premesse al metodo sperimentale:

- FILOSOFICA: i fenomeni naturali si svolgono sempre con le stesse modalità quando vengono mantenute le medesime condizioni iniziali
- TECNICA: é possibile modificare con accorgimenti tecnici opportuni la scala

  posso simulare un fenomeno per osservare le leggi che lo dominano

- MATEMATICA: una legge naturale é ritenuta vera se le conseguenze logiche che da essa si ricavano matematicamente vengono riscontrate nella realtà

Una TEORIA FISICA è un insieme coerente di leggi mediante le quali è possibile enunciare affermazioni empiricamente verificabili

il rapporto teoria - esperimento è dialettico

FILOSOFIA vs FISICA (galileiana)

PERCHÉ? → modello mentale del mondo, schema APRIORISTICO delle cose

COME? → sperimentazione quantitativa

METODO GALILEIANO

OSSERVAZIONE
INDIVIDUAZIONE degli ASPETTI FONDAMENTALI
PROVA e RIPROVA del fenomeno
ESPRESSIONE NUMERICA dei PARAMETRI
FORMULAZIONE QUANTITATIVA → ricerca della LEGGE che regola il fenomeno

INTERAZIONE OSSERVATORE - FENOMENO

Una misura potenzialmente modifica il sist che sto misurando
L'informazione è relativa allo stato del sistema DURANTE l'osservazione, a rigore non necessariamente uguale a quello PRIMA dell'osservazione → ricerca dei metodi che minimizzano la perturbazione sul sist. osservato.

↳ la perturbazione può essere ridotta a zero? Fisica classica: sì
Fisica quantistica: No (principio di indeterminazione di Heisenberg)

CALCOLO VETTORIALE

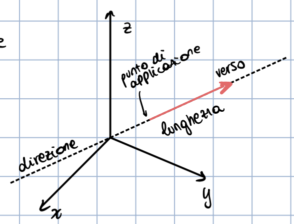
VETTORE (nel piano o nello spazio) = l'insieme di tutti i segmenti orientati equipollenti
↳ rappresentazione: segmento orientato

cioè aventi uguale ← direzione, verso, intensità

(che ∈ a un determinato fascio di rette parallele)

↓ matematicamente il punto di applicazione non è importante

notazioni: $\Delta\vec{r}$, $\mathbf{\Delta r}$, $\overrightarrow{AB}$



VERSORE $\mathbf{u}$ = vettore di modulo unitario

se $|\mathbf{a}| = a \Rightarrow \mathbf{a} = a\mathbf{u}$

info sull'intensità — info su direzione e verso

prodotto per scalare

$\alpha(\beta \mathbf{a}) = (\alpha\beta)\mathbf{a}$

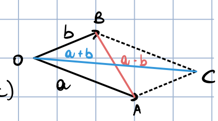
$(\alpha + \beta)\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{a}$

$\alpha(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}$

somma e differenza

p. commutativa $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$

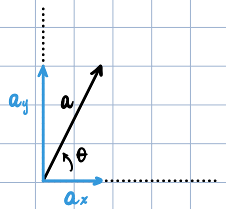
p. associativa $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$



SCOMPOSIZIONE IN COMPONENTI

: il vettore è identificato dalle sue componenti sugli assi cartesiani

Ogni vettore, definito su un sist. di assi cartesiani, può essere visto univocamente come somma di due vettori ortogonali tra loro



modulo ↳ $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$ Pitagora

$a_x = a\cos\theta$

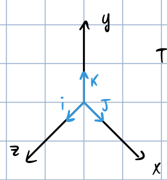
$a_y = a\sin\theta$ } Trigonometria

$\tan\theta = \frac{a_y}{a_x}$

il vettore è indipendente rispetto al sistema di riferimento → fissato il sist. di riferimento ricavo le coordinate

La scomposizione lungo gli assi cartesiani può essere descritta in termini di **versori**

NB. posso sempre definire un versore lungo una direzione, non solo per gli assi cartesiani

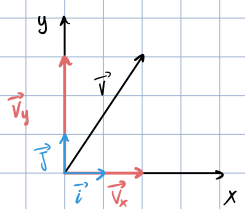


↱ regola mano dx

TERNA DI VERSORI (i, j, k oppure u_x, u_y, u_z) in un sist. di coordinate cartesiane:

- hanno modulo unitario
- sono diretti lungo gli assi cartesiani
- indicano il verso positivo degli assi

↳ definisco le componenti cartesiane del vettore $\vec{v}$ applicando le regole di moltiplicazione tra vettore e scalare:



$\vec{v}_x = v_x \vec{i}$

$\vec{v}_y = v_y \vec{j}$

v_x e v_y sono le componenti scalari (cartesiane) del vettore $\vec{v}$

$\vec{v} = (v_x, v_y)$

OPERARE CON LE COMPONENTI

il VETTORE SOMMA ha come componenti la somma delle componenti dei singoli vettori

$$\underbrace{\mathbf{a} + \mathbf{b}}_{\text{vettore somma}} = \underbrace{(a_x + b_x)}_{\text{componenti scalari}} \overbrace{\mathbf{u}_x}^{\text{versore}} + (a_y + b_y)\mathbf{u}_y + (a_z + b_z)\mathbf{u}_z$$

MOMENTO DI UN VETTORE

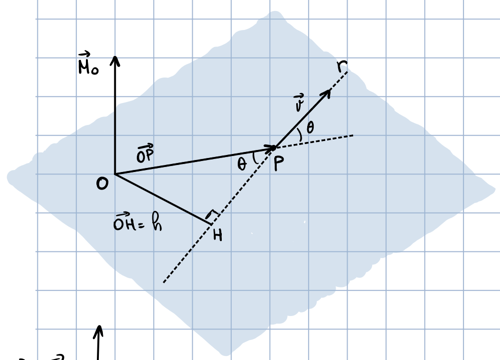
riferire il vettore rispetto a un punto

Consideriamo un vettore $\vec{v}$ su r applicato nel punto P e O un altro punto generico:
si chiama **momento del vettore $\vec{v}$ rispetto al polo O**, il vettore $\vec{M}_o = \vec{OP} \wedge \vec{v}$ (pr. vettoriale tra $\vec{OP}$ e il vettore $\vec{v}$)
ortogonale al piano individuato da $\vec{OP}$ e $\vec{v}$

Detto OH il componente di OP perpendicolare a v otteniamo

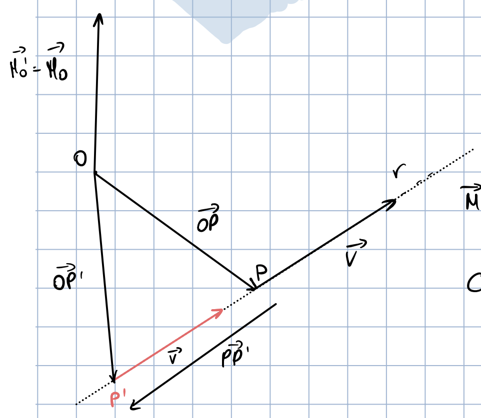
$$\vec{OP} = \vec{OH} + \vec{HP}$$

e quindi $M_o = \vec{OP} \wedge \vec{v} = (\vec{OH} + \vec{HP}) \wedge \vec{v} = \vec{OH} \wedge \vec{v}$
essendo $\vec{HP} \,//\, \vec{v}$



MODULO di $\vec{M}_o$ è $M_o = \overline{OP}\, v \sin\theta = \overline{OH}\, v = h v$

h = braccio del vettore = distanza dal punto O della retta lungo cui giace il vettore v
↳ retta di applicazione di v



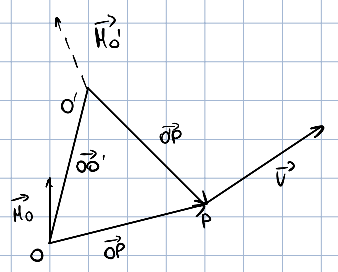
$\vec{M}_o = \vec{OP} \wedge \vec{v}$

Cosa succede se sposto $\vec{v}$ mantenendolo sulla retta r?
Il momento dipende dalla posizione di P?

$\vec{M}'_o = \vec{OP}' \wedge \vec{v} \ominus \qquad \vec{OP}' = \vec{OP} + \vec{PP}'$

$\ominus\ (\vec{OP} + \vec{PP}') \wedge \vec{v} = \vec{OP} \wedge \vec{v} + \vec{PP}' \wedge \vec{v} = \vec{M}_o$

⇝ Dovunque si prenda P lungo r il momento non cambia in quanto $\vec{OH}$ rimane lo stesso
Analogamente, se si sposta O lungo una retta parallela a r il momento non cambia



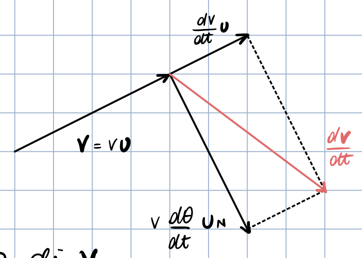
$\vec{M}_o = \vec{OP} \wedge \vec{v}$
$\vec{M}_o' = \vec{O'P} \wedge \vec{v}$
$\vec{O'P} = \vec{OP} - \vec{OO}'$
$M_o' = (\vec{OP} - \vec{OO}') \wedge \vec{v} = \vec{OP} \wedge \vec{v} - \vec{OO}' \wedge \vec{v} = \vec{M}_o - \vec{OO}' \wedge \vec{v}$

⇝ Il momento di un vettore, in generale, dipende dal polo
(solo se ci spostassimo parallelamente ciò non avverrebbe)

SCRITTURA INTRINSECA della DERIVATA di un VETTORE

Consideriamo il vettore $\mathbf{v}$ nella sua forma $\mathbf{v} = v\mathbf{u}$, invariante rispetto al sistema di riferimento
Calcoliamo la derivata di $\mathbf{v}(t)$ con la regola di derivazione del prodotto:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\mathbf{u} + v\frac{d\mathbf{u}}{dt}$$



Notiamo che la variazione rispetto a t del vettore $\mathbf{v}$ ha 2 termini:

① $\frac{dv}{dt}\mathbf{u}$ (parallelo a $\mathbf{v}$) è dovuto alla variazione del modulo di $\mathbf{v}$

② $v\frac{d\mathbf{u}}{dt} = v\frac{d\theta}{dt}\mathbf{u}_N$ (ortogonale a $\mathbf{v}$) è dovuto alla variazione di direzione di $\mathbf{v}$

Quindi:

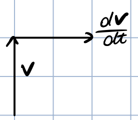
vettore derivato: $\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\mathbf{u} + v\frac{d\theta}{dt}\mathbf{u}_N$

modulo del vettore derivato: $\left|\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right| = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(v\frac{d\theta}{dt}\right)^2}$

CASI PARTICOLARI:

a) $\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\mathbf{u}$ il vettore varia solamente in modulo

b) $\frac{d\mathbf{v}}{dt} = v\frac{d\theta}{dt}\mathbf{u}_N$ il vettore non varia in modulo ma compie una rotazione



$\Rightarrow$ **la derivata di un vettore di modulo costante è perpendicolare al vettore stesso**
(si estende così quanto trovato prima sui versori)

RICHIAMO (PIÙ GENERALE)

DERIVATE = operatore che mi permette di descrivere la variazione di una funzione

$f: \text{dom} f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad \frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}$ operatori derivata rispetto alle coordinate spaziali

$\frac{d}{dt}$ operatore derivata rispetto al tempo

la scrittura $\frac{df}{dx}$
- ricorda il significato di derivazione: limite del rapporto tra la variazione della funzione e quella della variabile
- visto il significato fisico che hanno gli infinitesimi dx, ovvero df, si usa come relazione algebrica
  es. $dx = v\,dt$ → utile per < integrare / schematizzare il moto

il DIFFERENZIALE di una funzione è uguale al prodotto della derivata per l'incremento infinitesimo della variabile indipendente

$$df = \left(\frac{df}{dx}\right) dx$$

il differenziale di una funzione è la sua variazione che si ottiene alla variazione della sua variabile

DERIVAZIONE di una FUNZIONE COMPOSTA (o cambio di variabile) $\quad v(x(t))$

$$\frac{dv}{dt} = \underbrace{\frac{dv}{dx}}_{\text{derivata di } v \text{ rispetto a } x} \cdot \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{\text{derivata di } x \text{ rispetto a } t}$$

cioè moltiplico e divido $\frac{dv}{dt}$ per dx

DERIVATE DI ORDINE SUPERIORE → simboli: $\frac{d^2 f}{dx^2}$, $\frac{d^2 f}{dt^2}$

Per esteso sarebbe $g = \frac{df}{dx}$, $h = \frac{dg}{dx} = \frac{d^2 f}{dx^2}$

NB. Alla $h = \frac{dg}{dx}$ si può applicare quanto appena detto, ma non alla relazione $h = \frac{d^2 f}{dx^2}$,

cioè non ha senso scrivere $h\,dx^2 = d^2 f$ → la derivata è un operatore iterato più volte, non un elevamento a potenza.

DERIVAZIONE DI FUNZIONI SCALARI E VETTORIALI A PIÙ VARIABILI

A) $f: \text{dom} f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (dominio n-dimensionale → codominio unidimensionale)

funzione che ad ogni elemento $P = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ di un sottoinsieme $\text{dom} f \subseteq \mathbb{R}^n$ associa un numero reale $f(P) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

se $n \geq 2$ è detta CAMPO SCALARE

es. prodotto scalare

B) $\mathbf{f}: \text{dom}\,\mathbf{f} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

funzione che ad ogni elemento $P = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ di un sottoinsieme $\text{dom}\,\mathbf{f} \subseteq \mathbb{R}^n$ associa un elemento $\mathbf{f}(P) = \mathbf{f}(x_1, x_2, \dots, x_n) \subseteq \mathbb{R}^m$

se $n = m$, $m \geq 2$, $\mathbf{f}$ è detta CAMPO VETTORIALE

es. prodotto vettoriale

CONCETTO DI DERIVATA PARZIALE

si deriva rispetto alla variabile x_i, mantenendo costanti le altre $n-1$ variabili, e si indica con il simbolo $\frac{\partial f}{\partial x_i}$. Derivando ancora rispetto alla stessa variabile si ottiene $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$. Tuttavia, si può anche derivare in successione rispetto a 2 variabili distinte, $\frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_J}$ e si parla di derivate seconde miste.

Proprietà derivate parziali:

Data $z = z(x, y)$

a) $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{1}{\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)}$ reciprocità

b) $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y = -1$ ciclicità

Teorema di Schwarz (indipendenza dell'ordine di derivazione)

se $z = z(x,y)$ ammette derivate seconde miste continue (funzione di classe C^2), allora:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

il risultato è lo stesso se si deriva rispetto a x e poi a y o viceversa

Esercizio:

Supponiamo $f(x,y) = x^2 + \frac{\sin y}{x}$. Calcolare la derivata parziale di f

- rispetto a x: $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - \frac{\sin y}{x^2}$ considero x come variabile e y come costante
- rispetto a y: $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x} \cos y$ considero y come variabile e x come costante

x^2 è un numero e va via

Derivate miste

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\frac{\cos y}{x^2} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -\frac{\cos y}{x^2}$$

Teo Schwarz ✓

Lavorando in 3D esistono 5 operatori: gradiente, divergenza, rotore, flusso, circuitazione

GRADIENTE DI UNA FUNZIONE SCALARE

$f(x,y,z)$ funzione scalare di classe C^2. La sua variazione (differenziale esatto) è:

$$df = f(x+dx,\, y+dy,\, z+dz) - f(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

Def: $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}u_x + \frac{\partial f}{\partial y}u_y + \frac{\partial f}{\partial z}u_z \longrightarrow df = \nabla f \cdot d\mathbf{r}$ $\quad \nabla f \in \mathbb{R}^3$ GRADIENTE

∇ = operatore gradiente, che può essere applicato a un campo scalare e lo trasforma in un vettore che ha come componenti le derivate della funzione lungo le tre dimensioni

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x};\ \frac{\partial}{\partial y};\ \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

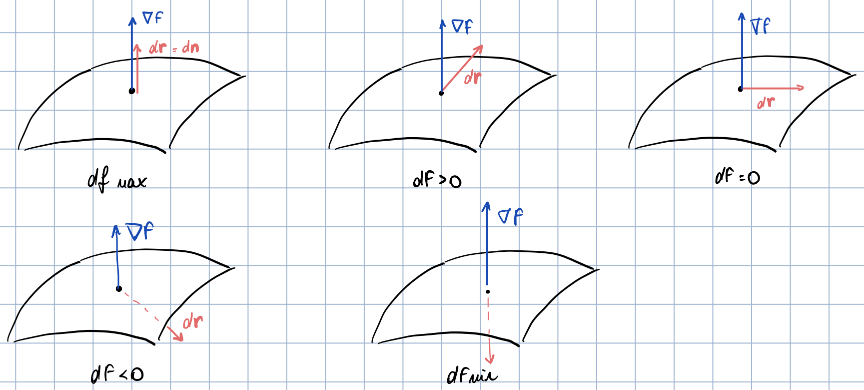
$d\vec{r} = dx\,\vec{u}_x + dy\,\vec{u}_y + dz\,\vec{u}_z$

$df = \nabla f \cdot d\vec{r} = |\nabla f|\cos\theta\, dr$ $\rightarrow$ la variazione della funzione f è max lungo la direzione del gradiente (quando $\theta = 0$)

se $\theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow df = 0 \rightarrow$ operatore gradiente è punto per punto $\perp$ alle zone in cui f è costante

$\rightsquigarrow$ il gradiente mi dice qual è la direzione lungo la quale io ho la max variazione di una grandezza fisica

es. gradiente di temperatura mi dice lungo quale direzione la temperatura varia di più
se ho una zona a T costante il gradiente di temperatura sarà perpendicolare rispetto alla zona con T costante



MISURAZIONE e ANALISI delle INCERTEZZE

GRANDEZZE FISICHE = parametri definibili OPERATIVAMENTE

Consideriamo un insieme di enti omogenei tra loro (es. insieme di cariche elettriche o di masse).
Tale insieme costituisce un insieme di grandezze fisiche se:

- presi 2 punti a caso A e B, si è sempre in grado di dire se $A > B$, $A < B$ o $A = B$
  ↳ CRITERIO DEL CONFRONTO
- si può definire la somma $A + B$
  ↳ CRITERIO DI SOMMA
- si può definire uno degli enti come unità di misura
  ↳ CAMPIONE UNITARIO

Si può definire **MISURAZIONE (misura)** di una grandezza fisica il numero che rappresenta il rapporto tra la grandezza considerata e quella fissata come unità

↳ può essere

① DIRETTA

i) confronto mediante un opportuno strumento di una grandezza G con un'altra della stessa specie [g] scelta come unità

ii) determinazione di quante volte G contiene [g] o una sua frazione

↳ la misura diretta di una grandezza è sempre un numero positivo razionale

Es. lunghezza = 3,5 metri

specie della lunghezza — misura — unità di misura

② INDIRETTA

Es. la massa di un oggetto è una grandezza che si può misurare direttamente con una bilancia. Tuttavia, se si volesse misurare la massa di un corpo celeste o di una particella piccola come uno ione, sarebbe impossibile farlo usando uno strumento quale la bilancia. Allora si fa ricorso ad una qualche relazione nota tra le masse di questi oggetti ed altre grandezze misurabili direttamente, e poi si risale dalle misure di queste a quella della massa in questione

In generale, se la grandezza y è una funzione conosciuta delle grandezze di specie diverse $x_1, x_2, \dots, x_n$ tutte misurabili direttamente

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

NB. le variabili indipendenti sono spesso più di una

allora si effettuano misure di $x_1, x_2, \dots x_n$ e, mediante la relazione, si risale alla misura di y

i) trovo legge fisica che leghi la grandezza della misura cercata ad altre grandezze misurabili direttamente

ii) eseguo tali misure

iii) sfrutto la relazione per calcolare il numero che esprime la misura cercata

C) PORTATA = l'ampiezza max della grandezza misurabile per mezzo dello strumento stesso

D) PRONTEZZA = è data dalla rapidità con cui lo strumento è in grado di eseguire la misura o di seguire le variazioni nel tempo della grandezza in esame

SISTEMI DI UNITÀ DI MISURA

UNITÀ DI MISURA
- → FONDAMENTALI : grandezze per le quali vengono fissate le unità di misura
- → DERIVATE : grandezze per le quali le unità di misura vengono ricavate a partire dalle unità di misura fondamentali

SISTEMA INTERNAZIONALE (S.I.)

Simbolo	Grandezze	Unità	
Fondamentali	Lunghezza	Metro	m
	Massa	Kilogrammo	kg
	Intervallo di tempo	Secondo	s
	Intensità di corrente elettrica	Ampère	A
	Temperatura	Grado Kelvin	K
	Intensità luminosa	Candela	cd
	Quantità di materia	Mole	mol
Supplementari	Angolo piano	Radiante	rad
	Angolo solido	Steradiante	sr

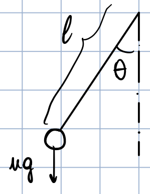
} MA SONO NUMERI! → non compaiono nell'analisi dimensionale

Per ogni unità di misura si realizzano dei CAMPIONI le cui caratteristiche devono essere facilmente riproducibili in qualunque luogo e ben conservabili.
I campioni, specie in tempi recenti, sono preferibilmente legati a COSTANTI NATURALI (spontanei e immodificabili)

Es. metro → campione :
- prima 1960 : sbarra di una lega di platino-iridio, mantenuto a 0 °C
- dopo 1960 : lunghezza d'onda l_0 nel vuoto della radiazione corrispondente alla transazione tra i livelli $2p_{10}$ e $5d_5$ dell'atomo di Kripton-86 : $1m = 1650763,73\ l_0$
- dopo 1985 : lunghezza del cammino percorso nel vuoto dalla luce in un $\Delta t = \frac{1}{299792458}$ s

- Attraverso considerazioni di analisi dimensionale è possibile dedurre informazioni sulla forma algebrica delle leggi fisiche (solo alcune!)

Es. pendolo semplice



dipendenza funzionale del periodo di oscillazione τ dalle altre grandezze fisiche che possono contribuire al fenomeno (l, m, g)

non prendo in considerazione l'angolo perché è un numero, quindi non compare nell'analisi dimensionale

In generale $\tau = cost \cdot m^{\beta} \cdot l^{\gamma} \cdot g^{\delta}$

Equaz. dimensionale:

$[T] = [M^{\beta} L^{\gamma+\delta} T^{-2\delta}]$

$([g] = [LT^{-2}])$

ho un tempo al primo membro ⇒ voglio ottenere un tempo anche nel II membro

$\Rightarrow \begin{cases} \beta = 0 \\ \gamma = \delta = 0 \\ -2\delta = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} \beta = 0 \\ \gamma = \frac{1}{2} \\ \delta = -\frac{1}{2} \end{cases}$ $\Rightarrow \tau \propto \sqrt{\frac{l}{g}}$

non dipende dalla massa!

ANALISI DELLE INCERTEZZE

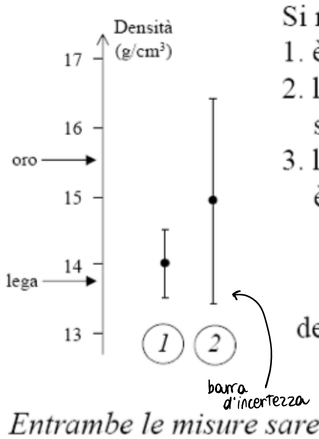
Ad ogni misurazione è associato un certo livello di incertezza, dovuto a

a) limiti e deficienze strumentali (ogni strumento ha una propria precisione intrinseca + l'operatore può commettere errori)
b) metodi di misurazione errati (utilizzo di relazioni improprie)
c) cause accidentali (fluttuazioni di temperatura o pressione, turbolenze, ...)

L'analisi delle incertezze è lo studio del calcolo dell'incertezza nella misura
le incertezze non si possono evitare totalmente ma è comunque importante poterle stimare

Importanza di conoscere le incertezze

Esempio: misura della densità di un oggetto al fine di stabilire se è composto di oro a 18 carati o di una lega meno costosa



Si nota che:
1. è probabile che entrambe le misure siano corrette
2. la misura (2) è "inutile", anche se sembrerebbe suggerire che l'oggetto è d'oro
3. la misura (1) consente di concludere che l'oggetto è composto dalla lega

Perché le misure permettano di trarre una conclusione le incertezze sperimentali non devono essere troppo grandi (ma non è necessario che siano estremamente piccole).

Entrambe le misure sarebbero inutili se gli sperimentatori non avessero incluso affermazioni realistiche (e verificabili) sulle loro incertezze

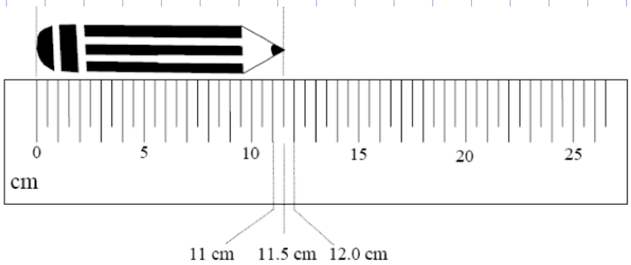
INCERTEZZE SPERIMENTALI

Un risultato sperimentale non è mai determinato in modo esatto, ma è affetto da un'incertezza a causa di diversi fattori, tra cui l'azione di grandezze che non sono note ma che modificano la misura, dette GRANDEZZE d'INFLUENZA

ESEMPI: STIMA delle INCERTEZZE

→ sono sempre stimate > 0 → si sommano (mai sottratte)

a) LETTURA DI SCALE



Nel caso in cui la punta della matita sia più vicina alla tacca degli 11.5 cm piuttosto che a quella degli 11.0 cm o dei 12.0 cm

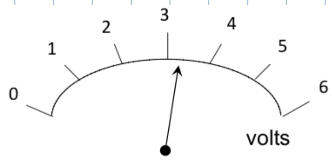
Migliore stima della lunghezza = 11.5 cm

Intervallo probabile: da 11.25 a 11.75 cm ⇒ L = (11.50 ± 0.25) cm

→ oppure 0,5

risoluzione dello strumento

b) LETTURA DI INDICI



La spaziatura tra le tacche è grande, quindi si può realisticamente stimare dove giace l'ago nello spazio tra le due divisioni

Migliore stima della tensione = 3.2 V ⇒ tensione = (3.2 ± 0.1) V

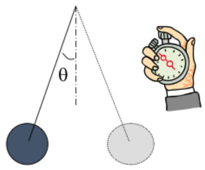
Intervallo probabile = da 3.1 V a 3.3 V

Il procedimento di valutare la posizione tra le incisioni di una scala è detta **interpolazione**.

c) STIMA DELLE INCERTEZZE NELLE MISURE RIPETUTE

Se utilizziamo un cronometro, la principale sorgente di errore non è la difficoltà di leggere il quadrante, bensì il tempo di reazione (incognito) nel far partire ed arrestare il cronometro.

Questo genere di incertezze possono essere ragionevolmente stimate qualora si ripeta la misura parecchie volte. Esempio:



Misure: 2.3 s; 2.4 s; 2.5 s; 2.4 s
Miglior stima del periodo = 2.4 s (valor medio)
Intervallo probabile da 2.3 s a 2.5 s

⇒ periodo = (2.4 ± 0.1) s

N.B.: è una valutazione "grossolana"; vedremo che i metodi statistici danno una stima dell'incertezza più accurata.

$\bar{T} = 1,2487392\ s$

$\delta T = 0,0472139\ s$ → ci definisce n° cifre significative
↳ cifre ≠ 0 dopo la virgola

→ $\bar{T} = 1,25\ s$, $\delta T \simeq 0,05\ s$ — esprimo anche valore medio con stesso n° di cifre significative

$T = (\bar{T} \pm \delta T)\ s$

$T = (1,25 \pm 0,05)\ s$

se la cifra è 1 o 2, tengo anche la cifra successiva:

$\delta T = 0,017\ s$ $\quad \bar{T} = 1,249\ s$

$T = (1,249 \pm 0,0017)\ s$

DISCREPANZA

si verifica se due misure della stessa grandezza sono diverse → può essere o non essere SIGNIFICATIVA

Es. misura di una resistenza elettrica:

- due operatori misurano la stessa resistenza e ottengono $(40 \pm 5)\,\Omega$ e $(42 \pm 8)\,\Omega$
  discrepanza $= (42-40)\,\Omega = 2\,\Omega$ è minore delle loro incertezze → le due misure sono CONSISTENTI o COMPATIBILI
- due operatori misurano la stessa resistenza e ottengono $(35 \pm 2)\,\Omega$ e $(45 \pm 1)\,\Omega$
  discrepanza $= (45-35)\,\Omega = 5\,\Omega$ è maggiore delle loro incertezze → le due misure sono NON CONSISTENTI o INCOMPATIBILI
  ↓ sto misurando 2 resistenze diverse

VALORE VERO e VALORE ACCETTATO

Qual è il valore vero di una grandezza fisica? È un valore che si dovrebbe poter ottenere da una misura perfetta → è, per sua natura, completamente indeterminato

Per grandezze che sono state misurate molte volte in precedenza vi è in genere un "valore accettato" (molto più accurato di quello che lo studente può determinare) pubblicato sui libri.
Esso è comunque affetto da incertezza

INCERTEZZA RELATIVA

$$(\text{valore misurato di } x) = x_{best} \pm \delta x$$

x_{best}: miglior stima di x
δx: incertezza della misura

incertezza relativa $= \dfrac{\delta x}{|x_{best}|}$ incertezza percentuale $= \dfrac{\delta x}{|x_{best}|} \cdot 100$ → indica la qualità di una misura

~ per il nostro lab:

incertezza rel $\geq 10\%$ ⇒ misura "rozza"

incertezza rel $< 10\%$ ⇒ misura accettabile

* DIM 2 *

- PRODOTTO $z = x \cdot y$ $\quad x = (\bar{x} \pm \delta x) \quad y = (\bar{y} \pm \delta y)$

$\bar{z} = \bar{x} \cdot \bar{y}$

$$z_{max} = (\bar{x} + \delta x)(\bar{y} + \delta y) = \cancel{\bar{x}\bar{y}} + \bar{x}\,\delta y + \bar{y}\,\delta x + \cancel{\delta x\,\delta y}$$
$$z_{min} = (\bar{x} - \delta x)(\bar{y} - \delta y) = \cancel{\bar{x}\bar{y}} - \bar{x}\,\delta y - \bar{y}\,\delta x + \cancel{\delta x\,\delta y}$$

$$\delta z = \frac{z_{max} - z_{min}}{2} = \frac{2(\bar{x}\,\delta y + \bar{y}\,\delta x)}{2}$$

$$\frac{\delta z}{\bar{z}} = \frac{\delta y}{\bar{y}} + \frac{\delta x}{\bar{x}}$$

- DIVISIONE $\rightarrow$ same

Altri casi particolari:

- se $q = Bx$ dove B é noto esattamente, allora $\delta q = |B|\,\delta x$
- se q é una funzione di una variabile, $q(x)$, allora $\delta q = \left|\frac{dq}{dx}\right| \delta x$

ELEMENTI di STATISTICA

Alcune incertezze sono approcciabili con metodi statistici → abbiamo dato dei criteri per relazionare il n° di misure alla migliore stima e alla distribuzione delle misure
criterio x stima valore vero e criterio x incertezza legato al proc. di misura

DEFINIZIONI

Probabilità: $n \in \mathbb{R}$ $0 < n < 1$ associato a un evento casuale
Esso può essere correlato con la "frequenza relativa" o col "grado di credibilità" con cui un evento avviene.

$$P = \frac{n° \text{ eventi favorevoli}}{n° \text{ eventi possibili}}$$ (solo per variabili discrete)

Variabile aleatoria: variabile che può assumere qualsiasi valore in un intervallo e alla quale è associata una distribuzione di probabilità

Variabile discreta: può assumere solo valori isolati es. lancio di un dado
variabile continua: può assumere tutti i valori entro un intervallo finito o infinito

Distribuzione di probabilità (di una variabile aleatoria): funzione che definisce la probabilità che una variabile aleatoria discreta (continua) assuma un determinato valore (tutti i valori di un intervallo)
è l'integrale di
es. distribuzione binomiale (lancio del dado)

Densità di probabilità = come sono distribuite le singole misure
per variabile discreta: funzione che fornisce, per ogni valore x_i di una variabile aleatoria discreta X, la probabilità p_i che la variabile aleatoria sia uguale a x_i

$$p_i = Pr(X = x_i)$$

per variabile continua: funzione $p(x)$ che fornisce, ∀ intervallo $(x \to x + dx)$ dei valori che può assumere una variabile aleatoria continua x, la probabilità dP che la variabile aleatoria assuma un valore nell'intervallo

↳ condizioni di normalizzazione
※ CIASCOLTA 11.15

$$dP = p(x)\,dx = Pr(x \le X \le x + dx)$$

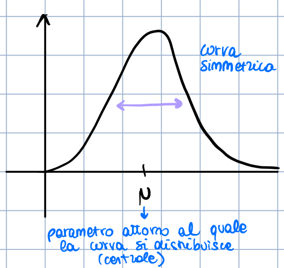
DISTRIBUZIONE NORMALE (o gaussiana)

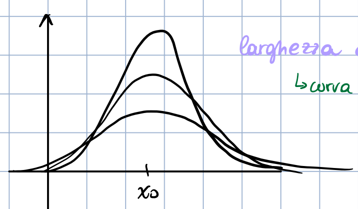
è una distribuzione di probabilità di una variabile aleatoria X la cui densità di probabilità è:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad -\infty \le X \le \infty$$

↳ coeff. di normalizzazione → lo uso affinché $\int_{-\infty}^{\infty} p(x) = 1$

μ = valore atteso della variabile X
σ^2 = relativa varianza





larghezza è maggiore per valori maggiori di σ = deviazione standard
↳ curva si abbassa xké è normalizzata

~

Principio di massima verosomiglianza:
date N misure osservate, le migliori stime di x_0 e σ sono quei valori per i quali gli osservati sono più probabili (cioè per cui $P_{x_0,\sigma}$ è massima)

$$P_{max} \iff t = \frac{\sum_i (x-x_0)^2}{\sigma^2} \text{ minima} \Rightarrow \frac{\partial t}{\partial x_0} = 0$$

$$\frac{\partial t}{\partial x_0} = \frac{\partial}{\partial x_0}\left[\frac{\sum_i (x_i - x_0)}{2\sigma^2}\right] = \frac{1}{2\sigma^2}\left[(-1)\sum_i 2(x_i - x_0)\right] = -\frac{1}{2\sigma^2}\left[2\sum x - 2N\underbrace{x_0}_{\text{valore centrale della gaussiana}}\right] = 0$$

$$=0 \iff x_0 = \frac{\sum_i x_i}{N}$$

$\Rightarrow$ miglior stima per x_0: $\boxed{\bar{x} = \frac{\sum_i x_i}{N}}$ MEDIA ARITMETICA delle misure

valore che calcolo sul mio set di dati

Analogamente si dimostra che la miglior stima per la larghezza della distribuzione σ è la deviazione standard s_x degli N valori osservati:

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \qquad \text{DEVIAZIONE STANDARD}$$

$\downarrow$
se considero una singola misura (ho N invece che N-1)

DEVIAZIONE STANDARD DELLA MEDIA (quant'è larga la distribuzione di X ?)
RIASCOLTA 46.00

- Poiché ciascuna delle grandezze misurate $x_1, \dots x_N$ è distribuita normalmente, lo è anche $\bar{x} = \frac{x_1 + \dots + x_N}{N}$
- Poiché per ciascun valore $x_1, \dots, x_N$ il valore vero è X, lo è anche per $\bar{x}$

$\Rightarrow$ dopo aver fatto molte determinazioni della media $\bar{x}$ di N misure, i risultati per $\bar{x}$ saranno distribuiti attorno al valore vero X

La stima della larghezza di distribuzione dei risultati $\bar{x}$ si ricava mediante la propagazione delle incertezze:

$$s_{\bar{x}} = \sqrt{\left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial x_1} s_{x_1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial x_N} s_{x_N}\right)^2}$$

Notiamo che:
- $s_{x_1} = \dots = s_{x_N} = s_x$ in quanto $x_1, \dots x_N$ sono tutte misure della stessa grandezza x
- $\frac{\partial \bar{x}}{\partial x_1} = \dots = \frac{\partial \bar{x}}{\partial x_N} = \frac{1}{N}$

quindi:

$$s_{\bar{x}} = \sqrt{\left(\frac{1}{N}s_x\right)^2 + \left(\frac{1}{N}s_x\right)^2} = \frac{s_x}{\sqrt{N}}$$

$\downarrow$ incertezza sul valore medio

DEVIAZIONE STANDARD della MEDIA
(un po' minore della media aritmetica)

INTERVALLI DI CONFIDENZA

Conoscendo la distribuzione di probabilità (distribuzione normale di valor medio μ e deviazione standard σ) possiamo calcolare il valore di k (fattore di copertura) che produce un intervallo $\mu \pm k\sigma$ che comprende una specifica frazione della distribuzione (cioè una specifica probabilità)

Infatti la probabilità che $\underbrace{|x-\mu| \le k\sigma}_{\text{la misura sia nell'area selezionata (quante deviazioni standard mi sposto dal centro)}}$ è data da $\int_{\mu-k\sigma}^{\mu+k\sigma} p(x)\,d(x)$

dove $p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

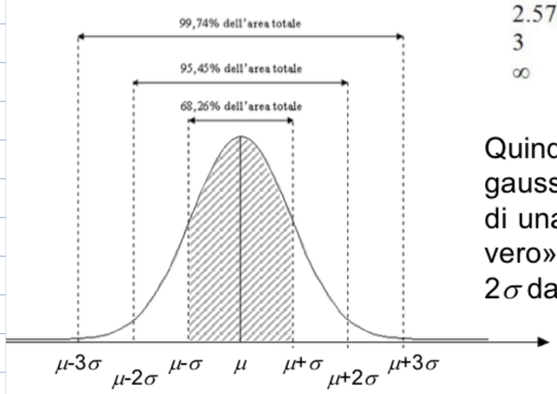
detta LIVELLO DI CONFIDENZA
mentre l'intervallo corrispondente è l'INTERVALLO DI CONFIDENZA

dato un set di valori calcolo σ (è un numero)
= deviazioni standard

Si trova che:

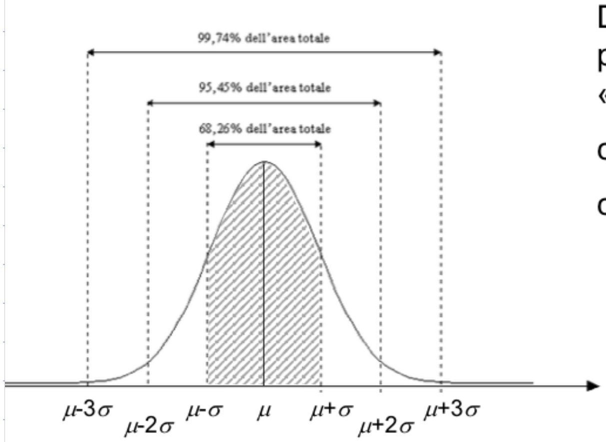
fattore di copertura, k	livello di confidenza
1	(0.6826) 68.26 %
1.645	90 %
1.960	95 %
2	95.45 %
2.576	99 %
3	99.74 %
∞	100 %

se mi sposto di 1σ
〃 2σ



Quindi, se i risultati si distribuiscono secondo una gaussiana, vi è il 68,26% di probabilità che il risultato di una singola misura differisca meno di σ dal «valore vero», il 95.4% di probabilità che la misura cada entro 2σ dal valore vero, il 99,7% entro 3σ, e così via.

Ma abbiamo visto che se le grandezze misurate si distribuiscono secondo una gaussiana, anche i valori delle medie aritmetiche $\bar{x}$, che sono una combinazione lineare delle singole misure, si distribuiscono in modo gaussiano attorno al 'valore vero'



Dunque, analogamente a prima, con il 68,26% di probabilità il valore medio $\bar{x}$ si discosta da quello «vero» per meno di $\sigma_{\bar{x}}$

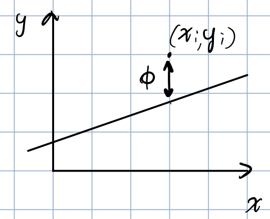
con il 95.4% $\bar{x}$ si discosta per meno di $2\,\sigma_{\bar{x}}$

con il 99,7% $\bar{x}$ si discosta per meno di $3\,\sigma_{\bar{x}}$, etc.

PROCEDIMENTO:

1) si eseguono **n misure** corrispondenti alle coppie $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$.
2) Sapendo che la relazione è lineare, si calcolano gli scarti $\Phi_i = y_i - (A + Bx_i)$ e se ne sommano i quadrati:

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} (y_i - A - Bx_i)^2$$ = distanza delle ordinate di retta e punto



3) si cercano i valori di A e B per cui ϕ abbia il valore minimo
ciò equivale a rendere minimi i quadrati delle distanze dei punti (x_i, y_i) dalla retta, misurate nella direzione dell'asse y
↓
Per far questo differenziamo Φ rispetto ad A e B e poniamo le derivate uguali a zero

$$\frac{\partial \Phi}{\partial A} = -2 \sum_{i=1}^{n} (y_i - A - Bx_i) = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial B} = -2 \sum_{i=1}^{n} x_i (y_i - A - Bx_i) = 0$$

Queste due equazioni possono essere riscritte come equazioni simultanee per A e B:

$$A \cdot n + B \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$A \sum_{i=1}^{n} x_i + B \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

← equazioni normali

$$\begin{cases} A = \dfrac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)}{n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \\ B = \dfrac{n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \end{cases}$$

migliori stime per le costanti A e B
(ciò che fa excel con "regressione lineare")

noto delle loro incertezze

$$\begin{cases} \sigma_A^2 = \dfrac{1}{n-2} \sum_{i=1}^{n} (y_i - A - Bx_i)^2 \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \\ \sigma_B^2 = \dfrac{n}{n-2} \sum_{i=1}^{n} (y_i - A - Bx_i)^2 \dfrac{1}{n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \end{cases}$$

migliori stime per le incertezze di A e B

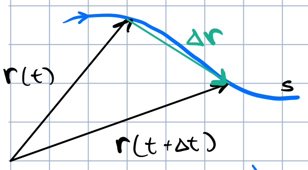
Nel caso in cui la presumibile relazione tra x e y non è lineare, in generale $y = f(x)$ ciò che si fa è sempre minimizzare la somma degli scarti quadratici

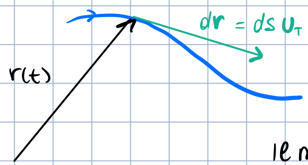
$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} (y_i - f(x_i))^2$$

ricavandosi un sistema di n equazioni in cui compaiono gli n parametri della funzione f(x)

COORDINATE INTRINSECHE

La notazione vettoriale è indipendente dal sistema di coordinate → si possono scrivere in maniera semplice le equazioni (riferite alla traiettoria) senza preoccuparsi di definire un sistema di coordinate

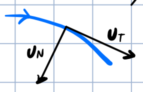




INCREMENTO del raggio vettore = vettore infinitesimo tangente alla traiettoria e con modulo ds (spostamento infinitesimo (scalare))

$$dr = ds\, U_T$$

↳ versore tangente alla traiettoria (dipende dal tempo!)



Il moto è come una successione di spostamenti rettilinei infinitesimi con direzione variabile (quella istantanea è tangente alla traiettoria)

S = spostamento scalare lungo la traiettoria o coordinata curvilinea

↳ ogni spostamento complessivo può essere spezzato in molti piccoli spostamenti su linee rette

NB. Sebbene dr ha lunghezza ds, per uno spostamento finito Δr è ben diverso dalla lunghezza della porzione di traiettoria effettivamente percorsa

$$v = \frac{dr}{dt} = \frac{ds}{dt} U_T = v\, U_T$$

punto per punto lungo una traiettoria, la velocità è sempre tangente alla traiettoria (non a $\vec{r}$!)

→ in una traiettoria rettilinea U_T coincide con la direzione

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 r}{dt^2}$$

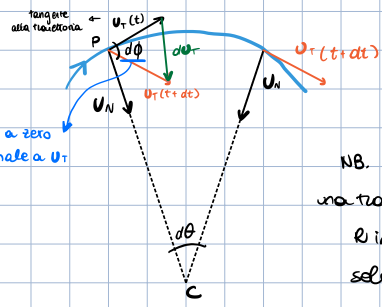
NB. modulo e versore della velocità dipendono dal tempo → applico le regole di derivazione

$$a = \frac{d(vU_T)}{dt} = \frac{dv}{dt} U_T + \boxed{v \frac{dU_T}{dt}} = \frac{dv}{dt} U_T + \boxed{v \frac{d\phi}{dt} U_N}$$

DIREZIONE NORMALE
= direzione perpendicolare a U_T
= direzione radiale verso il centro C della circonferenza approssimata

qualsiasi traiettoria curva può essere approssimata punto per punto a una circonferenza centrata in C con raggio $R = CP$

↓ raggio di curvatura (raggio della circonferenza che approssima localmente la traiettoria curva)



quando $d\phi$ tende a zero dU_T diviene ortogonale a U_T con modulo $d\phi$

arco di circonferenza $S = R\phi$

→ all'infinitesimo $ds = R\, d\phi$

$$\frac{d\phi}{ds} = \frac{1}{R}$$

cambio di variabile $$\frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{1}{R} v$$

v ↓ velocità scalare

NB. posso approssimare una traiettoria rettilinea con R infinito → accelerazione solo tangente

$$a = \frac{dv}{dt} U_T + v\frac{d\phi}{dt} U_N = \frac{dv}{dt} U_T + \frac{v^2}{R} U_N = a_T + a_N$$

$$\boxed{a_T = \frac{dv}{dt} U_T}$$ accelerazione TANGENZIALE

$$\boxed{a_N = \frac{v^2}{R} U_N}$$ accelerazione NORMALE o CENTRIPETA

COORDINATE CARTESIANE

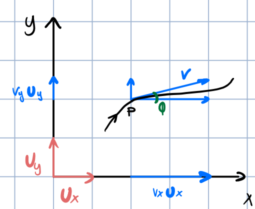
posizione: $r(t) = OP = x(t)\,U_x + y(t)\,U_y$

↳ proiezioni di r sugli assi (dipendono dal tempo)

i versori sono costanti nel tempo e nello spazio → derivata nulla
- derivata rispetto al tempo di $x(t)$
- derivata rispetto al tempo di $y(t)$

$$v = \frac{dr}{dt} = \frac{dx}{dt} U_x + \frac{dy}{dt} U_y = v_x U_x + v_y U_y$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 r}{dt} = \frac{dv_x}{dt} U_x + \frac{dv_y}{dt} U_y = \frac{d^2 x}{dt^2} U_x + \frac{d^2 y}{dt} U_y = a_x U_x + a_y U_y$$

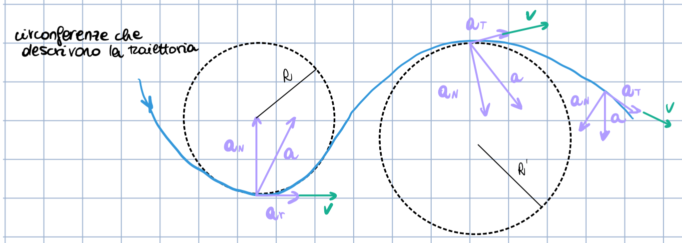


↓ espressioni formali, non esprimono un legame tra vettori e traiettoria bensì definiscono il vettore in base alle sue componenti inserisco * e raggruppo

$$\vec{a} = \underbrace{\left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]}_{\text{accellerazione radiale}} U_r + \underbrace{\left[2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right]}_{\text{accellerazione trasversa}} U_\theta$$

↳ può anche essere espressa come $\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left[r^2\frac{d\theta}{dt}\right]$

CONPONENTI dell' accellerazione lungo la traiettoria



V sempre tangente alla traiettoria

a può essere scomposto in 2 componenti:
- TERMINE TANGENTE
- una diretta verso il centro della circonferenza osculatrice TERMINE NORMALE

↓

a (accellerazione complessiva) è data dalla somma vettoriale della componente tangente e di quella normale

PROBLEMA INVERSO

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathbf{v}(t)\,dt$$

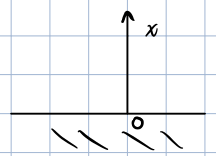
$$\mathbf{v}(t) = \underbrace{\mathbf{v}(t_0)}_{\downarrow} + \int_{t_0}^{t} \mathbf{a}(t)\,dt$$

termine costante esce dall'integrazione

MOTO VERTICALE

= esempio di moto uniformemente accellerato

$g = 9{,}81 \; m/s^2$



$x(t) = x_0 + v_0(t-t_0) + \frac{1}{2}a(t-t_0)^2$

$v(t) = v_0 + a(t-t_0)$

$v^2(x) = v_0^2 + 2a(x-x_0)$

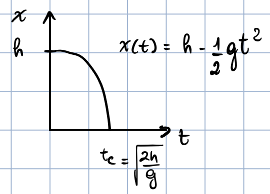
1) LASCIO CADERE un oggetto da una certa quota $h = x_0$ con velocità $v_0 = 0$ $t_0 = 0$

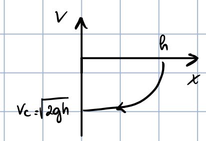
$a = cost = -g \Rightarrow$

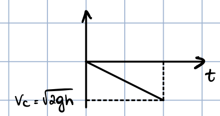
- $v(t) = v_0 + a(t-t_0) = -gt$
- $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)dt = h + \int[-gt]dt = h - \frac{1}{2}gt^2$

$t(x) = \sqrt{\frac{2(h-x)}{g}}$ → tempo di caduta $\quad t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

$v(x) = -\sqrt{2g(h-x)}$ → velocità al suolo $\quad v_c = -\sqrt{2gh}$



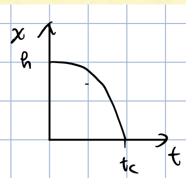


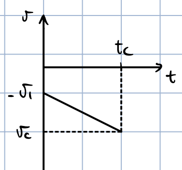


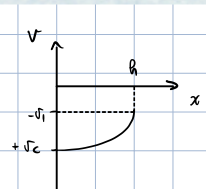
2) LANCIO il corpo verso il BASSO : $x_0 = h$, $v_0 = -v_1$

$v(t) = -v_1 - gt$ → $v(x) = -\sqrt{v_1^2 + 2g(h-x)}$ → velocità al suolo $\quad v_c = -\sqrt{v_1^2 + 2gh}$

$x(t) = h - v_1 t - \frac{1}{2}gt^2$ → $t(x) = -\frac{v_1}{g} + \sqrt{\frac{v_1^2}{g^2} + \frac{2(h-x)}{g}}$ → tempo di caduta $\quad t_c = -\frac{v_1}{g} + \sqrt{\frac{v_1^2}{g^2} + \frac{2h}{g}}$







3) LANCIO il corpo DA TERRA verso l'ALTO : $x_0 = 0$, $v_0 =$

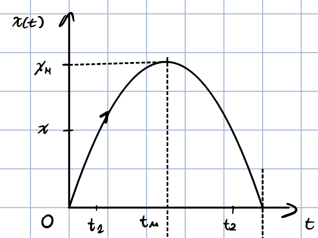
$v(t) = v_2 - gt$ → $v(t_M) = 0$ → $t_M = \frac{v_2}{g}$

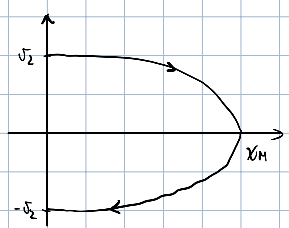
$x(t) = v_2 t - gt^2$ → $x(t_M) = x_M = \frac{v_2^2}{2g}$

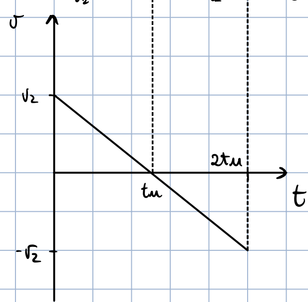
$v(x) = \pm\sqrt{v_2^2 - 2gx}$

$t(x) = \frac{v_2}{g} \pm \sqrt{\frac{v_2^2}{g^2} - \frac{2x}{g}} = t_M \pm \sqrt{t_M^2 - \frac{2x}{g}}$

$t_{TOT} = 2t_M \qquad v_c = -v_2$







MOTO ARMONICO

Il moto di un punto materiale è:

fenomeno periodico si ripete sempre uguale nel tempo — es. pistone nel cilindro di un motore

- PERIODICO: se ad intervalli di tempo regolari il punto torna a passare nella stessa posizione con la stessa velocità.
  esempi 1D: pallina che cade verticalmente e rimbalza in modo elastico su un piano orizzontale; biglia che rimbalza fra le sponde di un biliardo urtandole perpendicolarmente
- ARMONICO: se è descrivibile attraverso una funzione goniometrica oscillante nel tempo ($\underbrace{\sin \text{ o } \cos}_{\text{sono la stessa funzione traslata}}$)

legge oraria

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) \quad \rightarrow \text{periodicità } 2\pi$$

($-1 \le$ numero ≤ 1)

ampiezza $[A] = [L]$, $A \rightarrow m$

angolo; pulsazione $[\omega] = [T^{-1}]$, $\omega \rightarrow s^{-1}$

fase iniziale

A, φ costanti, si ricavano dalle condizioni iniziali

ω parametro che definisce la ripetitività nel tempo della funzione

oss. il punto materiale percorre una distanza massima $2A$

periodo $T = \frac{2\pi}{\omega} \rightarrow s$

Frequenza $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \rightarrow Hz$

non dipendono dall'ampiezza dell'oscillazione

Derivando la legge oraria in funzione del tempo otteniamo la velocità

$D[\cos\alpha] = -\sin\alpha$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi) \qquad [v] = [LT^{-1}]$$

↳ è effettivamente una velocità ✓

Derivando ulteriormente si ottiene l'accellerazione:

$D[\sin\alpha] = \cos\alpha$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi)$$

so di avere a che fare con un moto armonico

Notiamo che:

$$a(t) = -\omega^2 x(t) \iff \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \qquad \text{EQUAZIONE DIFFERENZIALE CARATTERISTICA}$$

oppure $a + \omega^2 x(t) = 0$

- coeff. costanti
- omogenea (no termine noto)
- II grado

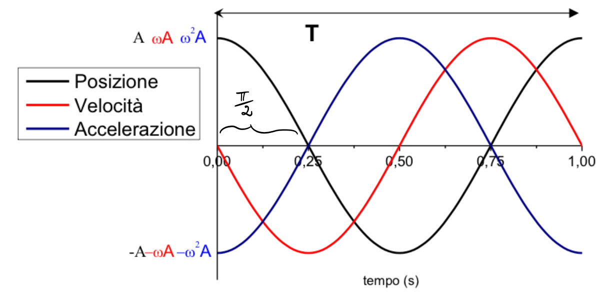
l'accellerazione si mantiene proporzionale allo spostamento dallo zero secondo un fattore di proporzionalità negativo

↳ dalla costante di proporzionalità si deducono pulsazione, periodo e frequenza

Anche i moti dei pianeti si comportano così

GRAFICI di x, v, a

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) \qquad v(t) = -\omega A\sin(\omega t + \varphi) \qquad a(t) = -\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi)$$

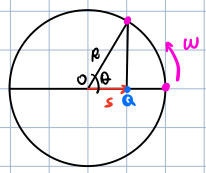


NB. le ampiezze però non sono uguali! la scala delle ampiezze in questo grafico non è la stessa per le tre grandezze

NO ES. DI MOTO ARMONICO all'ESAME ~ tendenzialmente ~

~video step by step: dimostrazione legge oraria moto armonico

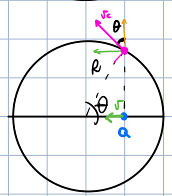
└ = proiezione di un moto circolare uniforme sul suo diametro



$s = R\cos\theta$

↳ formula moto circolare uniforme $\theta = \omega t + \theta_0$

$s = R\cos(\omega t + \varphi)$

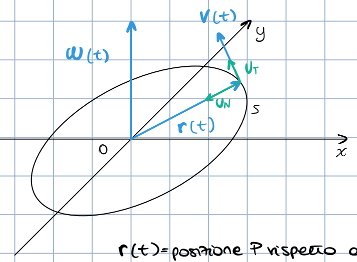


$v = v_c \sin\theta$

$v = -\omega R \sin(\omega t + \varphi)$

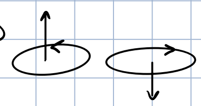
↓ parte negativa

NOTAZIONE VETTORIALE: VETTORE VELOCITÀ ANGOLARE



Def: ω = vettore — VETTORE VELOCITÀ ANGOLARE

- modulo $= \dfrac{d\theta}{dt}$
- direzione $\perp$ piano circonferenza = asse di rotazione
- verso regola mano dx (avvolgi con mano e vedi pollice)



r(t) = posizione P rispetto al punto di applicazione di ω (generalmente O)

velocità vettoriale tangente alla traiettoria circolare

$$\boxed{v = \frac{dr}{dt} = \omega \wedge r}$$ raggio vettore

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d(\omega \wedge r)}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \wedge r + \omega \wedge \frac{dr}{dt}$$

(lo tratto come un prodotto normale)

ACCELERAZIONE VETTORIALE DEL MOTO

$$\Rightarrow \boxed{a = \alpha \wedge r + \omega \wedge v = \underbrace{\alpha \wedge r}_{\text{accelerazione tangenziale}} + \underbrace{\omega \wedge (\omega \wedge r)}_{\text{acc. centripeta}}}$$

accelerazione tangenziale — modulo αR

acc. centripeta → diretta verso il centro della circonferenza — modulo $\omega^2 R$

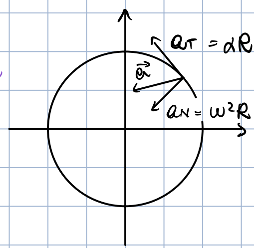
con $\alpha = \dfrac{d\omega}{dt}$ → ACCELERAZIONE ANGOLARE VETTORIALE

- direzione: stessa di ω
- modulo:
- verso:

$\omega = \omega u_\omega$ direzione fissa

$\alpha = \dfrac{d\omega}{dt} u_\omega$ ↳ anch'esso $\perp$ piano della circonferenza

(direzione di ω sempre uguale alla direzione di α — quindi $\alpha \wedge r$ è tangente alla traiettoria



$[\omega] = [T^{-1}]$ $\quad \omega \to rad \cdot s^{-1}$

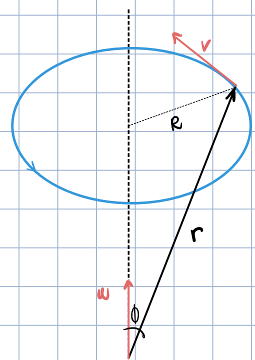
$[\alpha] = [T^{-2}]$ $\quad \alpha \to rad \cdot s^{-2}$

↳ utile per la trottola

MOTO DI PRECESSIONE

Fissato un punto O'

- $r = r u_r$ $\quad$ r costante
  ↓ descrive un moto rotatorio (cono) attorno all'asse di rotazione, ovvero alla direzione di ω, formando un angolo ϕ costante con esso



$$\frac{dr}{dt} = r\frac{du_r}{dt} = r\frac{d\theta}{dt}u_t = r\omega u_t = v = \omega \wedge r$$

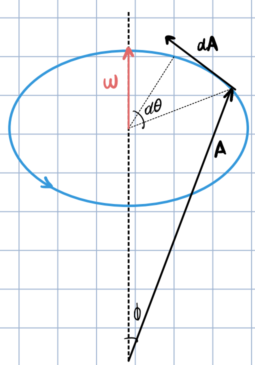
costante quindi derivo solo u_r — per def di ω vettore

moto di precessione del vettore r

- $v = v u_t$ → nel MCU v = cost → descrive una rotazione attorno a ω con cui forma un angolo retto

$$\frac{dv}{dt} = v\frac{du}{dt} = v\frac{d\theta}{dt}u_R = v\omega u_e = \omega \wedge v$$

moto di precessione del vettore v



MOTI DI PRECESSIONE = rotazioni di un vettore rispetto ad un asse fisso con cui forma un angolo costante (ϕ)

↳ viene detto uniforme se il modulo del vettore è uniforme

Prop: se A è un vettore qualsiasi di modulo costante che descrive un moto di precessione con velocità angolare ω, sarà:

$$\underbrace{\frac{dA}{dt}}_{\text{ortogonale ad } A} = \omega \wedge A$$

⇝ Fissato v_0, qual è l'angolo che mi permette la max gittata possibile?

v_0 fisso $\quad \frac{dx_G}{d\theta} = 0$ massimo x_G al variare di θ → trovo valore di θ

↳ dev'essere un numero e la derivata di un numero è 0
↓
estremale della funzione

$$\frac{dx_G}{d\theta} = \frac{2v_0^2}{g}\left[\cos^2\theta - \sin^2\theta\right] = 0 \iff \theta = \frac{\pi}{4}$$

C'È ALL'ESAME

CENNI AD ALTRE COMPOSIZIONI DI MOTI

1) moti uniformi lungo x e y → moto uniforme, $\tan\varphi = \frac{v_y}{v_x}$

2) moti uniformemente accellerati lungo x e y → no regola generale

3) moto armonico lungo x, rettilineo uniforme lungo y → sinusoide (con asse lungo y)

4) moto armonico lungo x e y, a cui si somma un moto uniforme lungo x → cicloide (curva descritta da un punto di una circonferenza mentre questa rotola su una retta)
es. luce sulla ruota della bici

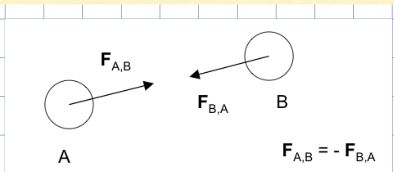
5) moto circolare nel piano e rettilineo lungo z → elicoide

LIMITI DI VALIDITÀ { sist. riferimento inerziali = si muovono mutuamente l'uno rispetto all'altro di MRU o sono fermi ↳ altrimenti vi sono termini correttivi
moti con $v << c$

PRINCIPIO DI AZIONE E REAZIONE (III LEGGE di NEWTON)

Le interazioni tra due corpi si manifestano sempre come due forze, esercitate reciprocamente da ciascun corpo sull'altro.

"se un corpo A esercita una forza su un corpo B, allora B esercita su A una forza della stessa intensità, ma di verso opposto."



NB. le forze:
- sono sulla stessa retta d'azione
- stessa intensità
- verso opposto

CLASSIFICAZIONE delle FORZE

Tipi di interazioni fondamentali:
- gravitazionale (masse estese)
- elettromagnetica (cariche)
- nucleare debole (particelle subatomiche)
- nucleare forte (quark)

⇒ ponendo uguale a 1 l'interazione tra 2 protoni a contatto superficiale, allora le altre interazioni hanno rispetto a questa le seguenti proporzioni
→ 10^{-38}
→ 10^{-2}
→ 10^{-7}
→ 1

QUANTITÀ DI MOTO (forza di conservazione)

Def: si dice quantità di moto la grandezza vettoriale $\vec{p} = m\vec{v}$ · direzione, · verso } della velocità

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \underbrace{\frac{d}{dt}(m\vec{v})}_{\text{derivata di un prodotto}} = m\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{dm}{dt}\vec{v} = m\vec{a} + \frac{dm}{dt}\vec{v}$$

qtà di moto ≠ energia cinetica

questo termine non lo utilizzeremo mai perché avremo a che fare con punti materiali che hanno sempre massa costante nel tempo
(però vi sono nella realtà dei corpi che cambiano massa. es: veicolo a motore che brucia carburante
↳ l'espressione di $\vec{p}$ viene modificata per velocità non trascurabili rispetto a c

$$\boxed{\vec{F}_{ris}} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \boxed{\frac{d\vec{p}}{dt}}$$

forma più generale del 2° principio della dinamica per un punto materiale di massa m (costante)
↳ la forza risultante varia la qtà di moto dell'oggetto ovvero massa, direzione, verso e/o modulo della velocità.

CONSERVAZIONE della QUANTITÀ di MOTO

$\vec{F}_{ris} = m\vec{a} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ → prima legge di conservazione del nostro corso

se $\vec{F}_{ris} = 0 \rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \rightarrow \vec{p}$ = costante nel tempo

"In assenza di forza applicata la qtà di moto si conserva" ⇐ altra formulazione del principio di inerzia

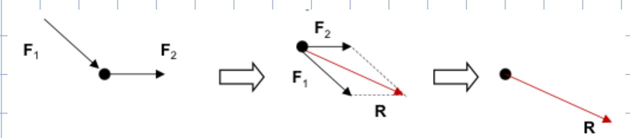
$[p] = [M \cdot L \cdot T^{-1}]$ $\quad p, J \rightarrow N \cdot s = kg \cdot m \cdot s^{-1}$

RISULTANTE delle FORZE

La forza è una grandezza vettoriale: se su di un punto materiale agiscono più forze, esso si muove come se agisse una sola forza che è la risultante R (somma vettoriale) delle forze applicate.

$R = F_1 + F_2 + \dots + F_n = \sum_{i=1}^{n} F_i \qquad \vec{a} = \frac{\vec{R}}{m} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\vec{F}_i}{m} = \sum_{i=1}^{n} \vec{a}_i$

indipendenza delle azioni simultanee
l'effetto complessivo è dato dalla risultante

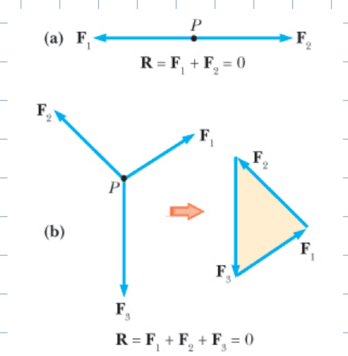


EQUILIBRIO delle FORZE

→ CONDIZIONI DI STATICA sulle FORZE (vedremo anche quelle sul momento)

Principio di inerzia → se un corpo è in quiete o si muove in moto uniforme vuol dire che la risultante delle forze applicate è nulla.

$R = F_1 + F_2 + \dots + F_n = \sum_{i=1}^{n} F_i \Rightarrow \vec{R} = 0$ condizione di equilibrio statico



→ due forze: uguali e opposte $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2|$

→ tre forze: complanari, lati di un triangolo

> 3 forze: tale da comporre una poligonale chiusa

Esempio: PUNTO ACCELLERATO IN DIREZIONE DIVERSA DALLA VELOCITÀ

pto di massa m parte da O con v_0 diretta lungo y. esso è sottoposto a F cost // e concorde all'asse x. Determina traiettoria

asse x : MUA $\quad a = \frac{F}{m}$

asse y : MRU

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}\frac{F}{m}t^2 \rightarrow t = \sqrt{\frac{2mx}{F}} \\ y = v_0 t \longrightarrow y = \sqrt{\frac{2mv_0^2}{F}x} \end{cases}$$

FORZA PESO

= forza a cui è soggetto un corpo vicino ad un altro corpo

evidenza sperimentale: corpo che cade subisce accellerazione costante di modulo $9{,}81\ \frac{m}{s^2}$ (di gravità)

Utilizzando la II legge di Newton:

$\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{P} = m\vec{g}$

- $\vec{P}$ è costante ($\rightarrow$ MUA in assenza di altre forze) e proporzionale alla massa $\rightarrow$ misura delle masse tramite la bilancia

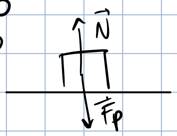
SENSAZIONE DI PESO

corpo di massa m è appoggiato su un piano orizzontale che può muoversi verticalmente con accellerazione a

piano fermo

$a = 0$

$v = 0$



$N = m(a-g)$

piano che accellera

↳ eq corpo: $\vec{N} + \vec{P} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}$

a discorde a g

$N > mg$

↓

sensazione di aumento di peso

a concorde a g

- stesso modulo: $N = 0$ ↓ no sensazione di peso
- $a < g$: $N < mg$ ↓ sensazione di diminuzione di peso
- $a > g$ ↳ dovrebbe attrarre il corpo al pavimento ma ciò non accade xké vincolo unilaterale ↓ distacco del corpo dal piano

ATTRITO RADENTE DINAMICO

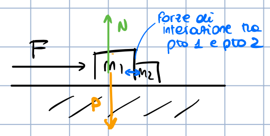
se $F > \mu_s N$ → ho moto → coeff. attrito dinamico μ_d.

$F_{attrito\ dinamico} = \mu_d N$

dato sperimentale: $\boxed{\mu_s > \mu_d}$

- μ_s e μ_d dipendono dalla natura delle superfici in contatto (es: finitura). Per ridurli si usano i lubrificanti
- entro grandi numeri sono indipendenti dall'ampiezza della superficie di contatto
- μ_d è praticamente indipendente dalla velocità relativa tra le superfici di contatto e la forza corrispondente ha sempre verso contrario rispetto al moto:
  $\vec{F}_{ad} = -\mu_d N \vec{U}_v$ $\quad \vec{U}_v$ versore della velocità
- dimensionalmente μ_s e μ_d sono dei numeri

Esempio

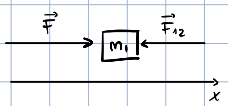


a) se il piano è liscio determinare F_1 e F_2

b) se $\mu_1 = 0,3$ determinare μ_2 tale da avere moto uniforme

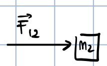
a)

se ho più punti materiali scrivo per ciascuno di essi le equazioni del moto



$F - F_{12} = m_1 \cdot a$

i punti materiali si muovono assieme quindi $a_1 = a_2 = a$



$F_{12} = m_2 \cdot a$

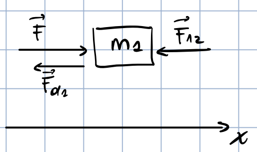
$$\begin{cases} F - F_{12} = m_1 \cdot a \\ F_{12} = m_2 \cdot a \end{cases}$$

$F - m_2 \cdot a = m_1 \cdot a$

$F = (m_1 + m_2)\, a \qquad a = \frac{F}{m_1 + m_2}$

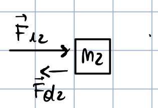
$F_2 = F_{12} = m_2 \cdot a = m_2 \frac{F}{m_1 + m_2}$ $\qquad F_1 = F - F_{12} = \left(1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2}\right) F = \frac{m_1}{m_1 + m_2} F$

b) condizione da porre: $a = 0$



$\vec{F} - \vec{F}_{12} - \vec{F}_{d1} = m_1 \cdot a = 0$

$\vec{F}_{d1} = \mu_1 m_1 g$



$\vec{F}_{12} - \vec{F}_{d2} = m_2 \cdot a = 0 \qquad \vec{F}_{12} = \vec{F}_{d2} = \mu_2 m_2 g$

$$\begin{cases} F - F_{12} - \mu_1 m_1 g = 0 \\ F_{12} = \mu_2 m_2 g \end{cases} \Rightarrow F = \mu_1 m_1 g + \mu_2 m_2 g \qquad \mu_2 = \frac{F - \mu_1 m_1 g}{m_2 g}$$

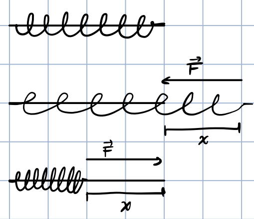
$\mu_2 = 0,16$

se $\mu_2 < 0,16$: moto accelerato

se $\mu_2 < 0,16$: no condizioni di moto

FORZA ELASTICA

Def: si dice forza elastica la forza con direzione costante, verso diretto ad un punto centrale O e intensità proporzionale alla distanza da O.



molle = oggetti che rispondono alle forze in maniera elastica
↳ parametri:
- l_0: lunghezza a riposo (quando $F_{ris} = 0$)
- K: costante elastica della molla

LEGGE DI HOOKE:
l'allungamento/compressione della molla è proporzionale alla forza applicata

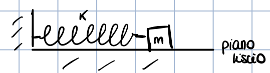
$$\vec{F} = -Kx\vec{u}_x$$
↓
segno negativo perché sempre opposta allo spostamento

NB. a non è costante

- $[K] = [MLT^{-2}L^{-1}] \rightarrow Nm^{-1}$
- vale solo se la deformazione avviene entro un certo limite (limite elastico): quando questo limite viene superato la molla perde la propria elasticità (deformazione plastica)
- non solo le molle rispondono in maniera elastica: anche solidi (fili in torsione, ad esempio) e i gas.
- la forza che la molla esercita è diretta lungo la direzione della deformazione.
  La scrittura vettoriale fa emergere bene che si tratta di una FORZA CENTRALE
  ↓
  = forza per la quale, in qualsiasi punto, la direzione passa per un punto fisso (centro della forza) e il modulo è funzione soltanto della distanza
- lavoriamo con molle ideali (senza massa)

LEGGE ORARIA

l'equazione del moto è $-Kx = ma \Rightarrow -Kx = m\frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{K}{m}x$



↳ $\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{K}{m}x = 0}$ eq. caratteristica del moto armonico!

Per trovare la legge oraria risolviamo l'equazione differenziale:
si cerca una funzione la cui derivata seconda sia uguale alla funzione stessa cambiata di segno, a meno del coefficiente di proporzionalità (K/m)

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{K}{m}x = -\omega^2 x \quad \text{con} \quad \omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

equazione caratteristica di un moto armonico

↳ soluzione: funzione di tipo oscillatorio: $\cos(\omega t)$ con $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$

la legge oraria sarà quindi:

$$x(t) = A\cos(\underbrace{\omega t + \varphi}_{\text{fase}})$$

φ: fase iniziale

↓
ampiezza di oscillazione $[A] = [L]$

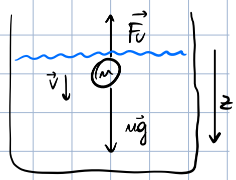
periodo $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$

$[\omega] = [T^{-1}] \rightarrow s^{-1}$

Supponiamo di avere sistema massa-molla. Sposto m di una qtà A e la lascio andare: la massa oscilla attorno a una posizione centrale che è la posizione di equilibrio statico della molla (condizione in cui non ho forze).

ATTRITO VISCOSO

= è la resistenza che un fluido (liquido, aria, ...) oppone quando un corpo tenta di muoversi all'interno di esso.
Questa forza varia in funzione della forma del corpo e della velocità relativa del corpo rispetto al mezzo preso in considerazione



- caso più semplice: $\vec{F_v} \propto \vec{v}$ (cioè ne dipende attraverso una relazione lineare)

$$\vec{F_v} = -b\vec{v} = -mK\vec{v} \qquad K \text{ cost} = \frac{b}{m} \qquad [K] = [T^{-1}]$$

relazione verificata per il moto di una sfera in un fluido

- Più in generale, la forza è una funzione $b(\vec{v})$ più complessa della velocità:

$$\vec{F_v} = -b(\vec{v})$$

Non tratteremo questi casi, ci limitiamo al caso più semplice

Prendiamo un punto di massa m di forma sferica che cade in un fluido. Esprimo la forza viscosa proporzionale alla velocità come $\vec{F_v} = -mK\vec{v}$

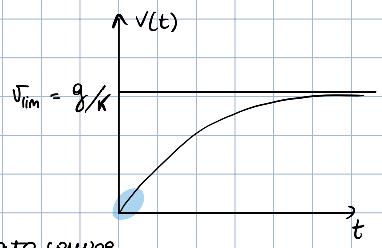
$$\vec{P} + \vec{F_v} = m\vec{g} - mK\vec{v} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

Il problema è 1D (lungo z) e consiste nella soluzione dell'equazione differenziale:

$$\frac{dv}{g-Kv} = dt \qquad -\frac{1}{K}\int_0^v -\frac{K\,dv}{g-Kv} = \int_0^t dt \qquad -\frac{1}{K}\left[\ln(g-Kv)\right]_0^v = t$$

$$\left[\ln(g-Kv)\right]_0^v = -Kt \qquad \ln(g-Kv) - \ln g = -Kt \qquad \ln\left(\frac{g-Kv}{g}\right) = -Kt \qquad \ln\left(1-\frac{Kv}{g}\right) = -Kt$$

$$1-\frac{K}{g}v = \exp(-Kt) \qquad \boxed{v = \frac{g}{K}(1-\exp(-Kt))}$$



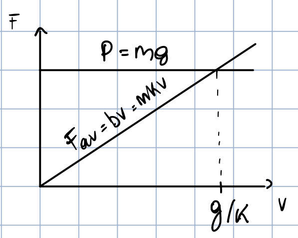
Al limite $\Delta t \to 0$: moto uniforme

Definendo la costante di tempo $\tau = \frac{1}{K}$ si ha che

$t = 3\tau \quad v = 95\%$
$t = 4\tau \quad v = 98\%$
$t = 5\tau \quad v = 99,3\%$

risultato comune a tutti gli andamenti esponenziali

Sotto l'azione di $\vec{P}$ il moto sarebbe MUA
la $\vec{F_v}$ si oppone all'aumento di velocità rendendo al limite il moto uniforme

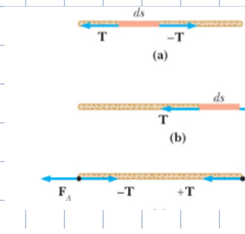


la velocità limite è tanto maggiore quanto maggiore è m e tanto minore è b

se b = 0 non c'è limite alla velocità, come dev'essere per un grave in caduta libera in assenza di attrito

TENSIONE DEI FILI (altro tipo di vincolo → esercita una forza centripeta)

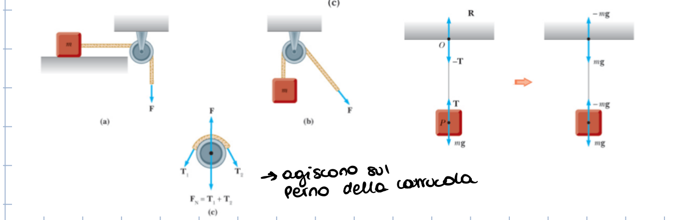
↳ inestensibili e di massa trascurabile



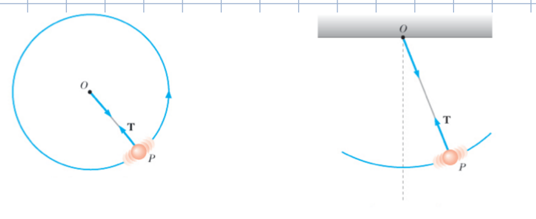
FUNE in quiete → $T = -T$

ci servono per "trasportare la forza" (non avremo equazioni del moto di una fune)

Se un punto è attaccato ad una fune, essa gli fornisce una forza detta "Tensione".
La tensione si distribuisce UNIFORMEMENTE lungo la fune, punto per punto essa è uguale
↓ per corpi rigidi sarà diverso



↝ utili per "girare" la forza
→ tutti i punti della fune sottoposti alla stessa a



la fune butta nel sistema la forza centripeta (necessaria per avere una traiettoria curva)
se alla fune sostituissi un dinamometro, lungo la fune misurerei una tensione $T = \frac{mv^2}{R}$ che serve per percorrere questa traiettoria circolare

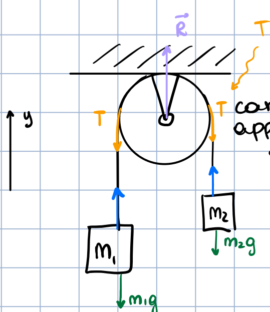
$$T = m\frac{v^2}{r} = m\omega^2 r$$

- se v costante in modulo → T costante in modulo
- se v cambia pto per pto la tensione del filo sarà diversa xché dipende dal quadrato della velocità o della velocità angolare

MACCHINA DI ATWOOD (moto di Traslazione)

↝ per i corpi rigidi non ci sarà una tensione costante

T ai capi della fune è uguale e opposta (posso vederle come applicate al centro e vedo che sono in equilibrio con $\vec{R}$)
(in ogni punto)



carrucola ideale = sistema in grado di ruotare di massa nulla e privo di attriti
appesa con perno alla parete

$m_1 > m_2$

fune inestensibile: fune va tanto giù a dx quanto va su a dx → posso scrivere un'unica equazione

$m_1 \Rightarrow \quad -m_1g + T = -m_1a$

m_1 scende quindi $a < 0$

$m_2 \Rightarrow \quad -m_2g + T = m_2a$

$-m_1g + m_2g = -m_1a - m_2a \quad \Rightarrow \quad a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}g$

sostituisco a nella I equazione

$T = m_1g - m_1a = m_1g - m_1\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}g = \frac{m_1(m_1 - m_2) - m_1(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2}g = \frac{2m_1m_2}{m_1 + m_2}g$

Che forza deve reggere il perno? ($\vec{R}$) Devo guardare le forze direttamente applicate alla carrucola

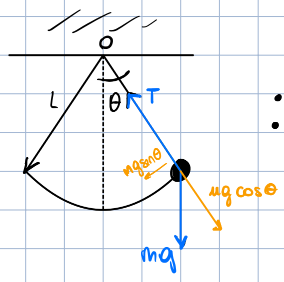
$R = 2T = \frac{4m_1m_2}{m_1 + m_2}g < \underbrace{(m_1 + m_2)g}_{\text{peso che avrei delle due masse in un sistema statico}} = \frac{2m_1m_2}{m_1 + m_2}g$

? ↝ il sistema in movimento "scarica" tensione sul perno nel momento in cui scende

Se la carrucola fosse un disco dotato di massa e raggio avrebbe un momento di inerzia che contribuirebbe alle variazioni energetiche del sistema.

PENDOLO SEMPLICE

$$m\vec{g} + \vec{T_F} = m\vec{a}$$



SIST. COORDINATE
- asse lungo il filo
- asse sempre tangente alla traiettoria

→ scompongo la forza peso

se aumenta, $\vec{P_T}$ cerca di impedirne l'aumento (forza di richiamo)

equazione con 2 termini (componente radiale e componente tangente)

→ tiene conto del fatto che la forza è sempre opposta rispetto allo spostamento angolare

- $-mg\sin\theta = ma_T$

$$a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} \underset{s = L\theta}{=} L\frac{d^2\theta}{dt^2} \Rightarrow L\frac{d^2\theta}{dt^2} + g\sin\theta = 0 \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0$$

- $T_F - mg\cos\theta = ma_N$

$$a_N = \frac{v^2}{L} \Rightarrow T_F = \frac{mv^2}{L} + mg\sin\theta$$

PICCOLE OSCILLAZIONI: $\sin\theta \sim \theta$ $\quad \sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots$

sviluppo McLaurin ($\theta \to 0$)

~ spostamento dall'asse deve essere $\approx \frac{1}{10}$ più piccolo di L ~

~ lavorando in radianti si può verificare quanto è la differenza tra θ e $\sin\theta$ ~

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0}$$

eq. caratteristica di un moto armonico semplice con $\omega^2 = \frac{g}{L}$ $[s^{-1}]$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

il sist si muove per un tempo infinito (indefinitamente) con oscillazione costante

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

T non dipende dall'ampiezza di oscillazione (isosincronismo) e dalla massa
= fissata L ho sempre lo stesso periodo

legge oraria: $\theta(t) = \underbrace{\theta_0}_{\text{ampiezza max}}\sin(\omega t + \varphi)$

spostamento lungo l'arco di circonferenza $s(t) = L\theta(t) = L\theta_0\sin(\omega t + \varphi)$

velocità angolare: $\Omega = \frac{d\theta}{dt} = \omega\theta_0\cos(\omega t + \varphi)$ → omega "grande"

⇝ se derivo ancora $\frac{d\Omega}{dt}$ ottengo l'accelerazione angolare α

velocità lineare: $v = \frac{ds}{dt} = L\Omega = L\frac{d\theta}{dt} = L\omega\theta_0\cos(\omega t + \varphi)$

tensione del filo: $T_F = m\left(g\cos\theta + \frac{v^2}{L}\right)$

Se io sostituissi $v = L\omega\theta_0\cos(\omega t + \varphi)$ all'interno di $T = m\frac{v^2}{r}$ avrei un'espressione di $T(t)$ che a sua volta varia con una funzione trigonometrica oscillante

↳ più avanti ricaveremo una relazione più esplicita di $v(\theta)$

POTENZA

Def: si dice potenza il lavoro nell'unità di tempo

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

Def: potenza istantanea : il lavoro per unità di tempo compiuto da una forza lungo un tratto ds

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = F_t \cdot v$$

⇝ caratterizza la rapidità di erogazione del lavoro

potenza media

$$P = \frac{W}{t}$$

W → lavoro totale

t → tempo nel quale è svolto il lavoro

UNITÀ DI MISURA

$$[W] = [F][L] = [M L^2 T^{-2}]$$

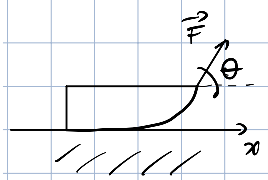
$$1 J = 1 N \cdot m = 1 Kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}$$

$$[P] = [W T^{-1}] = [M L^{-2} T^{-3}]$$

$$1 W = 1 J s^{-1} = 1 Kg \cdot m^2 \cdot s^{-3}$$

Esempio: LAVORO

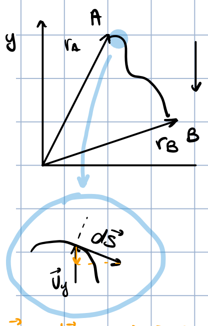
Una slitta viene trascinata da una corda per 10 metri.
La trazione sulla corda è di 60 N e l'angolo tra la corda ed il terreno è di 60°.
Calcolare il lavoro della forza di trazione.



$$\Delta x = 10\ m \quad \underbrace{F = 60\ N \quad \theta = 60°}_{\text{forza e angoli costanti}}$$

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_A^B F \cos\theta \, dx = F\cos\theta \int_A^B dx = F\cos\theta \, \Delta x = 60 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 = 300 J$$

LAVORO della FORZA PESO



$\downarrow \vec{g} = -g\vec{u}_y$

$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s}$

$$\vec{W}_{AB} = \int_A^B \vec{F}_p d\vec{s} = \int_A^B \underbrace{m\vec{g}}_{\vec{F}_p \text{ cost}} \cdot d\vec{s} = (-mg)\int_A^B \underline{\vec{u}_y \cdot d\vec{s}} = (-mg)[y]_A^B = -(mg\,y_B - mg\,y_A) = W_{AB}$$

$\vec{u}_y \cdot d\vec{s}$ = proiezione di $d\vec{s}$ su $\vec{u}_y$

Def VARIAZIONE dell' ENERGIA POTENZIALE della FORZA PESO $\Delta E_p = -W_{AB}$

Def ENERGIA POTENZIALE della FORZA PESO $E_p = mgy$

- Funzione delle coordinate di A e B
- dipende solo dalla differenza di quota tra A e B $\rightarrow$ non cambia al variare della traiettoria

$\hookrightarrow$ la trattazione fatta per $\vec{F}_p$ si estende a tutte le forze costanti $\vec{F}$ per le quali si ha quindi $W = \int_A^B \vec{F} d\vec{s} = \vec{F}\,\Delta\vec{s}$

Scegliendo come asse y un asse // e discorde a $\vec{F}$, $W = -(F y_B - F y_A) = -\Delta E_p$

LAVORO della FORZA ELASTICA

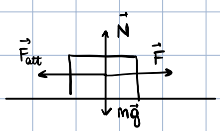
legge di Hooke: $\vec{F}_{el} = -Kx\vec{U}_x$

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}_{el} d\vec{s} = \int_A^B (-Kx)\underbrace{\vec{U}_x \cdot \vec{U}_x}_{=1} dx = -K\int_A^B x\,dx = -K\left[\frac{x^2}{2}\right]_A^B = -\frac{1}{2}K(x_B^2 - x_A^2)$$

Def: ENERGIA POTENZIALE ELASTICA $E_p = \frac{1}{2}Kx^2$

$$W_{AB} = -(E_{p,B} - E_{p,A}) = -\Delta E$$

LAVORO della FORZA di ATTRITO RADENTE

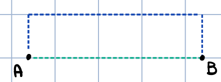


Remember: $\vec{F}_{ad} = -\mu_d N \underset{\text{versore della velocità}}{\vec{U}_v}$

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}_{ad} \cdot d\vec{s} = \int_A^B -(\mu_d N) \underbrace{\vec{U}_r \cdot d\vec{s}}_{\text{longo la stessa direzione xché unidimensionale}} = -\mu_d N \int_A^B ds$$

$\downarrow$

DIPENDE dal percorso che seguo $\Rightarrow$ non ha senso definire un'energia potenziale (Funzione che dipende solo da pto iniziale e finale)



$\downarrow$

sono forze che matematicamente non rientrano nella definizione di differenziale esatto

FORZE NON CONSERVATIVE (no differenziale esatto)

- FORZA DI ATTRITO (forze dissipative) $W_{AB} = -\mu_d N \int_A^B ds$

↓ il lavoro DIPENDE dal particolare percorso seguito, non ha senso definire un'energia potenziale

Tutte le forze che non soddisfano queste condizioni (circuitazione nulla, possibilità di definire un' E_p) sono dette forze NON CONSERVATIVE

Per esse vale comunque il Teo dell'energia cinetica

$$W_{AB} = \int_A^B mv\,dv = E_{K,B} - E_{K,A} = \Delta E_K$$

ENERGIA MECCANICA

- Nel caso siano presenti solo forze conservative:

$$\begin{cases} W_{AB} = \Delta E_K \\ W_{AB} = -\Delta E_p \end{cases} \Rightarrow E_{KB} + E_{pB} = E_{KA} + E_{pA} \Rightarrow E_{mB} = E_{mA}$$

Def: ENERGIA MECCANICA $E_m = \underbrace{E_K + E_p}_{\text{variano durante il moto ma la loro somma rimane costante}}$

LEGGE DI CONSERVAZIONE dell'ENERGIA MECCANICA (II legge di conservazione) $\boxed{E_m = cost}$ ⇝ legge scalare quindi molto comoda

- Nel caso siano presenti anche forze non conservative:

la forza risultante è $\vec{F} = \underbrace{\vec{F}_c}_{\text{forze conservative}} + \underbrace{\vec{F}_{nc}}_{\text{forze non conservative}}$ ⇒ il lavoro complessivo sarà dato dalla somma $W_{AB} = \underbrace{W_c}_{\text{associato a forze conservative}} + \overbrace{W_{nc}}^{\text{associato a forze non conservative}}$

$W_{AB} = W_c + W_{nc}$

$$\begin{cases} W_{AB} = \Delta E_K = E_{K,B} - E_{K,A} \\ W_c = -(E_{p,B} - E_{p,A}) = -\Delta E_p \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} \Delta E_K &= W_c + W_{nc} \\ \Delta E_K &= -\Delta E_p + W_{nc} \end{aligned} \quad (E_{KB} + E_{pB}) - (E_{KA} + E_{pA}) = W_{nc}$$

⇓

$W_{AB} = E_{p,A} - E_{p,B} + W_{nc} = E_{K,B} - E_{K,A}$

$W_{nc} = (E_{K,B} + E_{p,B}) - (E_{K,A} + E_{p,A})$

$\boxed{W_{nc} = E_{m,B} - E_{m,A} = \Delta E_m}$ la variazione di energia meccanica è pari al lavoro delle forze non conservative

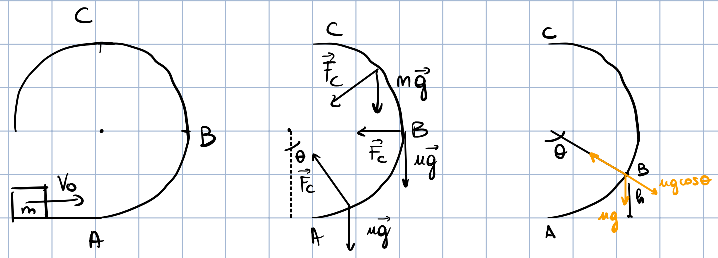
Quindi, dato che nel nostro corso le forze non conservative sono forze dissipative, il termine W_{nc} andrà a consumare una parte di energia meccanica. Di conseguenza:

$$W_{nc} = W_{diss} = E_{m,f} - E_{m,i} < 0$$

↳ infatti il lavoro delle forze di attrito radente è valutabile come $W_{AB} = -\mu_d N \int_A^B ds < 0$

3] guida circolare liscia di raggio R

molto probabile che ci sia all'esame



velocità in B e C

$\vec{F}_p$, $\vec{N}$

conservativa ; $\perp$ al piano → non compie lavoro

sistema conservativo → posso applicare legge conservazione dell'energia:

$\forall$ punto $\frac{1}{2}mv^2 + mgh = E_m$

$E_m = \frac{1}{2}mv_0^2$ (calcolata nel punto A ma vale per tutti i punti)

$\frac{1}{2}mv^2 + mgh = \frac{1}{2}mv_0^2$

$v = \sqrt{v_0^2 - 2gh}$ ⟹ • in B) $h = R$ (sono salito di R) $v_B = \sqrt{v_0^2 - 2gR}$

• in C) $h = 2R$ $v_C = \sqrt{v_0^2 - 4gR}$

reazione vincolare della guida → condizioni di equilibrio?

la reazione normale e le eventuali componenti radiali di $\vec{F}_p$, sommate vettorialmente, devono dare vita a un termine centripeto (xchè sto percorrendo una traiettoria circolare)

Def θ = angolo tra la verticale e il raggio vettore che indica la posizione del punto

componente tangente di $\vec{F}_p$ non ci interessa xchè già considerata nel calcolo di v

in ogni punto: $\underbrace{N - mg\cos\theta = m\frac{v^2}{R}}$

deve essere centripeto x percorrere traiettoria curvilinea (nel nostro caso la forza è radiale xchè la traiettoria è una circonferenza)

discontinuità, noi consideriamo il punto immediatamente interno alla guida

A] $N_A - mg = m\frac{v_0^2}{R}$ ⟹ $N_A = m\frac{v_0^2}{R} + mg$

B] $N_B = m\frac{v_B^2}{R}$ $[\theta = \frac{\pi}{2}$, $\cos\frac{\pi}{2} = 0]$ $N_B = m\frac{v_0^2}{R} - 2mg$ ($v_B = \sqrt{v_0^2 - 2gR}$)

nel punto C (appena superato):

· $\vec{F}_p$ ha componente radiale che si somma alla reazione vincolare

$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ diventa segno negativo → cambia segno: N si somma a $\vec{F}_p$

C] $N_C + mg = m\frac{v_C^2}{R}$ $[\theta = \pi$, $\cos\pi = -1]$ $N_C = m\frac{v_0^2}{R} - 5mg$

$\frac{m(v_0^2 - 4gR)}{R} - mg = \frac{mv_0^2}{R} - 4g - \frac{mg}{R}$

velocità v_0 minima per arrivare in C ancora in contatto con la guida

CONDIZIONE: $N_C = 0$

NB. non uso conservazione di Em xchè non arrivo fermo in C!

$\frac{mv_0^2}{R} = 5mg$ $v_0 = \sqrt{5Rg}$ in queste condizioni $v_B = \sqrt{3Rg}$ $N_B = 3mg$

$v_C = \sqrt{Rg}$ $N_C = 0$

LEGAME TRA FORZA ed ENERGIA POTENZIALE

F_x, F_y, F_z componenti di una FORZA CONSERVATIVA:

lavoro infinitesimo $dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = F_x dx + F_y dy + F_z dz = -dE_p$

↑ se la forza è conservativa

Per un percorso chiuso si ha $\oint (F_x dx + F_y dy + F_z dz) = 0$

Si può dimostrare che tale proprietà per qualsiasi linea chiusa è la condizione **necessaria e sufficiente all'esistenza di una funzione delle coordinate** E_p tale che:

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x} \quad F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y} \quad F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z}, \text{ cioè } \quad \vec{F} = -\nabla E_p$$

↳ gradiente: operatore che trasforma un campo scalare in uno vettoriale

↓ è l'operatore che seleziona la variazione massima del campo vettoriale, cioè

LA FORZA, in quanto opposto del gradiente dell'energia potenziale, risulta essere DIRETTA SECONDO IL VERSO DI MAX VARIAZIONE DI E_p

↓ DIMINUZIONE (xché c'è il meno)

~ E_p mi permette di calcolare le componenti della forza lungo x, y, z attraverso le derivate parziali della funzione nelle coordinate ~

Matematicamente avevamo definito DIFFERENZIALE ESATTO una funzione esprimibile come

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz$$

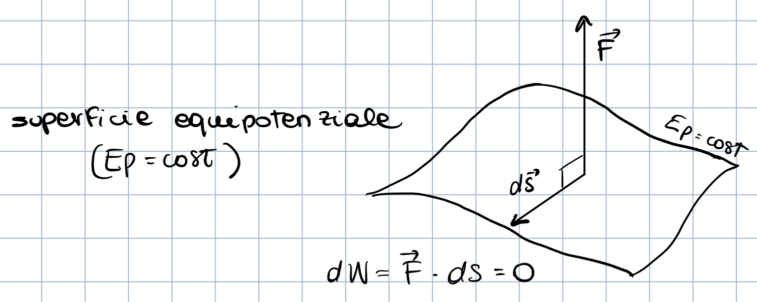
quindi le energie potenziali sono termini esprimibili come differenziali esatti

→ il campo che rispetta queste condizioni è detto "potenziale": l'E_p è un potenziale

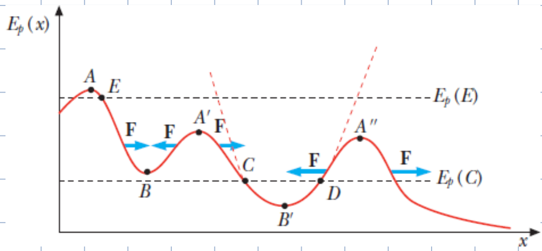
→ il campo vettoriale con le derivate lungo le 3 direzioni è detto "conservativo"

Rappresento una superficie ad energia potenziale costante:

per uno spostamento lungo tale superficie il lavoro è nullo ($W = -\Delta E_p$) e pertanto la forza associata all'energia potenziale (il gradiente di E_p) è ⊥, in ogni punto, alla superficie equipotenziale e indica, con il suo verso quello di diminuzione di E_p



Rimanendo nel caso unidimensionale, se E_p ha un andamento qualsiasi, (vedi figura) possiamo fare delle considerazioni sul moto del punto materiale



- $\underbrace{A, A', A''}$, $\underbrace{B, B'}$: $\frac{\partial E_p}{\partial x} = 0 \rightarrow \vec{F} = 0$ p.to materiale fermo rimane in quiete ⇒ EQUILIBRIO STATICO

se il punto è spostato di poco la forza tende ad allontanarlo da A, A', A''
↓
posizioni di EQUILIBRIO INSTABILE

se il punto è spostato di poco, la forza tende a riportarlo in B, B'
↓
di EQUILIBRIO STABILE

- in assenza di attriti ($W_{AB} = \Delta E_p$)

→ se si lascia il punto fermo in C esso avrà $E_M = E_p(C)$

Successivamente il punto si metterà in moto convertendo E_p in E_K che sarà max in B'

Il punto non potrà oltrepassare D, in cui E_K e v saranno di nuovo nulle → compie quindi un moto periodico intorno a B'

  - è la forma funzionale di E_p nell'intorno di B' a determinare il periodo del moto
  - se le oscillazioni sono piccole la funzione E_p può essere approssimata con Taylor al secondo ordine (il primo termine è nullo xché $\frac{\partial E_p}{dx} = 0$)

?

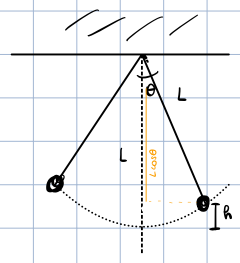
$$E_p \sim \frac{1}{2}\frac{d^2E_p}{d^2x}$$

  - moto armonico con $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$ — legata alla curvatura di E_p intorno a B

NB. se lo spostamento iniziale da un punto di equilibrio non è piccolo non è detto che il punto continui a oscillare intorno ad esso.

es. lasciando il punto fermo in E esso si metterà in moto e proseguirà, sempre in assenza di attriti, il suo moto oltre B, A', B' e A''. In tali posizioni esso avrà infatti E_K e v non nulle

Esercizio: ENERGIA MECCANICA nel PENDOLO SEMPLICE



forze agenti:

- forza peso ✓
- tensione del filo? ⇒ un moto armonico è sempre sist. conservativo → legge conservazione dell'energia
  - ⊥ traiettoria
  - no lavoro
  - non pregiudica la conservatività del sistema

$h = L - L\cos\theta = L(1-\cos\theta)$

$\theta = \theta_0 \quad E_K = 0 \quad E_P = mgh = mgL(1-\cos\theta_0)$

nel punto generico $\theta \quad E_K = \frac{1}{2}mv^2 \quad E_P = mgL(1-\cos\theta)$

$\theta = 0 \quad E_K = \frac{1}{2}mv_0^2 \quad E_P = 0$

θ generico $\quad \frac{1}{2}mv^2 + mgL(\cancel{1}-\cos\theta) = \underbrace{mgL(\cancel{1}-\cos\theta_0)}_{\text{ricavo } E_M \text{ dal punto } \theta=\theta_0}$

$$v(\theta) = \sqrt{2gL(\cos\theta - \cos\theta_0)}$$

v_{max} (in $\theta = 0$): $v_0 = \sqrt{2gL(1-\cos\theta_0)}$

infatti è il punto dove tutta l'energia è cinetica

OSS. Possiamo anche ricavare un'espressione esplicita per la tensione del filo

$$T_F = mg\cos\theta + m\frac{v^2}{L} \xrightarrow[\text{sostituisco } v]{} T_F(\theta) = mg(3\cos\theta - 2\cos\theta_0)$$

NB. la tensione del filo non è costante durante l'oscillazione

ATTENZIONE! Siamo giunti a $v(\theta)$ senza dover supporre θ sufficientemente piccolo: la conservazione di E_M vale per qualsiasi angolo di oscillazione

ALTRE EQUAZIONI DIFFERENZIALI NOTEVOLI

✫ $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2(x(t)) = f(t)$ — II ordine, lineare, coeff. costanti, **non omogenea** → termine noto che dipende da t) ↱ (che può essere una cost o una funzione

♡ $\frac{d^2x(t)}{dt^2} + c\,\frac{dx(t)}{dt} + \omega^2 x(t) = 0$ — II ordine, lineare, coeff. costanti, omogenea → caso + completo rispetto a quello dell'oscillatore armonico (compare anche derivata prima)

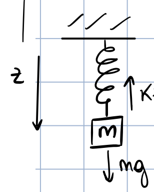
In entrambi i casi è importante conoscere le soluzioni particolari
(PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE) → valido per equazioni lineari
↳ per l'equazione non omogenea si ha (combinazione lineare):

✫ $x(t) = x_0(t) + x_P(t)$

- $x(t)$: sol generale dell'equazione completa
- $x_0(t)$: sol generale dell'omogenea associata
- $x_P(t)$: sol particolare dell'equazione completa

FORZA ELASTICA e FORZA PESO

chiamo z la coordinata verticale



~ mi aspetto che la soluzione sia oscillatoria e continua nel tempo ~

Studio il sistema:

CONDIZIONE di EQUILIBRIO STATICO

z_s posizione di equilibrio della molla nel caso statico → $z_s = \frac{mg}{K}$

→ la molla è un po' allungata (la posizione di equilibrio statico ≠ posizione di equilibrio molla)

STUDIO LE CONDIZIONI INIZIALI

Tiro la massa m fino alla posizione $z = 2z_s$ (allungamento iniziale) e lascio libero il sistema
↳ equazione del moto:

$F = ma \qquad mg - Kz = m\frac{d^2z}{dt^2}$

chiamo $\omega^2 = \frac{K}{m}$ → $\boxed{\frac{d^2z}{dt^2} + \omega^2 z = \underbrace{g}_{\text{termine noto}}}$ equazione non omogenea (✫)

$\frac{d^2z}{dt^2} + \omega^2 z = 0$

sol generale dell'omogenea associata $\quad z_0(t) = A\sin(\omega t + \phi)$

sol particolare dell'equazione completa $\quad z(t) = z_s = \frac{mg}{K} \rightarrow \frac{dz}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} = 0$

sostituisco in ✫ $\quad \omega^2\frac{mg}{K} = g \qquad \frac{\cancel{K}\,mg}{\cancel{m}\,\cancel{K}} = g$ ✓

sol generale dell'equazione completa $\quad z(t) = z_0(t) + z_p(t) = A\sin(\omega t + \phi) + \frac{mg}{K}$

CONDIZIONI AL CONTORNO (in t = 0)
↓
mi permettono di specificare A e ϕ

$z(0) = 2z_s = \frac{2mg}{K} = A\sin\phi + \frac{mg}{K}$

$v(0) = 0 = \omega A\cos\phi \iff \cos\phi = 0 \iff \phi = \frac{\pi}{2}$

1) $\gamma^2 > \omega_0^2 \rightarrow \lambda^2 > 4mk$ smorzamento forte

$\alpha_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}$ $\quad \alpha_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}$ entrambe negative

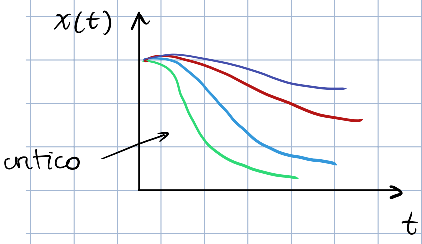
$x(t) = e^{-\gamma t}\left(A e^{t\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}} + B e^{-t\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}}\right)$ combinazione lineare

andamento esponenziale decrescente

2) $\gamma^2 = \omega_0^2 \rightarrow \lambda^2 = 4mk$ smorzamento critico

$\alpha_1 = \alpha_2 = -\gamma$ si può dimostrare che la soluzione è $x(t) = e^{-\gamma t}(At+B)$

sempre esponenziale decrescente



3) $\gamma^2 < \omega_0^2 \rightarrow \lambda^2 < 4mk$ smorzamento debole

$\alpha_1 = -\gamma + i\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2} = -\gamma + i\omega$ $\quad \alpha_2 = -\gamma - i\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2} = -\gamma - i\omega$

complesse coniugate

$x(t) = e^{-\gamma t}\left(A e^{i\omega t} + B e^{-i\omega t}\right) = e^{-\gamma t}\left[(A+B)\cos\omega t + i(A-B)\sin\omega t\right]$

Condizioni:
- risultato reale
- A e B diverse

$\rightarrow$ A e B complessi coniugati

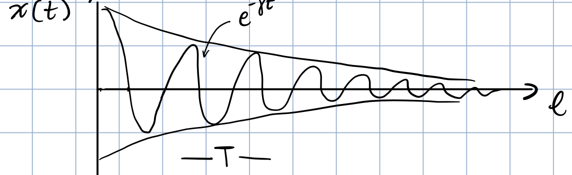
$A = a + ib \quad B = a - ib$

$x(t) = e^{-\gamma t}\left[2a\cos\omega t - 2b\sin\omega t\right] = A_0 e^{-\gamma t}\sin(\omega t + \phi)$

Il moto è oscillatorio, con pulsazione $\omega = \sqrt{\omega_0^2-\gamma^2} < \omega_0$

le soluzioni sono oscillanti ma non periodiche

l'oscillazione è smorzata in ampiezza da un termine che è esponenziale decrescente



$\rightarrow$ modulazione di ampiezza davanti a una funzione oscillante di tipo trigonometrico

(sist. si ripete uguale)

Non ha un periodo ma uno PSEUDOPERIODO

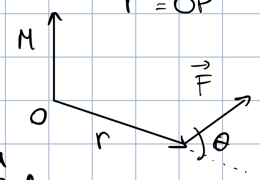
ampiezza diminuisce ma la distanza tra i massimi (o minimi) è costante nel tempo

vale anche il pendolo

VERSO I MOTI DI ROTAZIONE:
MOMENTO ANGOLARE

Def: Si definisce MOMENTO DELLA FORZA rispetto al polo O la seguente grandezza:

$$\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{F} \qquad M = rF\sin\theta \qquad r = \overline{OP}$$



Con la risultante di più forze $R = \sum_i F_i$:

$$\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{F}_1 + \dots + \vec{r} \wedge \vec{F}_n = \vec{r} \wedge \vec{R}$$ solo nel caso del singolo punto materiale

(rivedi slide su fondamenti matematici)

$$[M] = [L \cdot M \cdot L \cdot T^{-2}] = [M \cdot L^2 \cdot T^{-2}] \qquad M \to kg \cdot m^2 \cdot s^{-2} = N \cdot m$$ (usa J solo x le energie)

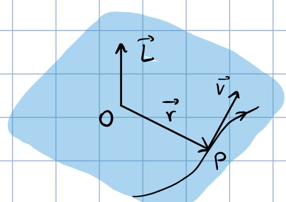
Def: Si definisce MOMENTO ANGOLARE rispetto al polo O la seguente grandezza:

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p} = \vec{r} \wedge m\vec{v} \qquad L = rp\sin\theta$$

~ Per il momento conosciamo quindi 3 vettori ⊥ al piano
- momento della forza
- momento angolare
- velocità angolare vettoriale

nel caso di moto curvilineo piano (O ∈ piano contenente r e v) → coordinate polari

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge m\vec{v} = \vec{r} \wedge m(\underbrace{v_r}_{=0 \text{ xché } r // v_r} + v_\theta) = \vec{r} \wedge m\vec{v}_\theta \qquad L = mrv_\theta = mr^2 \frac{d\theta}{dt}$$

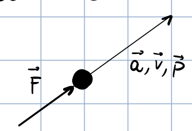


$$[L] = [L \cdot M \cdot L \cdot T^{-1}] = [M \cdot L^2 \cdot T^{-1}] \qquad L \to kg \cdot m^2 \cdot s^{-1} = N \cdot m \cdot s$$

Perché devo introdurre il momento di una forza e il momento angolare?

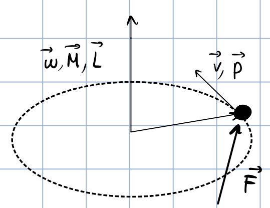
- punto materiale libero: l'applicazione di una forza F causa
  - un'accellerazione $\vec{a}$ (lineare)
  - una variazione di quantità di moto $\vec{p}$ (lineare) $\quad \vec{F} = \frac{dp}{dt}$

  lungo la direzione di sollecitazione



- punto materiale vincolato: l'applicazione di una forza F causa
  ↳ es. legato con un cordino al punto O

  ~> il punto gira attorno all'asse
  - un'accellerazione $\vec{a}$, che ha una componente lungo traiettoria e una radiale
  - la quantità di moto è tangente alla traiettoria
  - $\vec{M}$ e $\vec{L}$ sono // $\vec{\omega}$ (asse di rotazione)



TEOREMA del MOMENTO ANGOLARE

variazione nel tempo del momento angolare

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt} \wedge m\vec{v}}_{= \vec{v} \wedge m\vec{v} = 0} + \underbrace{\vec{r} \wedge m\frac{d\vec{v}}{dt}}_{= \vec{r} \wedge m\vec{a} = \vec{r} \wedge \vec{F} = \vec{M}_0}$$

raggio vettore $\vec{OP}$; $\vec{r} = \vec{OP}$

velocità di P

forza applicata a P (purché il sist. sia inerziale)

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

se O è fermo: $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_0$

"la derivata temporale del momento angolare è uguale al momento della forza se entrambi i momenti sono riferiti allo stesso **polo fisso** in un sist di riferimento inerziale"

se la forza è nulla / $r \,//\, F$ $\Rightarrow$ $\vec{M} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = 0$

L costante

PRINCIPIO di CONSERVAZIONE del MOMENTO ANGOLARE

"il momento angolare di un pto materiale rimane costante nel tempo (si conserva) se il momento delle forze è nullo"

TEOREMA del MOMENTO dell'IMPULSO

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} \Rightarrow d\vec{L} = \vec{M}\,dt \Rightarrow \int d\vec{L} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{M}\,dt \Rightarrow \Delta\vec{L} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{M}\,dt = \int_{t_0}^{t_2} \vec{r} \wedge \vec{F}\,dt$$

per produrre una variazione finita del momento angolare di un pto materiale occorre l'azione, per un certo tempo, del momento di una forza

Se la forza viene applicata per un intervallo di tempo molto breve → $r \sim cost$

$$\int_{t_0}^{t} \vec{M}\,dt = \int_{t_0}^{t} (\vec{r} \wedge \vec{F})\,dt = \vec{r} \wedge \int_{t_0}^{t} \vec{F}\,dt = \vec{r} \wedge \vec{J} = \Delta\vec{L}$$

la variazione del momento angolare è uguale al momento dell'impulso applicato nel punto

es. l'effetto del mio calcio sarà di avere una rotazione del sistema associata al momento angolare del pto

l'ho creato attraverso una forza impulsiva → momento dell'impulso

Nel caso particolare del MOTO CIRCOLARE:

$s = r\theta$
$ds = r\,d\theta$

$$W = \int_A^B \vec{F}_t\,ds = \int_A^B F_t\,ds = \int_{\theta_A}^{\theta_B} F_t\,r\,d\theta = \int_{\theta_A}^{\theta_B} M\,d\theta$$

la proiezione della forza $\vec{F}$ lungo la direzione della traiettoria ds

la componente normale della forza ha momento nullo rispetto al centro della circonferenza

MOTI RELATIVI

sperimentalmente: le leggi fisiche non dipendono dal sistema di riferimento, la metrica mi aiuta a descriverle ma non influenza il fenomeno fisico

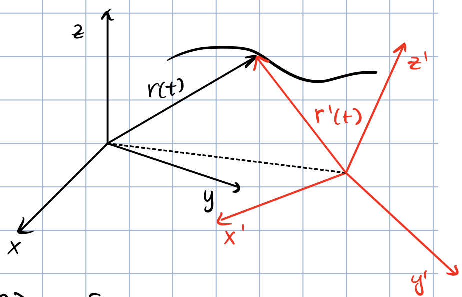
Data una proprietà verificata in un sist di riferimento, essa rimane vera in un altro sist. di riferimento legato al primo da una generica roto-traslazione **statica**.

↦ non esiste un punto privilegiato nello spazio, che è < OMOGENEO = tutto uguale; ISOTROPO = ∄ direzione preferenziale di spostamento

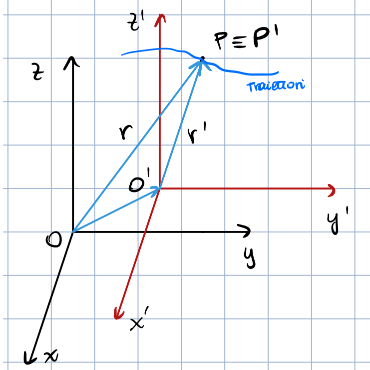
La situazione cambia se ci occupiamo di sistemi di riferimento in MOTO RECIPROCO
In assoluto non esiste l'invarianza delle leggi fisiche in sist di rif in moto reciproco

Descriveremo le prop. fisiche (principalmente quelle cinematiche) in sist. di rif in moto l'uno rispetto all'altro
+ hp: tempo assoluto

Ci occuperemo di 2 sistemi di riferimento:
- uno fermo (nero)
- uno in movimento rispetto al primo (rosso)

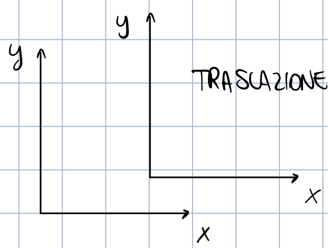


posso passare da uno all'altro combinando TRASLAZIONE e ROTAZIONE

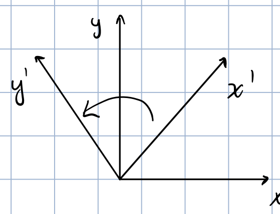


Supponiamo di avere a disposizione due sistemi di riferimento cartesiani Oxyz (fisso) e O'x'y'z' (mobile) e vediamo come descrivere posizione, velocità, accelerazione di un pto materiale

$\vec{OO'}$ posizione di O' rispetto a Oxyz
$\vec{r}$ posizione di P rispetto a Oxyz
$\vec{r}'$ posizione di P(P') rispetto a Ox'y'z'



TRASLAZIONE (i versori non variano nel tempo)



ROTAZIONE
i versori variano nel tempo

MOTO DI PURA TRASLAZIONE

$$\begin{cases} \vec{r} = OO' + r' \\ \vec{v} = v_{OO'} + v' \\ \vec{a} = \vec{a}_{OO'} + a' \end{cases}$$

$\vec{a}$ = scritturo dello stesso tipo → se pura traslazione:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}_{OO'}}{dt} + \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}_{OO'} + \vec{a}'$$

- se $\vec{V}_{OO'} = cost \Rightarrow \vec{a}_{OO'} = 0 \Rightarrow \vec{a} = a'$
- se $V_{OO'} \neq costante \rightarrow \vec{a}_{OO'} \rightarrow \vec{a}' = \vec{a} - \vec{a}_{OO'}$ cioè le accellerazioni in Oxy e O'x'y' sono diverse, la loro diversità è legata alla presenza di un'accellerazione di O'x'y'

↳ se moltiplico queste relazioni per la massa:
- osservatore in O vedrà $\vec{F} = m\vec{a}$
- osservatore in O' vedrà $\vec{F}' = m\vec{a}' = m(\vec{a} - \vec{a}_{OO'}) = \vec{F} - m\vec{a}_{OO'}$

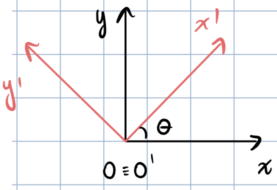
in O'x'y' la forza che misuro non sarà la sola forza vera $\vec{F}$ (cioè quella misurata in Oxy) ma sarà forza vera combinata ad un termine di FORZA APPARENTE (legata all'accellerazione del sist. di riferimento)
non riconducibile alle interazioni fondamentali
⇝ è nullo se $V = cost \rightarrow \vec{F}' \equiv \vec{F}$

$\vec{F}_{inerz} = m\vec{a}_{OO'}$ forza apparente (inerziale)

L'osservatore in O' misurerà una forza differente rispetto all'osservatore in O. Inoltre, nel caso in cui per O sia $\vec{F} = 0$, si avrà $F' \neq 0$ per O'.

Def: Un sistema di riferimento viene detto INERZIALE se per esso vale il principio di inerzia
→ in un sistema di riferimento inerziale agiscono solo forze vere
⇝ un sist in moto accelerato non potrà mai essere inerziale
es. un sist solidale a un pto materiale che si muove su traiettoria curva (in cui è sempre presente l'accelerazione normale)

MOTO DI PURA ROTAZIONE



sistema in moto ruota attorno al "perno" comune a entrambi i sistemi con velocità angolare $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ = velocità di rotazione del vettore x' rispetto a x

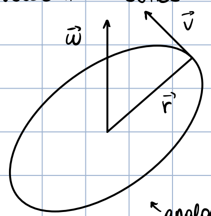
$\vec{r} = \vec{OO'} + \vec{r}'$

velocità assoluta $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{OO'}}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_{OO'} + \frac{d}{dt}(x'u_{x'} + y'u_{y'} + z'u_{z'}) = \vec{v}_{OO'} + v' + x'\frac{du_{x'}}{dt} + y'\frac{du_{y'}}{dt} + z'\frac{du_{z'}}{dt}$

(v': velocità relativa; $\vec{v}_{OO'}$ = 0 se non c'è traslazione)

vogliamo studiare la rotazione del versore $u_{x'}$ o $u_{r'}$ che gira intorno all'origine con vel angolare ω

DEF di VELOCITÀ ANGOLARE

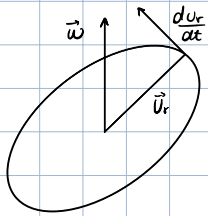


definizione di velocità angolare ω:
- vettore ⊥ piano circonferenza
- modulo $\frac{d\theta}{dt}$
- verso con regola mano dx

↓

$\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$

DERIVATA DI u_r



↖ analogia ↗ (applico lo stesso formalismo)

- ⊥ u_r = lungo la direzione di v
- modulo $\frac{d\theta}{dt}$ $(=|\vec{\omega}|)$

↓

è esprimibile come:

$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{u}_r$

⇒ FORMULE DI POISSON (valutazione qualitativa)

- $\frac{d\vec{u}_{x'}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{u}_{x'}$
- $\frac{d\vec{u}_{y'}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{u}_{y'}$
- $\frac{d\vec{u}_{z'}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{u}_{z'}$

→ mi danno le variazioni nel tempo dei versori $u_{x'}, u_{y'}, u_{z'}$ rispetto al sist. di riferimento fisso

NB. le loro mutue orientazioni non possono cambiare. Alla rotazione di uno, con una certa ω, corrisponde la rotazione degli altri due con la stessa ω

$\vec{v} = \vec{v}_{OO'} + \vec{v}' + x'\frac{d\vec{u}_{x'}}{dt} + y'\frac{d\vec{u}_{y'}}{dt} + z'\frac{d\vec{u}_{z'}}{dt} = \vec{v}_{OO'} + \vec{v}' + x'\vec{\omega}\wedge\vec{u}_{x'} + y'\vec{\omega}\wedge\vec{u}_{y'} + z'\vec{\omega}\wedge\vec{u}_{z'}$

(→ velocità di trascinamento lineare: $\vec{v}_{OO'}$)

$= \vec{v}_{OO'} + \vec{v}' + \vec{\omega}\wedge\underbrace{[x'\vec{u}_{x'} + y'\vec{u}_{y'} + z'\vec{u}_{z'}]}_{\vec{r}'} = \vec{v}_{OO'} + \vec{v}' + \vec{\omega}\wedge\vec{r}'$

TEOREMA delle VELOCITÀ RELATIVE

$$\boxed{\begin{array}{l}\vec{v}_{OO'} + \vec{\omega}\wedge\vec{r}' = \vec{v}_{tr} \\ \Rightarrow \vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_{tr}\end{array}}$$

→ velocità di trascinamento: contiene tutti i termini di velocità di spostamento del sistema di riferimento

↳ è pari alla velocità rispetto al sis fisso di P', solidale con il sis mobile (cioè con $v' = 0$)

se $\omega = 0$ ⇒ $v_{tr} = v_{OO'}$ solo traslazione

se $v_{OO'} = 0$ ⇒ $v_{tr} = \omega \wedge r$ solo rotazione

- se P è fermo nel sis mobile → $\vec{v} \equiv \vec{v}_{tr}$
- se P si muove rispetto a un sist di riferimento mobile, la sua velocità assoluta (rispetto al sist fisso) è pari alla somma della velocità relativa e della velocità di trascinamento

In particolare $\frac{dr'}{dt} = v' + \omega \wedge r'$

TRASFORMAZIONI DI GALILEO

= Trasformazioni di coordinate tra sistemi di riferimento entrambi inerziali

- se Oxy è fermo: O'x'y' deve avere MRU (accelerazione di O' nulla): $\vec{V}_{OO'} = V_{OO'} \vec{u}_x$ costante
  $OO' = V_{OO'} t$
- solo moto di O' lungo il solo asse delle x → lungo y tra i 2 sistemi non ci sono differenze $(y = y')$
  ↳ $(x = V_{OO'}t + x')$ — x: coordinata x del vettore r; x': coordinata x di r'
- traslazione pura → $\omega = 0$

$$\vec{r} = \vec{OO'} + \vec{r}'$$
$$\vec{v} = \vec{V}_{OO'} + v' + \omega \wedge r'$$
$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_{OO'} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}') + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r}' + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}'$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{r} = \vec{OO'} + r' = V_{OO'} t + r' \\ \vec{v} = V_{OO'} + v' \\ \vec{a} = a' \end{cases}$$

Proietto lungo gli assi:

asse x $\begin{cases} x = V_{OO'} t + x' \\ V_x = V_{OO'} + V_x' \\ a_x = a_x' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = x - V_{OO'} t \\ V_x' = V_x - V_{OO'} \\ a_x' = a_x \end{cases}$

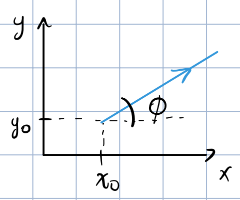
ATTENZIONE ai segni!

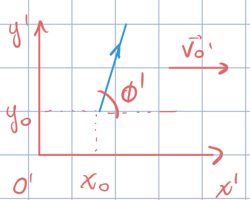
asse y $\begin{cases} y = y' \\ V_y = V_y' \\ a_y = a_y' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y' = y \\ V_y' = V_y \\ a_y' = a_y \end{cases}$

→ vedo le stesse forze nei 2 sist

Esempio:

1) MRU nel piano Oxy → descrivere il moto nel piano O'x'y' in moto di trascinamento con $\vec{V}_0$ cost





Oxy

$x = x_0 + V_x t$

$y = y_0 + V_y t$

MRU

$\tan\phi = \frac{V_y}{V_x}$

$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$

O'x'y'

$x' = x - V_0' t = x_0 + (V_x - V_0')t$

$y' = y = y_0 + V_y t$

MRU

$\tan\phi' = \frac{V_y'}{V_x'} = \frac{V_y}{V_x - V_0'}$

$V' = \sqrt{(V_x - V_0')^2 + V_y^2}$