



centroappunti.it

CORSO LUIGI EINAUDI, 55/B - TORINO

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 2552A

ANNO: 2023

A P P U N T I

STUDENTE: Binetti Thomas

MATERIA: Gasdinamica - 02BAQMT - Prof. Iuso

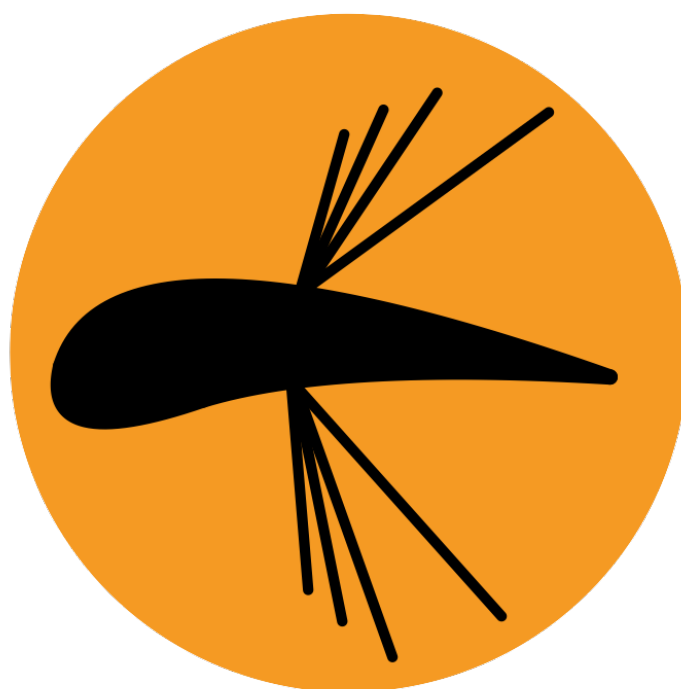
Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTI E NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.

Gasdinamica

02BAQMT - Gasdinamica



Versione 1.0

Indice

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Introduzione | 1 |
| 1.1 | Inizio | 1 |
| 1.2 | i Gas | 1 |
| 1.2.1 | La Mole | 2 |
| 1.2.2 | Libero Cammino Medio | 3 |
| 1.2.3 | Moto di un Gas | 3 |
| 1.3 | Teoria Cinetica dei Gas | 5 |
| 1.3.1 | Gradi di Libertà Cinetici | 6 |
| 1.3.2 | Energia ed Entalpia | 7 |
| 1.4 | Compressibilità | 10 |
| 1.5 | Proprietà di Trasporto dei Fluidi | 11 |
| | | |
| 2 | Termodinamica | 17 |
| 2.1 | Principi | 18 |
| 2.1.1 | Primo Principio della Termodinamica | 18 |
| 2.1.2 | Lavoro | 18 |
| 2.1.3 | Evoluzione Termodinamica | 18 |
| 2.1.4 | Secondo Principio della Termodinamica | 19 |
| 2.2 | Processo Isoentropico | 20 |
| 2.3 | Grandezze Totali | 21 |
| | | |
| 3 | Equazioni di Bilancio | 23 |
| 3.1 | Inizio | 23 |
| 3.2 | Forma Integrale | 24 |

| INDICE | 3 | INDICE |
|--------------|--|-------------|
| 4.4.4 | Condotto Fittizio | 71 |
| 4.4.5 | Calcolo della Lunghezza Critica | 72 |
| 5 | Urti Obliqui | 75 |
| 5.1 | Inizio | 75 |
| 5.1.1 | Considerazioni Energetiche | 78 |
| 5.1.2 | Relazione Theta-Beta-Mach | 81 |
| 5.2 | Polare dell'Urto | 84 |
| 5.2.1 | Angolo e Odografa | 86 |
| 5.3 | Urto Curvo | 87 |
| 5.3.1 | Urto Obliquo sulla Polare | 88 |
| 5.4 | Urto Conico | 91 |
| 5.4.1 | Osservazioni Preliminari | 92 |
| 6 | Riflessione a Parete | 93 |
| 6.1 | Riflessione | 93 |
| 6.2 | Diagramma Pressione-Deflessione | 94 |
| 6.3 | Intersezione | 95 |
| 6.3.1 | Intersezione di Diverse Famiglie | 95 |
| 6.3.2 | Intersezione della Stessa Famiglie | 96 |
| 6.4 | Deflessione Graduale della Parete | 98 |
| 6.5 | Riflessione di Mach | 100 |
| 7 | Onde di Espansione | 101 |
| 7.1 | Angolo di Deflessione | 102 |
| 7.2 | Epicicloide | 107 |
| 8 | Metodo delle Caratteristiche | 111 |
| 8.1 | Metodo Generale | 114 |
| 8.2 | Epicicloide | 117 |
| 8.3 | Riflessione | 118 |
| 8.3.1 | Evitare la Riflessione | 120 |
| 9 | Getto | 121 |
| 9.1 | Getto Piano | 122 |
| 9.1.1 | Getto Sottoespanso | 122 |
| 9.1.2 | Getto Sovraspanso | 123 |
| <hr/> | | |
| Versione 1.0 | 3 | Gasdinamica |

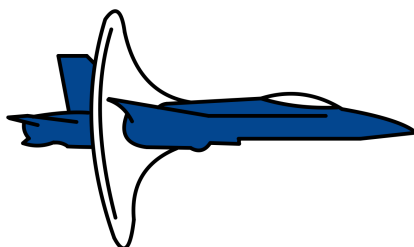
| INDICE | 5 | INDICE |
|---|---|------------|
| 12.3 Teoria Newtoniana | | 172 |
| 12.3.1 Lamina Piana | | 173 |
| 13 Effetti Viscosi e Termici | | 175 |
| 13.1 Fluidi Newtoniani | | 176 |
| 13.2 Strato Limite | | 177 |
| 13.3 Turbolenza | | 179 |
| 13.3.1 Decomposizione alla Reynolds | | 179 |
| 13.3.2 Regole di Mediazione | | 179 |
| 13.4 Equazioni Mediate | | 180 |
| 13.5 Analogia dei Campi | | 181 |
| 13.5.1 Flusso di Couette | | 181 |
| 13.5.2 Flusso nello Strato Limite | | 182 |
| 13.5.3 Fattore di Recupero | | 184 |
| 13.5.4 Corpo non Adiabatico | | 187 |
| 13.6 Analogia di Reynolds | | 191 |
| 13.6.1 Turbolenza (Cenni) | | 193 |
| 13.7 Coefficienti Adimensionali | | 194 |
| 13.8 Convezione Forzata | | 196 |
| 13.9 Analogia del Cono | | 197 |
| 13.10 Punto d'Arresto | | 198 |
| 13.11 Stabilità Laminare | | 201 |
| 14 Aerotermochimica | | 203 |
| 14.1 Avanzamento | | 204 |
| 14.2 Legge di Nerst | | 204 |

Capitolo 1

Introduzione

Sezione 1.1: Inizio

Definizione 1. *La Gasdinamica è una branca della Fluidodinamica che studia il moto e l'evoluzione dei gas.*



Sezione 1.2: i Gas

Definizione 2. *Un gas è uno stato di aggregazione della materia caratterizzato da:*

1. particelle libere di muoversi;
2. non avere volume e forma propria;
3. non vi è restrizione di forze di coesione.

I gas possono quindi essere sia comprimibili che incompressibili.

1.2.2 Libero Cammino Medio

Definizione 6. Si definisce **Libero Cammino Medio** la media distanza tra due urti successivi tra le molecole.

$$l_{mfp} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n} = \frac{m_{molecola}}{\sigma \rho}$$



Figura 1.2: Libero cammino Medio

Definizione 7. Il rapporto tra il Libero Cammino Medio e le dimensioni del sistema è detto **Numero di Knudsen**.

$$Kn = \frac{l_{mfp}}{L} \quad (1.2)$$

1.2.3 Moto di un Gas

In generale il moto di un gas è caratterizzato dal:

1. *Moto macroscopico* del sistema rispetto al baricentro;
2. *Moto microscopico* e le interazioni tra le singole molecole.

Il moto globale è studiato in maniera statistica.

$$V_i = \bar{V} + V'_i$$

per cui il gas distingue il suo moto in:

- Gas in Quietè se $\bar{V} = 0$;
- Gas in Movimento se $V = \bar{V} + V'$.

Sezione 1.3: Teoria Cinetica dei Gas

Proposizione 3. *L'Energia Caotica Traslazionale è egualmente ripartita lungo le tre direzioni.*

$$\frac{1}{2}m(\overline{u'u'} + \overline{v'v'} + \overline{w'w'}) = \frac{3}{2}k_B T \quad (1.4)$$

Definizione 8. *Si definisce la **Velocità di Agitazione Termica** la grandezza:*

$$\frac{1}{2}mv_{at}^2 = \frac{3}{2}k_B T \quad (1.5)$$

di modo che

$$v_{at} = \sqrt{\frac{3RT}{\mathcal{M}}} = \sqrt{3\frac{p}{\rho}}$$

Dimostrazione. Dalla definizione

$$v_{at} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{m\mathcal{N}_A}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mathcal{M}}} \propto \sqrt{T}$$

■

Osservazione 2. *Per $T \rightarrow 0$, $v_{at} \rightarrow 0$.*

Osservazione 3. *La pressione termodinamica è legata alle fluttuazioni molecolari, poichè:*

$$p = \frac{1}{3}\rho(\overline{u'u'} + \overline{v'v'} + \overline{w'w'})$$

Dimostrazione. Si ha che

$$(\overline{u'u'} + \overline{v'v'} + \overline{w'w'}) = 3\frac{R}{\mathcal{M}}T = 3\frac{p}{\rho}$$

da cui

$$p = \frac{1}{3}\rho(\overline{u'u'} + \overline{v'v'} + \overline{w'w'})$$

■

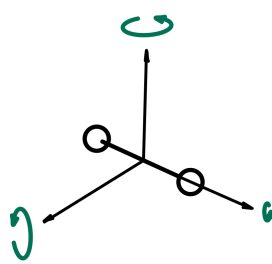
Osservazione 4. *È evidente come la velocità di agitazione termica e la velocità del suono (che verrà introdotta nei capitoli successivi) sono tra loro collegate. Ciò è dato dal fatto che entrambe le velocità sono governate dalle collisioni molecolari che perturbano le molecole.*

$$a = \sqrt{\gamma\frac{p}{\rho}} \qquad v_{at} = \sqrt{3\frac{p}{\rho}}$$

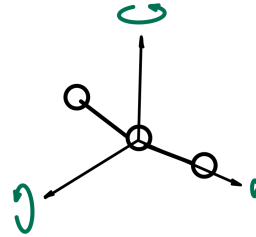
Gradi di Libertà Rotazionali

Un gas biatomico possiede 2 gradi di libertà rotazionali. Allora:

$$\ell = 3 + 2 = 5$$



(a) Gradi di Libertà per molecole Biatomiche (come N_2 e O_2)



(b) Gradi di Libertà per molecole Triatomiche Allineate (come la CO_2)

Proposizione 4. *Ad una molecola compete una energia cinetica dipendente dai gradi di libertà:*

$$\frac{\ell}{2}k_B T$$

che in unità di mole è pari a:

$$\mathcal{N}_A \frac{\ell}{2} k_B T = \frac{\ell}{2} RT = \tilde{c}_v T$$

1.3.2 Energia ed Entalpia

Definizione 10. *Si definiscono:*

1. *l'energia molare di un gas come:*

$$\mathcal{E} = \tilde{c}_v T \quad [\mathcal{E}] = J/mol$$

2. *l'entalpia molare di un gas come:*

$$\mathcal{H} = \epsilon + RT = \tilde{c}_p T \quad [\mathcal{H}] = J/mol$$

Regola di Mayer**Proposizione 5.** *La differenza tra i due calori specifici è pari a:*

$$c_p - c_v = \frac{R}{\mathcal{M}} \quad (1.6)$$

Dimostrazione. dalle definizioni di energia interna ed entalpia:

$$h = e + \frac{R}{\mathcal{M}}T \iff c_p T = \left(c_v + \frac{R}{\mathcal{M}} \right) T$$

da cui

$$c_p - c_v = \frac{R}{\mathcal{M}} > 0$$

■

Osservazione 5. *È vero che:*

$$c_p = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{R}{\mathcal{M}} \quad c_v = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{R}{\mathcal{M}}$$

Dimostrazione. Dividendo per c_v la relazione di Mayer:

$$\frac{c_p}{c_v} - 1 = \frac{1}{c_v} \frac{R}{\mathcal{M}}$$

e

$$\gamma - 1 = \frac{1}{c_v} \frac{R}{\mathcal{M}}$$

per cui

$$c_v = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{R}{\mathcal{M}};$$

Nel caso di

$$c_p = c_v + \frac{R}{\mathcal{M}} = \left(\frac{1}{\gamma - 1} + 1 \right) \frac{R}{\mathcal{M}} = c_p = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{R}{\mathcal{M}}$$

■

Sezione 1.5: Proprietà di Trasporto dei Fluidi

Definizione 16. Si definisce **flusso** di una quantità (massa, quantità di moto, energia) la quantità per unità di superficie e tempo.

$$\Phi(\Lambda) = \frac{\Lambda}{\Delta S \Delta t} \approx \int_n \Lambda v \, dn$$

Quantità di Moto

Proposizione 7. Il trasporto della quantità di moto è mutuato da una costante di proporzionalità. Tale proporzionalità è detta **Viscosità Dinamica**.

$$\mu \approx \rho \ell v_{at}$$

Si associa anche spesso una **Viscosità Cinematica**:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \approx \ell v_{at}$$

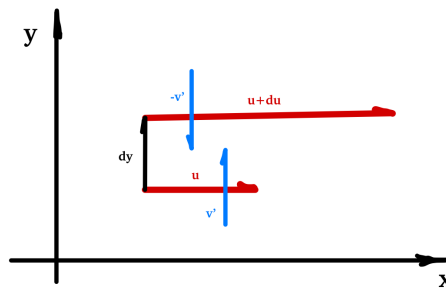


Figura 1.7: Trasporto di Quantità di Moto

Dimostrazione. Supponiamo che sia trasportata della quantità di moto lungo x nella direzione y per il moto caotico:

$$(mu')v'$$

che mediato nel dominio:

$$\Phi(mu') = \int_n (mu')v' \, dn = \overline{\rho u'v'} = -\tau_{xy}$$

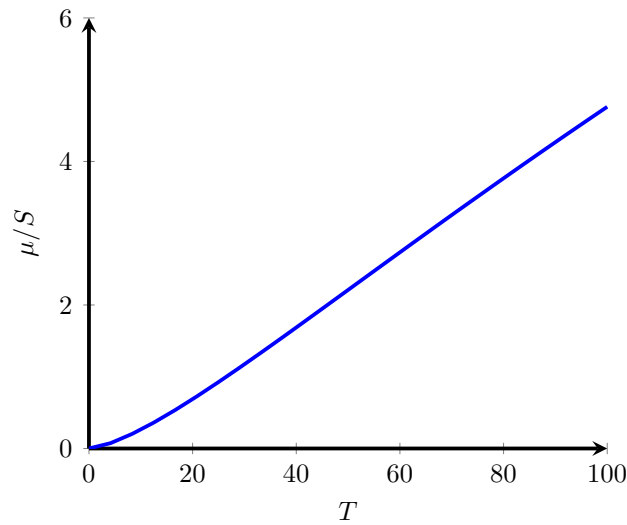


Figura 1.8: Formula di Sutherland

Numero di Reynolds

Definizione 17. Si definisce **Strato Limite** la zona, vicina alla parete, in cui gli sforzi viscosi non sono trascurabili.

$$\frac{\partial u}{\partial n} \gg 1$$

La presenza del gradiente è sintomatica dello sforzo viscoso (e quindi dissipativo) → aumento di entropia. Solitamente si indica lo **Spessore Geometrico**, δ , dello strato limite quell'altezza alla quale il corpo ha raggiunto il 99% della velocità.

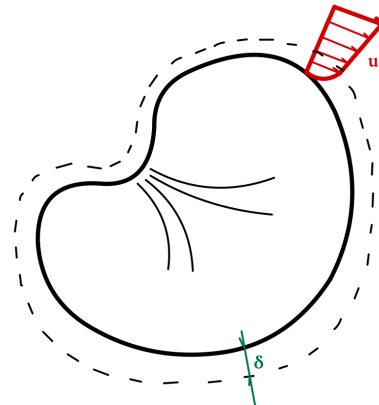


Figura 1.9: Strato limite attorno ad un corpo affusolato

Energia

Proposizione 9. *Il trasporto della energia è mutuato da una costante di proporzionalità. Tale proporzionalità è detta **Conducibilità Termica**.*

$$\lambda \approx \rho \ell v_{at} c_v = \mu c_v$$

Si associa anche spesso una **Diffusività Termica**:

$$\kappa = \frac{\lambda}{\rho} \approx \ell v_{at} c_v = \nu c_v$$

Dimostrazione. Anche in questo caso il flusso di energia lungo la direzione x è pari a

$$\Phi(me) = \int_n m e u' dn = \overline{\rho e u'}$$

Come nel caso precedente tale flusso dipende da un gradiente, più precisamente dal gradiente di temperatura.

Il flusso netto allora è pari a:

$$\Phi_{netto} = \Phi_1 + \Phi_2 = m(e + de)nv_{at} - m e n v_{at} = -m d e n v_{at} \approx -m \frac{de}{dy} n v_{at} \ell = -m c_v \frac{dT}{dy} n v_{at} \ell$$

allora, la costante

$$\lambda = m c_v n v_{at} \ell \approx c_v \mu$$



Numero di Prandtl

Definizione 19. *Si definisce **Strato Limite Termico** la zona, vicina alla parete, in cui avviene la maggior parte dello scambio termico tra corpo e ambiente.*

$$\frac{\partial T}{\partial n} \gg 1$$

La presenza del gradiente in questo caso è derivata dal flusso di calore (dissipativo) → aumento di entropia. Solitamente si indica lo **Spessore Termico**, δ_T , dello strato limite quell'altezza alla quale il corpo ha completato gli scambi termici con l'ambiente.

Definizione 20. *Il rapporto dimensionale tra gli effetti di trasporto dinamico e termico è detto **Numero di Prandtl**.*

$$Pr = \frac{\mu c_p}{\lambda} = \frac{\nu c_p}{\kappa} \tag{1.10}$$

Capitolo 2

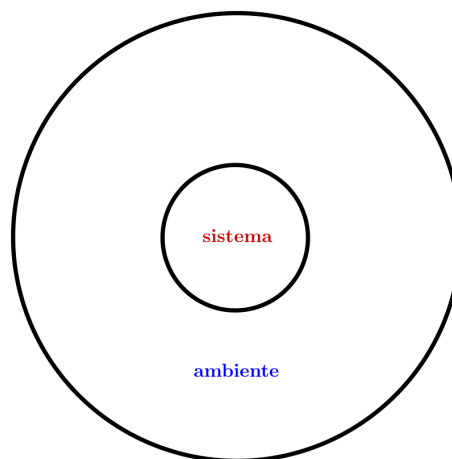
Termodinamica

Definizione 21. *Un sistema termodinamico si dice isolato se per un periodo sufficientemente lungo:*

1. non si trasferisce massa;
2. non si scambia lavoro;
3. non si scambia calore;

Tutte le grandezze termodinamiche sono in equilibrio nel tempo e nello spazio. Sono in condizioni di equilibrio sistemi come ad esempio:

- un gas in quiete;
- una corrente in moto uniforme.



2.1.4 Secondo Principio della Termodinamica

Principio 2. *L'entropia di un sistema isolato lontano dall'equilibrio termico tende ad aumentare nel tempo, finché l'equilibrio non è raggiunto.*

$$ds = \frac{\dot{d}q}{T} + ds_{irrev} \quad ds \geq \frac{\dot{d}q}{T} \quad (2.2)$$

il secondo contributo dipende dalla presenza di fenomeni dissipativi che contribuiscono alla produzione di entropia. Esso è nullo per trasformazioni irreversibili e maggiore di zero in generale.

$$ds_{irrev} \geq 0$$

L'entropia descrive quindi il livello di degradazione dell'energia nel sistema.

Definizione 23. *Una trasformazione si dice **isoentropica** se non scambia calore e il processo è reversibile.*

$$ds = 0$$

Proposizione 10. *L'entropia di un gas ideale è pari a:*

$$s_2 - s_1 = c_v \log \left(\frac{T_2}{T_1} \right) - \frac{R}{\mathcal{M}} \log \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)$$

Dimostrazione. Unendo primo e secondo principio per una trasformazione reversibile:

$$\begin{aligned} Tds &= de + pdv, \\ ds &= c_v \frac{dT}{T} - p \frac{dv}{T} \end{aligned}$$

poichè $pv = \frac{R}{\mathcal{M}}T$, si ha che

$$ds = c_v \frac{dT}{T} - \frac{R}{\mathcal{M}} \frac{dv}{v}$$

ed integrando sotto un unico differenziale si ottiene che:

$$s_2 - s_1 = c_v \log \left(\frac{T_2}{T_1} \right) + \frac{R}{\mathcal{M}} \log v \left(\frac{v_2}{v_1} \right)$$

da cui

$$s_2 - s_1 = c_v \log \left(\frac{T_2}{T_1} \right) - \frac{R}{\mathcal{M}} \log \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)$$

■

Sezione 2.3: Grandezze Totali

Definizione 24. Si definisce **Condizione di Serbatoio (Stagnation Quantity)** un sistema in quiete stazionario, non vi sono effetti dissipativi, non si scambia calore e non si effettua lavoro.

Se il gas evolve senza effetti dissipativi, i processi sono *isoentropici*. Le grandezze in questo contesto prendono il nome di *Grandezze Totali*. Ad esempio l'entalpia totale

Definizione 25. Si definisce *Entalpia Totale* la quantità:

$$c_p T_0 = h_0 = T + \frac{u^2}{2}$$

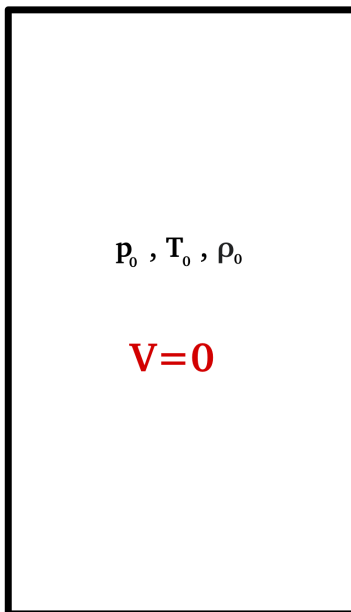


Figura 2.2: Un Serbatoio

Capitolo 3

Equazioni di Bilancio

Sezione 3.1: Inizio

Definizione 26. *Una legge di bilancio descrive la variazione del tempo attraverso un dominio di una grandezza (scalare o vettoriale).*

Esistono varie formulazioni:

1. forma integrale, in cui si sceglie un dominio che prende il nome di *Volume di Controllo* Ω , contornato da un bordo $\partial\Omega$. Il vantaggio è che non si richiede la continuità delle funzioni integrande, quindi **eventuali discontinuità sono tollerabili**.
2. forma differenziale, in cui si osservano le variazioni delle grandezze in tutto lo spazio fisico.
3. forma molecolare in cui si osserva l'evoluzione delle singole molecole e successivamente si mediano le grandezze termodinamiche.

La formulazione di tali leggi può essere:

- *Euleriana* se si ha un volume di controllo *fisso nello spazio*;
- *Lagrangiana* in cui si osservano le evoluzioni delle particelle fluide solidalmente alle particelle.

Definizione 27. *Si definisce **Derivata Lagrangiana** l'operatore:*

$$\frac{DQ}{Dt} = \frac{\partial Q}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla)Q \quad (3.1)$$

3.2.1 Equazioni Integrali

Di seguito si espongono le leggi di conservazione in forma integrale. Si ha la:

1. Legge di *Bilancio di Massa*

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho d\Omega = - \int_{\partial\Omega} \rho(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) d\sigma$$

2. Legge di *Bilancio della Quantità di Moto*

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \mathbf{V} d\Omega = - \int_{\partial\Omega} \rho(\mathbf{V} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) d\sigma + \int_{\partial\Omega} \tilde{\mathbf{\Pi}} \cdot \mathbf{n} d\sigma + \int_{\Omega} \rho \mathbf{f} d\Omega$$

3. Legge di *Bilancio della Energia*

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \left(e + \frac{V^2}{2} \right) d\Omega =$$

$$- \int_{\partial\Omega} \rho \left(e + \frac{V^2}{2} \right) (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) d\sigma + \int_{\partial\Omega} (\tilde{\mathbf{\Pi}} \cdot \mathbf{V}) \cdot \mathbf{n} d\sigma + \int_{\Omega} \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{V} d\Omega - \int_{\partial\Omega} \dot{\mathbf{q}}_{sup} \cdot \mathbf{n} d\sigma + \int_{\Omega} \dot{Q}_{vol} d\Omega$$

in cui ρ è la densità, \mathbf{V} è il campo di velocità del fluido, e è l'energia interna, $\dot{\mathbf{q}}_{sup}$ e \dot{Q}_{vol} i flussi di calore superficiali e volumici, e $\tilde{\mathbf{\Pi}}$ è il tensore degli sforzi, definito come:

$$\tilde{\mathbf{\Pi}} = -p\mathbb{I} + \tilde{\boldsymbol{\tau}}$$

Tale tensore possiede una parte diagonale che rappresenta la pressione e $\tilde{\boldsymbol{\tau}}$ che rappresenta gli *sforzi viscosi*. Il vettore \mathbf{f} rappresenta le forze di volume che agiscono sul fluido.

3.3.1 Forma Euleriana

Nella forma differenziale si ottengono le seguenti equazioni:

1. La legge di *Conservazione della Massa*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \quad (3.3)$$

2. La legge di *Conservazione della Quantità di Moto*

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{V})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V} \mathbf{V}) = -\nabla p + \nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}} + \rho \mathbf{f} \quad (3.4)$$

3. La legge di *Conservazione dell'Energia*

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \left(e + \frac{V^2}{2} \right) \right) + \nabla \cdot \left(\rho \left(e + \frac{V^2}{2} \right) \mathbf{V} \right) = -\nabla \cdot (\tilde{\boldsymbol{\Pi}} \cdot \mathbf{V}) + \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{V} - \nabla \cdot \dot{\mathbf{q}}_{sup} + \dot{Q}_{vol} \quad (3.5)$$

3.3.2 Forma Lagrangiana

Nella forma Lagrangiana si hanno le seguenti relazioni:

1. La legge di *Conservazione della Massa*

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{V} \quad (3.6)$$

2. La legge di *Conservazione della Quantità di Moto*

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{\tau}} + \rho \mathbf{f} \quad (3.7)$$

3. La legge di *Conservazione dell'Energia*

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(e + \frac{V^2}{2} \right) + = -\nabla \cdot (\tilde{\boldsymbol{\Pi}} \cdot \mathbf{V}) + \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{V} - \nabla \cdot \dot{\mathbf{q}}_{sup} + \dot{Q}_{vol} \quad (3.8)$$

Sezione 3.4: Conservazione dell'Entalpia

Proposizione 13. *Un flusso inviscido, non conduttore, in stato stazionario e senza forze di volume f conserva la propria entalpia totale.*

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(h + \frac{V^2}{2} \right) = 0$$

quindi, lungo una linea di corrente

$$h + \frac{V^2}{2} = h_0 = \text{cost.}$$

Proposizione 14. *La temperatura totale può essere scritta come:*

$$T_0 = T \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)$$

Dimostrazione. Poichè

$$c_p T_0 = c_p T + \frac{V^2}{2} = c_p T \left(1 + \frac{1}{2} \frac{V^2}{c_p T} \right)$$

dalla definizione del c_p

$$\frac{1}{2} \frac{V^2}{c_p T} = \frac{1}{2} \frac{V^2}{\frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{R}{M} T} = \frac{\gamma - 1}{2} \frac{V^2}{a^2} = \frac{\gamma - 1}{2} M^2$$

e quindi

$$T_0 = T \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)$$

■

Proposizione 15. *Similmente è possibile scrivere*

$$\frac{a^2}{\gamma - 1} + \frac{V^2}{2} = \frac{a_0^2}{\gamma - 1}$$

Dimostrazione. Si può osservare come:

$$\frac{a^2}{\gamma - 1} = \frac{\gamma \frac{R}{M} T}{\gamma - 1} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{R}{M} T = c_p T$$

allora la velocità del suono totale sarà:

$$\frac{a_0^2}{\gamma - 1} = c_p T_0$$

3.4. CONSERVAZIONE DELL'ENTALPIA 31 CAPITOLO 3. EQUAZIONI DI BILANCIO

3.4.1 Velocità Notevoli

Definizione 28. Si definisce **Velocità Limite** quella che si raggiunge quando la temperatura è pari a 0. Allora

$$\frac{V_{lim}^2}{2} = \frac{a^2}{\gamma - 1} + \frac{V^2}{2} = \frac{a_0^2}{\gamma - 1} \iff V_{lim}^2 = a_0^2 \left(\frac{2}{\gamma - 1} \right)$$

Osservazione 7. In queste condizioni la velocità del suono tende a 0, mentre $M \rightarrow +\infty$.

Definizione 29. Si definisce **Velocità Critica** quella che si raggiungerebbe quando la corrente raggiunge il valore sonico. Allora

$$\frac{a^{*2}}{2} = \frac{a^2}{\gamma - 1} + \frac{V^2}{2} = \frac{a^2}{\gamma - 1} + \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{2} \left(\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \right) \iff a^{*2} = a^2 \left(\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \right)$$

Definizione 30. Si definisce il **Numero di Mach Star** M^* il rapporto tra la velocità effettiva del flusso e la velocità critica.

$$M^* = \frac{V}{a^*}$$

Proposizione 16. Il rapporto tra i due Mach è il seguente:

$$M^{*2} = \frac{2(\gamma + 1)M^2}{2 + M^2(\gamma - 1)}$$

Dimostrazione. Partendo da:

$$\frac{a^2}{\gamma - 1} + \frac{V^2}{2} = \frac{a^{*2}}{2} \left(\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \right)$$

e dividendo per V^2 si ottiene

$$\frac{1}{\gamma - 1} \frac{1}{M^2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \right) \frac{1}{M^{*2}}$$

da cui, ricavando per Mach Star

$$M^{*2} = \frac{2(\gamma + 1)M^2}{2 + M^2(\gamma - 1)}$$

■

3.4. CONSERVAZIONE DELL'ENTALPIA 33 CAPITOLO 3. EQUAZIONI DI BILANCIO

3.4.2 Teorema di Crocco

Teorema 1. *I un flusso inviscido, adiabatico e isoentropico in cui non agiscono forze di volume \mathbf{f} , il campo di velocità è legato all'entropia mediante:*

$$T\nabla s = \nabla H - \mathbf{V} \times (\nabla \times \mathbf{V}) + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} \quad (3.9)$$

Dimostrazione. Dal Primo e Secondo Principio,

$$Tds = dh - vdp = dh - \frac{1}{\rho} dp$$

dal Teorema del Gradiente-Differenziale, si trasformano i differenziali in gradienti, di modo che

$$T\nabla s = \nabla h - \frac{\nabla p}{\rho} = \nabla h + \frac{D\mathbf{V}}{Dt}$$

Preso allora l'entalpia totale $H = h + \frac{V^2}{2}$,

$$\nabla h = \nabla H - \nabla \left(\frac{V^2}{2} \right)$$

e quindi

$$T\nabla s = \nabla H - \nabla \left(\frac{V^2}{2} \right) + \frac{D\mathbf{V}}{Dt}$$

Dall'identità vettoriale:

$$\mathbf{V} \times (\nabla \times \mathbf{V}) = \nabla \left(\frac{V^2}{2} \right) - (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V}$$

allora

$$T\nabla s = \nabla H - \mathbf{V} \times (\nabla \times \mathbf{V}) + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}$$

■

In stato stazionario,

$$T\nabla s = \nabla H - \mathbf{V} \times (\nabla \times \mathbf{V})$$

quindi è possibile vedere come le fonti di "rotazionalità" del campo di velocità sono i gradienti di entropia e di entalpia.

FOCUS 2. *Legge di Stevino*
Per un fluido in quiete

$$\begin{aligned}\nabla p &= \rho \mathbf{f}, \\ p &= p_0 + \rho \mathcal{F}(\mathbf{x})\end{aligned}$$

in cui $\mathcal{F}(\mathbf{x}) : \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \nabla \mathcal{F}(\mathbf{x})$ è il potenziale della forza di volume, supponendo che quest'ultima sia conservativa.

3.5.1 Teorema di Bernoulli

Prima di giungere al Teorema di Bernoulli, formulato per la prima volta per un flusso incompressibile, è conveniente ricavare la Legge di Eulero (o Teorema di Eulero per i flussi) ricavata nel 1753 da Eulero.

Teorema 2. *In stato stazionario, in assenza di forze di volume \mathbf{f} , alle variazioni di pressione corrispondono variazioni di velocità secondo*

$$\rho V dV = -dp \tag{3.13}$$

Dimostrazione. Dalla **CONS-QDM**,

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \rho (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\nabla p + \rho \mathbf{f}$$

e ricordando l'identità vettoriale,

$$(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = \nabla \left(\frac{V^2}{2} \right) - \mathbf{V} \times (\nabla \times \mathbf{V}).$$

Supponendo che il flusso sia irrotazionale, ossia $\nabla \times \mathbf{V} = 0$ si ha che

$$\rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \rho \nabla \left(\frac{V^2}{2} \right) = -\nabla p + \rho \mathbf{f}$$

Se il flusso è stazionario, e non vi sono forze di pressione

$$\rho \nabla \left(\frac{V^2}{2} \right) = \rho V \nabla V = -\nabla p.$$

Dal Teorema Gradiente-Differenziale, riportando il sistema in forma differenziale,

$$\rho V dV = -dp$$

■

Sezione 3.6: Potenziale della Velocità

Definizione 32. Dato un campo di velocità irrotazionale, si definisce **Potenziale della Velocità**, definita come:

$$\mathbf{V} = \nabla\phi$$

che in componenti è

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \phi_x = u \qquad \frac{\partial\phi}{\partial y} = \phi_y = v \qquad \frac{\partial\phi}{\partial z} = \phi_z = w \qquad (3.15)$$

Proposizione 17. Se il flusso è potenziale e stazionario, è possibile esprimere l'intero sistema in funzione del solo potenziale. Si ha che:

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{\phi_x^2}{a^2}\right)\phi_{xx} + \left(1 - \frac{\phi_y^2}{a^2}\right)\phi_{yy} + \left(1 - \frac{\phi_z^2}{a^2}\right)\phi_{zz} \\ & - 2\frac{\phi_x\phi_y}{a^2}\phi_{xy} - 2\frac{\phi_x\phi_z}{a^2}\phi_{xz} - 2\frac{\phi_y\phi_z}{a^2}\phi_{yz} = 0 \end{aligned}$$

in cui

$$a^2 = a_0^2 - \frac{\gamma-1}{2}(\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2)$$

Dimostrazione. Per la **CONS-MASS**

$$\rho(\phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz}) + \phi_x \frac{\partial\rho}{\partial x} + \phi_y \frac{\partial\rho}{\partial y} + \phi_z \frac{\partial\rho}{\partial z} = 0,$$

e dalla **CONS-QDM**

$$dp = -\rho d\left(\frac{\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2}{2}\right)$$

ma la velocità del suono restituisce, ad entropia costante,

$$dp = a^2 d\rho$$

sicchè

$$d\rho = -\frac{\rho}{a^2} d\left(\frac{\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2}{2}\right)$$

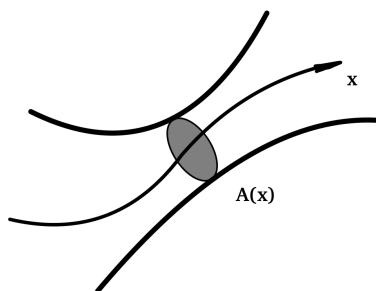
ad esempio, lungo la componente x,

$$\frac{\partial\rho}{\partial x} = -\frac{\rho}{a^2} (\phi_{xx}\phi_x + \phi_{xy}\phi_y + \phi_{xz}\phi_z)$$

Capitolo 4

Flussi Unidimensionali

Definizione 33. Per **Flusso Unidimensionale** si intende un flusso in cui le quantità dipendono da un'unica coordinata curvilinea.



Talvolta si definiscono i flussi **Quasi-Unidimensionali** quelli per cui variano debolmente le quantità con la coordinata curvilinea. Essi rispettano le seguenti assunzioni:

1. Vi sono graduali variazioni di area;
2. Il raggio di curvatura è grande rispetto alle dimensioni del sistema (non vi sono spigoli).

Figura 4.1: Flusso Quasi-Unidimensionale

il set di equazioni si riduce quindi a:

$$\begin{cases} \rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 \\ p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2 \\ c_p T_{01} + q = c_p T_{02} \end{cases} \quad (4.7)$$

da cui,

$$dp + a^2 d\rho + 2\rho a da = 0$$

e quindi,

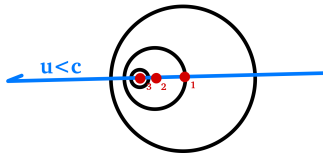
$$\frac{\partial a}{\partial \rho} = -\frac{1}{2\rho a} \frac{\partial p}{\partial \rho} - \frac{a}{2\rho}$$

Eguagliando quindi le due formule:

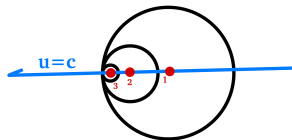
$$\frac{1}{2\rho a} \frac{\partial p}{\partial \rho} + \frac{a}{2\rho} = \frac{a}{\rho}$$

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} = 2a^2 - a^2 = a^2$$

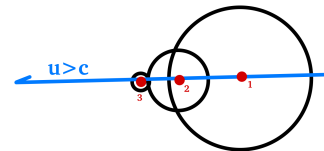
■



(a) Trasporto delle Onde Subsoniche ($M < 1$)



(b) Trasporto delle Onde Soniche ($M = 1$)



(c) Trasporto delle Onde Super-Soniche ($M > 1$)

Proposizione 20. Per un gas ideale la velocità del suono è:

$$a = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}} = \sqrt{\gamma \frac{R}{M} T}$$

Dimostrazione. Poichè la trasformazione è isoentropica:

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \text{cost.} = A$$

$$p = A\rho^\gamma$$

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} = \gamma A\rho^{\gamma-1} = \gamma \frac{p}{\rho}$$

e quindi

$$a = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}} = \sqrt{\gamma \frac{R}{M} T}$$

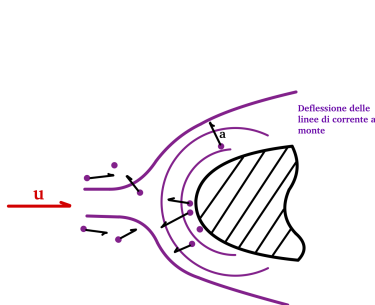
■

il rapporto tra questi due lati del triangolo restituisce il seno dell'angolo:

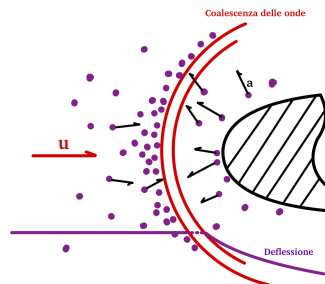
$$\sin\mu = \frac{\Delta x}{r} = \frac{a}{u} = \frac{1}{M}$$

■

Un secondo esempio è l'arrivo del **flusso su un corpo affusolato**. Supponendo il flusso subsonico, la velocità del flusso è inferiore a quella di agitazione termica (grossomodo pari alla velocità del suono). In questo modo il corpo fa sentire il suo effetto "prima" poichè le particelle riflesse dal corpo arrivano su quelle vicine, deviandole da questo. Se invece il flusso è sonico, le particelle trovano una *coalescenza* tra la velocità del corpo e le onde che si stanno propagando in prossimità di una determinata posizione in prossimità del corpo.



(a) Flusso Subsonico in prossimità di un Corpo Affusolato



(b) Flusso Sonico in prossimità di un Corpo Affusolato

sia all'inizio che alla fine. Poiché $T_0 = \text{cost.}$ e a^* è la stessa allora

$$\frac{T_0}{T_1^*} = \frac{T_0}{T_2^*} \iff T_1^* = T_2^*$$

Sostituendo quindi questa relazione,

$$u_2 - u_1 = - \left(\frac{a^{*2}}{2}(\gamma + 1) + \frac{u_2^2}{2}(\gamma - 1) \right) \frac{1}{\gamma u_2} + \left(\frac{a^{*2}}{2}(\gamma + 1) - \frac{u_1^2}{2}(\gamma - 1) \right) \frac{1}{\gamma u_1}$$

Raccogliendo quindi,

$$u_2 - u_1 = \frac{\gamma + 1}{2\gamma} a^{*2} \left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2} \right) + \frac{\gamma - 1}{2\gamma} (u_2 - u_1)$$

$$u_2 - u_1 = \frac{\gamma + 1}{2\gamma u_2 u_1} a^{*2} (u_2 - u_1) + \frac{\gamma - 1}{2\gamma} (u_2 - u_1),$$

$$1 = \frac{\gamma + 1}{2\gamma u_2 u_1} a^{*2} + \frac{\gamma - 1}{2\gamma},$$

$$\frac{a^{*2}}{u_1 u_2} = \left(1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \right) \frac{2\gamma}{\gamma + 1} = 1$$

per cui

$$a^{*2} = u_2 u_1$$

■

Si hanno diverse casistiche:

- $u_1 < a^*$: nel punto 2 si andrebbe ad avere una velocità maggiore di a^* . Non è una condizione fisicamente accettabile;
- $u_1 > a^*$: nel punto 2 si andrebbe ad avere una velocità minore di a^* . Viene dissipata molta energia cinetica. È una condizione fisicamente accettabile;

Quindi affinché si realizzi un urto retto è necessario che la velocità a monte sia supersonica. La condizione necessaria affinché l'urto si formi è che la **corrente sia localmente supersonica** perchè si possa formare un urto retto.

È possibile osservare dal grafico che:

- per $M_1 \rightarrow +\infty$ si ha

$$M_2 \rightarrow \sqrt{\frac{\gamma - 1}{2\gamma}};$$

- per $M_1 \rightarrow 1^+$ si ha $M_2 \rightarrow 1^+$ (urto evanescente).

4.2.4 Relazioni di Rankine-Hugoniot

Proposizione 24. Sono vere le seguenti relazioni tra pressione e densità.

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{\rho_2}{\rho_1} - 1}{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} - \frac{\rho_2}{\rho_1}} \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{p_2}{p_1} - 1}{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} - \frac{p_2}{p_1}}$$

Dimostrazione. Si fa il rapporto tra **CONS-QDMe** **CONS-MASS**,

$$u_2 - u_1 = -\frac{p_2}{\rho_2 u_2} + \frac{p_1}{\rho_1 u_1}.$$

Moltiplicando per $u_2 + u_1$ si ha,

$$u_2^2 - u_1^2 = \left(-\frac{p_2}{\rho_2 u_2} + \frac{p_1}{\rho_1 u_1}\right)(u_2 + u_1) = -\left(\frac{p_2 u_1}{\rho_2 u_2} - \frac{p_1}{\rho_1}\right) + \left(\frac{p_1 u_2}{\rho_1 u_1} - \frac{p_2}{\rho_2}\right)$$

È facile osservare come, ad esempio

$$\frac{p_2 u_1}{\rho_2 u_2} = \frac{p_2 u_1}{\rho_2 u_2} \frac{\rho_1}{\rho_1} = \frac{p_2}{\rho_1}$$

per cui

$$u_2^2 - u_1^2 = (p_1 - p_2) \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right)$$

Analogamente, dalla **CONS-ENG**,

$$c_p T_1 + \frac{u_1^2}{2} = c_p T_2 + \frac{u_2^2}{2}$$

ove

$$c_p T = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{R}{M} T = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho}$$

4.2.5 Rapporti tra Grandezze Omogenee

Proposizione 25. *Definito il problema dell'Urto Retto, è possibile definire le seguenti grandezze termodinamiche:*

1. la **Densità**:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma + 1)M_1^2}{2 + M_1^2(\gamma - 1)}$$

2. la **Pressione**:

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1}(M_1^2 - 1)$$

3. la **Temperatura**:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2 \rho_1}{p_1 \rho_2} = \left(1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1}(M_1^2 - 1)\right) \left(\frac{2 + M_1^2(\gamma - 1)}{(\gamma + 1)M_1^2}\right)$$

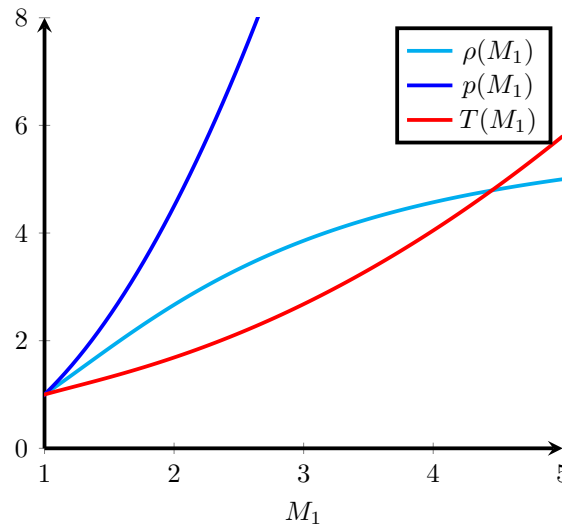


Figura 4.11: Densità, Pressione e Temperatura rispetto al Mach di Ingresso

Dimostrazione. Dalla **CONS-MASS**,

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{u_1^2}{u_1 u_2} = \frac{u_1^2}{a^{*2}} = M_1^{*2}$$

e dalla relazione $M - M^*$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma + 1)M_1^2}{2 + M_1^2(\gamma - 1)}$$

■

4.2.6 Considerazioni Isoentropiche

Osservazione 13. Ricavate le grandezze dopo l'urto si può valutare l'entropia.

Dimostrazione. Dalla Variazione di Entropia:

$$s_2 - s_1 = c_p \log \left(\frac{T_2}{T_1} \right) - \frac{R}{\mathcal{M}} \log \left(\frac{p_2}{p_1} \right) = c_v \log \left(\frac{p_2}{p_1} \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^\gamma \right)$$

Poichè la variazione di entropia è pari alla variazione di entropia totale,

$$s_2 - s_1 = s_{02} - s_{01} = c_p \log \left(\frac{T_{02}}{T_{01}} \right) - \frac{R}{\mathcal{M}} \log \left(\frac{p_{02}}{p_{01}} \right) = -\frac{R}{\mathcal{M}} \log \left(\frac{p_{02}}{p_{01}} \right)$$

in cui

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{p_2}{p_1} \left(\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

in cui $M_2 = f(M_1)$; da cui, sostituendo,

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \left(1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_1^2 - 1) \right)^{-\frac{1}{\gamma-1}} \left(\frac{(\gamma+1)M_1^2}{2 + M_1^2(\gamma-1)} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

Oppure,

$$s_2 - s_1 = c_v \log \left(\frac{p_2}{p_1} \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^\gamma \right) = c_v \log \left(\left(1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_1^2 - 1) \right) \left(\frac{2 + M_1^2(\gamma-1)}{(\gamma+1)M_1^2} \right)^\gamma \right)$$

■

Proposizione 26. Le grandezze totali sono dunque:

1. la **Temperatura Totale:**

$$\frac{T_{02}}{T_{01}} = 1$$

2. la **Pressione Totale:**

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \left(1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_1^2 - 1) \right)^{-\frac{1}{\gamma-1}} \left(\frac{(\gamma+1)M_1^2}{2 + M_1^2(\gamma-1)} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

3. la **Densità Totale:**

$$\frac{\rho_{02}}{\rho_{01}} = \frac{p_{01} T_{02}}{p_{02} T_{01}} = \frac{p_{01}}{p_{02}} = \left(1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_1^2 - 1) \right)^{+\frac{1}{\gamma-1}} \left(\frac{(\gamma+1)M_1^2}{2 + M_1^2(\gamma-1)} \right)^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

Sezione 4.3: Flusso di Rayleigh

Il problema noto come *Flusso di Rayleigh* è un flusso in un condotto unidimensionale in cui viene fornito calore.

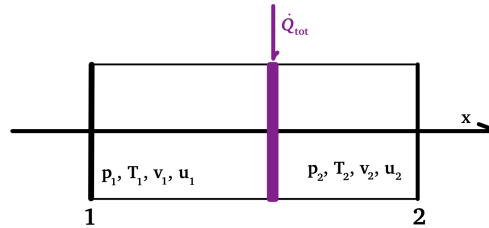


Figura 4.13: Flusso di Rayleigh

4.3.1 Rapporti tra Grandezze Omogenee

Proposizione 27. *Tutti i rapporti tra grandezze omogenee dipende da M_1 e M_2 .*

Si ha infatti che

1. la **Pressione** è:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2}$$

2. la **Temperatura** è:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1} \frac{M_2}{M_1} \right)^2 = \left(\frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} \right)^2 \left(\frac{M_2}{M_1} \right)^2$$

3. la **Densità** è:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{p_2}{p_1} \frac{T_1}{T_2}$$

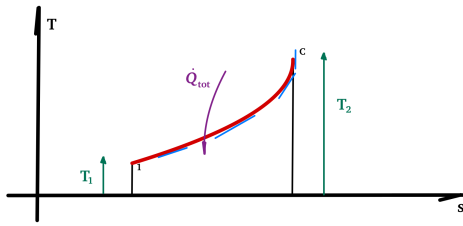
4. la **Pressione Totale** è:

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} \left(\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

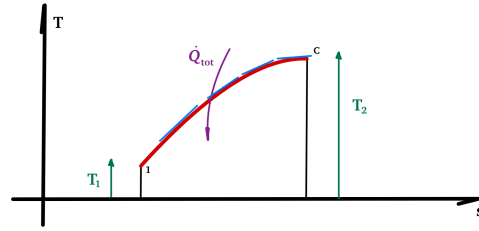
Temperature Totali

$$\frac{T_{02}}{T_{01}} = \frac{T_2}{T_1} \left(\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2} \right) = \left(\frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} \right)^2 \left(\frac{M_2}{M_1} \right)^2 \left(\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2} \right)$$

■



(a) Flusso di Rayleigh Supersonico $M > 1$



(b) Flusso di Rayleigh Subsonico $M < 1$

4.3.3 Problema Diretto

Nel **problema diretto** si ricava il Mach di uscita in maniera iterativa.

Spiegazione 2. Schematicamente,

$$T_{01} \oplus \dot{Q}_{tot} \rightarrow T_{02}$$

dalla **CONS-ENG**. E quindi si ricava il rapporto

$$\frac{T_{02}}{T_{01}} = g(M_1, M_2)$$

da cui si ricava il M_2 in maniera iterativa (no buono :/).

A questo punto, conoscendo i due Mach si possono ricavare i rapporti di temperatura, pressione e densità visti precedentemente.

4.3.5 Condotto Virtuale

Si suppone di avere un condotto con $M_1 > 1$ e M_2 , $M_1 > M_2$ poichè vi si è fornito un calore $q < q^*$ (in cui la condizione critica dipende solo dal M_1). Per studiare tale condotto si utilizza un **primo condotto virtuale** in cui è fornito q^* e quindi $M_2' = 1$ (per condizione di choking). Oppure si aggiunge al termine del condotto reale un **secondo condotto virtuale** in cui a seguito del M_2 vi è una fornitura di calore che rende $M_2'' = 1$. Risulta quindi evidente come le condizioni di choking, ossia quelle critiche, siano solo funzione delle condizioni di ingresso. Si generalizza allora questo concetto immaginando una generica stazione con un M e, fornito un flusso di calore q^* si ottengono le condizioni critiche in uscita. Le grandezze di uscita quindi dipendono solo dal Mach di ingresso.

Questo spiega l'utilizzo del *Problema Critico (o Inverso)* visto nel capitolo precedente.

$$\frac{f}{f^*} = g(M)$$

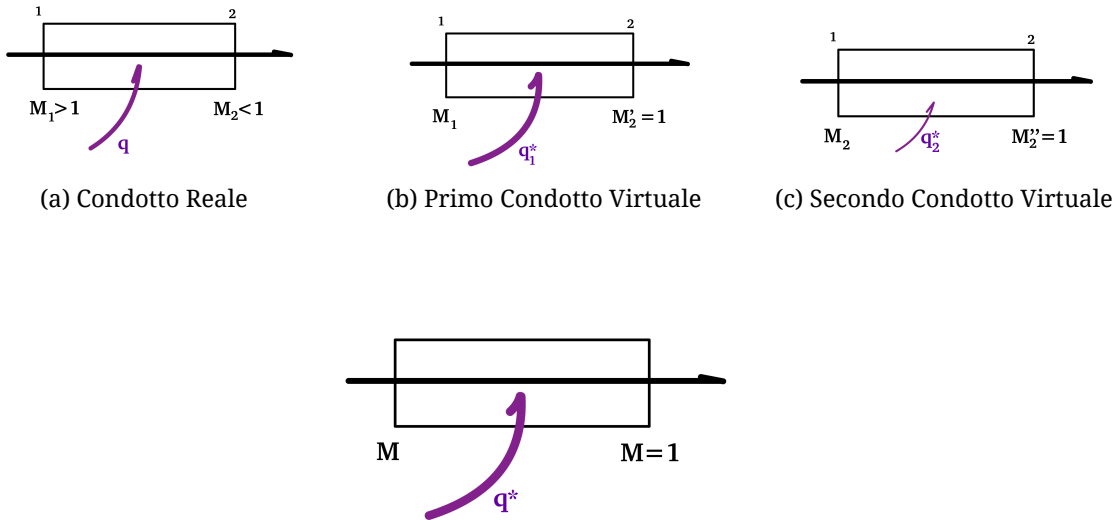


Figura 4.16: Condotto Virtuale Generalizzato

$$T_{01}^* = T_{02}^* = T_0^* = T_{01}(M_1) \left(\frac{T_0}{T_0^*} \right)_1^{-1}$$



e quindi in forma differenziale

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{4}{d}\tau_w$$

Definito il coefficiente λ ,

$$\lambda = \frac{\frac{\partial p}{\partial x}}{\frac{1}{2}\rho_{medio}U^2d} = -\frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho_{medio}U^2} = -4C_f$$

Se invece il flusso è Comprimibile:

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} - \tau \frac{4}{d} = -\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{4}{d} \left(\frac{1}{2}\rho u^2 C_f \right)$$

allora,

$$\frac{4C_f}{d} = \frac{2}{\gamma M^2} (1 - M^2) \left(1 + \frac{1}{2}(\gamma - 1)M^2 \right)^{-1} \frac{1}{M} \frac{\partial M}{\partial x}$$

integrando tra $(0, L)$

$$\frac{4}{d} \int_0^L C_f dx = \left(-\frac{2}{\gamma M^2} - \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \log \left(\frac{M^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2} \right) \right) \Big|_{M_1}^{M_2}$$

■

4.4.1 Rapporti Tra Grandezze Omogenee

Proposizione 32. *Tutti i rapporti tra le grandezze omogenee sono dipendenti dal Mach di Ingresso e dal Mach di Uscita.*

1. la **Pressione** è:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{M_1}{M_2} \left(\frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2}{2 + (\gamma - 1)M_2^2} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

2. la **Temperatura** è:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2}{2 + (\gamma - 1)M_2^2}$$

3. la **Densità** è:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{M_1}{M_2} \left(\frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2}{2 + (\gamma - 1)M_2^2} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

4. la **Pressione Totale** è:

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{M_1}{M_2} \left(\frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2}{2 + (\gamma - 1)M_2^2} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

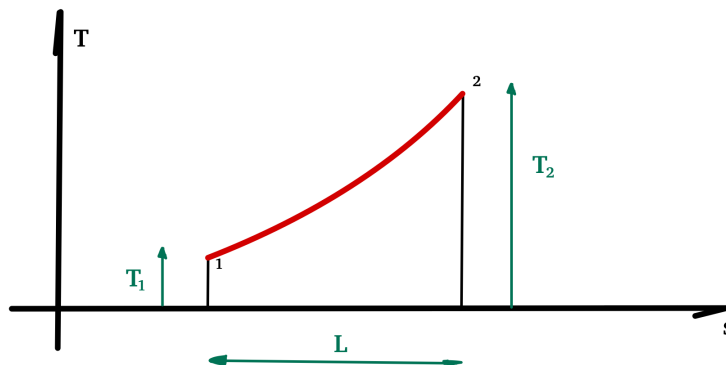


Figura 4.19: Grafico del Flusso di Fanno

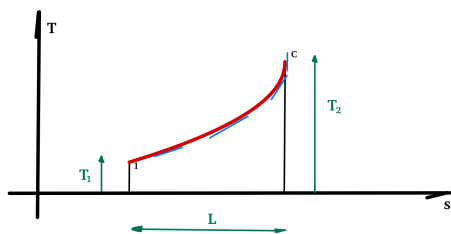
4.4.2 Derivate del Flusso

Proposizione 33. *Come per il caso precedente, le derivate che descrivono il Flusso di Fanno sono:*

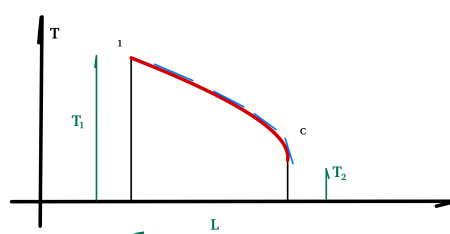
$$\frac{dT}{ds} = \frac{T}{c_p} \frac{\gamma M^2}{M^2 - 1} \qquad \frac{du}{ds} = -\frac{T}{u} \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{M^2}{M^2 - 1}$$

Anche in questo caso quindi si individuano diverse casistiche in base all'ingresso.

- $M_1 > 1$: la velocità si riduce lungo il condotto, la Temperatura cresce (curva crescente). Anche in questo caso esiste una lunghezza critica L^* per cui la derivata della Temperatura tende ad infinito.
- $M_1 < 1$: la velocità aumenta lungo il condotto mentre la temperatura decresce (curva decrescente). Anche in questo caso esiste una lunghezza critica L^* in cui la derivata tende a meno infinito.



(a) Flusso di Fanno Supersonico



(b) Flusso di Fanno Subsonico

4.4.4 Condotto Fittizio

Si suppone di avere un condotto con $M_1 < 1$ e $M_2 < 1$, $M_1 < M_2$ con una lunghezza $L < L^*$. Per studiare tale condotto si utilizza un **primo condotto fittizio** in cui si ha una lunghezza L_1^* e quindi $M_2' = 1$ (per condizione di choking). Oppure si aggiunge al termine del condotto reale un **secondo condotto fittizio** in cui a seguito del $M_2 < 1$ vi è una lunghezza L_2^* che rende $M_2'' = 1$. Risulta quindi evidente come le condizioni di choking, ossia quelle critiche, siano solo funzione delle condizioni di ingresso. Si generalizza allora questo concetto immaginando una generica stazione con un M e, determinata la lunghezza L^* si ottengono le condizioni critiche in uscita. Le grandezze di uscita quindi dipendono solo dal Mach di ingresso.

Questo spiega l'utilizzo del *Problema Critico (o Inverso)* visto nel capitolo precedente.

$$\frac{f}{f^*} = g(M)$$

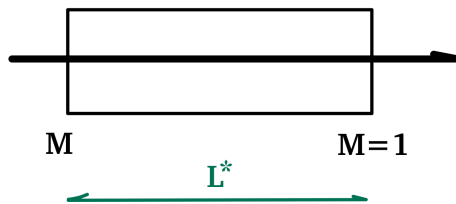
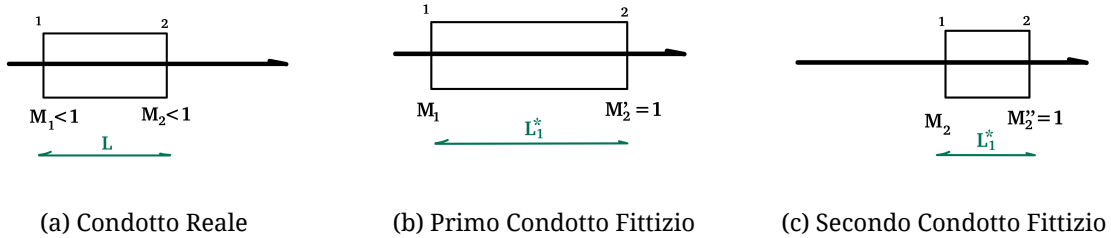


Figura 4.22: Condotto Fittizio Generalizzato

Osservazione 18. Schematicamente è facile osservare come:

$$L^* = L_1^* - L_2^*$$

Similmente al Rapporto tra le lunghezze è possibile scrivere la stessa relazione per i gruppi adimensionali.

Spiegazione 5. Come prima,

$$L^* = L_1^* - L_2^*$$

allora, supponendo circa costante il coefficiente di attrito medio, è vero che

$$\left(\frac{4L^* \overline{C_f}}{d}\right) = \left(\frac{4L^* \overline{C_f}}{d}\right)_1 - \left(\frac{4L^* \overline{C_f}}{d}\right)_2$$

da questa relazione si ricava

$$\left(\frac{4L^* \overline{C_f}}{d}\right)_2$$

noto tale valore è possibile conoscere M_2 corrispondente e quindi è possibile scrivere,

$$\frac{f_2}{f^*} = g(M_2)$$

In presenza di una corrente che lambisce una parete si sviluppa lo *strato limite* che cresce man mano che si penetra nel condotto. La sezione effettiva si erode via via, e quindi il flusso subsonico accelera sin tanto che non si arriva al valore sonico, mentre il flusso supersonico decelera (l'attrito genera un condotto "convergente").

Osservazione 20. Una buona progettazione che prevede una velocità costante prevede un condotto geometrico leggermente divergente (in modo da contrastare questi effetti).

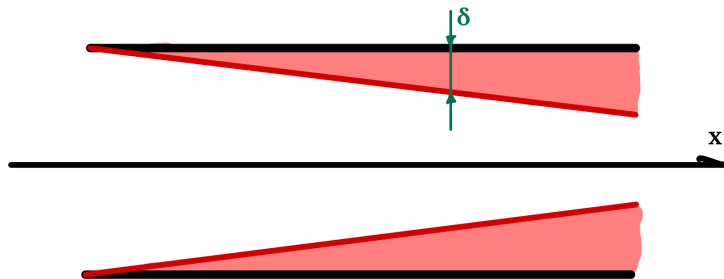


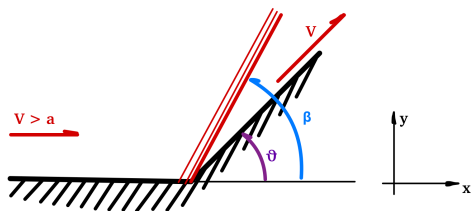
Figura 4.24: Rapporto tra Sezione Geometrica e Gasdinamica

Capitolo 5

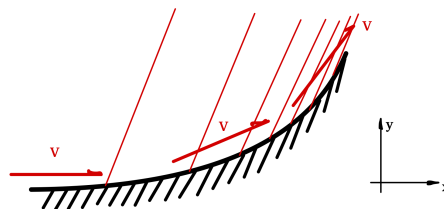
Urti Obliqui

Sezione 5.1: Inizio

Definizione 36. *In presenza di una parete che presenta una **deflessione** ϑ verso la direzione di provenienza della corrente il flusso che lambisce tale parete genera un **urto obliquo** inclinato di una **inclinazione** β attraverso cui avvengono drastiche variazioni finite delle proprietà el fluido.*



(a) Urto Obliquo su uno spigolo



(b) Onde di Pressione su Curvatura

Nel caso di corrente su una parete curva con continuità si formano onde di compressione che man mano convergono a formare un'onda d'urto obliqua.

Proposizione 34. *Definito il sistema di riferimento in figura, è facile osservare che sono valide le seguenti equazioni:*

$$\begin{cases} \rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 \\ p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2 \end{cases} \quad (5.1)$$

Dimostrazione. Si sceglie il volume di controllo Ω come in figura.

Dalla **CONS-MASS**,

$$\int_{\partial\Omega} \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} d\sigma = 0$$

e quindi

$$\rho_1(-u_1)A_a + \rho_2(+u_2)A_d + \rho_1(-w_1)A_f + \rho_2(+w_1)A_b + \rho_2(-w_2)A_e + \rho_2(+w_2)A_c = 0,$$

con $A_a = A_d$, $A_e = A_c$, $A_f = A_b$ e quindi

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2$$

L'equazione è simile a quella dell'Urto Retto.

Dalla **CONS-QDM** invece, proiettandola lungo la direzione \mathbf{N} ,

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \rho \mathbf{V} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} d\sigma &= - \int_{\partial\Omega} p \mathbf{n} d\sigma, \\ \int_{\partial\Omega} \rho u \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} d\sigma &= - \int_{\partial\Omega} p \mathbf{n} \cdot \mathbf{N} d\sigma, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho_1 u_1(-u_1)A_a + \rho_2 u_2(+u_2)A_d + \rho_1 u_1(-w_1)A_f + \rho_1 u_1(+w_1)A_b + \rho_2 u_2(-w_2)A_e + \rho_2 u_2(+w_2)A_c = \\ -(-p_1 A_a + p_2 A_d) \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} (-\rho_1 u_1)u_1 + (\rho_2 u_2)u_2 &= p_1 - p_2, \\ p_1 + \rho_1 u_1^2 &= p_2 + \rho_2 u_2^2 \end{aligned}$$

esattamente come per il moto unidimensionale. Attraverso l'urto obliquo è costante l'impulso. ■

$$\frac{p_1}{\rho_1} + e_1 + \frac{V_1^2}{2} = \frac{p_2}{\rho_2} + e_2 + \frac{V_2^2}{2}$$

od anche

$$h_1 + \frac{V_1^2}{2} = h_2 + \frac{V_2^2}{2}$$

in altre parole L'Entalpia Totale si conserva.

Nota Bene: in oltre che, poichè:

$$V^2 = u^2 + w^2$$

ma allora, poichè $w_1 = w_2$,

$$h_1 + \frac{u_1^2}{2} = h_2 + \frac{u_2^2}{2}$$

■

Il set di equazioni corrisponde quindi a quelle di un urto retto. Si può pensare all'urto retto come ad un caso particolare di un urto obliquo, o viceversa, un urto obliquo è un urto retto inclinato di un angolo β .

$$\begin{cases} \rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 \\ \rho_1 u_1^2 = \rho_2 u_2^2 \\ w_1 = w_2 \\ h_1 + \frac{u_1^2}{2} = h_2 + \frac{u_2^2}{2} \end{cases} \quad (5.2)$$

5.1.2 Relazione Theta-Beta-Mach

Proposizione 37. *La relazione tra i numeri di Mach è ancora valida anche per l'urto obliquo. Ovviamente al Mach si sostituisce il Mach Normale.*

$$M_2^2 = \frac{1}{\sin^2(\beta - \theta)} \frac{2 + (\gamma - 1)(M_1 \sin \beta)^2}{2\gamma(M_1 \sin \beta)^2 - (\gamma - 1)}$$

Dimostrazione. A monte è definito il Mach M_1 e M_{1n} . Similmente a valle si può definire

$$M_{2n} = \frac{u_2}{a_2} = M_2 \sin(\beta - \theta)$$

dalle relazioni dell'urto retto,

$$M_{2n}^2 = \frac{1 + \left(\frac{\gamma-1}{2}\right) M_{1n}^2}{\gamma M_{1n}^2 - \frac{\gamma-1}{2}}$$

sostituendo le espressioni dei Mach Normali,

$$M_2^2 = \frac{1}{\sin^2(\beta - \theta)} \frac{2 + (\gamma - 1)(M_1 \sin \beta)^2}{2\gamma(M_1 \sin \beta)^2 - (\gamma - 1)}$$

■

Proposizione 38. *La relazione $\theta - \beta - M$ è la seguente:*

$$\tan \theta = 2 \frac{1}{\tan \beta} \left(\frac{M_1^2 \sin^2 \beta - 1}{M_1^2 (\gamma + \cos 2\beta) + 2} \right)$$

Dimostrazione. Poichè, dalla geometria,

$$\tan \beta = \frac{u_1}{w_1}$$

$$\tan(\beta - \theta) = \frac{u_2}{w_2}$$

con $w_1 = w_2$. Allora,

$$\frac{\tan \beta}{\tan(\beta - \theta)} = \frac{u_2}{u_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2} = \left(\frac{(\gamma + 1)(M_1 \sin \beta)^2}{(\gamma - 1)(M_1 \sin \beta)^2 + 2} \right)^{-1}$$

riscrivendo opportunamente l'equazione (no dim.),

$$\tan \theta = 2 \frac{1}{\tan \beta} \left(\frac{M_1^2 \sin^2 \beta - 1}{M_1^2 (\gamma + \cos 2\beta) + 2} \right)$$

■

È possibile identificare il punto sonico, ossia il punto in cui $M_2 = 1$. A sinistra di questo punto l'urto è *debole*, mentre a destra è *forte*. Vicino a questo punto esiste anche il punto di massimo $\theta = \theta_{max}$.

Osservazione 21. *Al crescere del Mach, a pari geometria, β diminuisce (l'onda si corica verso la parete) per urti deboli.*

$$M \uparrow \iff \beta \rightarrow \theta$$

Dimostrazione. Dalla relazione, dividendo per la velocità del suono critica a^* ,

$$\frac{v_2^2}{a^{*2}} = \left(\frac{V_1}{a^*} - \frac{u_2}{a^*} \right)^2 \frac{\frac{V_1}{a^*} \frac{u_2}{a^*} - 1}{\frac{2}{\gamma+1} \frac{V_1^2}{a^{*2}} - \frac{V_1}{a^*} \frac{u_2}{a^*} + 1}$$

e poichè $M_1^* = \frac{V_1}{a^*}$

$$\frac{v_2^2}{a^{*2}} = \left(M_1^* - \frac{u_2}{a^*} \right)^2 \frac{M_1^* \frac{u_2}{a^*} - 1}{\frac{2}{\gamma+1} M_1^{*2} - M_1^* \frac{u_2}{a^*} + 1}$$

■

La polare funziona anche da odografa come mostrato nel grafico seguente.

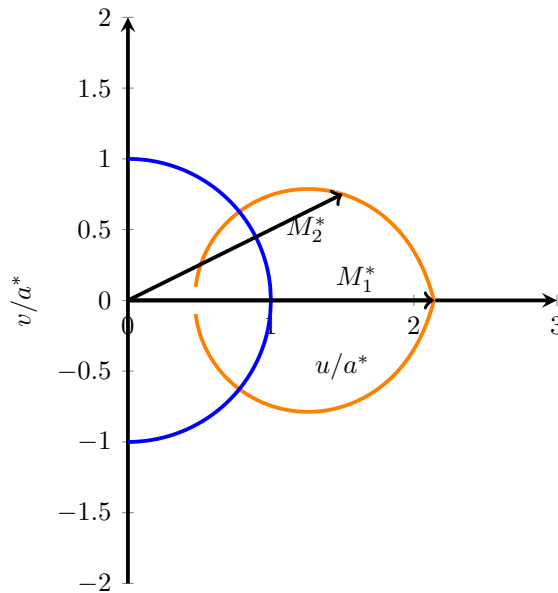
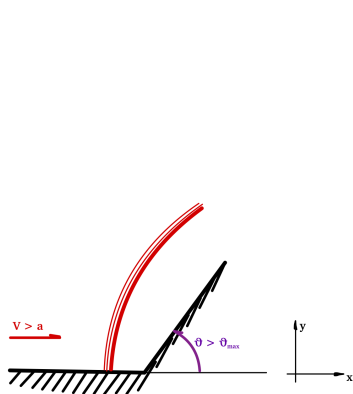


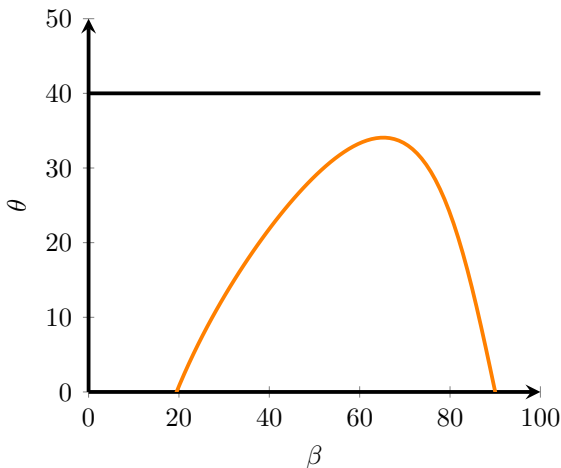
Figura 5.6: Odografa per $M_1^* = 2.14$

Sezione 5.3: Urto Curvo

Supponendo di Fissare il Mach, e avere una geometria con $\theta > \theta_{max}$. In questo caso non esiste una formula analitica del problema, ma solo numerica. Tale soluzione dipende dalla geometria del sistema.



(a) Urto Curvo e Staccato



(b) Curva $\beta - \theta - M$

L'urto è staccato e curvo. In prossimità della parete orizzontale $\beta = \frac{\pi}{2}$. La pendenza della velocità raggiunge la condizione di tangenza $\theta_f \rightarrow \theta$ durante l'evoluzione. Man mano che ci sia allontana dalla parete la pendenza della velocità tende alla pendenza dell'onda d'urto $\beta = \arcsin \frac{1}{M_1}$.

Il risultato è che la pendenza della velocità varia.