



centroappunti.it

CORSO LUIGI EINAUDI, 55/B - TORINO

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 2551A

ANNO: 2023

A P P U N T I

STUDENTE: Brusa Chiara

MATERIA: Meccanica delle macchine - Prof. Eula

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

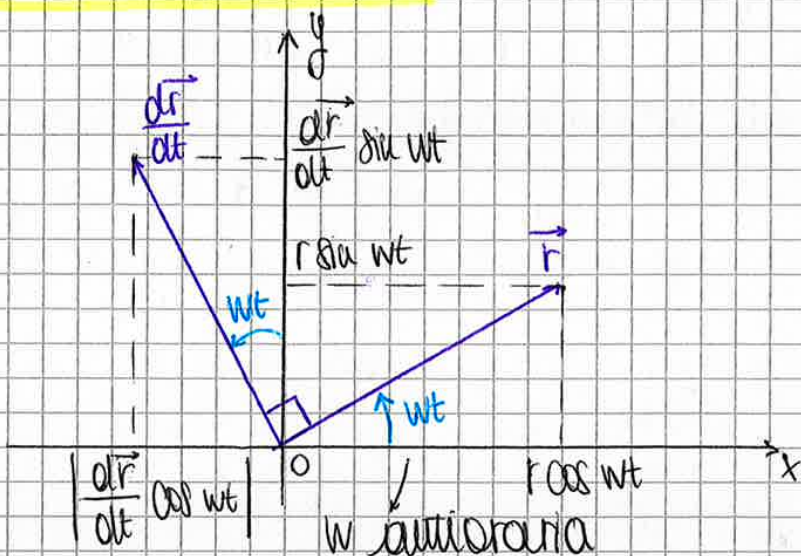
ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTI E NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.

1 Cinematica

1

Metodo dei vettori rotanti

$$\frac{d(r\vec{x})}{dt} = \vec{\omega} \wedge r\vec{x}$$



\vec{r} ruota nel piano intorno ad O con $\vec{\omega}$ anticlockwise

$$\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \omega r$$

$\frac{d\vec{r}}{dt} \perp \vec{r}$ nel verso di rotazione di $\vec{\omega}$

$$\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| \cos \omega t = \omega r \cos(\omega t)$$

$$-\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| \sin \omega t = -\omega r \sin(\omega t)$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{r} \rightarrow \text{il vettore derivato ha modulo}$$

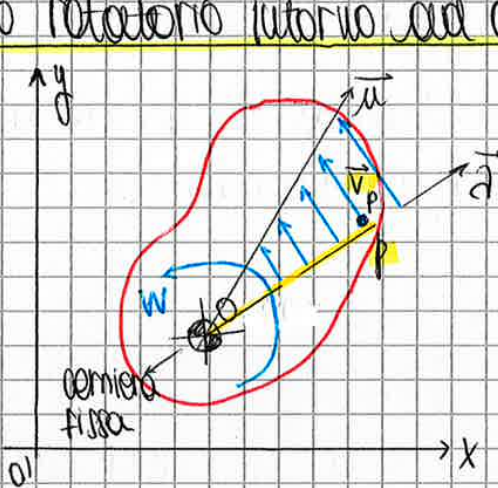
ωr , ruotato di $\pi/2$ nel verso di $\vec{\omega}$ rispetto a \vec{r}

Moto traslatorio

Tutti i punti del corpo rigido hanno stessa velocità
 e stessa accelerazione

$$\begin{cases} \theta = \omega t \\ \dot{\theta} = \omega \rightarrow \vec{v}_A = \vec{v}_B \\ \dot{\omega} = \alpha \rightarrow \vec{a}_A = \vec{a}_B \end{cases}$$

Moto rotatorio intorno ad asse fisso

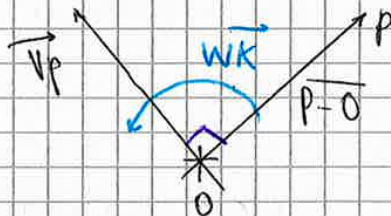


$$\vec{v}_P = \vec{v}_O + \vec{v}_{P/O}$$

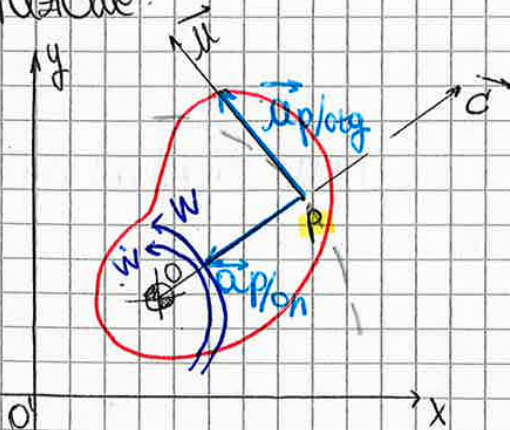
$$\vec{v}_P = \omega \vec{k} \wedge (\vec{P}-\vec{O})$$

Modulo ωr_{PO}
 Direzione $\perp r_{PO}$
 Verso $\vec{\omega}$

$\vec{v}_P = \omega \vec{k} \wedge (\vec{P}-\vec{O}) \rightarrow$ espressione grafica



Accelerazione:



$$\vec{a}_P = \vec{a}_O + \vec{a}_{P/O_n} + \vec{a}_{P/O_t}$$

accelerazione
 centripeta /
 normale

accelerazione
 tangenziale

$$\vec{a}_P = -\omega^2 (\vec{P}-\vec{O}) + \dot{\omega} \vec{k} \wedge (\vec{P}-\vec{O})$$

Opposta al
 vettore posizione

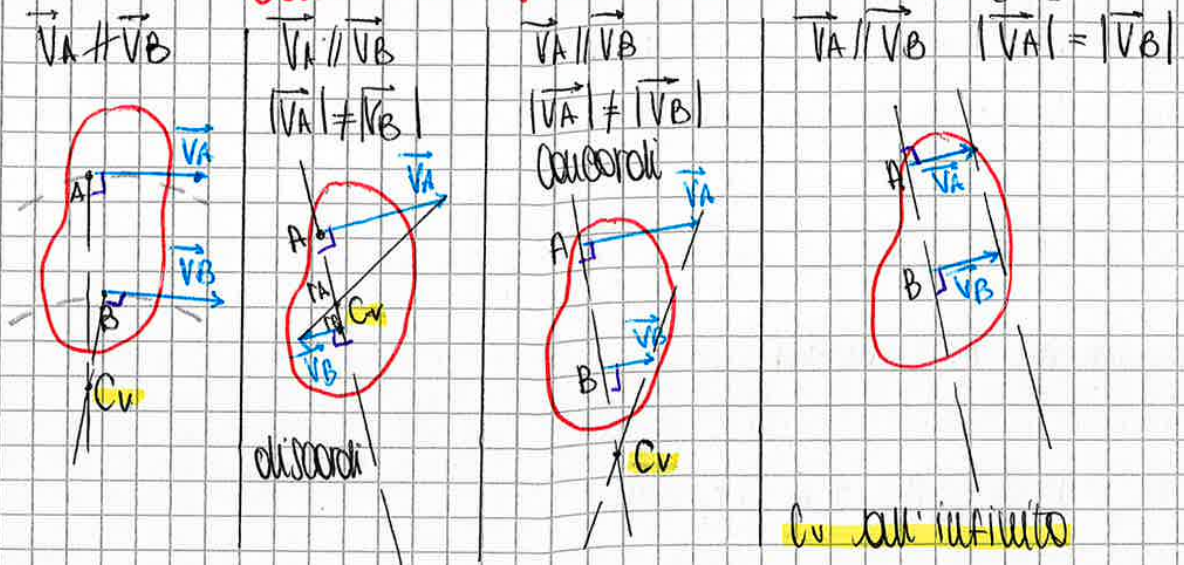
$\perp \vec{k}$
 $\perp \vec{a}(\vec{P}-\vec{O})$

Centro di istantanea rotazione

(3)

In un corpo rigido in moto nel piano, in ogni istante esiste un punto C del corpo in cui la velocità è nulla. Pertanto ogni punto del corpo rigido può essere considerato rotante intorno a C con $\vec{\omega}$.

C è detto **Centro di istantanea rotazione** (C_v)



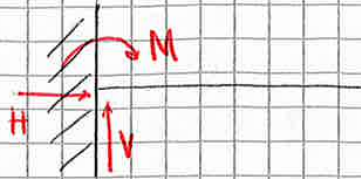
$$\vec{v}_A = \vec{v}_{C_v} + \vec{v}_{A/C_v} = \vec{\omega} \wedge (\vec{A} - \vec{C}_v)$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_{C_v} + \vec{v}_{B/C_v} = \vec{\omega} \wedge (\vec{B} - \vec{C}_v)$$

- C_v non è un punto fisso, ma si sposta nel tempo
- polare fissa**: luogo dei punti che diventano (nel piano fisso) successivamente C_v durante il moto del corpo
- polare mobile**: luogo dei punti del piano mobile coincidente con il corpo in movimento che diventano C_v
- La polare mobile rotola senza strisciare sulla polare fissa
- C_v ha velocità nulla, ma è detto che \vec{a} è nulla anche la sua accelerazione
- C_v è il centro delle velocità, ma non può essere generalmente considerato centro delle accelerazioni

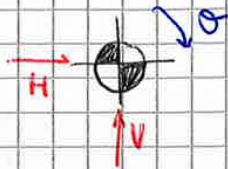
tipi di vincoli

Traslazione



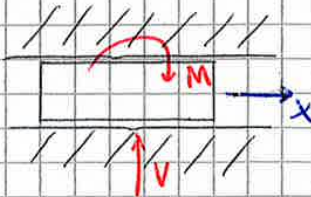
∞ g.d.l.

Cerniera



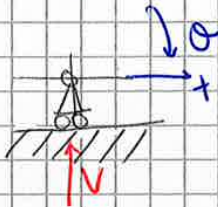
1 g.d.l.

Slitta



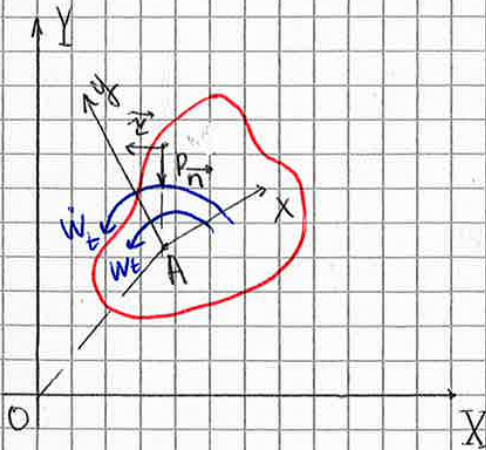
1 g.d.l.

Carrello



2 g.d.l.

Cinematica dei moti relativi



OXY sist. rif. fisso

Axy sist. rif. mobile

P: moto assoluto rispetto a sist. fisso, moto relativo rispetto a sist. mobile

Il moto che avrebbe P se fosse solidale con Axy è il moto di trascinamento

$$\vec{v}_{P/ASS} = \vec{v}_{P/rel} + \vec{v}_{P/tr}$$

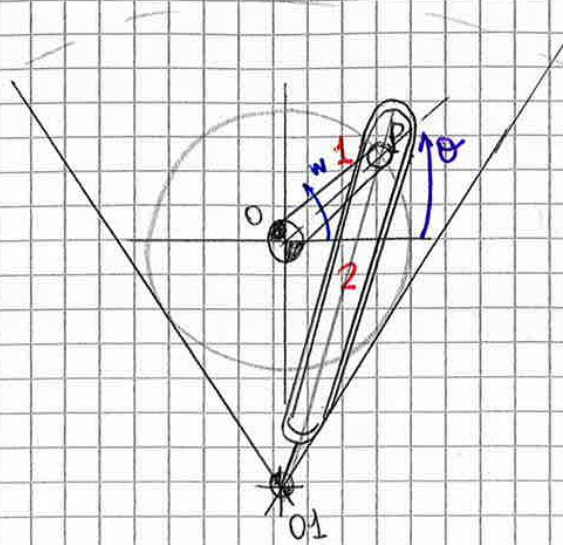
$$\vec{a}_{P/ASS} = \vec{a}_{P/rel} + \vec{a}_{P/tr} + \vec{a}_{cop}$$

acc. relativa acc. trascinamento

acc. Coriolis

guida oscillante (guida di Fourbar)

5



$$\chi = 3(u-1) - 2C_1 - C_2 = 1$$

$u=3$ 1, 2. telaio

$$C_1 = 2 (0, 01)$$

$$C_2 = 1 (P)$$

Il momento prodotto da una coppia non dipende dai \odot polo, ma solo dalla loro intensità e dalla distanza reciproca d .

\vec{M} è un vettore libero

Momento di trasporto: da aggiungere se spostiamo una forza fuori dalla sua linea d'azione $\vec{M} = Fd$
 spostamento di F

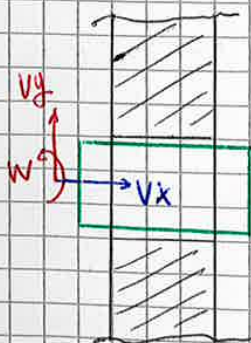
→ due sistemi di forze sono equivalenti quando hanno la stessa risultante e lo stesso momento risultante

→ un corpo rigido è in equilibrio se il sistema di forze agente su di esso ha risultante nulla e momento risultante nullo

- forze concentrate: zona in cui sono applicate puntiforme
- forze distribuite: zona su cui sono applicate su dimensioni non trascurabili
- forze esterne: applicate dall'esterno
- forze interne: suddivise tra gli elementi del sistema

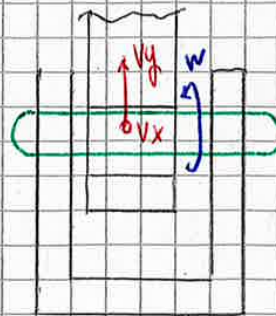
Accoppiamenti tra corpi rigidi

a) coppia prismatica



1 grado

b) coppia rotoidale/cerniera



1 grado

Passaggi importanti per risolvere questo tipo di esercizi (7)

- 1) separare i corpi rigidi in corrispondenza dei vincoli
- 2) per ognuno, definire il quadro delle 3 regole ricade
- 3) tracciare forze e coppie
- 4) scrivere relazioni tra forze e/o coppie agenti
- 5) da un corpo all'altro rispettare azione e reazione
- 6) indicare sempre angoli inclinazione forze e angoli interni al triangolo delle forze

3. Equazioni Cardinali della dinamica

1) principio di inerzia

$$2) \sum \vec{F}_e = m \vec{a}$$

3) azione e reazione $|\vec{F}_{12}| = |\vec{F}_{21}|$

per un corpo esteso: le forze che l'esterno esercita sul corpo tendono sia a farlo rotare, sia a farlo traslare

→ moto traslatorio $\sum \vec{F}_e = m \vec{a}_G$

→ moto rotatorio $\sum \vec{M}_{eG} = I_G \vec{\omega}$

Azioni di inerzia sul corpo:

$$\begin{cases} \vec{F}_i = -m \vec{a}_G \\ \vec{M}_{iG} = -I_G \vec{\omega} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \vec{F}_i \text{ forza d'inerzia nel baricentro} \\ \vec{M}_{iG} \text{ momento baricentrico d'inerzia} \end{array}$$

$$\begin{cases} \sum \vec{F}_e + \sum \vec{F}_i = \vec{0} \\ \sum \vec{M}_{eG} + \sum \vec{M}_{iG} = \vec{0} \end{cases}$$

può essere espresso anche rispetto a un qualsiasi P ∈ corpo

$$\sum \vec{M}_e + \sum \vec{M}_i + \vec{h} \wedge \vec{F}_i = \vec{0}$$

Tali equazioni esprimono l'equilibrio dinamico di un

Momento d'inerzia di massa

⑧

Indica come è distribuita la massa di un corpo, legata alla forma geometrica e al materiale.

Il rispetto ad un generico punto O :

$$I_O = m (r_O)^2 \quad [\text{kg m}^2] \quad \text{grandezza scalare}$$

$$I_O = \int_M r^2 dm = \int_V r^2 \rho dV$$

Legge del trasporto del momento d'inerzia:

$$I_O = I_G + (GO)^2 M$$

Momenti d'inerzia in casi particolari:

→ momento d'inerzia rispetto all'asse di un disco

$$I_O = M \frac{R^2}{2}$$

→ momento d'inerzia rispetto a un asse diametricale di un disco

$$I_O = \frac{1}{4} MR^2$$

→ momento d'inerzia baricentrico di un'asta

$$I_O = \frac{1}{12} MR^2$$

Caso particolare di applicazione delle 3 regole grafiche

corpo soggetto a 4 forze a due a due parallele:

ricorda nella 2^a regola perché formiamo due coppie che devono essere uguali e parallele

$$R_1(b) - R_2(c) = 0$$

Caso particolare: 3^a regola eleggere

Corpo soggetto a 3 forze parallele

- il punto di stevia è all'infinito

- non posso costruire il triangolo delle forze. Ecco in questo caso scrivo 2 equazioni di equilibrio

fenomeno fisico che precede il moto: aderenza

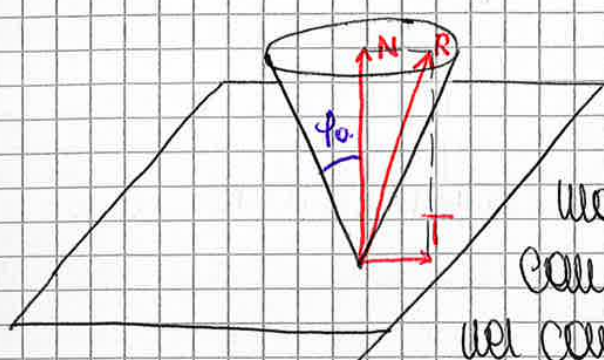
$$T \leq f_a N$$

$f_a \rightarrow$ coefficiente di aderenza

$N \rightarrow$ normale al piano

f_a dipende dalla natura del corpo e delle superfici

si definisce un angolo di aderenza



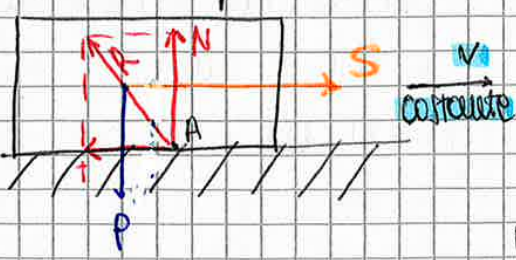
$$\text{tg } \varphi_a = f_a$$

Finché non inizia il moto, la forza di aderenza compressiva deve risultare nel cono di aderenza

Se l'angolo α è inferiore al cono, non c'è moto relativo tra i corpi \rightarrow aderenza

Attrito di strisciamento

Compare quando vi è una velocità di strisciamento relativa tra i corpi a contatto



La forza di attrito è parallela alla v di strisciamento e ha verso opposto

$$T = f N$$

$f \rightarrow$ coefficiente di attrito di strisciamento

T ha un valore ben definito e non dipende più da s

$$\left\{ \begin{array}{l} T \leq f_a N \rightarrow \text{condizione di aderenza} \\ C_m = TR + I\ddot{\theta} \\ T = m\ddot{x} \\ N = P \\ \ddot{x} = R\ddot{\theta} \end{array} \right.$$

Se $T > f_a N$ si è in condizione di strisciamento, non è più valida l'ipotesi del puro rotolamento

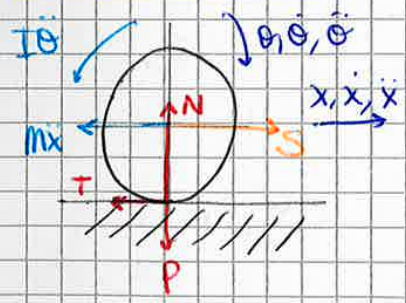
$\ddot{x} \neq R\ddot{\theta}$

In queste condizioni bisogna usare la relazione $T = f_a N$

$$\left\{ \begin{array}{l} C_m = TR + I\ddot{\theta} \\ T = m\ddot{x} \\ N = P \\ T = f_a N \end{array} \right.$$

ho puro rotolamento solo quando $T \leq f_a N$

Rullo trascinato



Ipotesi di puro rotolamento

$$\left\{ \begin{array}{l} I\ddot{\theta} = TR \\ N = P \\ S = T + m\ddot{x} \\ \ddot{\theta} = \ddot{x}/R \\ T \leq f_a N \end{array} \right.$$

\vec{T} verso opposto di \vec{S}

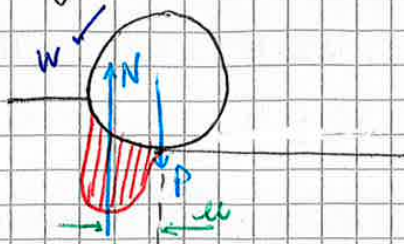
Se $T > f_a N \rightarrow \ddot{x} \neq R\ddot{\theta}$ e la nota striscia $T = f_a N$

$$\left\{ \begin{array}{l} I\ddot{\theta} = TR \\ N = P \\ S = T + m\ddot{x} \\ T = f_a N \end{array} \right.$$

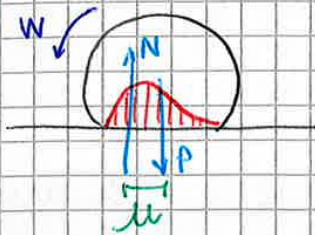
Attrito volvente

Deriva dall'imperfetta elasticità dei corpi a contatto

a) Ruolo rigido e terreno deformabile



b)



Effetto più rilevante → spostamento della componente normale nel verso del moto.

Parametro di attrito volvente: quantità di cui deve essere spinta la componente normale N

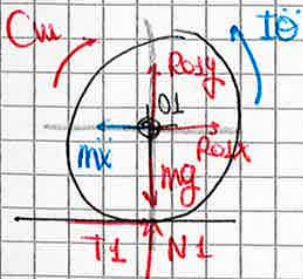
μ → dipende dalla natura dei corpi a contatto

$$f_v = \frac{\mu}{r}$$

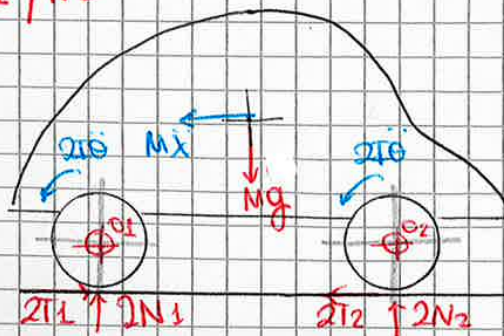
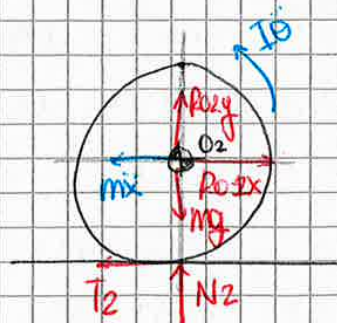
f_v → coefficiente di attrito volvente

Autoveicolo

Ruota motrice singola:



Ruota trascinata:



Tipologie di freni

- freno a nastro
- freno a ceppo
- freno a pattino
- freno a disco

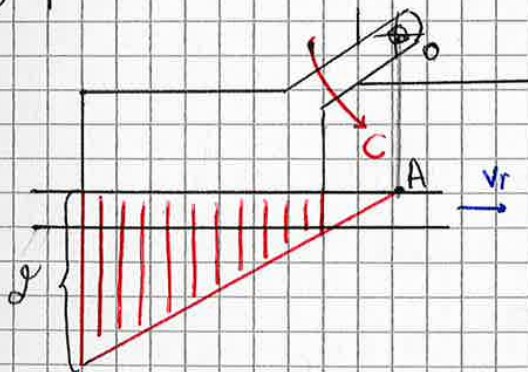
A seconda del n° di gradi di libertà concessi all'elemento frenante si hanno

- freni ad accostamento rigido, in cui l'elemento frenante può muoversi con 1 gde
- freni ad accostamento ^{libero} fessile, in cui l'elemento frenante può muoversi con più gde

Freni a pattino piano

$T = FN$ perché c'è attrito

a) pattini ad accostamento rigido



Il pattino ha 1 gde
 La rotazione intorno ad o è il moto di usura
 in quanto tende a far affondare il pattino nel disco

$$dW = \int p dA = k' f p dA v_r$$

$p = k s$ → la pressione di contatto in

un punto generico è direttamente proporzionale allo spessore di materiale consumato

Il diagramma tratteggiato rappresenta sia l'andamento di p, sia l'andamento di s.

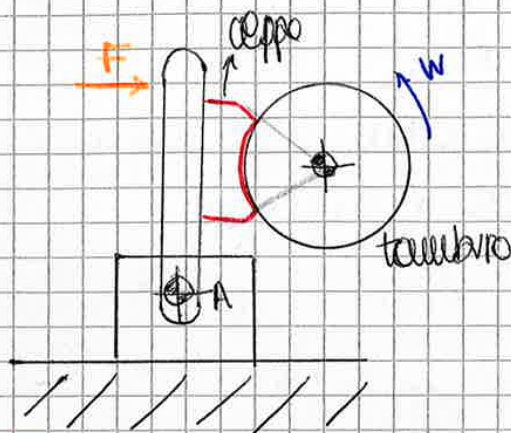
Il punto di applicazione di N corrisponde all'ascissa del baricentro del diagramma delle p.

Freni a Ceppi

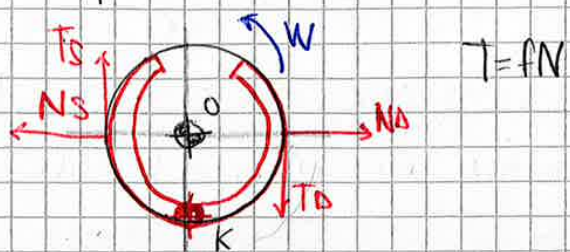
(freni a tamburo) sono costituiti da 1/2 ceppi che possono essere posti all'interno o all'esterno del elemento frenato, il tamburo

a) Ceppi ad accostamento rigido

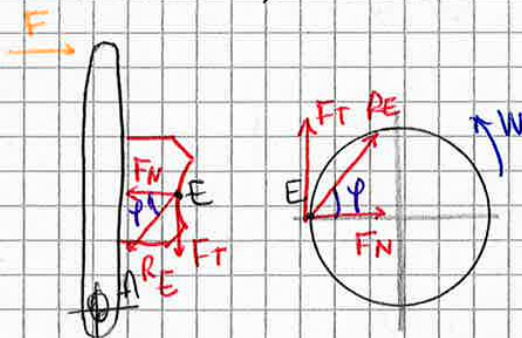
Ceppo solidale al braccio il cui moto è una rotazione intorno ad A → 1 g.d.l.



Ceppi interni



Momento frenante: momento rispetto ad O di T



F_T rivela il modo che si opponga a W
 Punto di applicazione di R centrato nel punto di contatto E . (p. medio)

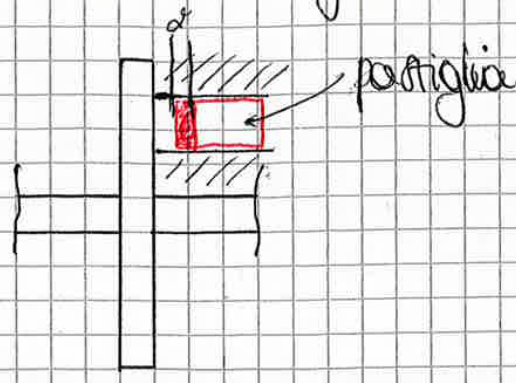
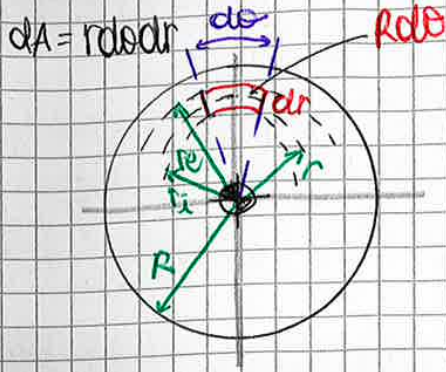
b) Ceppi ad accostamento libero

Ceppo ancorato in B al braccio.

Moto ceppo: rotazione intorno a B + rotazione intorno ad A

La forza risultante non è più applicata nel punto medio di contatto

Freno a disco ad accostamento rigido



Ipotesi usura: $d^2 dA \propto f p dA v_r$
 $d^2 = C \mu f$ $v_r = \omega r$

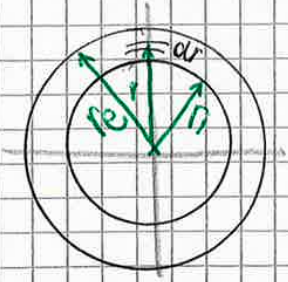
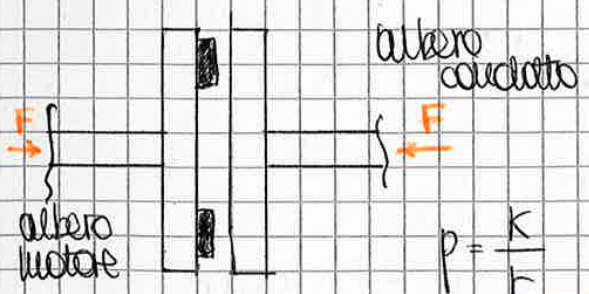
$$d^2 = k' f p \omega r$$

$$p = \frac{d^2}{k' f \omega r} = \frac{k}{r}$$

grandezze ingegneristiche in k sono costanti istantaneamente in tutte le parti dell'area di contatto, ma possono variare nel tempo
 momento frenante

$$M = f F \left(\frac{r_e + r_i}{2} \right)$$

FRIZIONI piastre



$$p = \frac{k}{r}$$

$$M = f F \left(\frac{r_e + r_i}{2} \right)$$

ipotesi dell'usura

$$M = n f F \left(\frac{r_e + r_i}{2} \right) \quad n = \text{u}^\circ \text{ superfici attive}$$

7. Cinghie

Flexibili: elementi meccanici usati per trasmettere il moto tra alberi paralleli

Mancanza di una forma propria → disposizione dipende da vincoli e equilibri presenti

- cinghie → materiali duttili, rigidità trascurabile
- funi
- catene

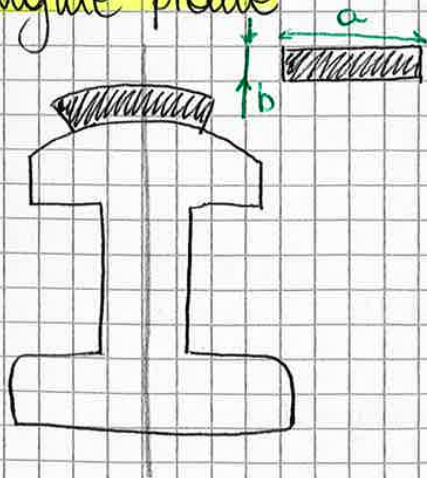
tipi di cinghie:

Cinghia collega 2 pulegge, solidali all'albero motore e condotto

- cinghie piane
 - " trapezoidali
 - " multiple
 - " dentate
- } fenomeno dell'attrito, una garanzia di costanza nel rapporto di trasmissione

Le cinghie richiedono un foramento tra cinghie e pulegge, garantito dai specifici accorgimenti

Cinghie piane



Le cinghie piane hanno sezione rettangolare

Forma pulegge su cui si avvolgono: piana o leggermente convessa

Rapporto di trasmissione di una trasmissione con cinghia

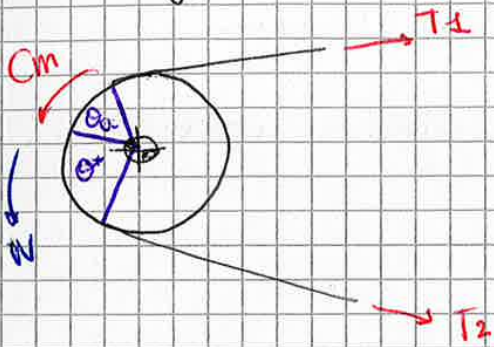
$$i = \frac{W_1}{W_2} = \frac{V_1}{V_2} \cdot \frac{R_2}{R_1} = \frac{R_2}{R_1} \left(\frac{1 + \frac{T_1}{ES}}{1 + \frac{T_2}{ES}} \right) \quad (16)$$

$$V = V_0 \left(1 + \frac{T}{ES} \right)$$

E = modulo elastico

S = sezione trasversale

Il rapporto di trasmissione aumenta al crescere del divario tra le tensioni. Non è costante, ma varia con le condizioni d'uso, solo in prima approssimazione si può considerare pari al rapporto tra i raggi.



$$T_1 > T_2$$

$$\theta_{\text{avvicinamento}} = \theta_a + \theta^*$$

lungo l'arco di aderenza

non si ha v. relativa:

velocità cinghia = v. puleggia

$$v = \omega r$$

L'arco di aderenza

precede sempre l'arco di ~~arruotamento~~ ^{scostamento} nel verso di avvicinamento della cinghia

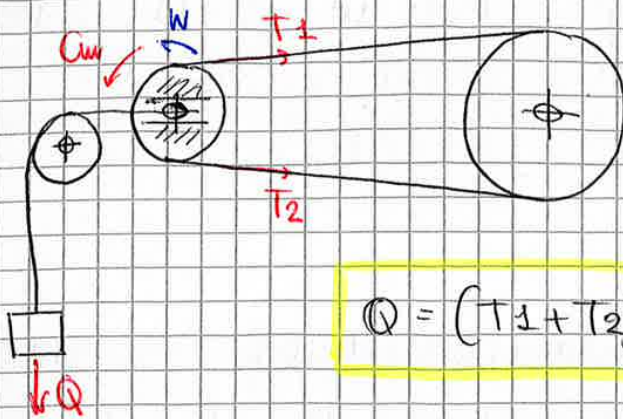
→ quando la cinghia è ferma, in tutti i punti v'è lo stesso valore di tensione T_0

→ quando è in moto, nei diversi tratti si producono tensioni diverse

→ vi sono tratti in cui la tensione aumenta fino a T_{max} , altri in cui diminuisce a T_{min}

$$de = de_0 \left(1 + \frac{T}{ES} \right) \rightarrow \text{allungamento cinghia sottoposta a } T$$

Tenditore



$$Q = (T_1 + T_2) \cos \alpha$$

Nei dispositivi che usano il tenditore, l'asse di una delle due pulegge è scorrevole e può essere allungato dall'asse dell'altra puleggia

Forzamento iniziale

Viene spostato l'asse di una delle 2 pulegge, così la cinghia è forzatamente allungata

8. Funi e paracani

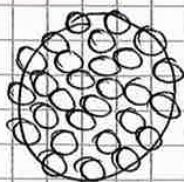
funi: organi flessibili costituiti da intreccio di più fili

funi metalliche maggiormente usate per l'elevata resistenza

per le funi, la rigidità propria non può essere trascurata

Tipi di funi

a)

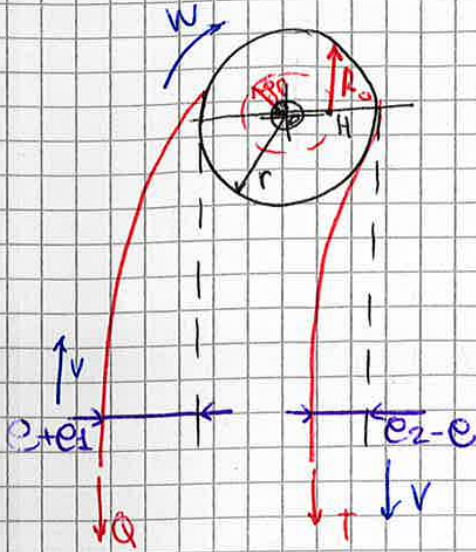


fune spirali o a trecce:

uno o più strati di fili sovrapposti e avvolti a elica intorno a un nucleo centrale

rendimento di una cerniera

(18)



$$H) -Q(r+e+e_1+f_p) + T(r-(e_2-e)-f_p) = 0$$

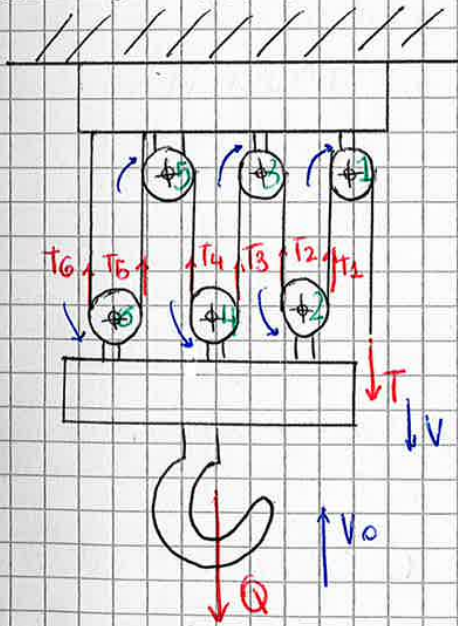
$$T = Q \frac{r+e+e_1+f_p}{r-(e_2-e)-f_p}$$

$$\eta = \frac{P_u}{P_e} = \frac{Qv}{Tv} = \frac{r-(e_2-e)-f_p}{r+e+e_1+f_p}$$

potenza usata / potenza entrata

parametri di assorbimento

Apparecchio meccanico per sollevare carichi elevati con forze di trazione orbita



Rendimenti delle pulegge tutti uguali tra loro

$$T_1 = T \frac{r+e-e_2}{r+e+e_1} = T\eta$$

$$T_2 = T_1\eta = T\eta^2$$

$$T_n = T\eta^n$$

$n = h$ di fratte di forze compressi
 con le pulegge si trave mobile

$$Q = T(\eta + \eta^2 + \eta^3 + \dots + \eta^n)$$

$$T = \frac{Q}{\eta + \eta^2 + \eta^3 + \dots + \eta^n}$$

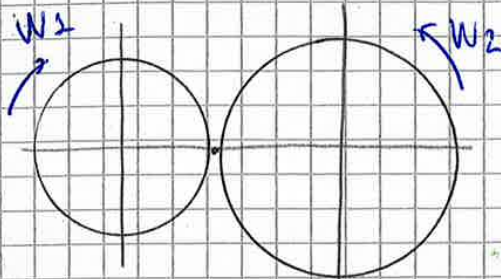
$$\eta_p = \frac{P_u}{P_e} = \frac{Qv_0}{Tv}$$

rendimento totale del guadagno

Ruote dentate cilindriche a denti dritti
 denti paralleli agli assi delle ruote, tutte le
 sezioni perpendicolari agli assi sono uguali

a) ruote esterne

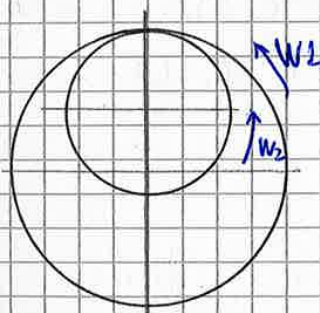
di spesse da parte opposta rispetto sulla zona
 di contatto tra i denti



ω discordati

$$i < 0$$

b) ruote interne



ω concordi

$$i > 0$$

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2}$$

Fondamentale la conoscenza delle superfici
 primitive del moto → due cilindri coassiali che con
 gli assi delle ruote che rotolano l'uno sull'altro

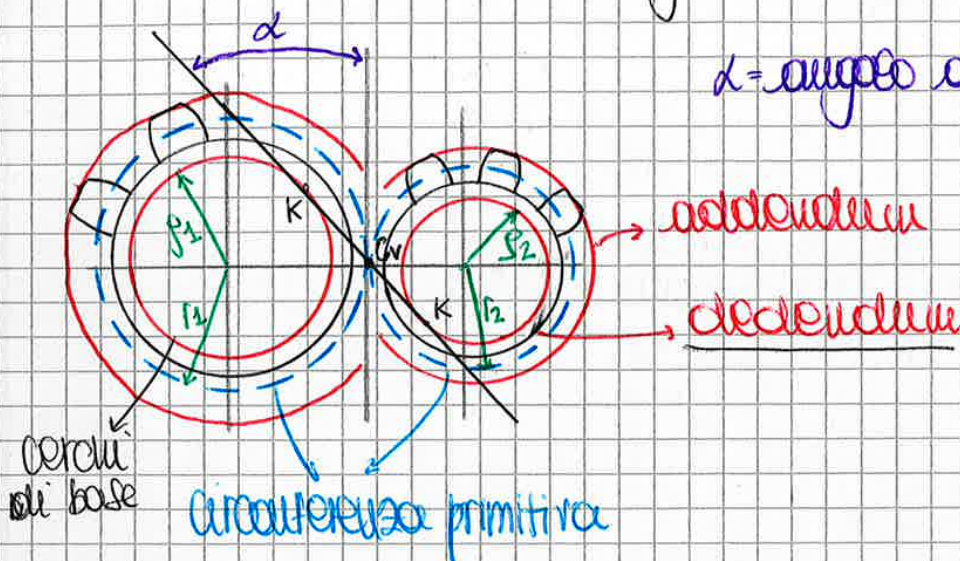
Cilindri primitivi in sezione → circonferenze primitive

↳ Sono tangenti tra loro lungo una retta
 che è l'asse di istantanea rotazione

↳ punto primitivo: centro di istantanea
 rotazione nel moto piano relativo

Coniugati che vengono trascinati in rotazione dalle circonferenze primitive (20)

- nel punto di contatto i due profili coniugati hanno stesso componente normale di velocità v_N . In questo modo, i due profili si muovono solidali, senza sfaccarsi / compenetrarsi
- e' presente una velocità di strisciamento, ma la velocità tangenziale tra i due profili

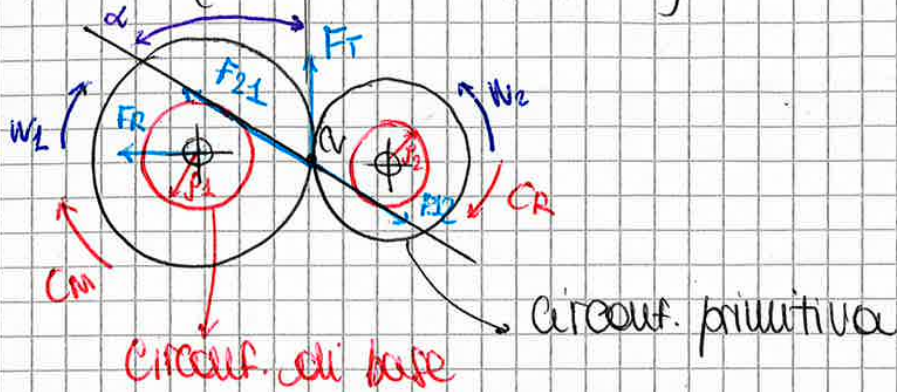


α = angolo di pressione

I profili coniugati devono avere la stessa normale: su tale normale comune di tracciare C_v
 Le normali ai profili sono tangenti ai cerchi di base
 L_1 i denti devono avere le stesse tangenti rispetto ai relativi cerchi di base
 Solo le tangenti interne possono essere normali comuni ai profili \rightarrow solo quelle le direzioni delle forze normali scambiata tra i denti durante la trasmissione del moto \rightarrow rette d'azione
 occorre lasciare del gioco tra i denti
 la forza scambiata deve sempre essere opposta alla ω di rotazione

Forze scorribiate

Forze scorribiate nel punto di contatto hanno sia componente normale sia componente tangenziale → consideriamo solo la componente normale (trascuriamo attrito)



$$\begin{cases} F_T = F_{21} \cos \alpha & \text{componente tangenziale} \\ F_R = F_{21} \sin \alpha & \text{componente radiale} \end{cases}$$

$|\vec{F}_{21}| = |\vec{F}_{12}|$ → scorribiate compressive

01) $C_M - F_{21} p_1 = 0$

02) $C_R - F_{12} p_2 = 0$

rendimento dell'ingranaggio:

$$\eta_v = \frac{C_R W_2}{C_M W_1}$$

Ruote dentate cilindriche a denti elicoidali

Trasmissione del moto regolare e silenziosa

→ svergonare il dente oltre ruota rispetto all'asse

→ retta che rotola sul cilindro fondamentale genera la superficie del dente

(2)

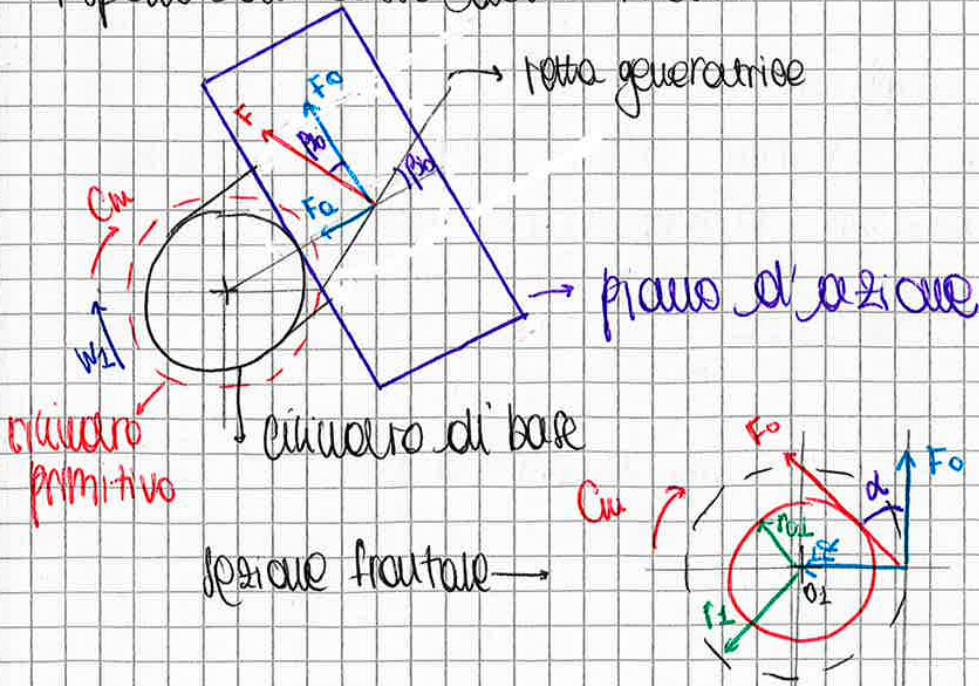
logica normale: profilo dei denti tagliati non ha più profilo a evolvente di cerchio.
 per la costruzione di for riferimento alla sezione normale → tutte le misure standardizzate fanno riferimento a questa
 occorre collegare insieme le grandezze frontali e quelle normali x corretto funzionalmente

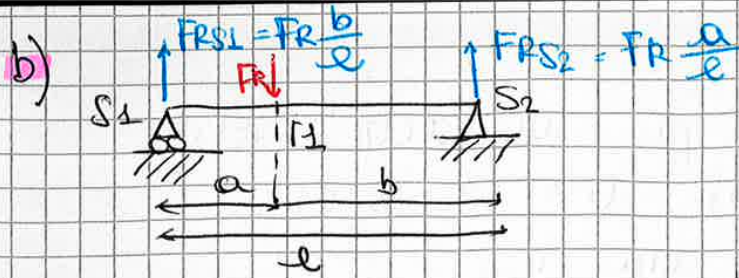
- p_n = passo normale
- α_n = angolo di pressione normale
- m_n = modulo normale

$$p_n = p \cos \beta \quad \text{tg } \alpha_n = \text{tg } \alpha \cos \beta \quad m_n = m \cos \beta$$

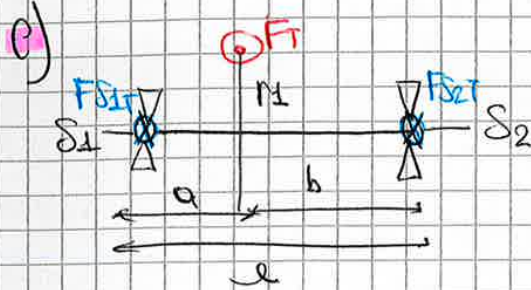
Forze scomposte

Normali alle superfici dei denti quindi giacciono sul piano d'azione e suo nella direzione normale alla retta generatrice, inclinata di β_b rispetto all'asse della ruota





Fr genera 2 reazioni vincolari su S_1 e S_2

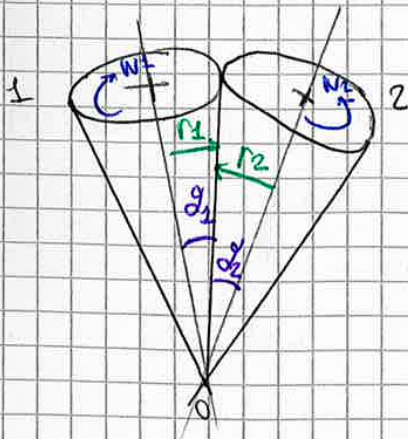


$$\begin{cases} F_{S1T} = F_T \frac{b}{e} \\ F_{S2T} = F_T \frac{a}{e} \end{cases} \quad F_T \text{ e' equilibrata da } C_{uu}$$

Ruote Coniche

Trasmettere il moto tra assi collineari e non paralleli

Superfici primitive: due coni di semiapertura α_1 e α_2 che toccano senza strisciare uno rispetto all'altro



$$i = \frac{W_1}{W_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{d_1 \sin \alpha_2}{d_2 \sin \alpha_1} = \frac{r_2}{r_1}$$