



centroappunti.it

CORSO LUIGI EINAUDI, 55/B - TORINO

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 2550A

ANNO: 2023

A P P U N T I

STUDENTE: Brusa Chiara

MATERIA: Analisi II, teoria ed Esercizi - Prof. Nicola

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTI E NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.

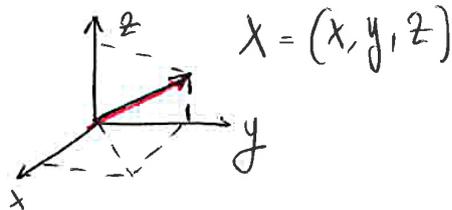
ANALISI II

2- Calcolo infinitesimale per le curve

2.1 Richiami di calcolo vettoriale

Spazio $\mathbb{R}^n \rightarrow$ ambiente naturale

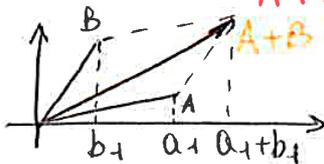
I suoi elementi (vettori) si indicano come $\vec{X} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ dove $x_i \in \mathbb{R}$ sono le componenti del vettore.



Somma vettoriale

$$A = (a_1, a_2, \dots, a_n) \quad B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$$

$$A+B = (a_1+b_1, a_2+b_2, \dots, a_n+b_n)$$

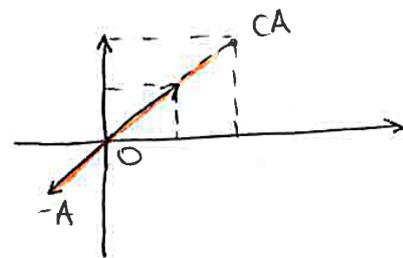


Prodotto per uno scalare

$$c \in \mathbb{R}$$

$$cA = (ca_1, ca_2, \dots, ca_n)$$

$$-A = (-a_1, -a_2, \dots, -a_n)$$



Vettori paralleli

$$A \parallel B \iff A=0 \vee \exists c \in \mathbb{R} : B=cA$$

(A e B si dicono linearmente dipendenti)

$$(2, 3) \parallel (6, 9) ; (2, 3) \parallel (0, 0)$$

se uno dei due è nullo,
allora sono sempre paralleli

Modulo (o norma) di un vettore

$$\|A\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} = \text{lunghezza di } A$$

Componenti di un vettore lungo una direzione

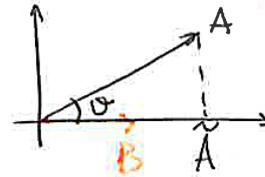
(2)

A, B dati, $\|B\| = 1$

$\tilde{A} = cB \rightarrow$ proiezione di A

$c = \|A\| \cos \theta = A \cdot B$

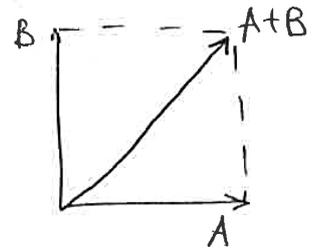
\hookrightarrow prodotto scalare



Teorema di Pitagora

$\|A+B\|^2 = \|A\|^2 + \|B\|^2 \leftrightarrow A \cdot B = 0$

funzione vero per i vettori ortogonali



Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

$|A \cdot B| \leq \|A\| \|B\|$

Ovvio se $\theta = 2, \theta = 3$ in quanto $A \cdot B = \|A\| \|B\| \cos \theta$

$-1 \leq \cos \theta \leq 1$

OSSERVAZIONE

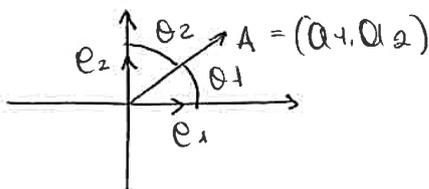
$-\|A\| \|B\| \leq A \cdot B \leq \|A\| \|B\|$

$-1 \leq \frac{A \cdot B}{\|A\| \|B\|} \leq 1$

Angolo tra due vettori

$\cos \theta = \frac{A \cdot B}{\|A\| \|B\|} \quad 0 \leq \theta \leq \pi$

Basei diretti di una retta // ad un vettore A

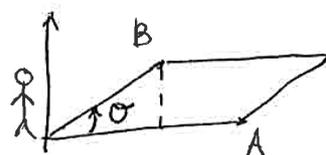


$e_1 = (1, 0) \quad e_2 = (0, 1)$
 $\begin{cases} \cos \theta_1 = A \cdot e_1 = a_1 \\ \cos \theta_2 = A \cdot e_2 = a_2 \end{cases}$

$A \cdot e_1 = \|A\| \|e_1\| \cos \theta_1$
 $\downarrow \quad \downarrow$
 $1 \quad 1$

Prodotto vettoriale in R^3

$\|A \wedge B\| = \|A\| \|B\| \sin \theta = \text{area}$
 base altezza



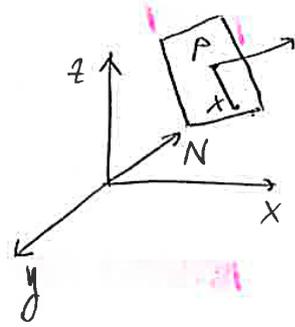
$A = (a_1, a_2, a_3)$
 $B = (b_1, b_2, b_3)$

2) Piano per un punto P e un vettore

$$P = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$$

$$N = (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

$$(x - P) \cdot N = 0 \rightarrow \text{condizione ortogonalità}$$



③

$$(x_1 - \bar{x}_1, x_2 - \bar{x}_2, \dots, x_n - \bar{x}_n) (a_1, a_2, \dots, a_n) = 0$$

$$a_1(x_1 - \bar{x}_1) + a_2(x_2 - \bar{x}_2) + \dots + a_n(x_n - \bar{x}_n) = 0$$

↳ equazione cartesiana del piano

ESEMPIO

$$P = (1, 2, 3) \quad N = (-1, 4, 2)$$

$$-(x - 1) + 4(y - 2) + 2(z - 3) = 0$$

$$-x + 4y + 2z - 13 = 0$$

Curve parametriche in \mathbb{R}^n

$t \in I \subset \mathbb{R}$ intervallo

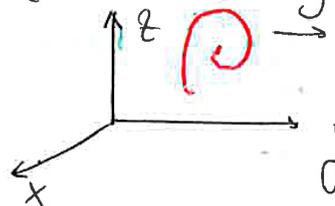
$$\begin{cases} x_1 = x_1(t) \\ \vdots \\ x_n = x_n(t) \end{cases} \quad f: I \rightarrow \mathbb{R}^n \rightarrow \text{posizione occupata in } t \text{ dal punto}$$

$$f(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$$

$x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ funzioni continue

$f(I) \subset \mathbb{R}^n$ si dice **sostegno e traiettoria** di f .

$$f(I) = \{f(t) : t \in I\} \text{ immagine della curva}$$



→ punto che si muove

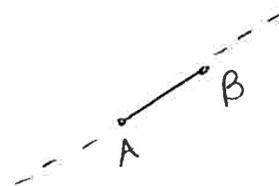
$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \rightarrow \text{legge oraria del moto}$$

ESEMPIO : **segmento**

$$f(t) = A + t(B - A), \quad t \in [0, 1]$$

In \mathbb{R}^3 , $f(t) = (x(t), y(t), z(t))$

$$\begin{cases} f(0) = A \\ f(1) = B \end{cases} \quad \begin{cases} x(t) = a_1 + t(b_1 - a_1) \\ y(t) = a_2 + t(b_2 - a_2) \\ z(t) = a_3 + t(b_3 - a_3) \end{cases}$$



Vettore velocità o vettore tangente

(4)

Se $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$

$$\frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h} = \left(\frac{x_1(t+h) - x_1(t)}{h}, \dots, \frac{x_n(t+h) - x_n(t)}{h} \right)$$

velocità media

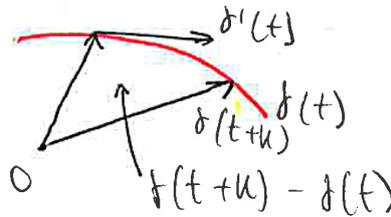
si definisce il **vettore velocità** all'istante t come

$\lim_{\Delta h \rightarrow 0} \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{\Delta h} = \gamma'(t) = (x_1'(t), \dots, x_n'(t))$

velocità scalare $v(t) = \|\gamma'(t)\| = \sqrt{x_1'(t)^2 + \dots + x_n'(t)^2}$

Se $\gamma'(t_0) \neq 0$ si definisce **retta tangente** all'istante t_0 la retta $\gamma(t_0)$ e $\parallel \gamma'(t_0)$ e il **versore tangente**

$$\vec{T}(t_0) = \frac{\gamma'(t_0)}{\|\gamma'(t_0)\|}$$



ESEMPIO

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$$

$$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$$

$$v(t) = \|\gamma'(t)\| = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + 1} = \sqrt{2}$$

Nel seguito le curve di intersezione di classe C^1 $(x_1(t), \dots, x_n(t))$ o di classe C^1 al tratto:

una curva $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ si dice

- **chiusa** se $\gamma(a) = \gamma(b)$
- **semplice** se $\gamma|_{[a, b]}$ è iniettiva $\xrightarrow{\gamma(a) = \gamma(b)}$ **no autointersezione**
- **regolare** se $\gamma'(t) \neq 0 \forall t \in [a, b] \rightarrow$ **no istanti di arresto**

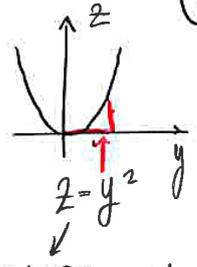
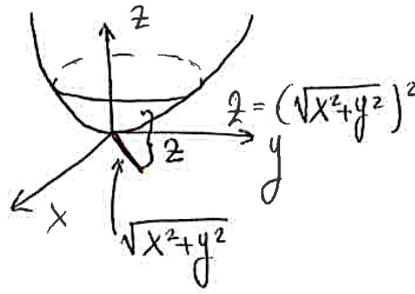
Applicazione in un moto uniforme

($v(t)$ costante), l'accelerazione è in ogni istante ortogonale alla traiettoria (ossia alla velocità)

ESEMPIO: paraboloidi

$$z = f(x, y) = x^2 + y^2$$

$$\begin{cases} f(0, y) = y^2 \\ f(x, 0) = x^2 \end{cases}$$



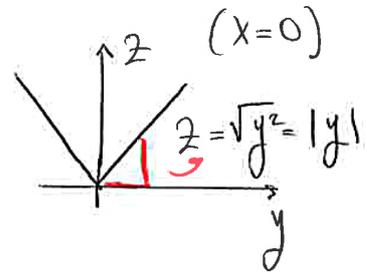
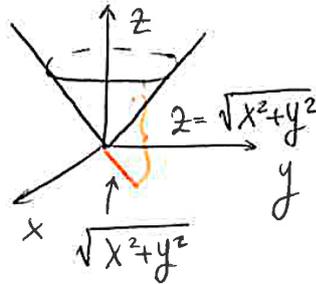
parabola nel piano y-z.

- "parabola televisiva"
- profilo alcega in un secchio in rotazione intorno all'asse z
- energia potenziale elastica (molla nel piano xy)

ESEMPIO

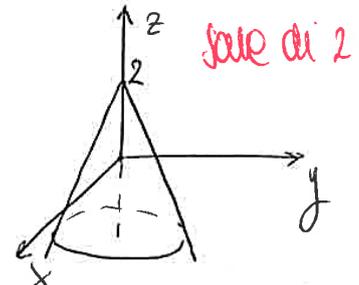
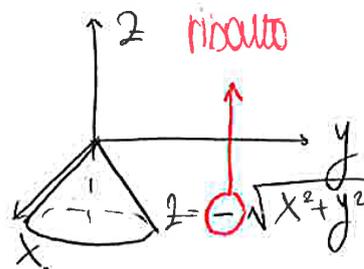
$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

rotazione del grafico intorno all'asse z.



ESEMPIO

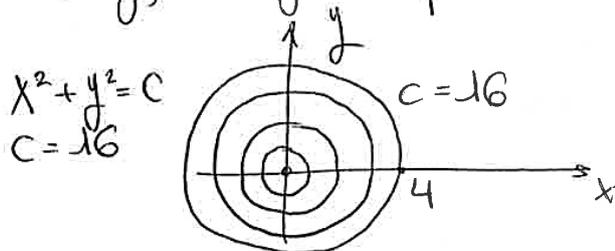
$$z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$$



Curve di livello di $z = f(x, y)$: sottolinsiemi del piano definiti dalle equazioni $f(x, y) = c$ con $c \in \mathbb{R}$.

ESEMPIO

$$z = f(x, y) = x^2 + y^2 \rightarrow \text{paraboloidi}$$



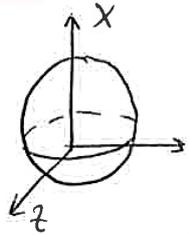
la curva di livello è sempre posta sul piano xy.

curva di livello $c = 0: \{(0, 0)\}$
 $c < 0: \emptyset$

6

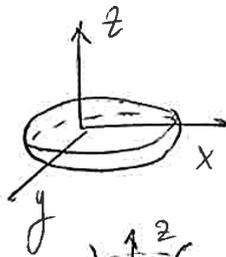
ESEMPI di quadriche

$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$



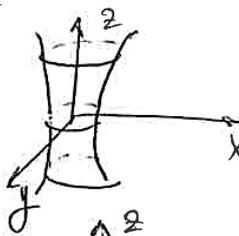
sfera di raggio R

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$



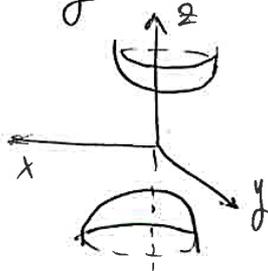
ellissoide

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$



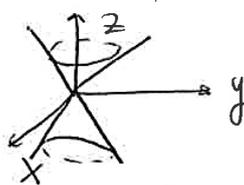
iperboloido a una foglia
(iperboloido iperbolico)

$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$



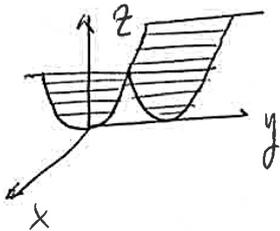
iperboloido a due foglie
(iperboloido ellittico)

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$



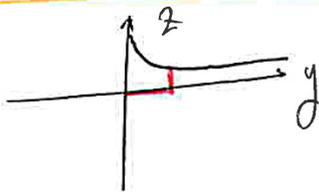
$z = \pm c \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}$
cono

$z = x^2$



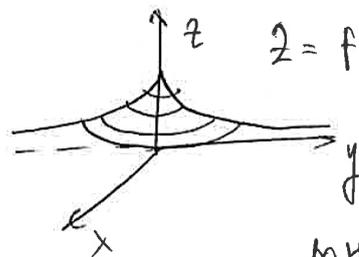
cilindro costruito da rette // all'asse y (manca solo y nell'equazione)

Superfici di rotazione



$z = f(y), y \geq 0$

rotazione attorno a z



$z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$

sostituire al posto di y: $\sqrt{x^2 + y^2}$

se $f(y) = e^{-y}$ rotazione $z = e^{-\sqrt{x^2 + y^2}}$

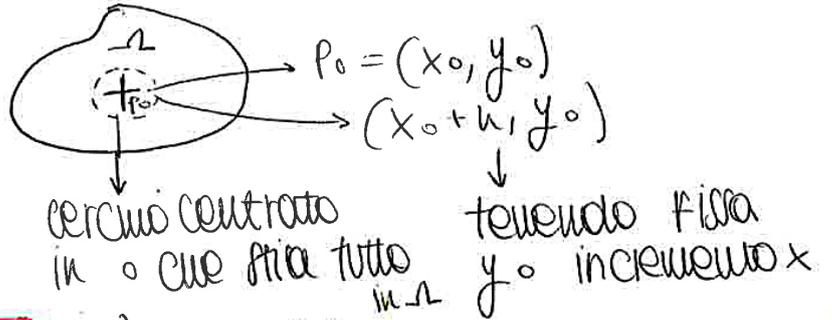
In generale, per verificare che $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$ basta ⑦

mostrare che $|f(p \cos \theta, p \sin \theta)| \leq \varphi(p) \rightarrow 0$ per $p \rightarrow 0$
 per una opportuna funzione $\varphi(p)$ indipendente da θ o da p

Derivate parziali

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, $P_0 = (x_0, y_0)$ punto interno a Ω ;

$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.



$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \quad (\text{se il limite esiste finito})$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0+h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$\nabla f(P_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(P_0), \frac{\partial f}{\partial y}(P_0) \right)$ gradiente di f in P_0

Analogamente per $f(x_1, \dots, x_n)$:

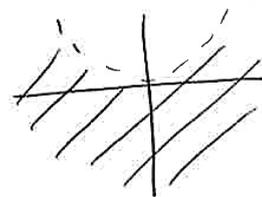
$$\nabla f(P_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(P_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(P_0) \right)$$

ESEMPIO

$f(x, y) = \log(x^2 - y^2)$ $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < x^2\}$

per $(x, y) \in \Omega$ (Ω è aperto)

$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2x}{x^2 - y}$ (considero y costante)



$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{-1}{x^2 - y}$

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{2x}{x^2 - y}, -\frac{1}{x^2 - y} \right)$$

Differenziale

(8)

Se $f(x, y)$ è differenziabile in $P_0 = (x_0, y_0)$ si definisce il suo differenziale nel punto P_0 la funzione di h, k data da

$$df(P_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(P_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)k$$

Se f è differenziabile in ogni punto $(x, y) \in \Omega$ si denota il suo differenziale con

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)k$$

o anche

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dy$$

$$h = \Delta x = dx$$

$$k = \Delta y = dy$$

come funzione delle 4 variabili x, y, dx, dy

ESEMPIO $f(x, y) = x^2y + 2y \rightarrow df = 2xy dx + (x^2 + 2) dy$

Dalla def. di differenziale vediamo che

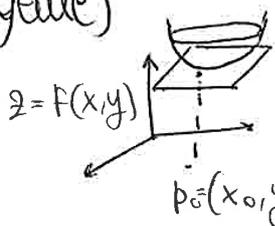
$$\Delta f = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = df + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2})$$

quindi è una buona approssimazione di Δf per $\Delta x, \Delta y$ piccoli.
Analogamente in dimensioni n .

Interpretazione geometrica di differenziabilità (esistenza del piano tangente)

$$x = x_0 + h$$

$$y = y_0 + k$$



$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + o(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2})$$

Il piano tangente al grafico in $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ è per definizione

Analogia con il piano tangente in un punto

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Criterio di differenziabilità

Se f ha derivate parziali continue in un intorno di P_0 allora f è differenziabile in P_0 .

Interpretazione come derivata lungo una curva

9

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ diff in Ω .

$f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile, $f(I) \subset \Omega$

$f(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$, x_1, \dots, x_n derivabili



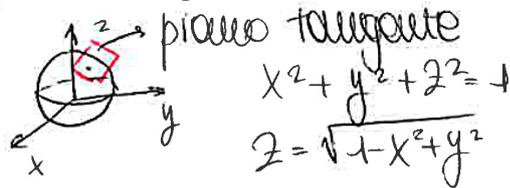
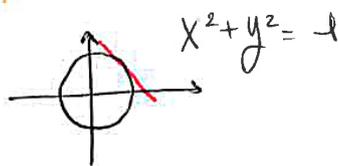
$$\frac{d}{dt} f(f(t)) = \frac{\partial f}{\partial x_1} (f(t)) x_1'(t) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} (f(t)) x_n'(t)$$

$$= \nabla f(f(t)) \cdot f'(t) \quad \forall t \in I$$

↳ componenti del gradiente
prodotto scalare

Curve e Superfici in forma implicita (curve e superfici di livello)

ESEMPIO



In generale

$$g(x, y) = c$$

curva

$$g(x, y, z) = c$$

superficie

con g di classe C^1 (in un aperto). Supponiamo $\nabla g \neq 0$ sui punti della curva / superficie
(Almeno una delle derivate parziali sia $\neq 0$)

OSSERVAZIONE

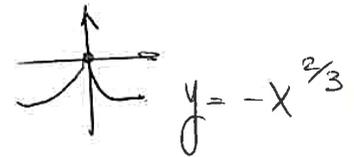
La condizione $\nabla g \neq 0$ serve per escludere punti dove la curva / superficie potrebbe non essere liscia: ad es in dim 2,

$$x^2 + y^3 = 0$$

$g(x, y)$

$$\nabla g(x, y) = (2x, 3y^2)$$

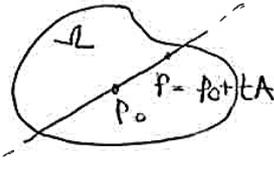
$$\nabla g(0, 0) = (0, 0)$$



le derivate parziali di g sono entrambi nulle nell'origine
↳ provocato dalla cuspidale

Derivata direzionale

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $P_0 \in \Omega$ interno, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$
 $A \in \mathbb{R}^n$, $\|A\|=1$ (A versore)



(10)

Derivata di f rispetto al versore (o direzione) A in P_0 :

$$D_A f(P_0) = \frac{\partial f}{\partial A}(P_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(P_0 + tA) - f(P_0)}{t}$$

(se il limite esiste finito)

incremento

Teorema se f è differenziabile in P_0

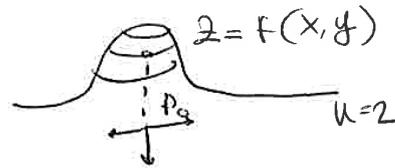
$$D_A f(P_0) = \nabla f(P_0) \cdot A$$

[Cenni di dimostrazione:

$$\varphi(t) = f(P_0 + tA), \quad \varphi(0) = f(P_0)$$

$$D_A f(P_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \varphi'(0) = \nabla f(P_0 + tA) \cdot (P_0 + tA)'$$

$$= \nabla f(P_0) \cdot A]$$



ESEMPIO

$$f(x, y) = x e^y, \quad P_0 = (0, 1), \quad A = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial A}(P_0) = (e, 0) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \nabla f(0, 1) = (e, 0)$$

$$= \frac{e}{\sqrt{2}}$$

→ \mathbb{R} v ha la modulo unitario

$$D_A f(P_0) = \frac{1}{|A|} \nabla f(P_0) \cdot A$$

OSSERVAZIONI

1) se $A = (1, 0, \dots, 0)$ $D_A f(P_0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(P_0)$

$A = (0, 1, \dots, 0)$ $D_A f(P_0) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(P_0)$ ecc...

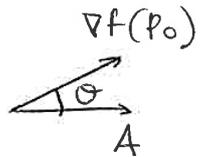
2) $D_A f(P_0) = \nabla f(P_0) \cdot A = \underbrace{\|\nabla f(P_0)\|}_{=1} \cdot \|A\| \cos \theta \quad 0 \leq \theta \leq \pi$

Perché, se $\nabla f(P_0) \neq 0$

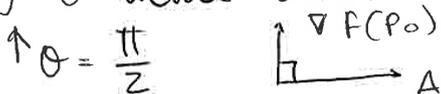
$D_A f(P_0)$ è massima nella direzione

e il valore massimo è $\|\nabla f(P_0)\|$

$$A = \frac{\nabla f(P_0)}{\|\nabla f(P_0)\|}$$



$D_A f(P_0) = 0$ nella direzione $A \perp \nabla f(P_0)$



$$f(\vec{r}) = \frac{K}{2} r^2 = \frac{K}{2} (x^2 + y^2 + z^2)$$

Energia potenziale
del campo di forza
(elastico) (11)

$$F(\vec{r}) = -\nabla f(\vec{r}) = -k \frac{\vec{r}}{r} = -k\vec{r}$$

 sup. equipotenziale

Derivate di ordine successivo

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

ESEMPIO

$f(x, y) = x^n y^m$ monomio

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} (x, y) = \frac{\partial f}{\partial y \partial x} (x, y) = n x^{n-1} \cdot m y^{m-1}$$

lo stesso vale, quindi, per i polinomi.

Teorema di Schwarz

Se esistono $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ in un aperto Ω e sono continue allora coincidono in Ω .

OSSERVAZIONE

$$\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 n}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 n}{\partial z^2} = 0 \quad n(x, y, z) \text{ funzioni incognite}$$

Δn (Laplaciano di n)

$$\frac{\partial n}{\partial t} - \Delta n = 0 \quad n(t, x, y, z) \text{ (eq. del calore)}$$

$$\frac{\partial^2 n}{\partial t^2} - \Delta n = 0 \quad \text{"} \quad \text{(eq. delle onde)}$$

Teorema fisico (ovvio)

(12)

Se $U(x, y, z)$ è l'energia potenziale di un punto materiale in un campo di forza (U di classe C^1 in un aperto)

- 1) i punti stazionari di U sono **punti di equilibrio**
- 2) se in P_0 U ha un minimo stretto ($U(x) > U(P_0)$ in un intorno bucato di P_0) allora P_0 è un **punto di equilibrio stabile** (perturbando l'equilibrio si rimane sempre lì vicino)

Dimostrazione

1) se $F(x, y, z) = -\nabla U(x, y, z)$,

$$F(P_0) = -\nabla U(P_0) = 0 \rightarrow \vec{r}(t) = P_0 \forall t \text{ è soluzione di } m\vec{a} = F \text{ (} m\vec{a}(t) = F(\vec{r}(t)) \text{)}$$

$$\vec{a} = \vec{r}''(t)$$

lo stesso vale per sistemi di punti / corpi rigidi etc...

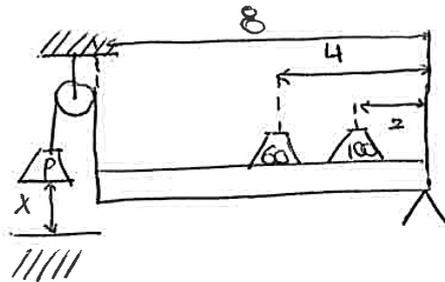
Esempio (fisico) → principio dei lavori virtuali

$U(x)$ = energia potenziale gravitazionale totale

All'equilibrio

$$0 = dU = P dx - 60 \cdot \frac{dx}{2} - 100 \frac{dx}{4}$$

$$\rightarrow P = 30 + 25 = 55 \text{ kg} - \text{peso}$$



Esempio (fisico) → energia potenziale elastica

$$f(\vec{r}) = \frac{k}{2} r^2 = \frac{k}{2} (x^2 + y^2 + z^2) \quad \nabla f(x, y, z) = (kx, ky, kz)$$

$$\nabla f(0) = 0$$

$$f(x, y, z) > f(0) \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

$P_0 = 0$ è un **punto di equilibrio stabile** (in effetti è una forza di richiamo)

Massimi e minimi (condizioni sufficienti)

(14)

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $P_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$ interno, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^2 in un intorno di P_0 . Supponiamo $\frac{\partial f}{\partial x}(P_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(P_0) = 0$

sia

$$\Delta = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \right]^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)$$

1) $\Delta < 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0 \rightarrow$: punto di minimo relativo

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) > 0$$

2) $\Delta < 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0 \rightarrow P_0$ punto di massimo relativo

3) $\Delta > 0 \rightarrow P_0$ non è un punto né di massimo né di minimo relativo (si dice punto di sella)

OSSERVAZIONE

$$H(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{pmatrix} \text{ matrice Hessiana}$$

$$\det H(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) - \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \right]^2 = -\Delta \text{ (nel teorema precedente)}$$

OSSERVAZIONE \rightarrow generalizzazioni in dimensione n .

$$\text{se } \nabla f(P_0) = 0 \quad f(x) - f(P_0) = \frac{1}{2} H(P_0)(x - P_0) \cdot (x - P_0) + o(\|x - P_0\|^2)$$

$$H(P_0) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} \right]_{j, k=1, \dots, n} \text{ matrice simmetrica}$$

ESEMPIO lunghezza di una curva piana in coordinate polari

(15)

$r = r(\theta)$ ossia $\begin{cases} x(\theta) = r(\theta) \cos \theta \\ y(\theta) = r(\theta) \sin \theta \end{cases}$ x e y sono funzioni del parametro θ

$\mathbf{r}(\theta) = (r(\theta) \cos \theta, r(\theta) \sin \theta)$

$\mathbf{r}'(\theta) = (r'(\theta) \cos \theta - r(\theta) \sin \theta, r'(\theta) \sin \theta + r(\theta) \cos \theta)$

$\|\mathbf{r}'(\theta)\|^2 = r'(\theta)^2 + r(\theta)^2$

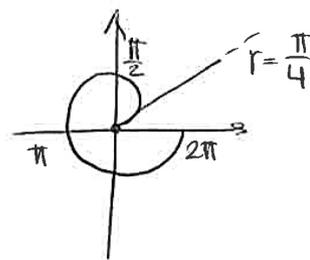
$L = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{r'(\theta)^2 + r(\theta)^2} d\theta$

ESEMPIO Spirale di Archimede

$r(\theta) = \theta \quad \theta \in [0, 2\pi]$

$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \theta^2} d\theta = \frac{1}{2} (\sqrt{1 + 4\pi^2} + 2\theta \operatorname{sh} \theta) \Big|_0^{2\pi}$

$r'(\theta) = 1 \quad [\theta = \operatorname{sh} t, \dots, t = \operatorname{sech} \operatorname{sh} \theta]$



funzione inversa del seno iperbolico: $\theta = \operatorname{sh} t$: $t = \operatorname{sech} \operatorname{sh} \theta$

In generale si definisce

$s(t) = \int_a^t \|\mathbf{r}'(\tau)\| d\tau$

$ds = \|\mathbf{r}'(t)\| dt$

Spazio curvilineo - spazio percorso nell'intervallo di tempo $[a, t]$

Supponiamo $\mathbf{r}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una di classe C^1 e $f(x_1, \dots, x_n)$ una funzione continua nel sostegno $\mathbf{r}([a, b]) \subset \mathbb{R}^n$

Si definisce

$\int_{\mathbf{r}} f ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) \|\mathbf{r}'(t)\| dt$

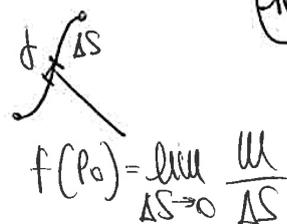
calcolata sui punti della curva

Applicazioni / Interpretazioni fisiche

(16)

Se f è una densità lineare di massa

$$\int_{\delta} f \, ds \rightarrow \text{massa totale}$$



$$f(P_0) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{m}{\Delta S}$$

Baricentro: $G = (x_G, y_G, z_G) = \frac{\int_{\delta} \vec{r} f(\vec{r}) \, ds}{\int_{\delta} f \, ds}$

$$x_G = \frac{\int_{\delta} x f(x, y, z) \, ds}{\int_{\delta} f \, ds}$$

$$y_G = \frac{\int_{\delta} y f(x, y, z) \, ds}{\int_{\delta} f \, ds}$$

$$z_G = \frac{\int_{\delta} z f(x, y, z) \, ds}{\int_{\delta} f \, ds}$$

Momento d'inerzia rispetto all'asse z:

$$I_z = \int_{\delta} (x^2 + y^2) f(x, y, z) \, ds$$

Se f è una densità lineare di carica λ

$$\int_{\delta} f \, ds \quad \text{carica totale}$$

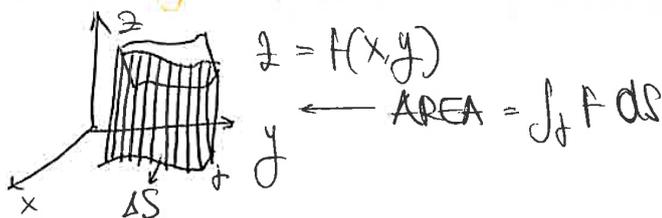
$$E(\vec{r}) = k \cdot \frac{f(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \cdot (\vec{r} - \vec{r}') \, ds$$

campo elettrico generato da f

OSSERVAZIONE tutte queste formule si ottengono partendo da f come costituito da tanti segmenti di lunghezza Δs e massa o carica $f \Delta s$, applicando le formule per un sistema di punti materiali/cariche puntiformi e infine passando al limite per $\Delta s \rightarrow 0$.



Interpretazione generica (n=2)



Condizione necessaria (non sufficiente) affinché un campo sia conservativo (17)

Supponiamo che $F(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$ sia di classe C^1 in un aperto Ω (f_1, \dots, f_n sono funzioni di classe C^1 in Ω) e conservativo in Ω . Allora F è irrotazionale, ossia

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x) \quad \forall x \in \Omega, i, j = 1, \dots, n$$

ESEMPIO

$F(x, y) = (x^2 + y^2, y)$ è conservativa in \mathbb{R}^2 ?

$f_1(x, y) \quad f_2(x, y)$

$$P \Rightarrow Q$$

$$\text{NON } P \Rightarrow \text{NON } Q$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = 2y$$

$$0 = 2y \rightarrow \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ NO}$$

F non è conservativo in \mathbb{R}^2

Dimostrazione in dimensionale $n=2$

$F(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$ è conservativo

per ipotesi $f_1 = \frac{\partial v}{\partial x}, f_2 = \frac{\partial v}{\partial y}$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x}$$

Operatore rotore ($n=3$)

Se $F(x, y, z) = (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), f_3(x, y, z))$ è di classe C^1 in un aperto Ω , si definisce il campo vettoriale

$$\text{rot } F = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right)$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} = \nabla \wedge F$$

$$\int_a^b f_1(x_1(t), \dots, x_n(t)) \cdot x_1'(t) + \dots + f_n(x_1(t), \dots, x_n(t)) \cdot x_n'(t) dt \quad (18)$$

$$F(\delta(t)) \cdot (dx_1, \dots, dx_n) \quad \text{Lavoro elementare}$$

(dx_i = x_i'(t) dt, ...)

Cambio di parametrizzazione: $t = \varphi(r)$, $r \in [\alpha, \beta]$ di classe C^1
 (le due parametriz. individuano lo stesso verso di percorrenza)

$$\varphi([\alpha, \beta]) = [a, b]$$

$$\text{Sia } \tilde{\delta}(r) = \delta(\varphi(r))$$

$$\varphi'(r) > 0 \quad \forall r \rightarrow \int_{\tilde{\delta}} F \cdot d\vec{e} = \int_{\delta} F \cdot d\vec{e} \quad \begin{matrix} \nearrow \\ \nearrow \end{matrix}$$

$$\varphi'(r) < 0 \quad \forall r \rightarrow \int_{\tilde{\delta}} F \cdot d\vec{e} = - \int_{\delta} F \cdot d\vec{e} \quad \begin{matrix} \nearrow \\ \searrow \end{matrix}$$

ESEMPIO $F(x, y) = (x^2 - y, -x)$ $\delta(t) = (t, t^2)$, $t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} \int_{\delta} F \cdot d\vec{e} &= \int_0^1 \underbrace{(t^2 - t^2, -t)}_{F(\delta(t))} \cdot \underbrace{(1, 2t)}_{\delta'(t)} dt \\ &= \int_0^1 [(t^2 - t^2) \cdot 1 + (-t) \cdot 2t] dt = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Teorema dell'energia cinetica o delle forze vive

Se un punto materiale di massa m si muove sotto l'azione di un campo di forze F (risultante) descrivendo una curva δ allora

$$L = \int_a^b \underbrace{F(\delta(t)) \cdot \delta'(t)}_{\text{potenza}} dt = \frac{m}{2} v^2(a) - \frac{m}{2} v^2(b) \quad [v(t) = \|\delta'(t)\|]$$

↓
differenza dell'energia cinetica

$$\begin{aligned} [\delta(t) = (x(t), y(t), z(t)) \quad \|\delta'(t)\|^2 &= x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2, \\ \frac{d}{dt} \|\delta'(t)\|^2 &= 2x'(t)x''(t) + 2y'(t)y''(t) + 2z'(t)z''(t)] \end{aligned}$$

Dimostrazione

$$m \delta''(t) = F(\delta(t)) \quad \text{perci\u00f2}$$

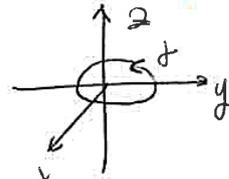
$$\int_a^b m \delta''(t) \cdot \delta'(t) dt = \frac{m}{2} \int_a^b \frac{d}{dt} \|\delta'(t)\|^2 dt = \frac{m}{2} [\|\delta'(b)\|^2 - \|\delta'(a)\|^2]$$

$$= \int_0^{2\pi} F(f(t)) \cdot f'(t) dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi \neq 0$$

ESEMPIO

Analogamente $F(x,y,z) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0\right)$ non è conservativo in $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x=y=z=0\}$ perché $\int_{\gamma} F \cdot d\vec{\sigma} = 2\pi \neq 0$

(F è il campo vettoriale generato da un filo percorso da corrente e disposto lungo l'asse z)



Invece è conservativo in \mathbb{R}^3 il campo elettrico in presenza di una densità $\rho(x,y,z)$ e una corrente $J(x,y,z)$ indipendenti dal tempo.

Gli esempi precedenti mostrano ^{due} la condizione

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \text{ in } \Omega \rightarrow \text{ossia } F \text{ irrotazionale in } \Omega$$

in generale non è sufficiente perché il campo $F = (f_1, \dots, f_n)$ sia conservativo. È sufficiente se Ω aperto $\subset \mathbb{R}^n$ è semplicemente connesso.

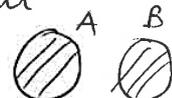
- In dimensione 2, Ω è semplicemente connesso se è connesso (è costituito da un solo pezzo) e non ha buchi



sempl. connesso



non sempl. connesso



$A \cup B$ non è sempl. connesso



non sempl. connesso

- In dimensione 3, Ω è semplicemente connesso se è connesso e ogni curva chiusa in Ω si può deformare con continuità senza uscire da Ω fino a ridurla ad un punto.

ESEMPIO (calcolo del potenziale)

(20)

$$F(x, y) = (2xy, x^2 - 1) \text{ in } \mathbb{R}^2$$

$f_1(x, y) \quad f_2(x, y)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) = 2x = \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^2 \rightarrow F \text{ e' irrotazionale} \\ \text{in tutto } \mathbb{R}^2 \\ \mathbb{R}^2 \text{ e' semplicemente connesso} \rightarrow \text{il } D \text{ e' semplicemente connesso: siamo nel} \\ \text{piano, ha solo 1 pezzo e no buchi} \end{array} \right.$$

controllare che sia irrotazionale (e no può essere conservativo)

irrotazionale
semp. connesso → conservativo

Determiniamo $V(x, y)$: $F = \nabla V$ ossia

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial V}{\partial x}(x, y) = 2xy \rightarrow V(x, y) = x^2y + \varphi(t) \\ \frac{\partial V}{\partial y}(x, y) = x^2 - 1 \quad \frac{\partial V}{\partial y}(x, y) = x^2 + \varphi'(y) = x^2 - 1 \\ \uparrow \text{ per } * \\ \text{perciò } \varphi'(y) = -1 \rightarrow \varphi(y) = -y + c \end{array} \right.$$

questi sono quindi tutti i potenziali:

$$V(x, y) = x^2y - y + c \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, c \text{ costante arbitraria}$$

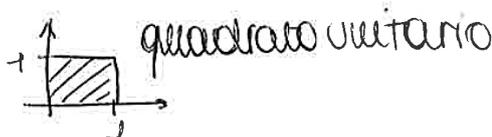
Integrali doppi

• Problema della misura (nel piano)

$D \subset \mathbb{R}^2$ limitato

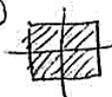
• $A(D) = \text{area}(D) \geq 0$

• $A([0,1] \times [0,1]) = 1$



• $A(D_1 \cup \dots \cup D_N) =$

$A(D_1) + \dots + A(D_N)$ se D_1, \dots, D_N non si sovrappongono
(D_1, \dots, D_N hanno in comune al più dei bordi)



• $A(T(D)) = A(D)$ se $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ è una traslazione o rotazione

Teoria di Peano - Jordan

• Teoria di Lebesgue → più recente, estensione della precedente

si definisce

$A_-(D) = \sup \{ A(P_1) : P_1 \subset D \text{ poligono} \}$

$A_+(D) = \inf \{ A(P_2) : P_2 \supset D \text{ poligono} \}$



(poligono = unione di un numero finito di triangoli)

$A_-(D) \leq A_+(D) \forall D \subset \mathbb{R}^2$ limitato

D si dice misurabile secondo Peano - Jordan se $A_-(D) = A_+(D)$
e si definisce area $(D) = A(D) = A_-(D) = A_+(D)$

ESEMPIO (patologico)

$D = \{ (x,y) \in \mathbb{Q}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \}$

$A_-(D) = 0$

$A_+(D) = 1$

→ D non è misurabile



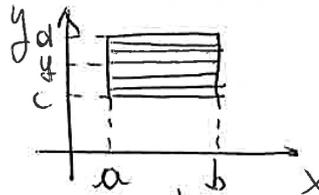
(funzione di Dirichlet in Analisi I)

Criterio di misurabilità

Un insieme è misurabile se il suo bordo è "sufficientemente regolare" → tutti i casi pratici sono di questo tipo

Formule di riduzione ad integrali iterati

$D = [a, b] \times [c, d] \rightarrow$ siamo su un rettangolo



funzione di x
 x fissata

$$\int_D f(x,y) dx dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y) dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y) dy \right) dx$$

(prima fisso la y poi fisso la x)

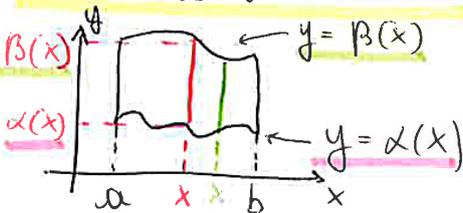
funzione di y fissata che integro inizialmente rispetto a y
(solito prima lungo le righe e poi lungo le colonne)

D verticalmente convesso

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b$$

$$\alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$$

$$\alpha, \beta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ continue}$$



$$\int_D f(x,y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y) dy \right) dx$$

(integrazione per verticali)

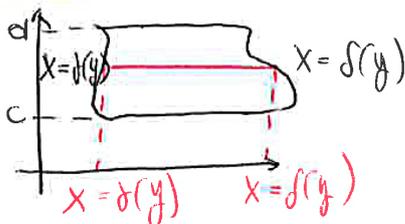
Attenzione! gli estremi variabili sono nell'integrale piu' interno (che eseguo per primo)

verticalmente convesso: retta verticale interseca l'insieme lungo un segmento

D orizzontalmente convesso $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d$

$$f(y) \leq x \leq g(y)\}$$

$$f, g : [c, d] \rightarrow \mathbb{R} \text{ continue}$$

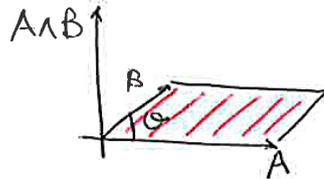


$$\int_D f(x,y) dx dy = \int_c^d \left(\int_{f(y)}^{g(y)} f(x,y) dx \right) dy$$

(integrazione per orizzontali)

Richiamo

area = $\|A \wedge B\|$



$A = (a_1, a_2, a_3)$
 $B = (b_1, b_2, b_3)$

$A \wedge B = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$

$A \wedge B = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$

$(0 \leq \theta \leq \pi)$

Se A, B giacciono nel piano x,y $A = (a_1, a_2, 0)$
 $B = (b_1, b_2, 0)$

$A \wedge B = (0, 0, a_1 b_2 - a_2 b_1)$

$\|A \wedge B\| = |a_1 b_2 - b_1 a_2|$

$\det \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$

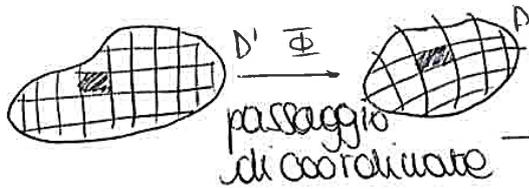


↑ modulo del det. di una certa matrice

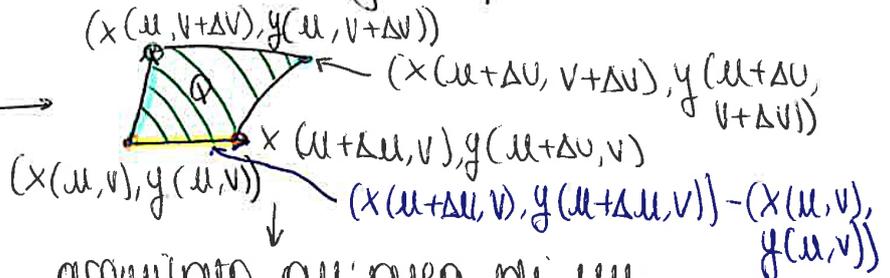
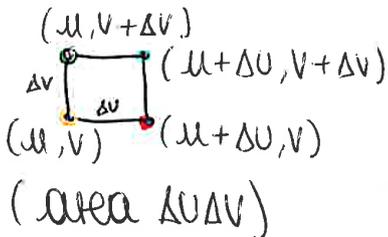
$\int_{\mathcal{D}} f(x,y) dx dy = \int_{\mathcal{D}'} f(x(u,v), y(u,v)) |\det J \Phi(u,v)| du dv$

$\begin{cases} x = x(u,v) & (x,y) \in \mathcal{D} \\ y = y(u,v) & (u,v) \in \mathcal{D}' \end{cases}$

$\Phi(u,v) = (x(u,v), y(u,v)), (u,v) \in \mathcal{D}'$
 $\mathcal{D} = \Phi(\mathcal{D}')$



studiamo la deformazione di un singolo quadratello



assimilato all'area di un parallelogramma costruito sui due vettori

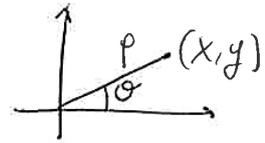
$= (x(u+du, v) - x(u, v), y(u+du, v) - y(u, v))$

Coordinate polari

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$$

$$\rho \geq 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$\phi(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$$



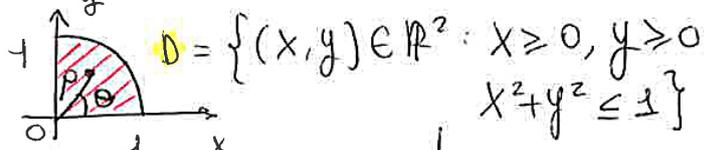
$$J\phi(\rho, \theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\int_D F(x, y) dx dy =$$

$$|\det J\phi(\rho, \theta)| = |\rho \cos^2 \theta + \rho \sin^2 \theta| = |\rho| = \rho \int_D F(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta$$

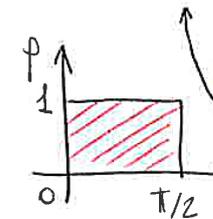
ESEMPIO

$$\int_D x dx dy$$



$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$= \int_D \rho \cos \theta \rho d\rho d\theta$$



$$D = \{(\theta, \rho) : 0 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq \rho \leq 1\}$$

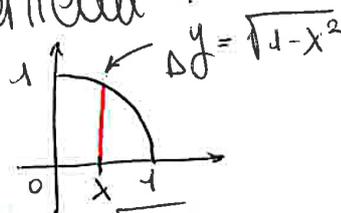
tutti i punti in questo
lavoro rho tra 0 e 1, e
tra 0 e pi/2

$$= \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \rho^2 \cos \theta d\rho d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos \theta \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_0^1 d\theta = \frac{1}{3} \int_0^{\pi/2} \cos \theta d\theta = \frac{1}{3} [\sin \theta]_0^{\pi/2} = \frac{1}{3}$$

Insieme delimitato da archi di circonferenza e
semirette uscenti dall'origine -> coordinate polari
utili per semplificare il problema

In alternativa, "per verticali":



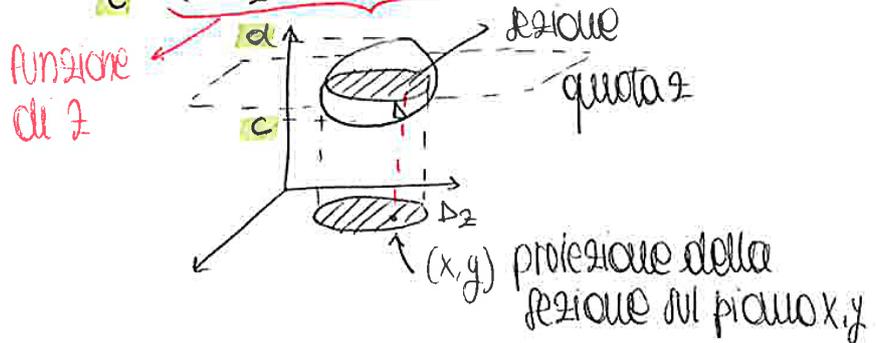
$$\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} x dy \right) dx = \int_0^1 x \cdot \sqrt{1-x^2} dx =$$

$$= \int_0^1 x \cdot \sqrt{1-x^2} dx =$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^1 -2x \sqrt{1-x^2} dx = -\frac{1}{2} \left[(1-x^2)^{3/2} \cdot \frac{1}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

Integrazione per strati // al piano xy

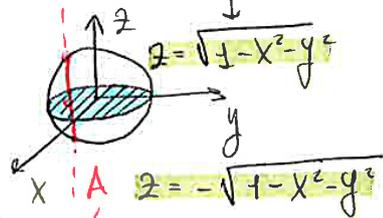
$$\rightarrow \int_D f(x,y,z) dx dy dz = \int_c^d \left(\int_{D_z} f(x,y,z) dx dy \right) dz$$



ESEMPIO $\int_D z^2 dx dy dz$
 $f(x,y,z)$

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

per strati // all'asse z



proiezione di D sul piano xy = $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$$z = \pm \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

$$\int_D z^2 dx dy dz = \int_A \left(\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z^2 dz \right) dx dy$$

$= \int_A \frac{2}{3} (1 - x^2 - y^2)^{3/2} dx dy \rightarrow$ integrale doppio su questo insieme
 lo calcolo con uno dei vari metodi per gli integrali doppi

per strati // al piano xy

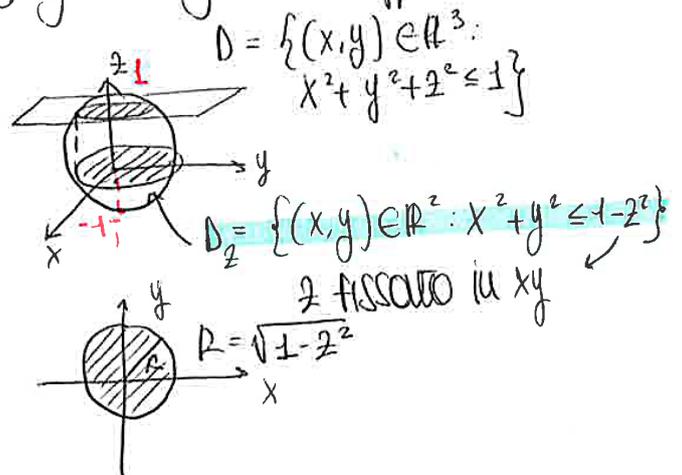
$$\int_D z^2 dx dy dz = \int_{-1}^1 \left(\int_{D_z} z^2 dx dy \right) dz$$

$$= \int_{-1}^1 z^2 \left(\int_{D_z} dx dy \right) dz$$

area(D_z) = $\pi R^2 = \pi(1 - z^2) \rightarrow$ area del cerchio

$$= \int_{-1}^1 \pi z^2 (1 - z^2) dz = \frac{4\pi}{15}$$

(strada più semplice perché la dz ha forma semplice e f non dipende da xy)



$$\int_D (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz = \int_D \rho^2 \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta$$

(26)

Applico 3 integrali dell'Analisi I

$$= \int_0^{2\pi} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^1 \rho^4 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \left[\frac{\rho^5}{5} \right]_0^1 \sin \varphi d\varphi d\theta =$$

$$= \frac{1}{5} \int_0^{2\pi} [-\cos \varphi]_{\pi/4}^{\pi/2} d\theta = \frac{1}{5} \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{2}}{2} d\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2\pi = \frac{\sqrt{2}\pi}{5}$$

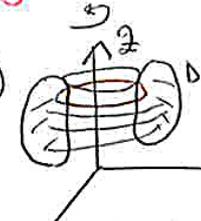
$$\int_D (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$$

$x = \rho \sin \varphi \cos \theta$ $y = \rho \sin \varphi \sin \theta$ $z = \rho \cos \varphi$ la somma al quadrato da $\rho^2 \rightarrow$ teorema Pitagora geometricamente

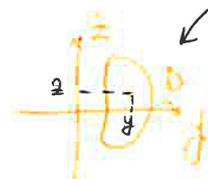
Volume di un solido di rotazione

D è semipiano y, z con $y \geq 0$ (formula Guldinus)
 Il volume del solido K generato dalla rotazione di D attorno all'asse z è

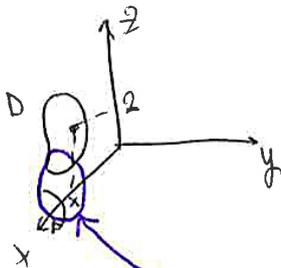
$$V = 2\pi \int_D y \, dx \, dz$$



ogni punto di b descrive una circonferenza di raggio y
 $L_{arc} = 2\pi y$



ESEMPIO



D è semipiano x, z con $z \geq 0$
 rotazione attorno all'asse x

$$V = \int 2\pi z \, dx \, dz$$

lunghezza circonferenza

• **Momento d'inerzia** di un punto materiale rispetto a una retta: il momento di inerzia del punto materiale rispetto a L è

(27)

$$I = mr^2$$



Se abbiamo un sistema di masse

$$I = \sum m_i r_i^2$$

Nel caso di un **corpo rigido** D con **densità** $f(x, y, z)$ momento di inerzia rispetto ad asse x :

$$I = \int_D (y^2 + z^2) f(x, y, z) dx dy dz$$

• caso **dominio piano** $D \subset \mathbb{R}^2$ con densità $f(x, y)$:

$$x_G = \frac{\int_D x f(x, y) dx dy}{\int_D f(x, y) dx dy} \quad y_G = \dots$$

Se D è omogeneo

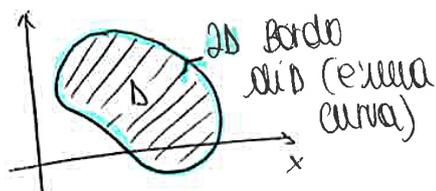
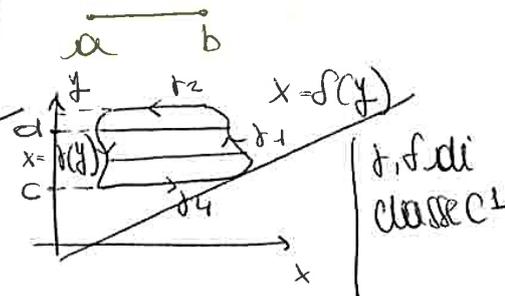
$$x_G = \frac{\int_D x dx dy}{\int_D dx dy} \quad y_G = \dots$$

Formula di Green

Richiamo: $\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$

$$\int_D \frac{\partial f}{\partial x} (x, y) dx dy = \int_{\partial D} f(x, y) dy$$

(verso antiorario)



$F(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y)) \rightarrow$ campo vettoriale

$$\int_{\partial D} F \cdot d\vec{e} = \int_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy \rightarrow$$

Formula di Green

↳ lungo il bordo

(esempio tipico di campo non conservativo con integr. 2π) (28)
 con formula di Green \rightarrow non posso $\int_0 \dots$
 perché f_1 e f_2 non sono definite su tutto D (non nell'origine)
 (non posso applicare la formula di Green)

OSSERVAZIONE

Se il verso fosse stato orario $\rightarrow \oplus \frac{\pi}{2}$
 \downarrow calcolate segno oppo alla fine

Applicazione al calcolo delle aree

$$F(x, y) = (0, x) \rightarrow \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 1 \rightarrow \int_{\partial D} F \cdot d\vec{e} = \int_D dx dy = \text{area } D$$

$$F(x, y) = (-y, 0) \rightarrow \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 1 \rightarrow \int_{\partial D} F \cdot d\vec{e} = \text{area } (D)$$

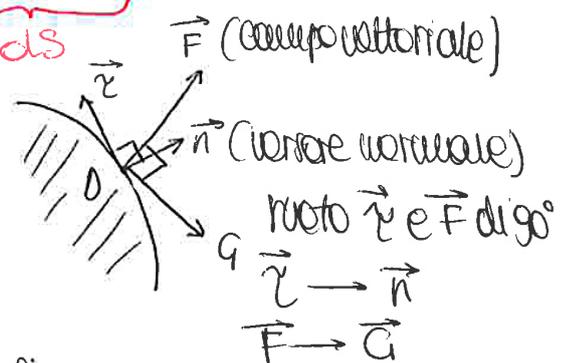
$$F(x, y) = \left(-\frac{y}{2}, \frac{x}{2}\right) \rightarrow \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 1 \rightarrow \int_{\partial D} F \cdot d\vec{e} = \text{area } (D)$$

Formula di Gauss nel piano

Partiamo da $\int_{\partial D} F \cdot d\vec{e} = \int_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dx dy$

$$\int_{\partial D} F \cdot d\vec{e} = \int F(\delta(t)) \cdot \delta'(t) dt \cdot \frac{\delta'(t)}{\|\delta'(t)\|} \cdot \underbrace{\|\delta'(t)\| dt}_{ds}$$

versore tangente



$$F = (f_1, f_2)$$

$$G = (g_1, g_2) = (f_2, -f_1) = \begin{cases} f_2 = g_1 \\ -f_1 = g_2 \end{cases}$$

$F \cdot \vec{e} = G \cdot \vec{n}$, perciò la formula di Green si riscrive come:

$$\int_{\partial D} G \cdot \vec{n} ds = \int_D \left(\frac{\partial g_1}{\partial x} + \frac{\partial g_2}{\partial y}\right) dx dy$$

$$\int_{\partial D} G \cdot \vec{n} ds = \int_D \text{div } G dx dy$$

$\text{div } G = \nabla \cdot G$ formula di Gauss nel piano / formula della divergenza

OSSEVAZIONI

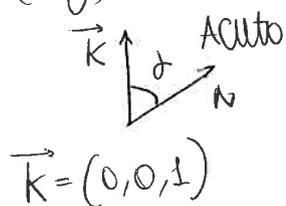
scrivendo la superficie in forma implicita $-F(x,y)+z=0$ (A)
 si vede che un vettore normale alla superficie in ogni punto è

$$N(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \left(-\frac{\partial F}{\partial x}(x,y), -\frac{\partial F}{\partial y}(x,y), 1 \right) \xrightarrow{\text{positiva}}$$

$$e \|N(x,y)\| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\right)^2}$$

OSSEVAZIONE

$N(x,y)$ è un vettore che "punta verso l'alto": infatti



$$\cos \delta = \frac{N \cdot \vec{k}}{\|N\| \cdot \|\vec{k}\|} = \frac{1}{\|N(x,y)\|} = \frac{1}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}} > 0$$

si può scrivere $\int_{\Sigma} d\sigma = \int_D \|N(x,y)\| dx dy$

o simbolicamente $d\sigma = \|N\| dx dy$ $dx dy = \cos \delta d\sigma$

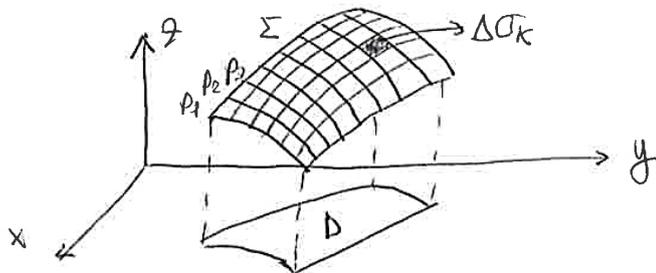
Integrale di superficie di prima specie (integrale di funzione)

$$\Sigma: z = f(x,y)$$

$$(x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2$$

$g(x,y,z)$ funz. continua su Σ

$$\int_{\Sigma} g d\sigma = \lim \sum_k g(P_k) \Delta \sigma_k = \int_D g(x,y,f(x,y)) \|N(x,y)\| dx dy$$



- se $g=1$, $\int_{\Sigma} d\sigma = \text{area } \Sigma$
- se g è una densità di massa superficiale su Σ , $\int_{\Sigma} g d\sigma$ è la massa totale
- coordinate del baricentro (analogue a quelle per (ut. tripi)

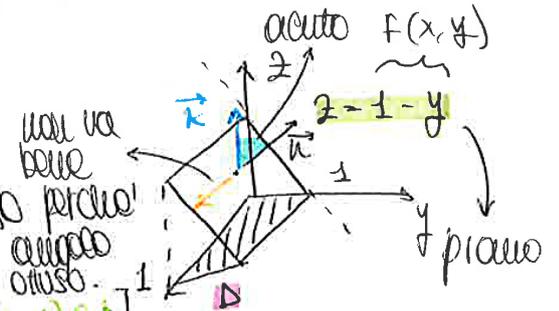
ESEMPIO

Calcolare il flusso di $F(x, y, z) = (\cos xz, xy, z)$ attraverso

$\Sigma: z = 1 - y, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$

con versore \vec{n} tale che $\vec{n} \cdot \vec{k} > 0$

angolo acuto; il punta verso l'alto



$z = 1 - y \rightarrow$ equazione $[\Sigma: z = f(x, y), (x, y) \in D]$

$0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \rightarrow$ disegnarli: definiremo la proiezione

$\vec{n} \cdot \vec{k} > 0 \quad N(x, y) = (-f_x, -f_y, 1) = (0, 0, 1)$

$\int_{\Sigma} F \cdot n d\sigma = \int_D F(x, y, f(x, y)) \cdot N(x, y) dx dy$

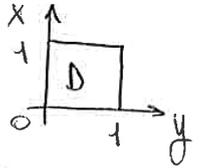
devo calcolarlo sui punti della superficie (sostituire z con 1-y)

$= \int_D \cos(x(1-y)), x, y, 1-y) \cdot (0, 0, 1) dx dy$

$= \int_D (xy + 1 - y) dx dy$

$= \int_0^1 \int_0^1 (xy + 1 - y) dx dy = \frac{3}{4}$

calcolo prodotto scalare



Flusso integrali di linea e di superficie

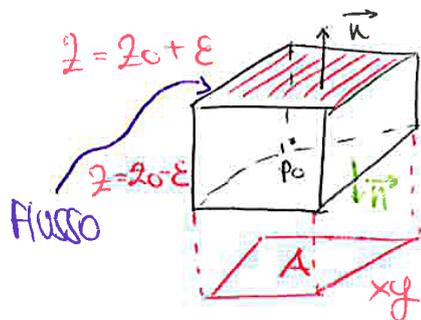
I specie di linea $\int_{\gamma} f ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt$
 (se $f=1 \int_{\gamma} ds =$ lunghezza γ)

II specie $\int_{\gamma} F \cdot d\vec{r} = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$
 (lavoro di un campo lungo γ ; circuitazione se γ è chiuso)

di superficie $\int_{\Sigma} g d\sigma = \int_D g(x, y, f(x, y)) \|N(x, y)\| dx dy$
 (se $g=1, \int_{\Sigma} d\sigma =$ area di Σ)

$\int_{\Sigma} F \cdot \vec{n} d\sigma = \int_D F(x, y, f(x, y)) \cdot N(x, y) dx dy$
 (flusso di un campo attraverso Σ)

prodotto scalare!



31 Allora il flusso di F attraverso le facce orizzontali è denotando con A le proiezioni di D sul piano x, y :

$$N = (-f_x, -f_y, 1) = (0, 0, 1)$$

$$\text{Flusso} = \int_A (f_1, f_2, f_3) \cdot N \, dx \, dy =$$

$$= \int_A (f_1, f_2, f_3) (0, 0, 1) \, dx \, dy =$$

$$= \int_A f_3(x, y, z_0 + \epsilon) \, dx \, dy$$

per la faccia inferiore:

$$= - \int_A f_3(x, y, z_0 - \epsilon) \, dx \, dy$$

$$\int_A (f_3(x, y, z_0 + \epsilon) - f_3(x, y, z_0 - \epsilon)) \, dx \, dy =$$

$$= \int_A \left(\int_{z_0 - \epsilon}^{z_0 + \epsilon} \frac{\partial f_3}{\partial z}(x, y, z) \, dz \right) \, dx \, dy =$$

$$= \int_D \frac{\partial f_3}{\partial z} \, dx \, dy \, dz$$

e analogamente per le altre facce. Pertanto

$$\Phi_D = \int_D \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} \right) \, dx \, dy \, dz \approx \text{div } F(p_0) \text{vol}(D)$$

\downarrow
approssimazione

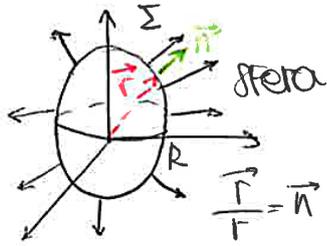
$\text{div } F(p) \approx \text{div } F(p_0)$
 $p \in D$

Pertanto $\rho(p_0) = \lim_{\text{diam } D \rightarrow 0} \frac{\Phi_D}{\text{vol}(D)} = \text{div } F(p_0)$

In conclusione abbiamo ottenuto la formula di Gauss:
(nello spazio)

$$\int_{\partial D} F \cdot \vec{n} \, d\sigma = \int_D \text{div } F \, dx \, dy \, dz.$$

(\vec{n} vettore normale uscente; F di classe C^1 su $D \cup \partial D$)
La formula vale anche quando D è regolare a tratti:



il campo non è definito

in $(0,0,0) \rightarrow$ non ammette derivate parziali continue nell'origine \rightarrow no Gauss

\vec{r} e \vec{n} hanno stessa direzione e verso

$$\int_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{n} d\sigma = \int_{\Sigma} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right) \cdot \vec{n} d\sigma$$

$\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right) = \vec{u} \rightarrow \vec{u} \cdot \vec{u} = 1$

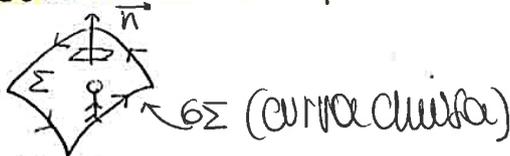
$$= \int_{\Sigma} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} d\sigma = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \int_{\Sigma} d\sigma = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} 4\pi R^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$r = R \forall \Sigma$$

Teorema del rotore (o di Stokes)

premessa: (covarianza del rotore per rotazioni)... saltare la parte fisica. (non leggere eventualmente)

consideriamo ora una superficie Σ con bordo, orientata. Il bordo $\partial\Sigma$ sarà quindi una curva chiusa che orientiamo in modo tale che un osservatore che la percorra disposto lungo \vec{n} veda Σ .



Sia $F = (F_1, F_2, F_3)$ un campo di classe C^1 su un aperto contenente Σ .

Siamo interessati alla circolazione:

$$C_{\Sigma} = \int_{\partial\Sigma} F \cdot d\vec{r}$$

osserviamo che se decomponiamo Σ in due parti Σ_1 e Σ_2 :

$$C_{\Sigma} = C_{\Sigma_1} + C_{\Sigma_2}$$



per tanto C_{Σ} è una grandezza

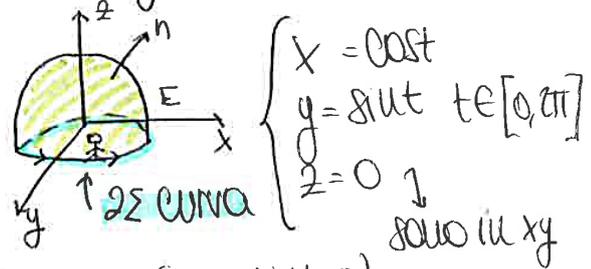
additiva rispetto a Σ , come della massa distribuita su una lamina, e pertanto è l'integrale di superficie di una certa densità (di superficie)

$$C_{\Sigma} = \int_{\Sigma} f d\sigma$$

ESEMPIO

Calcolare il flusso del rotore di $F(x,y,z) = (2x-y, yz^2, -yz^2)$ attraverso l'emisfero superiore della sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ con normale che punta verso l'alto.

$$\begin{aligned} \text{Flusso} &= \int_{\Sigma} \text{rot } F \cdot \vec{n} \, d\sigma = \int_{\Sigma} F \cdot d\vec{\sigma} \\ (\text{Stokes}) &= \int_0^{2\pi} (2\cos t - \sin t, -\sin t \cdot 0^2, -\sin t \cdot 0) \cdot (-\sin t, \cos t, 0) \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} -(2\cos t - \sin t) \sin t \, dt = \pi \end{aligned}$$



$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = 0 \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

sono in xy

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= (\cos t, \sin t, 0) \\ \sigma'(t) &= (-\sin t, \cos t, 0) \end{aligned}$$

(curva deve percorrere l'intero la superficie alla sua sinistra)

rimuovi: $\int_{\sigma} F \cdot d\vec{\sigma} = \int_a^b F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) \, dt$

L'informazione sulla direzione della normale si traduce in un'informazione sul segno ←

Riassunto

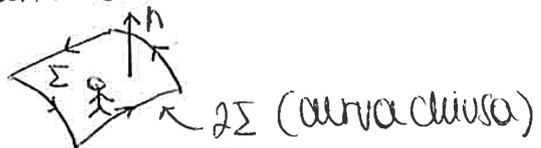
Green

- $\int_D \text{div } F \, dx \, dy \, dz = \int_{\partial D} F \cdot \vec{n} \, d\sigma$
- $D \subset \mathbb{R}^3$, aperto limitato
- \vec{n} vettore uscente
- F campo di classe C^1 (in un aperto contenente D e ∂D)



Stokes

- $\int_{\Sigma} \text{rot } F \cdot \vec{n} \, d\sigma = \int_{\partial \Sigma} F \cdot d\vec{\sigma}$
- Σ superficie con bordo, orientabile
- \vec{n} e verso di percorrenza di $\partial \Sigma$ coerenti
- F campo di classe C^1 in un aperto contenente Σ .



$$S_1 = a_0 + a_1$$

$$S_2 = a_0 + a_1 + a_2$$

$$\vdots$$

$$S_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$$

a_0, a_1, a_2 termini della serie
 s_0, s_1, s_2, \dots somme parziali
 $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 = 0 + 1 + 4 + 9 + 16$
 $a_n: 0, 1, 4, 9, 16, \dots$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n \rightarrow 0, 1, 5, 14, \dots$

$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ $\left\{ \begin{array}{l} s \in \mathbb{R} \text{ serie convergente} \\ +\infty \text{ serie pos. diverg.} \\ -\infty \text{ serie neg. diverg.} \\ \text{non esiste: serie indeterminata o oscillante} \end{array} \right.$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S$
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = -\infty$

Esempi (serie geometrica) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$ \downarrow somma serie
 $r = \frac{1}{2} \rightarrow$ ragione della serie (serie conv)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} r^n = 1 + r + r^2 + r^3 + \dots$$

$$S_n = 1 + r + r^2 + \dots + r^n = \begin{cases} \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} & r \neq 1 \\ n+1 & r = 1 \end{cases} \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \begin{cases} 0 & |r| < 1 \\ +\infty & r > 1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{l} r \neq 1: (1-r)(1+r+\dots+r^n) = 1 - r^{n+1} \\ \textcircled{1} r^0 + r^1 + \dots + r^n \\ -r - r^2 - \dots - r^n - r^{n+1} \end{array} \right)$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \begin{cases} \frac{1}{1-r} & \text{se } |r| < 1 \rightarrow \text{converge} \\ +\infty & \text{se } r \geq 1 \rightarrow \text{diverge} \\ \text{non esiste} & \text{se } r \leq -1 \rightarrow \text{indeterminata} \end{cases}$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} r^n = \frac{1}{1-r} \text{ se } |r| < 1$$

Esempio

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots \text{ indeterminata}$$

Esempio

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \log 2 + \log \frac{3}{2} + \log \frac{4}{3} + \dots$$

Moltiplicazione per $\lambda \in \mathbb{R}$

Se $\sum a_n$ converge e $\lambda \in \mathbb{R}$, allora $\sum \lambda a_n$ converge e

$$\sum \lambda a_n = \lambda \sum a_n \quad \left(\sum = \sum_{n=0}^{+\infty} \text{ sottrattivo} \right)$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3}{4^n} = 3 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4^n} = 3 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = 4$$

OSSERVAZIONE

Modificando un numero finito di termini di una serie, il carattere della serie rimane lo stesso (ma se la serie converge, la sua somma può cambiare).

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \cancel{1} + \cancel{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 2$$

$$2 + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = \cancel{2} + \cancel{1} - \frac{1}{2} + 2 + 1 = \frac{7}{2} \quad \uparrow \text{ somma nuova serie}$$

Condizione necessaria di convergenza

Se $\sum a_n$ converge allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

(Dimostrazione accumulata non da sapere)

Ma è una condizione sufficiente

↳ non è vero che se $\lim = 0 \rightarrow$ la serie converge

OSSERVAZIONE

Questo criterio si utilizza per mostrare che una serie non converge - se $\lim \neq 0 \rightarrow$ la serie non converge

ESEMPIO

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e^{-2} \neq 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x \quad (x \in \mathbb{R})$$

quindi la serie non converge (diverge positivamente per il testema)

serie a termini positivi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n, \text{ dove } a_n \geq 0 \quad \forall n$$

Teorema se $a_n \geq 0 \quad \forall n$, $\sum a_n$ converge o diverge positivamente

Dimostrazione $S_n = \underbrace{S_{n-1} + a_n}_{\geq 0} \geq S_{n-1}$

- $\sin x \sim x, x \rightarrow 0$
- $\log(1+x) \sim x, x \rightarrow 0$
- $\arcsin x \sim x, x \rightarrow 0$
- $\sinh x \sim x, x \rightarrow 0$
- $e^x - 1 \sim x, x \rightarrow 0$
- $\arctan x \sim x, x \rightarrow 0$
- $(1+x)^k - 1 \sim kx, x \rightarrow 0$
- $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}, x \rightarrow 0$

Esempio $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n-5+e^{-\sqrt{n}}}{n^3+1} = a_n$ (*)
 $a_n > 0$ per n grande ($2n-5 > 0$ ($n > \frac{5}{2}$))

$\frac{2n-5+e^{-\sqrt{n}}}{n^3+1} \sim \frac{2n}{n^3} = \frac{2}{n^2}$ Ma $\sum \frac{2}{n^2}$ converge (**)

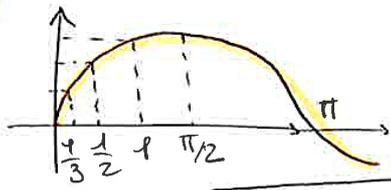
(*) converge

(**) $\frac{2}{n^2} \sim \frac{2}{n(n+1)} \Rightarrow \sum \frac{2}{n(n+1)}$ converge (Maggioli)

($n^2+n \sim n^2$)

Riassunto: $\left\{ \begin{array}{l} \sum r^n \text{ converge per } |r| < 1 \\ \sum \frac{1}{n} = +\infty \\ \sum \frac{1}{n^2} \text{ converge} \end{array} \right\}$

Esempio $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{1}{n}\right) = a_n$



$\frac{1}{n} \sin \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n^2}$ $n \rightarrow +\infty$
 $\sum \frac{1}{n^2}$ converge \rightarrow anche $\sum \frac{1}{n} \sin \frac{1}{n}$ converge
 (confr. asintotico)

$a_n \geq 0$
 $a_n \sim \frac{1}{n^2}$
 $\sum \frac{1}{n^2}$ converge
 quindi $\sum a_n$ converge

Esempio $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^3} \left(\rightarrow \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2} \right)$

$\log n = o(n^\alpha)$ per $n \rightarrow +\infty, \forall \alpha > 0$

($\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{n^\alpha} = 0$)

Per $\alpha=1$: $\frac{\log n}{n} \rightarrow 0 \Rightarrow \log n < n$ per n suff. grande

$\frac{\log n}{n^3} < \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$ Ma $\sum \frac{1}{n^2}$ converge $\Rightarrow \sum \frac{\log n}{n^3}$ converge
 (confr. asintotico)

Allora

1) se $l > 1$, $\sum a_n$ diverge (positivamente)

2) se $l < 1$, $\sum a_n$ converge

[Idea: a_n si comporta come l^n per $n \rightarrow +\infty$ $\sum l^n \dots$]

Esempio: $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{5}{n}\right)^{n^2} = a_n$ ($a_n \geq 0$ per $n \geq 5$)
 ↳ serie di termini positivi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{5}{n}\right)^{n^2} \right]^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{5}{n}\right)^n = e^{-5} = l < 1$$

limite notevole

↓
 la serie converge

Esempio: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} = a_n$

$$a_n^{1/n} = \frac{2}{n!^{1/n}} \sim \frac{2}{\frac{n}{e}} = \frac{2e}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad 0 = l < 1$$

↳ serie convergente

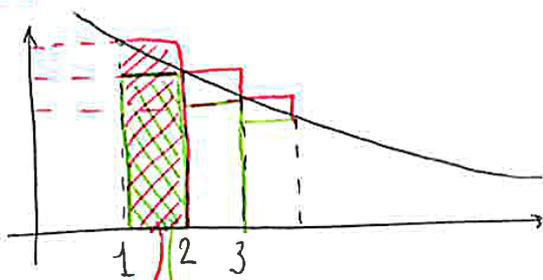
Criterio di Maclaurin (criterio integrale)

Sia $f: [1, +\infty)$ positiva e decrescente

Allora la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ e l'integrale

$\int_1^{+\infty} f(x) dx$ hanno lo stesso carattere.

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = +\infty$
 anche la serie è pos. divergente



area $f(1)$ area $f(2)$

Criterio di convergenza assoluta

Se $\sum a_n$ converge assolutamente, allora $\sum a_n$ converge

Esempio

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^{3/2}}$ converge perché converge assolutamente (già verificato sopra)

Definizione

Una serie si dice semplicemente convergente se è convergente ma non assolutamente convergente

Esempio

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \dots$$



non è assolutamente convergente perché

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \text{ diverge, tuttavia } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \text{ converge}$$

per il teorema di Leibniz.

Criterio di Leibniz

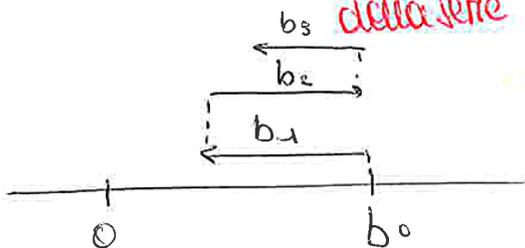
data $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n b_n$ con $b_n > 0$. Se

1) $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$

allora la serie converge e

2) $b_{n+1} \leq b_n \forall n$

$|S - S_n| < b_{n+1} \rightarrow$ l'errore è minore del primo termine trascurato
 ↳ formula parziale della serie



$$b_0 - b_1 + b_2 - b_3 \dots$$

Esempio:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

$$b_n = \frac{1}{n}$$

• inaffermata
 • decrescente \rightarrow la serie converge!

Esempio $\sum_{n=0}^{\infty} (x-2)^n$ ($x_0=2$)

Insieme di convergenza
 $\{x \in \mathbb{R} : |x-2| < 1\} = (1, 3)$



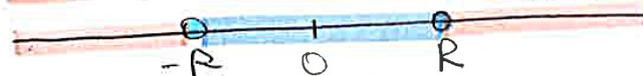
Esempio $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} (x-2)^n$

Lemma Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge in $r \neq 0$, allora converge

assolutamente in ogni punto $x : |x| < |r|$

(Ad esempio se converge in $r=5$, allora converge assolutamente in ogni $x \in (-5, 5)$)

Teorema Data $\sum a_n x^n$, esiste R (numero ≥ 0 oppure $+\infty$) tale che $\sum a_n x^n$ converge assolutamente per $|x| < R$ e non converge per $|x| > R$



Se $x = \pm R$ il teorema non dice nulla
 Sia $R = \sup \{x \geq 0 : \sum a_n x^n \text{ converge}\}$

formule per il raggio di convergenza

Supponiamo che esista (finito o $+\infty$) il limite

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l$ oppure \leftarrow occluso sui moduli

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = l$ \leftarrow occluso: c'è il reciproco

Allora $R = \frac{1}{l}$ (se $l=0, R=+\infty$; se $l=+\infty, R=0$)

osservazione

$\sum a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$ converge sempre almeno in $x=0$.
 ($a_0 + 0 + 0 + \dots = a_0 \rightarrow$ converge)

Esempio $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n} x^n$

1) la serie

(*) $\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ ha raggio di convergenza R .

2) posto $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ $x \in (-R, R)$ allora $f(x)$ è derivabile su $(-R, R)$ e

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \quad \forall x \in (-R, R)$$

$$[\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1}]$$

Conoscenza

Se $\sum a_n x^n$ ha raggio di convergenza $R > 0$ la funzione somma $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ è derivabile infinite volte su $(-R, R)$.

OSSERVAZIONE $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots \rightarrow f(0) = a_0$
 $f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots \rightarrow f'(0) = a_1$
 $f''(x) = 2a_2 + 6a_3 x + \dots \rightarrow f''(0) = 2a_2$

Però $f^{(n)}(0) = n! a_n$

serie notevoli

$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots$ $R = +\infty$ converge $\forall x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = 1 + x + \frac{2x^2}{2!} + \frac{3x^3}{3!} + \dots = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = f(x)$

$[y' = y] \rightarrow f(x) = ce^x$ $f(0) = 1 = c$ (problema Cauchy)

$\rightarrow f(x) = e^x$

$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Ad es se $x = \frac{1}{2}$
 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n \cdot n!} = e^{-1/2} = \sqrt{e}$

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\sinh x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

quindi

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \quad \forall x \in (-1, 1]$$

(41)

per $x=1$, $\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \dots$ → convergente per il criterio di Leibniz.

Esempio $\int_0^x e^{-t^2} dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-t^2)^n}{n!} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)} x^{2n+1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\left[\int_0^x t^{2n} dx = \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right]$$

Operazioni con le serie di potenze

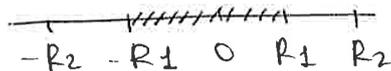
formule

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) x^n$$

\downarrow \downarrow $\rightarrow R \geq \min\{R_1, R_2\}$
 R_1 R_2 $\text{e } R = \min\{R_1, R_2\} \text{ se } R_1 \neq R_2$

Esempio

$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} -x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (1-1)x^n = 0 \rightarrow$ converge $\forall x$
 $R_1=1$ $R_2=1$ $R=+\infty$



$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} x^n \rightarrow R = \min\{1, 2\} = 1$
 $R_1=1$ $R_2=2$ (perché $1 \neq 2$)

serie geometrica con ragione $\frac{x}{2}$ (converge per $|\frac{x}{2}| < 1$)

serie prodotto (prodotto alla Cauchy)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n \quad \text{dove } c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

$$R \geq \min\{R_1, R_2\}$$

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots) (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots)$$

Integrazione per serie delle eq differenziali (no esame) (42)

questo metodo si basa sul principio di identità della serie di potenze

Se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ in un intorno di $x_0 = 0$ allora

$$a_n = b_n \quad \forall n$$

[vero perché $a_n = b_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ dove $f(x)$ è la funzione somma]

Esempio

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad y(x) \text{ funz. incognita}$$

Concludiamo la funzione nella forma $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$y' = y \rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) a_{k+1} x^k \quad \begin{cases} k=n-1 \\ k \geq 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

$$\rightarrow a_n = (n+1) a_{n+1} \quad \forall n \geq 0$$

$$a_0 = a_1 \rightarrow a_1 = a_0 \quad (n=0)$$

$$a_1 = 2a_2 \rightarrow a_2 = \frac{1}{2} a_1 = \frac{1}{2} a_0 \quad (n=1)$$

$$a_2 = 3a_3 \rightarrow a_3 = \frac{1}{3} a_2 = \frac{1}{3 \cdot 2} a_0 \quad (n=2)$$

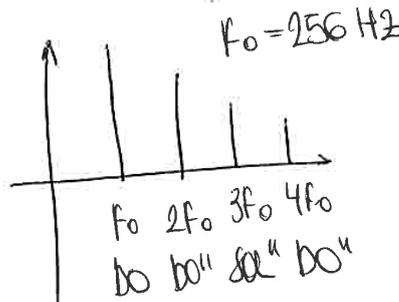
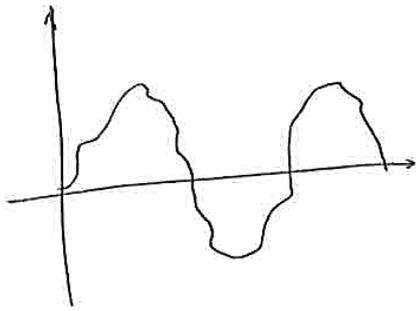
$$a_3 = 4a_4 \rightarrow a_4 = \dots = \frac{1}{4 \cdot 3 \cdot 2} a_0$$

$$a_n = \frac{1}{n!} a_0 = \frac{1}{n!} \quad \forall n \geq 0$$

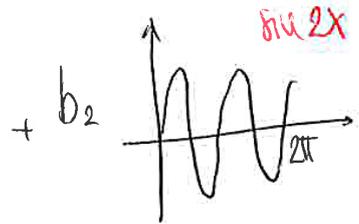
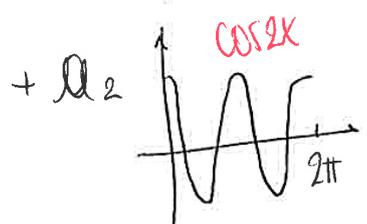
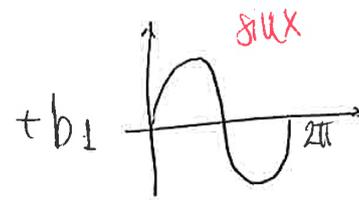
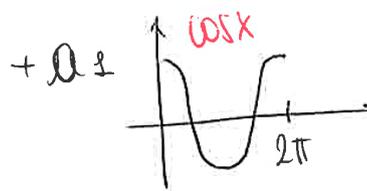
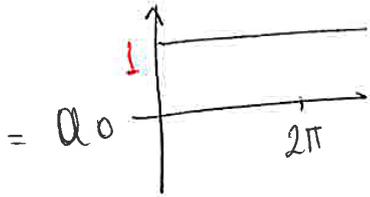
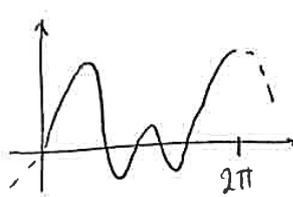
ma $y(0) = a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0^2 + \dots = a_0 = 1$ (condizione iniziale)

$$\rightarrow y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n = e^x$$

corde del violino (do centrale)



f_0 → armonica fondamentale
 $2f_0, 3f_0$ → armoniche superiori



+ ...

Problema: determinare i coefficienti a_n, b_n ...

Polinomi trigonometrici (periodo $T=2\pi$) (Es: $3 + 2\cos x + 7\cos 3x + 5\sin 3x$)

Formule per i coefficienti

$$* f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^N \underbrace{a_n \cos nx}_{\gamma_n(x)} + \underbrace{b_n \sin nx}_{\gamma_n(x)}$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \quad (\text{media di } f \text{ su periodo})$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad \forall n \geq 1$$

OSSERVAZIONI

a_0 è la media integrale di f su $[-\pi, \pi]$ (o su qualsiasi altro intervallo di lunghezza 2π perché:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_a^{a+2\pi} f(x) dx \quad \forall a \in \mathbb{R} \text{ essendo } f \text{ periodica)}$$

- se f è pari ($f(-x) = f(x) \forall x \in \mathbb{R}$) allora $b_n = 0 \quad \forall n \geq 1$
- se f è dispari ($f(-x) = -f(x) \forall x \in \mathbb{R}$) allora $a_n = 0 \quad \forall n \geq 1$

Definizione (serie di Fourier di f)

Si dice serie di Fourier di f la serie

$$a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx]$$

dove a_0, a_n, b_n sono dati dalle formule sopra

OSSERVAZIONE: Anche se $f(x)$ è continua la sua serie di Fourier potrebbe non convergere a $f(x)$ in qualche punto x .

Teorema di convergenza puntuale

Supponiamo che f sia regolare su tratti: ossia esiste un numero finito di punti $x_i \in [-\pi, \pi], i = 1, \dots, k$ tali che f è di classe C^1 su (x_i, x_{i+1}) ed esistono finiti i limiti:

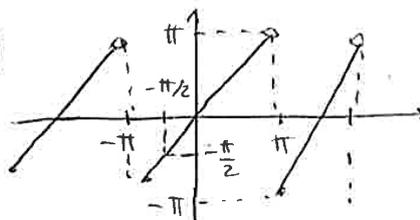
$$\lim_{x \rightarrow x_i^-} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow x_i^+} f(x)$$

Allora in ogni punto $x_0 \in \mathbb{R}$ la serie di Fourier f converge a $\frac{1}{2} [\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)]$ [$= f(x_0)$ se f è continua in x_0]

(ossia $\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N(x_0) = \uparrow$; in particolare $S_N(x_0) \rightarrow f(x_0)$ se f è continua in x_0)

Esempio (dente di sega)

$f(x) = x$ su $[-\pi, \pi)$ \rightarrow dispari



$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x) \sin nx}_{\text{pari}} dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx dx =$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[x \cdot \frac{-\cos nx}{n} \right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{-\cos nx}{n} dx =$$

$$= \frac{-2(-1)^n}{n} + \frac{2}{\pi} \underbrace{\left[\frac{\sin nx}{n^2} \right]_0^{\pi}}_{n \geq 1} = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

serie di Fourier di $f(x)$: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin nx$

Teorema di convergenza in norma quadratica (o in L^2 o in norma quadratica) (L per Lebesgue)

se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è 2π periodica e continua a tratti su $[-\pi, \pi]$

allora $\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - S_N(x))^2 dx = 0$

Conseguenze

1) $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx = 2\pi a_0^2 + \pi \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2)$ (formula di Parseval) da sapere bene

2) $\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_N(x)]^2 dx = \pi \sum_{n=N+1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2)$

per (2) $= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx - \left[2\pi a_0^2 + \pi \sum_{n=1}^N (a_n^2 + b_n^2) \right]$

Esercizio

Dato $f(x) = \log\left(\frac{3-x}{2+x}\right)$ scrivere la formula di Taylor centrata in $x_0 = 0$
 $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)$

$$\left[\log(1+t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} t^n\right]$$

$$f(x) = \log(3-x) - \log(2+x) = \log\left[3\left(1 - \frac{x}{3}\right)\right] - \log\left(2\left(1 + \frac{x}{2}\right)\right)$$

$$= \log 3 + \log\left(1 - \frac{x}{3}\right) - \log 2 - \log\left(1 + \frac{x}{2}\right) =$$

$$= \log 3 - \log 2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left(-\frac{x}{3}\right)^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left(\frac{x}{2}\right)^n =$$

$$= \log \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{n \cdot 3^n} x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 2^n} x^n$$

$\rightarrow (-1)^{2n+1} = (-1)^{2n} \cdot (-1) = -1$

$$= \underbrace{\log \frac{3}{2}}_{a_0} + \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\left(-\frac{1}{n \cdot 3^n} - \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 2^n}\right)}_{a_n} x^n$$

$$f^{(5)}(0) = 5! a_5 = 5! \left(-\frac{1}{5 \cdot 3^5} - \frac{(-1)^6}{5 \cdot 2^5}\right) x^5 \quad \left| \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right.$$

Stesso esercizio con $x_0 = 1$: $x - 1 = y \rightarrow x = y + 1$

$$\log\left(\frac{3-x}{2+x}\right) = \log\left(\frac{2-y}{3+y}\right) = \text{sviluppo in } y = 0$$

→ torno alla variabile x sostituendo $y = x - 1$

→ trovo $\sum a_n (x-1)^n$

b.

$$\int_{\pi}^{5\pi} (\cos^4(x) + \sin^2(x) \cos^2(x)) dx =$$

$$= \int_{\pi}^{5\pi} \cos^2(x) \left[\cos^2 x + \sin^2 x \right] dx$$

$$= \int_{\pi}^{5\pi} \cos^2(x) dx = \int_{\pi}^{5\pi} \frac{1 + \cos(2x)}{2} dx =$$

$$= \int_{\pi}^{5\pi} \frac{1}{2} dx + \int_{\pi}^{5\pi} \frac{\cos(2x)}{2} dx =$$

$$= \left[\frac{1}{2} x \right]_{\pi}^{5\pi} + \frac{1}{2} \int_{\pi}^{5\pi} \cos(2x) \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} dx$$

$$= \left(\frac{5\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \right) + \frac{1}{4} \left[\sin(2x) \right]_{\pi}^{5\pi} =$$

$$= 2\pi + \frac{1}{4} \left[\sin(10\pi) - \sin(2\pi) \right] =$$

$$= 2\pi + \frac{1}{4} (0 - 0) = 2\pi$$

c.

$$\int_0^{\pi} (\sin^3(x) + 16 \sin^3(x) \cos^2(x)) dx =$$

$$= \int_0^{\pi} \sin^3(x) \left[1 + 16 \cos^2(x) \right] dx =$$

$$= \int_0^{\pi} \sin(x) (1 - \cos^2(x)) (1 + 16 \cos^2(x)) dx$$

Substituzione: $\cos(x) = t$ $x=0 \rightarrow t=1$
 $\sin(x) dx = -dt$ $x=\pi \rightarrow t=-1$

$$= - \int_{-1}^1 (1 - t^2) (1 + 16t^2) dt = - \int_{-1}^1 1 - t^2 + 16t^2 - 16t^4 dt =$$

$$= - \int_{-1}^1 1 + 15t^2 - 16t^4 dt = - \left[t + 15 \frac{t^3}{3} - 16 \frac{t^5}{5} \right]_{-1}^1 =$$

$$3) D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| + (x-2)^2 \leq 1\}$$

$$|y| \leq 1 - (x-2)^2$$

$$(x-2)^2 - 1 \leq y \leq 1 - (x-2)^2$$

$$x^2 - 4x + 4 - 1 \leq y \leq 1 - x^2 + 4x - 4$$

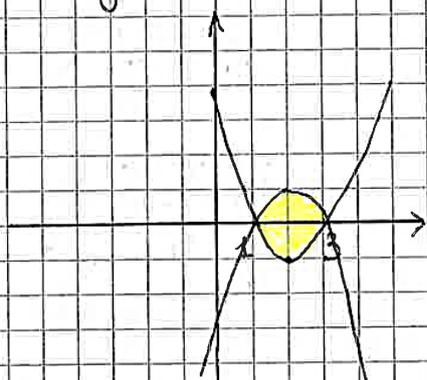
$$x^2 - 4x + 3 \leq y \leq -x^2 + 4x - 3$$

$$V_1 = \left(-\frac{4}{2}; -\frac{-16-12}{4} \right)$$

$$(2; -1)$$

$$V_2 = \left(-\frac{4}{-2}; -\frac{-16-12}{-4} \right) =$$

$$(2; 1)$$



$$\text{Area} = \int_1^3 (x^2 - 4x + 3) dx - \int_1^3 (-x^2 + 4x - 3) dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{2}{1} \frac{x^2}{2} + 3x \right]_1^3 - \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{2}{1} \frac{x^2}{2} - 3x \right]_1^3 =$$

$$= \left(\frac{27}{3} - 18 + 9 - \frac{1}{3} + 2 - 3 \right) - \left(-\frac{27}{3} + 18 - 9 + \frac{1}{3} - 2 + 3 \right) =$$

$$= -\frac{4}{3} - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$