



centroappunti.it

CORSO LUIGI EINAUDI, 55/B - TORINO

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 2549A

ANNO: 2023

A P P U N T I

STUDENTE: Brusa Chiara

MATERIA: Elettrotecnica - Prof. Stievano

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTI E NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.

ELETTROTECNICA

1. Introduzione

Circuiti elettrici → interconnessioni di semplici dispositivi chiamati elementi

Due variabili fondamentali

corrente tensione (+ potenza)

Due postulati fondamentali: leggi di Kirchhoff

1.1 Corrente

Grandezza elettrica fondamentale: carica (q)

Unità di misura della carica: Coulomb [C]

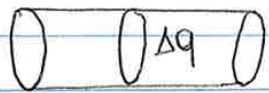
Principio di conservazione della carica elettrica:

la carica elettrica non si crea né si distrugge, può solo essere spostata

Materia: cariche positive e negative

Per convenzione, le cariche in movimento sono positive

Cariche in movimento → corrente



$$i = \frac{\Delta q}{\Delta t}$$

La corrente rappresenta il flusso di cariche

$$i(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt}$$

La corrente è la stessa attraverso qualsiasi sezione del filo

La scelta del verso di riferimento è arbitraria e può essere fatta a priori

Tensione e corrente sono **funzioni del tempo** ($v(t)$ e $i(t)$)

Corrente DC → **direct current**

Corrente AC → **alternating current**

1.3 **Ipotesi nella definizione di circuito**

Circuito elettrico: **interconnessione di un numero arbitrario di elementi collegati per mezzo di fili**
Gli elementi sono accessibili tramite terminali in base al numero di terminali: **bipolo, tripolo, quadripolo**.

I fili che collegano gli elementi sono conduttori ideali, sono cioè equipotenziali.

↳ le variazioni di energia avvengono solo all'interno degli elementi → **Circuiti concentrati**

Le dimensioni e la posizione degli elementi nello spazio sono irrilevanti

Conta solo il modo in cui gli elementi sono connessi tra loro → **topologia**

Comportamento elementi descritto da variabili esterne

- tensioni tra terminali
- correnti che scorrono nei terminali

Ipotesi circuito: determinare topologia e caratteristiche elementi

KKC \rightarrow impone vincoli sulle correnti entranti o uscenti dagli elementi

La corrente entrante in un bipolo è sempre uguale a quella uscente

◆ legge di Kirchhoff delle tensioni (LKT)

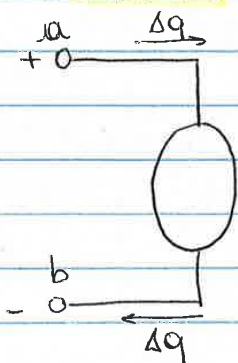
la somma algebrica delle tensioni lungo una maglia è nulla

la LKT è conseguenza del principio di conservazione dell'energia

Poiché la carica ritorna al punto di partenza, la sua energia finale dovrà essere pari a quella iniziale.

$$\sum_k V_k(t) = 0 \text{ per ogni } t$$

1.5 Potenza



$\Delta q > 0$ attraversa l'elemento da a a b nell'intervallo Δt

$V \rightarrow$ tensione tra a e b

$$\Delta W = V \Delta q$$

Definiamo potenza e' energia perduta nel tempo

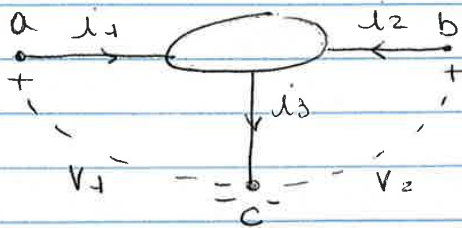
$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

$$P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{V \Delta q}{\Delta t} = V \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = Vi$$

la potenza si misura in watt [W]

♦ potenza assorbita da elementi multiterminali
 la potenza assorbita da un elemento con più di due terminali può essere ricavata con procedimento simile a quello per i bipoli

$$i_1 + i_2 = i_3$$



una carica Δq_1 , associata alla corrente i_1 , attraversa l'elemento da a a c in Δt
 una carica Δq_2 , associata alla corrente i_2 , attraversa l'elemento da b a c in Δt

Energia perduta complessivamente

$$\Delta W = v_1 \Delta q_1 + v_2 \Delta q_2$$

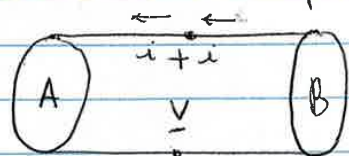
$$\frac{\Delta W}{\Delta t} = v_1 \frac{\Delta q_1}{\Delta t} + v_2 \frac{\Delta q_2}{\Delta t}$$

$$p = v_1 i_1 + v_2 i_2$$

potenza assorbita dal tripolo

la scelta del terminale comune è arbitraria
 la formula scritta fornisce la potenza assorbita solo se i versi sono coordinati

1.6 Conservazione della potenza



potenza ass. da A $p_A = vi$
 potenza ass. da B $p_B = -vi$

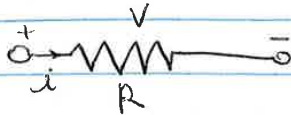
$$-p_A = p_B$$

se $p_A > 0$ l'elemento A assorbe potenza, l'elemento B eroga potenza.

$$p_A + p_B = vi + (-vi) = 0$$

2. Circuiti resistivi

2.1 Resistore



Il resistore è un bipolo caratterizzato da una relazione di proporzionalità tra la tensione e la corrente

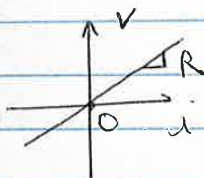
$$V = Ri$$

dove V ed i hanno versi di riferimento coordinati

Questa relazione è detta **legge di Ohm**

la costante $R > 0$ è detta **resistenza**

$$1 R = 1 \text{ volt} / 1 \text{ ampere}$$



retta passante per l'origine, di pendenza R

↳ relazione lineare → **resistore lineare**

Resistore lineare: elemento ideale → non esiste un dispositivo fisico che si comporta esattamente allo stesso modo: esistono dispositivi con un comportamento simile
La resistenza R ha la seguente espressione

$$R = \rho \frac{l}{A}$$

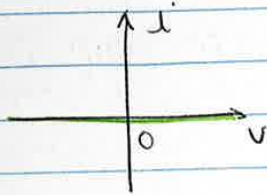
l è la lunghezza, A l'area della sezione trasversale, ρ una costante caratteristica del materiale detta **resistività**

Aumentando la resistività, aumenta la frequenza
materiali con maggiore resistività → corrente minore
la relazione $V = Ri$ può essere invertita

$$i = \frac{1}{R} V = GV$$

$G = 1/R$ è detta **conduttanza** e si misura in Siemens [S]

$$1 S = 1 \text{ ampere} / 1 \text{ volt}$$



retta orizzontale
passante per l'origine nel
piano $i-v$

la corrente in un certo circuito può essere qualsiasi
la tensione ai capi di un circuito aperto può
essere qualsiasi. I valori effettivi dipendono
dal resto del circuito

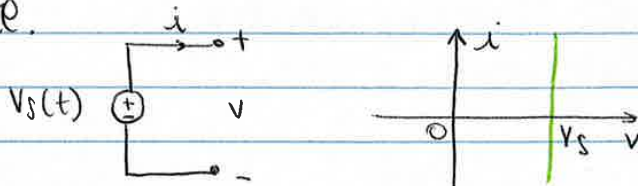
- la **dualità** è una proprietà generale dei circuiti: le definizioni, le formule e i teoremi hanno sempre una doppia versione

2.3 Generatori indipendenti

Il **generatore indipendente di tensione** è caratterizzato dalla relazione

$$v = v_s(t)$$

dove $v_s(t)$ è una funzione nota del tempo, o una costante.



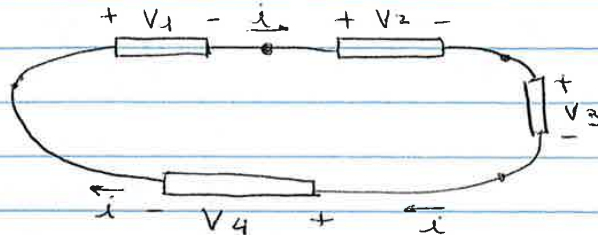
In un generatore indipendente di tensione, **la tensione non dipende dalla corrente**, cioè vale $v_s(t)$ quale che sia il valore di i .

- l'elemento duale è il **generatore indipendente di corrente**, caratterizzato dalla relazione
$$i = i_s(t)$$

2.4 Circuiti ad una maglia - partitore di tensione

Circuito più semplice che possiamo considerare: elementi in serie → essi sono attraversati dalla stessa corrente i .

LKT: $V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = 0$



$$V = R_1 I + R_2 I + \dots + R_n I$$

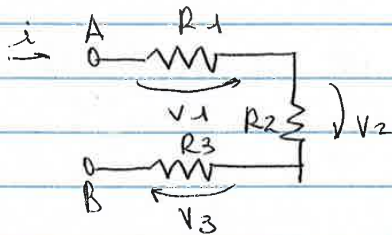
$$V = (R_1 + R_2 + \dots + R_n) I$$

$$V = R_e I$$

↳ resistenza equivalente

I resistori in serie si sommano

Il partitore di tensione → vale per connessioni di tipo serie



$$V = (R_1 + R_2 + R_3) I$$

↓
voglio calcolare V_1, V_2, V_3

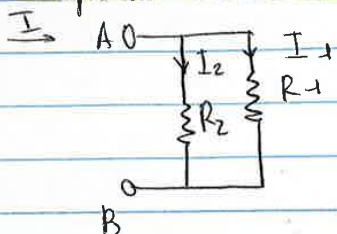
Poiché $V_1 = R_1 I$

$V_2 = R_2 I$

$V_3 = R_3 I$

$$\left\{ \begin{aligned} V_1 &= V \frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_3} \\ V_2 &= V \frac{R_2}{R_1 + R_2 + R_3} \\ V_3 &= V \frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \end{aligned} \right.$$

caso speciale con due resistori



$$I_1 = I \frac{G_1}{G_1 + G_2} \times R_1 R_2$$

$$\begin{cases} I_1 = I \frac{R_2}{R_1 + R_2} \\ I_2 = I \frac{R_1}{R_1 + R_2} \end{cases}$$

resistenza **NON** di interesse!

Il partitore di tensione e il partitore di corrente sono **circuiti duali**. Infatti, scambiando i termini duali, V con i , R con G , le formule si scambiano.

due casi limite di partitore di corrente

1) conduttanza G_2 nulla \rightarrow **circuito aperto**

$$i_1 = i_g \quad i_2 = 0$$

la corrente non può scorrere nel circuito aperto e attraversa esclusivamente R_1
la tensione è $V = R_1 i_g$

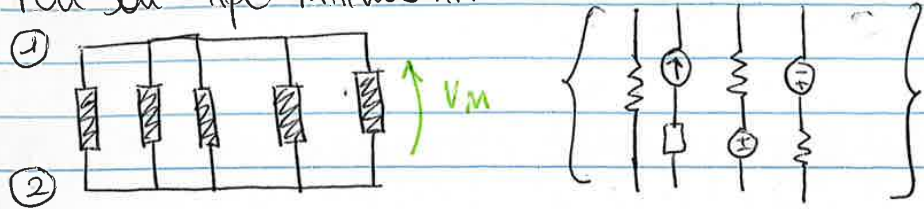
2) resistenza R_2 nulla \rightarrow **corto circuito**

$$i_1 = 0 \quad i_2 = i_g$$

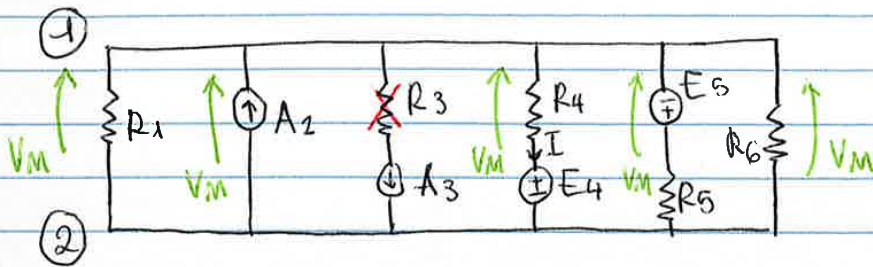
la tensione V è nulla, dunque è nulla la tensione ai capi di R_1 ; $i_1 = V/R_1 = 0$
la corrente i_g scorre nel corto circuito

Teoria di Millmann

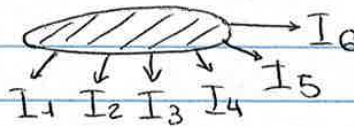
Valore per reti di tipo Millmann



Discussione basata su un esempio

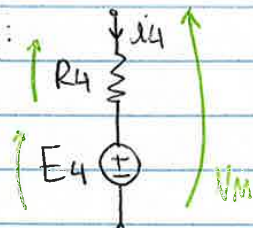


KCL al nodo 1



$$\frac{V_M}{R_1} - A_2 + A_3 + i_4 + i_5 + \frac{V_M}{R_6} = 0$$

calcolo i_4 :

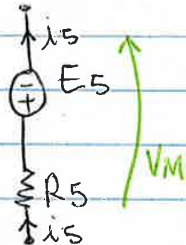


via KVL:

$$E_4 + R_4 i_4 - V_M = 0$$

$$i_4 = \frac{V_M - E_4}{R_4}$$

calcolo i_5 :

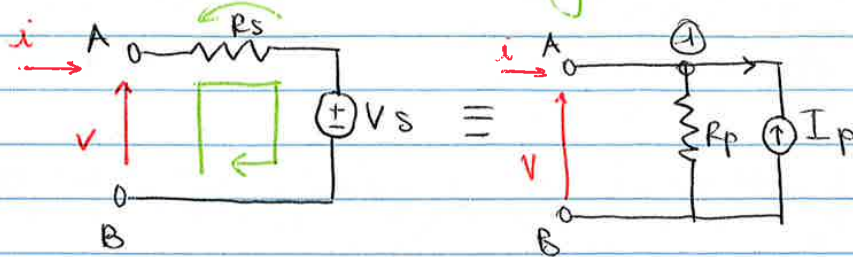


$$E_5 - R_5 i_5 + V_M = 0$$

$$i_5 = \frac{V_M + E_5}{R_5}$$

$$\rightarrow \frac{V_M}{R_1} - A_2 + A_3 + \frac{V_M - E_4}{R_4} + \frac{V_M + E_5}{R_5} + \frac{V_M}{R_6} = 0$$

Trasformazione delle sorgenti



Due bipoli sono equivalenti se hanno la stessa caratteristica

X KVL

$$V - R_s i - V_s = 0$$

$$V = R_s i + V_s$$

$$i = \frac{V}{R_p} - I_p$$

$$V = R_p i + R_p I_p$$

Condizione di equivalenza

$$R_s = R_p$$

$$V_s = R_p I_p$$

$$I_p = \frac{V_s}{R_s}$$

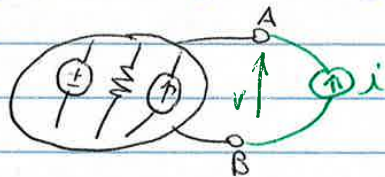
Come posso calcolare i diversi contributi?

$$V = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \dots$$

$$\alpha_1 = \frac{V}{e_1} \left| \begin{array}{l} e_2 = 0 \\ a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{tutti gli altri} \\ \text{generatori sono} \\ \text{annullati (} \equiv \text{SPENZI)} \end{array} \quad \beta_1 = \frac{V}{a_1} \quad \text{tutti gli altri spenti}$$

Teorema di Thevenin → equivalente

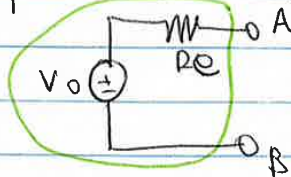
Dato un bipolo proprio, lineare, tempo invariante, resistivo, che ammetta soluzione quando annesso a un **generatore di corrente indipendente**



(1) β ha caratteristica $V = R_e i + V_0$

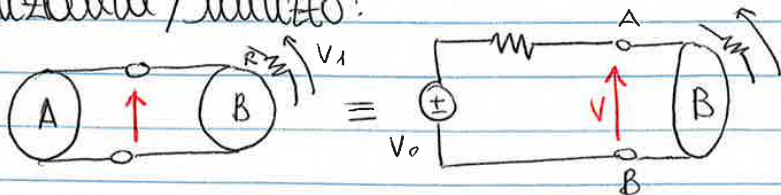
resistenza ← → tensione
equivalente a vuoto

(2) β è anche equivalente a un bipolo

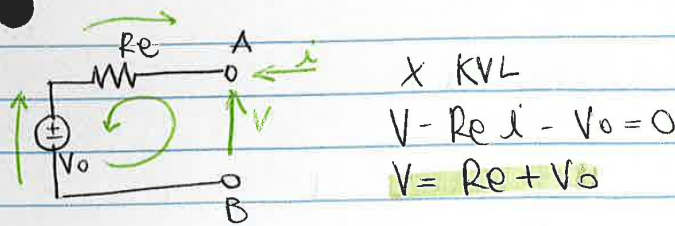


Equivalente di Thevenin ("serie")

Potenzialità / utilizzo:

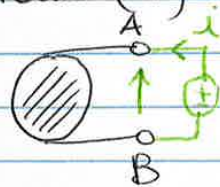


queste due reti hanno la stessa "soluzione" (V è la stessa)



Teorema di Norton

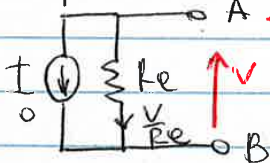
Dato un bipolo β ... (come Thevenin) proprio, lineare, t-invariante, che ammetta soluzione quando pilotato / connesso da / a un generatore indipendente di tensione (V)



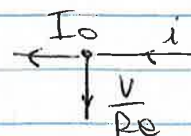
(1) β ha una caratteristica

$$i = \frac{V}{R_e} + I_0$$

(2) β è equivalente a

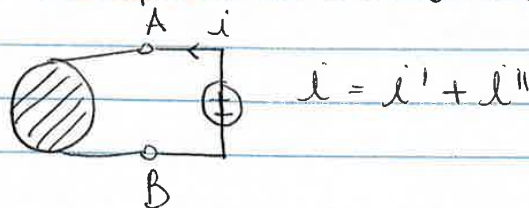


equivalente di Norton
(di tipo parallelo)

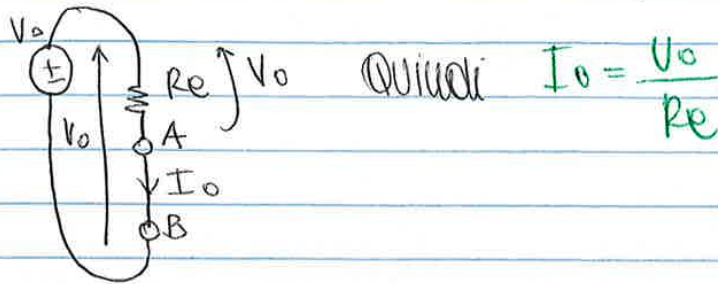
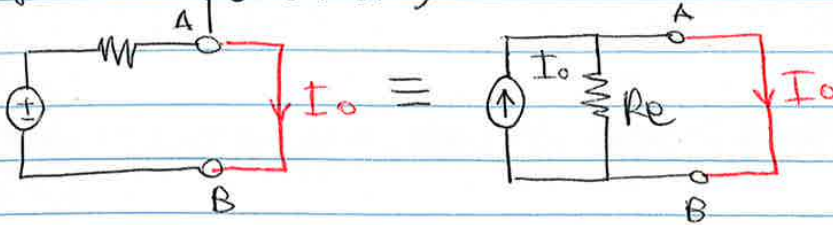
(2) \leftrightarrow (1) via KCL e (1) 

$$i = \frac{V}{R_e} + I_0$$

Si giustifica come per Thevenin con sovrapposizione degli effetti

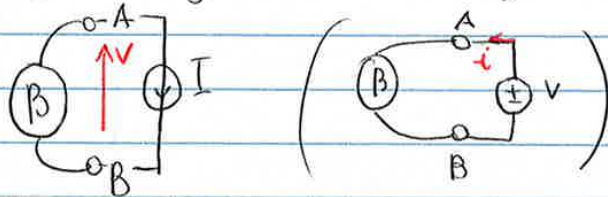


#2 Deriviamo l'equivalenza tra le "sorgenti"
(serie \leftrightarrow parallelo)



Esistenza degli equivalenti

Thevenin (Norton) non esiste (\exists) se la rete



Non è riproducibile in alcuni casi

Oppure

- (1) se la $R_e < \infty$ e $R_e \neq 0 \rightarrow \exists T, N$
- (2) se $R_e = \infty \rightarrow \exists T, \nexists N$
- (3) se $R_e = 0 \rightarrow \exists T, \nexists N$

→ aumenta con R_L

→ $P_L(\infty) = 0W$

$$\frac{dP_L}{dR_L} = V_S^2 \left[\frac{(R_S + R_L)^2 - 2(R_S + R_L)R_L}{(R_L + R_S)^4} \right]$$

$$= V_S^2 \left[\frac{(R_S + R_L) - 2R_L}{(R_S + R_L)^3} \right] = 0$$

$$R_S + R_L - 2R_L = 0$$

$$-R_L + R_S = 0$$

$$R_L = R_S \rightarrow R_L^* / P_{MAX}$$

$$P_{MAX} = R_L \cdot \frac{V_S^2}{(R_S + R_L)^2} = \frac{V_S^2}{4R_L^2} \cdot R_L$$

$$P_{MAX} = \frac{V_S^2}{4R_L} = \frac{V_S^2}{4R_S} \rightarrow \text{potenza disponibile (max che posso trasferire al carico)}$$

Metodi generali di analisi.

↳ scrittura automatica delle equazioni programmate (numerica) per simulazioni circuitari

- SPICE: - simulation program with integrated circuit emphasis
 - prodotti commerciali
 - HSPICE, PSpice, LTSpice, NGSpice

→ Metodo dei nodi (Nodal Analysis)

Sfrutta le tensioni nodali come incognite del problema = tensioni di ogni nodo tra $(n-1)$ riferite rispetto al nodo n .

$$\left(-\frac{1}{2R}\right)V_1 + \left(\frac{1}{3R} + \frac{1}{2R}\right)V_2 = -1A - 2A$$

$$\left(-\frac{1}{2R}\right)V_1 + \left(\frac{1}{3R} + \frac{1}{2R}\right)V_2 = -3A$$

metto a sistema le due equazioni

$$\begin{matrix} \text{eq. 1} \\ \text{eq. 2} \end{matrix} \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{3R} + \frac{1}{2R}\right) & \left(\frac{1}{2R}\right) \\ \left(-\frac{1}{2R}\right) & \left(\frac{1}{3R} + \frac{1}{2R}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0A \\ -3A \end{bmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\Phi} \quad \underbrace{\hspace{2em}}_{V} \quad \underbrace{\hspace{2em}}_{A}$

matrice delle
conduttanze nodali

per ogni rete si può scrivere $\Phi = Y A$

$$\begin{bmatrix} 3/2S & -1/2S \\ -1/2S & 5/6S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0A \\ -3A \end{bmatrix}$$

$$V = \Phi^{-1} A \rightarrow \text{matrice } 2 \times 2$$

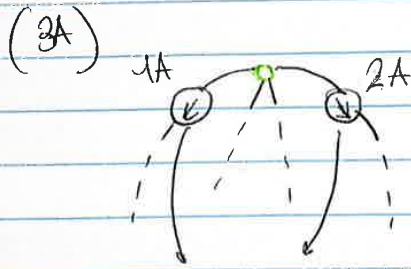
$$\Phi = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\Phi^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

x l'esempio:

$$\Phi^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} 5/2 & 1/2 \\ -1/2 & 3/2 \end{bmatrix}$$

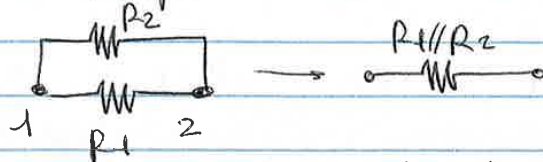
$\hookrightarrow \frac{5}{4} - \frac{1}{4} = 1$



$$i_2 = (-2A) + (-1A) = -3A$$

OSSERVAZIONI

#1: Non semplificare il circuito

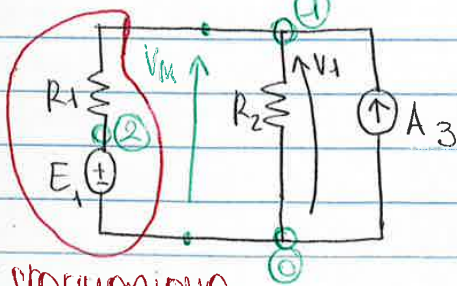


#2: Aiuta a giustificare la sovrapposizione

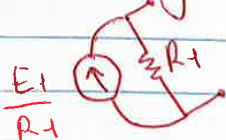
$$V = G^{-1} \cdot \mathbf{a} \rightarrow \text{e.f. } v_1 = r_{11} a_1 + r_{12} a_2 \dots$$

controllare i generatori

#3: Nodi vs Millman



trasformazione
delle sorgenti



$$v_M = \frac{\frac{1}{R_1} + A_3}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

Metodo dei nodi "puro" $\sum i = 0$
 $\hookrightarrow v_1$ soluzione

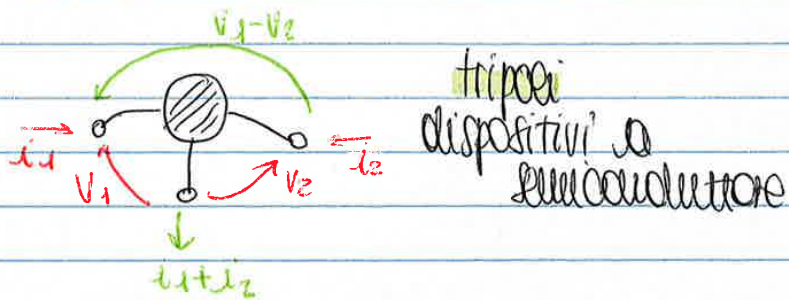
OSSERVAZIONI:

- * il metodo "semplificato" consente di ridurre il numero di equazioni
- * con il metodo "modificato" aumento il numero di equazioni e le incognite di un numero pari al numero dei generatori indipendenti di tensione

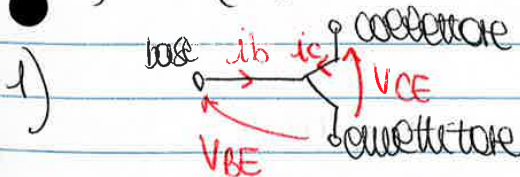
Generatori pilotati / controllati

Modelliamo il comportamento di alcuni dispositivi / circuiti elettronici reali.

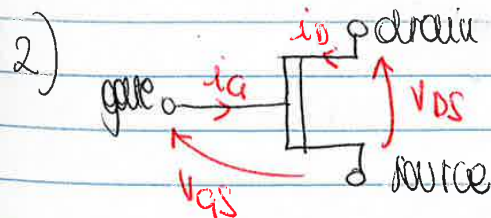
- amplificatori
- transistor



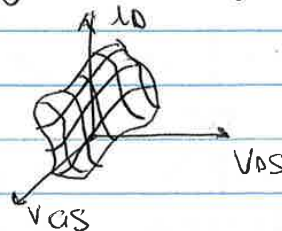
- 1) BJT (bipolar junction transistor)
- 2) MOS (metal oxide semiconductor)

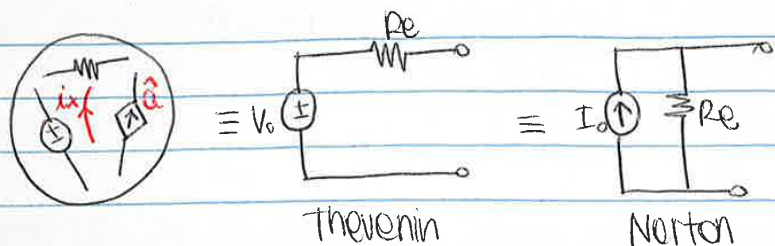


$i_b \ll i_c$
 $i_c = F(V_{CE}, i_b)$



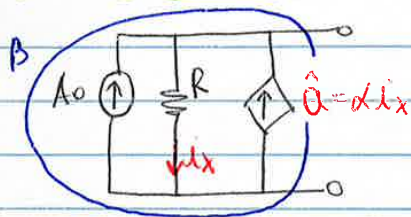
$i_a = 0$
 $i_d = g(V_{DS}, V_{GS})$





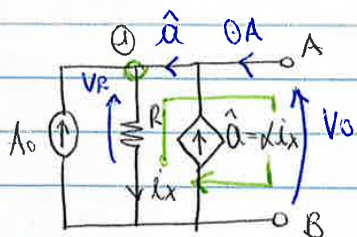
- * β è un bipolo proprio ("non dipende da grandezze esterne")
- * valgono gli stessi teoremi di Thevenin e Norton
- * Il calcolo di R_e, I_0, V_0 richiede cautela

Discussione basata su un esempio



costruire l'equivalente Thevenin del bipolo β

V_0 \equiv tensione a vuoto \rightarrow non cambia la definizione rispetto ai bipoli senza pilotati!



Ho una rete con pilotati da risolvere
 \downarrow
 KCL/KVL o Millmann

KCL @ α

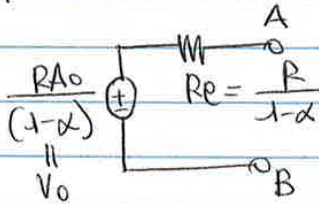
$$i_x = A_0 + \alpha i_x$$

$$V_R = R i_x = V_0 = \frac{R A_0}{1 - \alpha}$$

Discorso analogo si avrebbe per il calcolo di I_0 se fossi interessato all'equivalente di tipo Norton.

Quindi $R_e \hat{=} \frac{V_T}{i_T} = \frac{R i_T}{1-\alpha} \cdot \frac{1}{i_T} = \frac{R}{1-\alpha}$

Il bipolo di Thevenin risulta:



OSSERVAZIONI

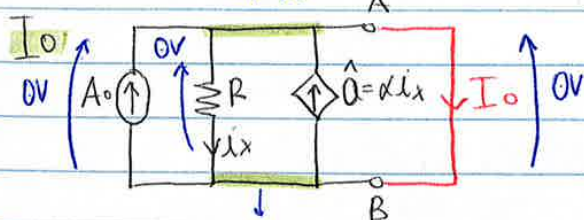
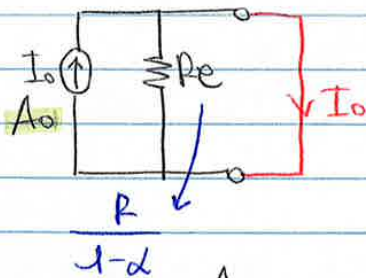
* Se $A_0 = 0A \rightarrow V_0 = R A_0 = 0V$

Se β non contiene generatori indipendenti \rightarrow la tensione a vuoto (corrente di corto circuito) è 0

* Se $\alpha = 1 \rightarrow$ l'equivalente Thevenin non esiste ($R_e \rightarrow \infty$)

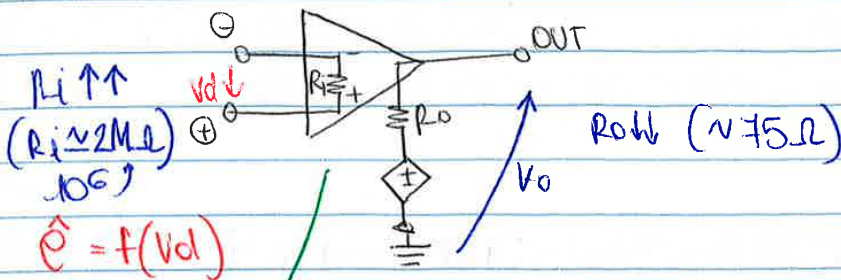
* Se $(1-\alpha) < 0, \alpha > 1 \rightarrow R_e < 0, R_e$ per bipoli può essere \oplus o \ominus

Per lo stesso problema \rightarrow equivalente Norton

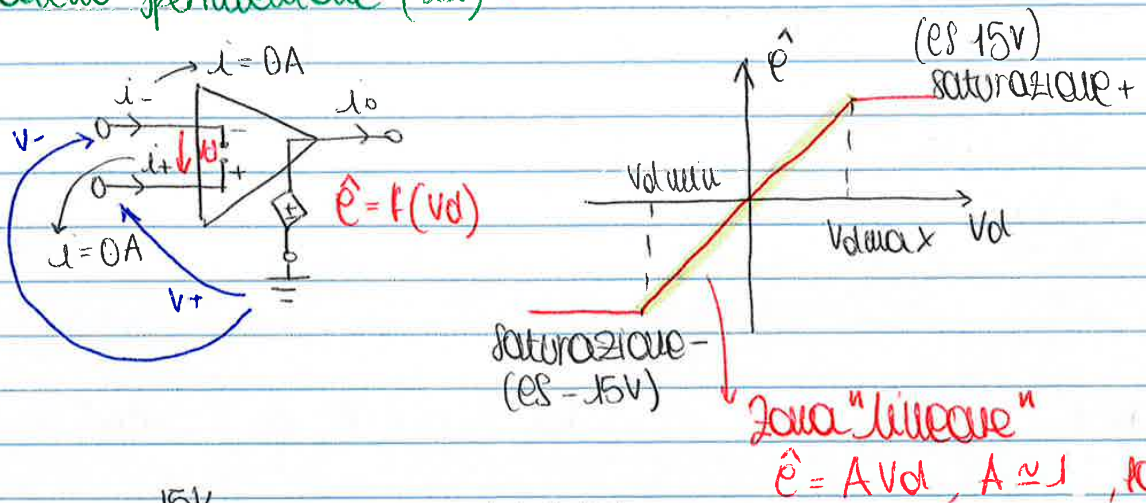


$i_x = \frac{0V}{R} = 0A \rightarrow \hat{i} = \alpha i_x = 0A$

KCL @ $\textcircled{1}$ $I_0 = A_0 - i_x + \alpha i_x$



Modello sperimentale (ii):



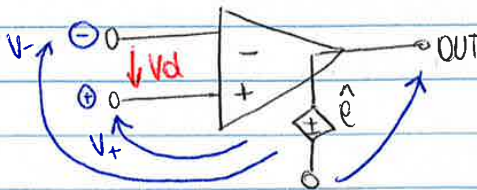
$V_{ol\ max} = \frac{15V}{A} \approx 15\ \mu V \rightarrow$ piccolissimo
 es: 10^6

Modello sperimentale (ii) \rightarrow per funzionamento in zona lineare

$V_o = \hat{e} = A v_d$

$i_+ = 0$

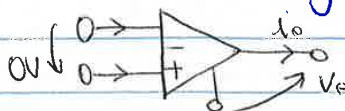
$i_- = 0$

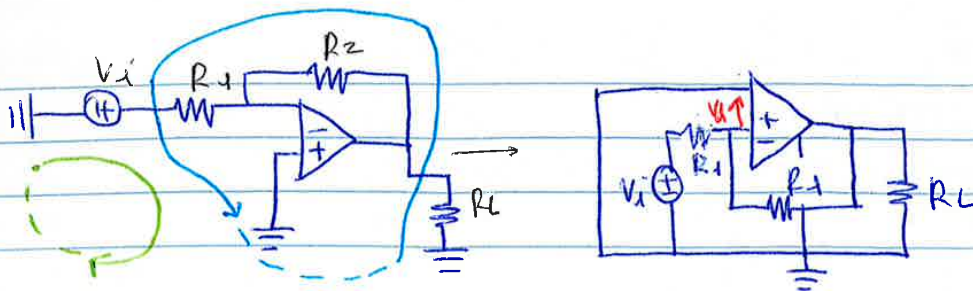


Come possiamo analizzare reti op-AMP?

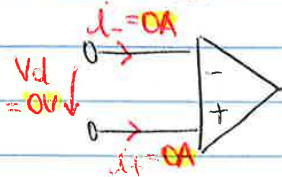
1) sfruttare il modello ideale (non serve ricorre al modello sperimentale!)

$i_+ = 0, i_- = 0, v_d = 0 \rightarrow$ non si segue la moda differenziale d'op-AMP!

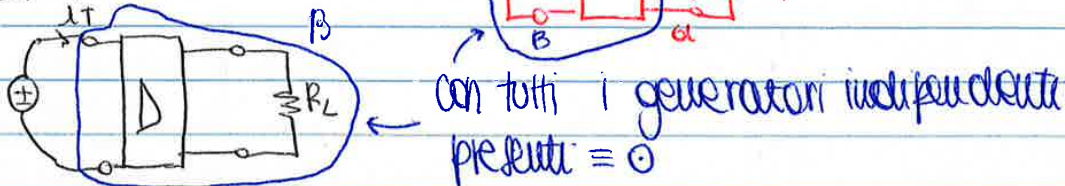
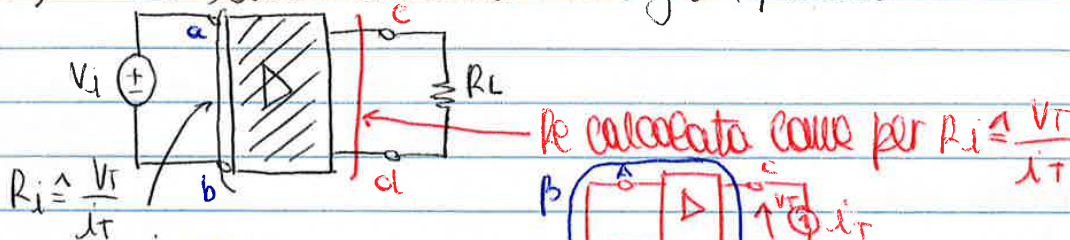




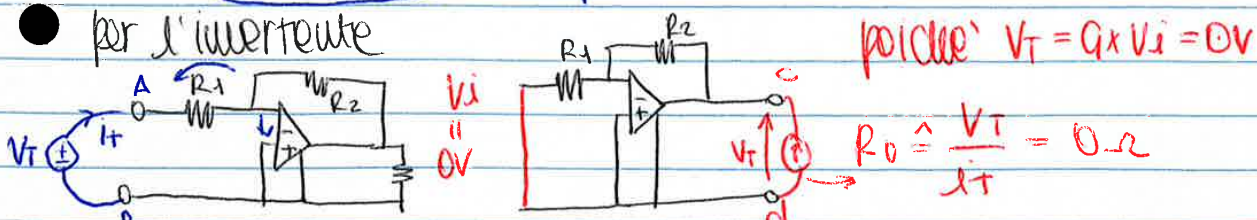
(4) I terminali invertente e non invertente creano una "massa virtuale" → **Corto circuito**



(5) Calcolo della "resistenza di ingresso/uscita"



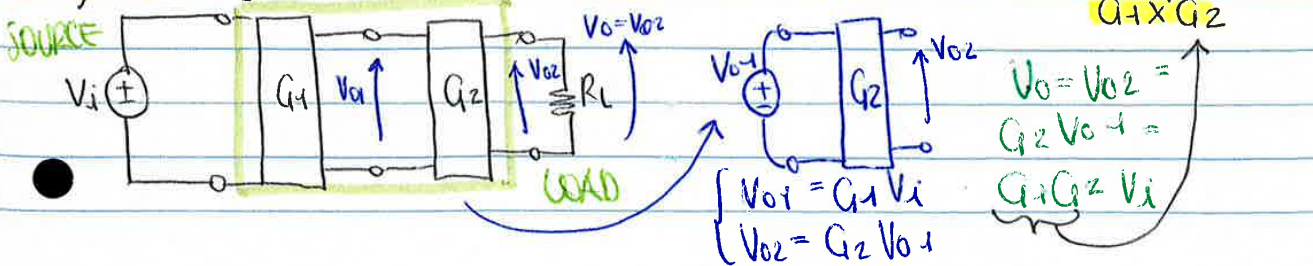
per l'invertente



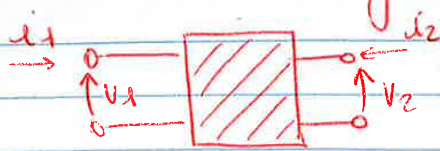
I_T gioca il ruolo di I nell'analisi di prima

$$V_T - R_1 I_T + V_d = 0 \quad I_T = \frac{V_T}{R_1} \rightarrow R_i = R_1 = \frac{V_T}{I_T}$$

(6) Connessioni in cascata di OPAMP



Giustificazione energetica:

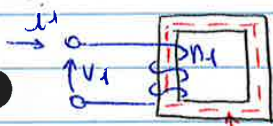


$$P_A = P_1 + P_2 = v_1 i_1 + v_2 i_2 =$$

$$= N v_2 \left(-\frac{1}{N} i_2 \right) + v_2 i_2 = 0 \text{ W}$$

Se è presente in un circuito, non assorbe potenza (energia) → senza perdite

Giustificazione fisica



campo magnetico

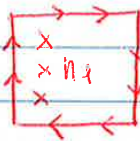
$$B = \mu H$$

l (di lunghezza l)

$\mu_0 \mu_r$

Legge di Ampère $\oint_{\pi} \vec{H} \cdot d\vec{e} = \sum_n I_n = H \cdot l$

Correnti concatenate

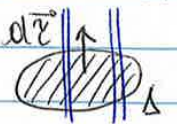


$$Hl = n_1 l_1$$

$$\rightarrow H = \frac{n_1 l_1}{l}$$

$$|\vec{B}| = B = \mu H = \mu \frac{n_1 l_1}{l}$$

Flusso concatenato attraverso una spira

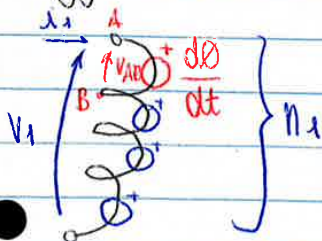


$$\Phi = \iint_{\Delta} \vec{B} \cdot d\vec{r} \cdot dS = B \iint_{\Delta} dS$$

area della spira A

$$\rightarrow \Phi = \mu \frac{n_1 l_1 A}{l}$$

legge di Faraday (emf):



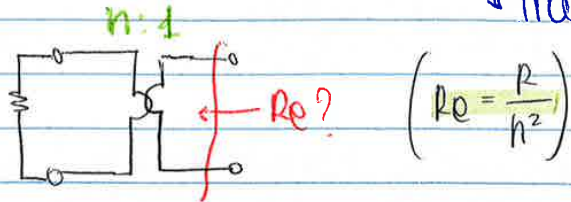
la tensione complessiva

$$v_1 = N \frac{d\Phi}{dt} = \left(n_1^2 \mu \frac{A}{l} \right) \frac{di_1}{dt}$$

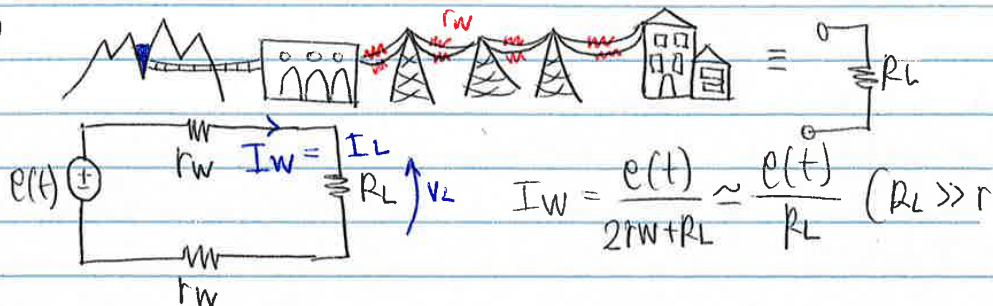
induttanza L

$$V_T = n^2 R I_T \rightarrow R_e = \frac{V_T}{I_T} = n^2 R$$

↓ trasformatore di resistenze



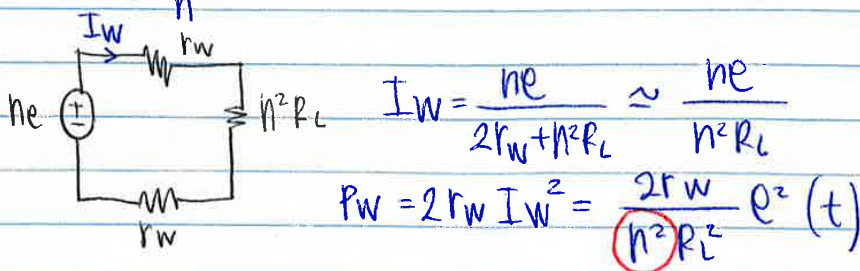
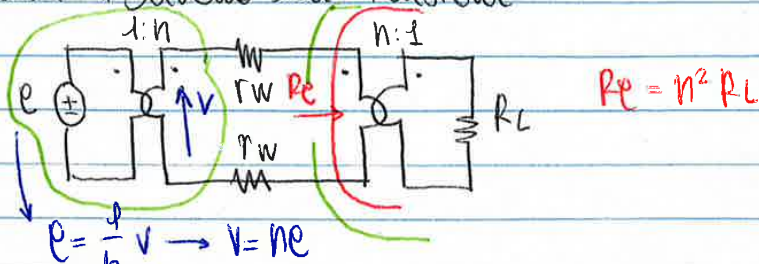
#2 Applicazioni: distribuzione dell'energia elettrica (la "alta tensione")



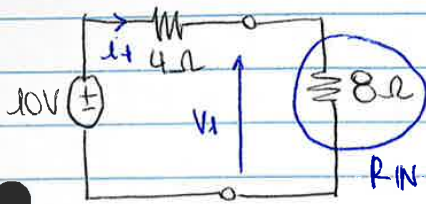
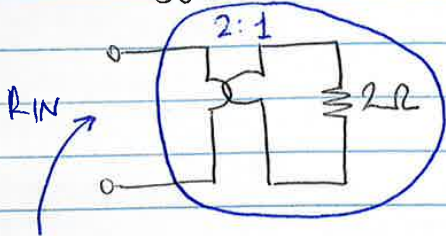
$$V_L = e(t) \frac{R_L}{2r_w + R_L} \approx e(t) \quad (r_w \ll R_L)$$

$$P_w = 2(r_w I_w^2) \approx 2 \frac{r_w}{R_L^2} e^2(t)$$

Se alzo il livello di tensione



Via #2 uso $R_{IN} = n^2 R_L = 8 \Omega$



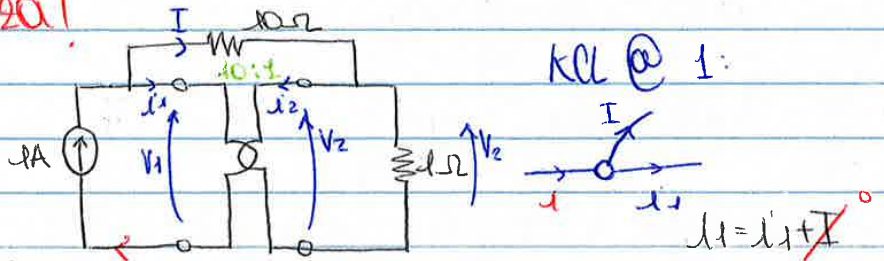
$$i_1 = \frac{10V}{(4+8)\Omega} = \frac{5}{6} A$$

$$V_1 = 8V \cdot i_1 = \frac{20}{3} V$$

$$P_A(R_{IN}) = 8\Omega \cdot i_1^2 = \frac{50}{9} W \stackrel{?}{=} P_A(R_L)$$

Stesso risultato perché il trasformatore non assorbe potenza!

#4 calcolare V_2



perché è alle due parti intrinseco

$$i_1 = 1A$$

$$i_2 = -10i_1 = -10A$$

$$V_2 = -i_2 \cdot 1\Omega = 10V$$

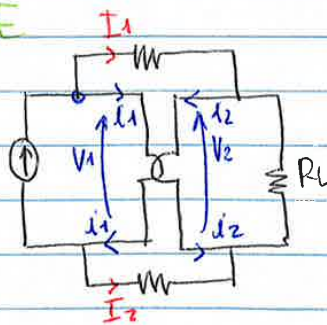
$$V_1 = 10V_2 \rightarrow V_1 = 100V$$

OSSERVAZIONE

se stessi

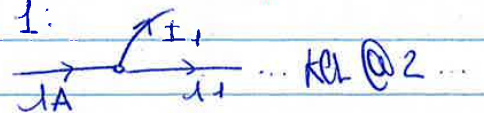
$$I_1 \neq 0$$

$$I_2 \neq 0$$

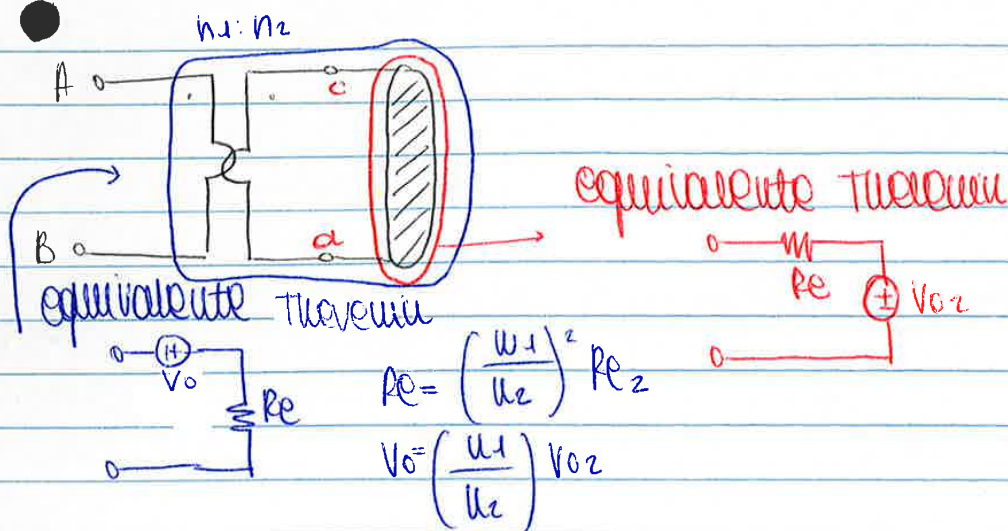


Devo fare i conti con KVL/KCL

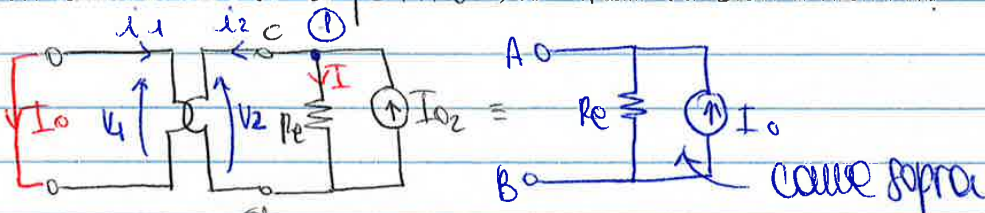
es: KCL @ 1:



Equivalenti di bipoli con trasformatori (ideali)

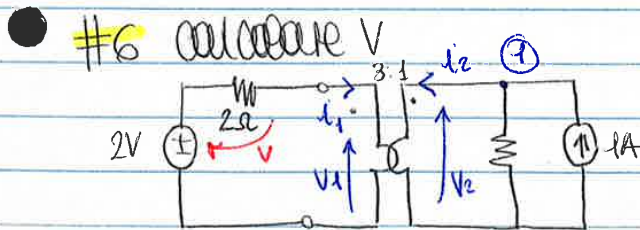


cosa succederebbe se si partisse da Norton da destra?



$V_1 = 0V \rightarrow V_2 = 0V$

KCL @ I: $i_2 = I_{02}$
 $i_1 = -\frac{1}{n} i_2$ $n = \frac{n_1}{n_2}$
 $I_0 = -i_1 = \frac{1}{n} i_2 = \frac{1}{n} I_{02} = \frac{n_1}{n_2} I_{02}$

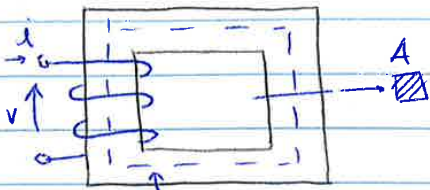


via #1 KVL @ primario $v_1 = 3v_2$ $i_1 = -\frac{1}{3} i_2$
 $2V - V - v_1 = 0$ (1) $2V = 3v_2 - \frac{2}{3} i_2$
 $\uparrow 2\Omega \cdot i_1$ $I = \frac{v_2}{4\Omega}$

KCL @ I: $1A = i_2 + I$
 (2) $i_2 = -1A - \frac{v_2}{4\Omega} \rightarrow$ sostituendo: $2V = -\frac{2}{3} \left(1 - \frac{v_2}{4}\right) + 3v_2$
 $2V = -\frac{2}{3} + \frac{v_2}{6} + 3v_2$

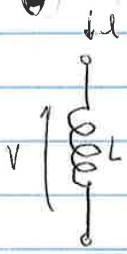
Caratteristiche di induttore / condensatore

Induttore



$$V = \frac{d\phi}{dt} = \frac{\mu_0 n^2 A}{l} \frac{d\phi}{dt}$$

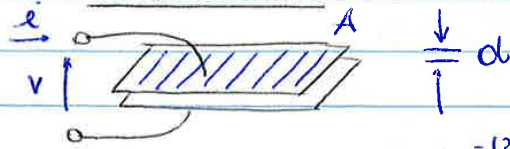
L induttanza [H]



$$v = L \frac{di}{dt}$$

mH, μH, nH

Condensatore



$$8,85 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m}$$

$$i = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{A}{d} \frac{dv}{dt}$$

C = capacità (F)



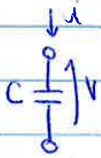
$$i = C \frac{dv}{dt}$$

μF, nF, pF, fF

Nel corso di elettrotecnica: 1F, 3F, 1/2 F, 1H, 3H (x altri valori)

* Proprietà di e/l

① Memoria

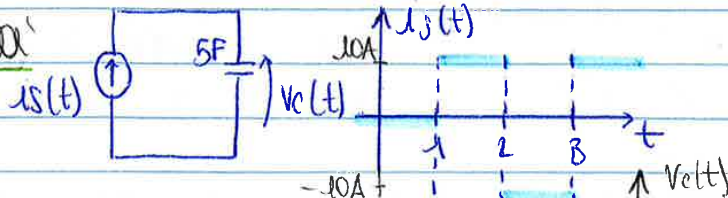


$$i = C \frac{dv}{dt} \rightarrow v(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau$$

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t_0} i(\tau) d\tau + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau$$

Il valore della tensione non dipende dal valore istantaneo della corrente. Ho un effetto "integrale" (discorso simile su L) → L e C sono elementi ad memoria

② Continuità



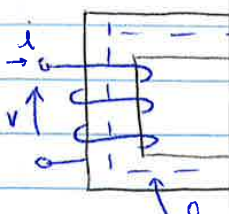
$$v_C(t) = \frac{1}{5F} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau = \frac{1}{5} \int_0^1 10 d\tau = 2V$$



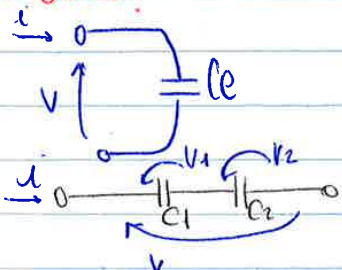
Caratter

Iud

Condensatori in parallelo si comportano come resistori in serie!



$$V = \frac{dq}{dt}$$



$$V = V_1 + V_2$$

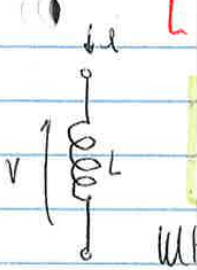
$$V_1 = \frac{1}{C_1} \int i_1 dt$$

$$V_2 = \frac{1}{C_2} \int i_2 dt$$

quindi

$$V = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) \int i dt \rightarrow i = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} \frac{dV}{dt}$$

$$\hookrightarrow C_e = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

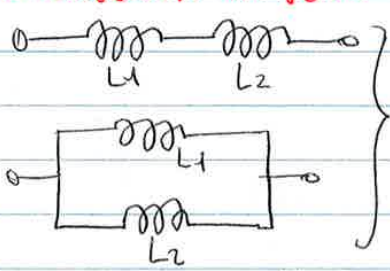


U

NC

* Proprie
①

Condensatori in serie si comportano come resistori in parallelo



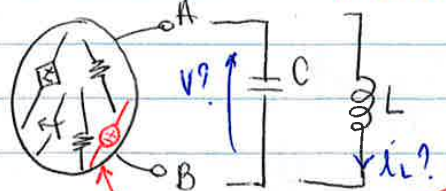
$$Le = L_1 + L_2$$

$$Le = \frac{1}{\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}} = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$$

Il valore della corrente su L

Trasistori del I ordine (circuiti del I ordine \rightarrow perché generati da equazioni del I ordine) sono reti con 1 solo elemento dinamico (C, L), resistori, generatori (indipendenti / dipendenti) e induttori
 \hookrightarrow costante di tempo

② C



$V_c(t)$

risposta naturale

risposta forzata

$$x(t) = K_1 e^{\lambda t} + K_2$$

posso determinare K_1 e K_2

sostituisco in (1): $\frac{d}{dt}(K_1 e^{\lambda t} + K_2) - \lambda(K_1 e^{\lambda t} + K_2) = -\lambda x$

derivo \rightarrow $\cancel{\lambda K_1 e^{\lambda t}} - 0 - \cancel{\lambda K_1 e^{\lambda t}} - \lambda K_2 = -\lambda x$
 $K_2 = x$

Stretto ora la continuità di $x(t)$

$$x(0^-) = x(0^+) = K_1 e^{1 \cdot 0} + x$$

$$\rightarrow K_1 = [x(0^+) - x]$$

la risposta della rete $\rightarrow x(t) = [x(0^+) - x] e^{1t} + x$ \swarrow $V_c(t) = x(t)$

$$V_c(t) = [V_c(0^+) - R I_s] e^{-\frac{1}{RC} t} + R I_s$$

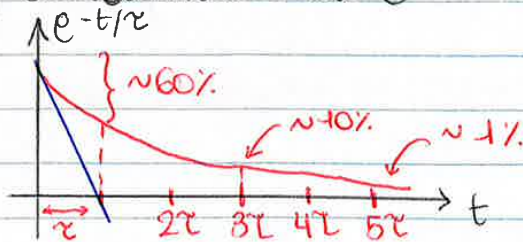
$\hookrightarrow V_c(0^-) = 0V$ \swarrow RC
 nell'esempio

OSSERVAZIONE

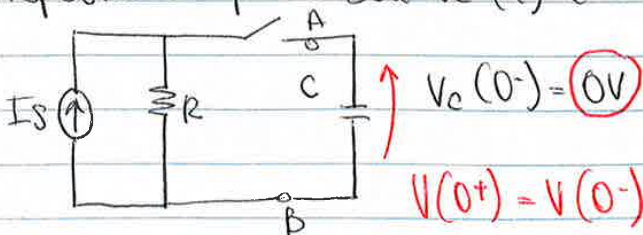
$$\lim_{t \rightarrow \infty} V_c(t) = [] e^{-\frac{t \rightarrow \infty}{\tau}} + R I_s = R I_s$$

↓
 valore per $t \rightarrow \infty$

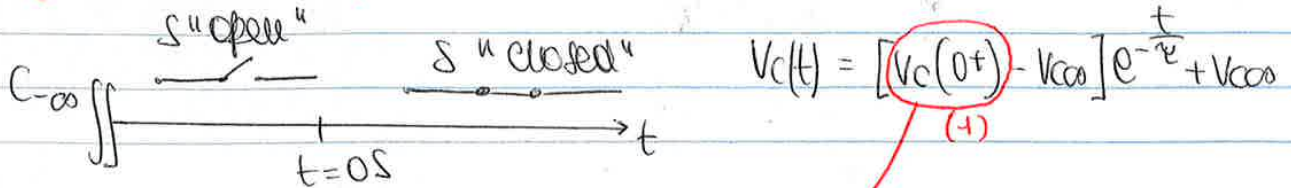
Disegno/andamento di $e^{-t/\tau}$



la risposta completa di $V_c(t)$ è:



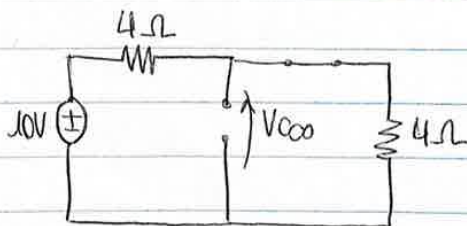
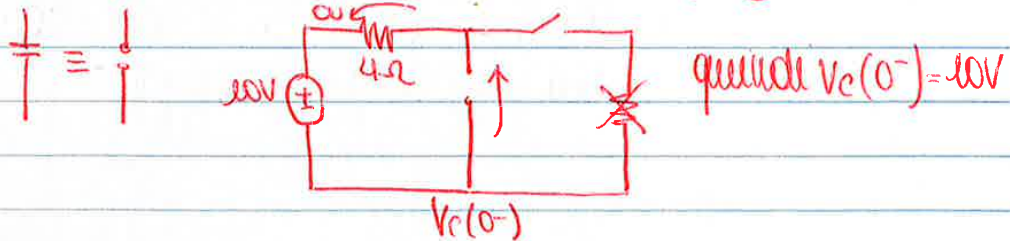
$$\begin{cases} V_c(t) = [V_c(0^+) - V_{\text{ccos}}] e^{-\frac{t}{\tau}} + V_{\text{ccos}} \text{ per } t \geq 0^+ \\ V_c(0^-) \\ V_c(t) = V_c(0^-) \text{ per } t < 0^+ \end{cases}$$



$V_c(0^+)$ condizione iniziale
 dal tempo 0^+ la rete si trova @ generatori costanti e
 variabili (tensione / corrente) costanti

$$\rightarrow i_c = C \frac{dv_c}{dt} = C \frac{d(\cos t)}{dt} = 0A$$

$V_c(0^-)$ si ottiene annullando la rete @ $t = 0^-$ con



$$V_{\text{ccos}} = 10V \cdot \frac{4\Omega}{8\Omega} = 5V$$

$$(3) \tau = R_{\text{eq}} C \text{ per } t \geq 0^+$$

τ del bipolo con plementone a c

$$R_{\text{eq}} = 4\Omega // 4\Omega = 2\Omega$$

$$\tau = 2\Omega \cdot 3F = 6S$$

$x(t) = x(0^-)$ τ e' la stessa!
 $t < 0s$

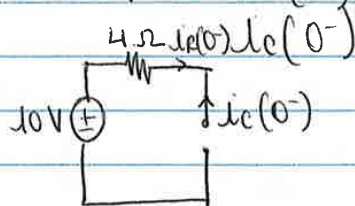
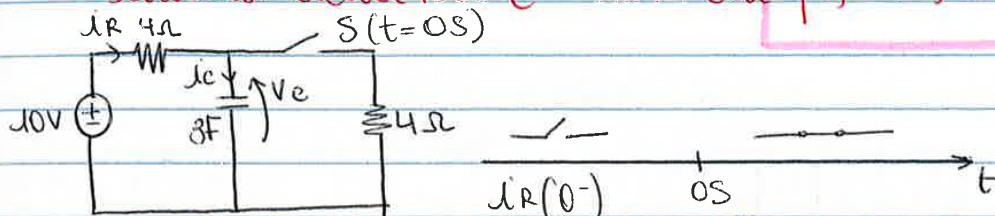
$x_\infty \rightarrow$ calcolo di $x e^\infty$ con $\neq \equiv \downarrow$

$x(0^+) \neq x(0^-)$

si determina sfruttando la continuità della variabile di stato \leftarrow derivandola!

$V_c(0^+) = V_c(0^-)$

\rightarrow analisi della rete $e^{t=0^+}$ o con $\neq \uparrow V_c(0^-) = \oplus V_c(0^+) = V_c(0^-)$



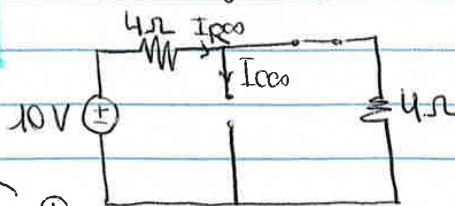
$i_R(0^+) = [i_R(0^-) - I_{R\infty}] e^{-t/\tau} + I_{R\infty}$
 $i_c(0^+) = [i_c(0^-) - I_{c\infty}] e^{-t/\tau} + I_{c\infty}$

$\tau = 6s$

$\tau = RC$

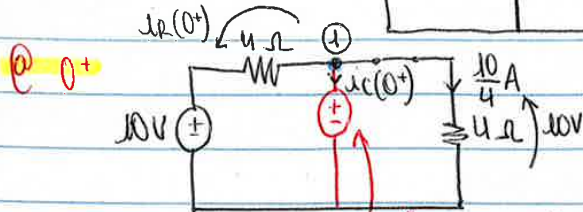
$i_R(0^-) = i_c(0^-) = 0A$

$I_{R\infty}, I_{c\infty}$



$I_{c\infty} = 0A$

$I_{R\infty} = \frac{10V}{4\Omega + 4\Omega} = \frac{5}{4}A$



$V_c(0^-) = V_c(0^+) = 10V$

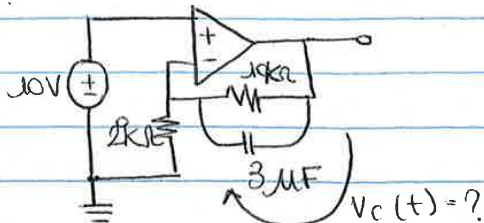
$i_R(0^+) = \frac{10V - 10V}{4\Omega} = 0A$

$i_c(0^+) = V_{10V} \frac{4\Omega}{4\Omega + 4\Omega} = 1A$

$i_c(0^+) = \frac{5}{4}A$

quindi:

Es #4 Calcolare l'andamento di $V_c(t)$ dato $V_c(0) = -2V$
 rete per $t \geq 0s$:



rete valida per $t \geq 0s$.

$$V_c(t) = [V_c(0^+) - V_{ccs}]e^{-t/\tau} + V_{ccs}, \quad t \geq 0s$$

$$V_c(0^-) = -2V$$

V_{ccs}



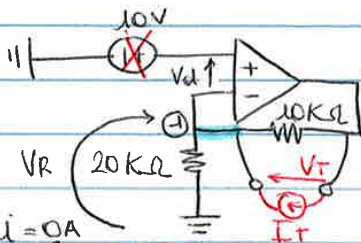
Via KVL:

$$10V - V_d - V_R = 0$$

$$V_R = 10V \rightarrow I = \frac{V_R}{20k\Omega} = \frac{1}{2} \text{ mA} \quad V_{ccs} = -10k\Omega \cdot I = -5V$$

$\tau = RC$

$$R_e = \frac{V_T}{I_T}$$



$V_R = 0V$ per la stessa KVL di prima

$$0V - V_d - V_R = 0$$

$$V_R = 0 \rightarrow I_R = 0$$

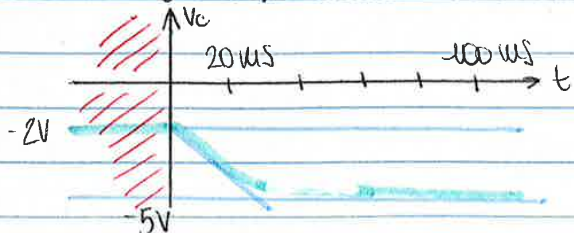
$$R_e = \frac{10k\Omega \cdot I_T}{I_T} = 10k\Omega$$

Via kel: @ 1

$$i = 0A \quad I_T \equiv I_T$$

$$\tau = 10k\Omega \cdot 2\mu F = 20\mu s$$

$$\text{Quindi } \begin{cases} V_c(t) = [-2V + 5]e^{-t/20\mu s} - 5V, & t \geq 0s \\ V_c(t) = -2V, & t < 0s \end{cases}$$



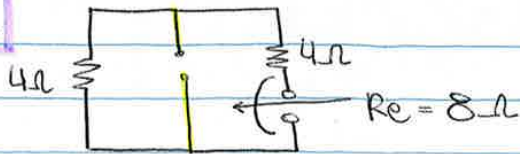
NOTA: posso calcolare l'energia immagazzinata

$$E(0) = \frac{1}{2} C V_c^2(0) = \frac{1}{2} 2\mu F \cdot 4 = 4\mu J$$

$$E(\infty) = 25\mu J$$

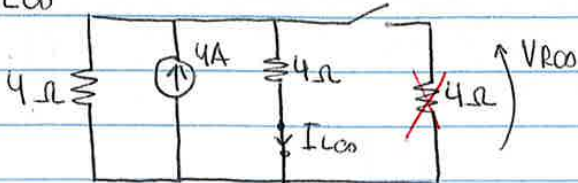
$V_R(0^-) = V_M = \frac{16}{3} V$

$\tau = C_e L$



$\tau = \frac{5}{8} S$

$I_{L\infty}$

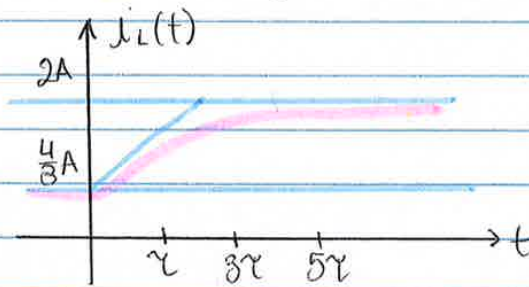


$I_{L\infty} = 4A \cdot \frac{4}{8} = 2A$

$V_{R\infty} = 0V$ (non scorre corrente nel resistore di destra)

quindi $i_L(t) = \left[\frac{4}{3} - 2 \right] e^{-t/\tau} + 2A$ per $t \geq 0S$

$i_L(t) = \frac{4}{3} A$ per $t < 0S$

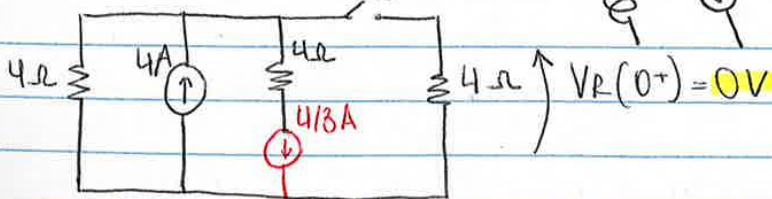


per la variabile "non di stato"

$V_R(t) = [V_R(0^+) - 0V] e^{-t/\tau} + 0V$

per $t \geq 0S$
 $V_R(t) = \frac{16}{3} V$ per $t < 0S$

analisi della rete @ 0^+ con



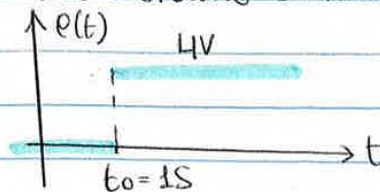
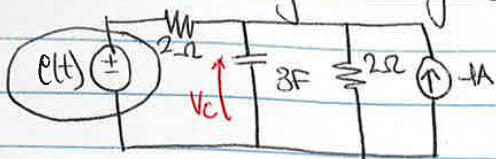
$i_L(0^-) = i_L(0^+) = \frac{4}{3} A!$

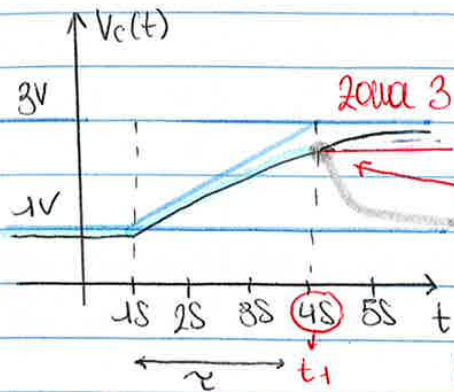
quindi $V_R(t) = [0V - 0V] e^{-t/\tau} + 0 \Rightarrow$ per $t \geq 0S$

$V_R(t) = \frac{16}{3} V$ per $t < 0S$

di potenza costante fin dall'inizio

Es #6 (che coincide sul generatore costante a tratti)





$$V_c(t) = [V_c(t_1^+) - V_{\text{cap}}] e^{\frac{t-t_1}{\tau}} + V_{\text{cap}}$$

$V_c(t_1^+)$

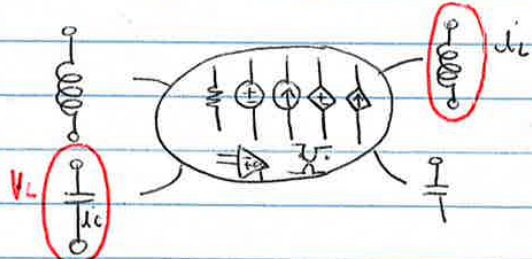
$\tau_2 = \tau!$

Condizione iniziale per la zona 2 si ha dall'evoluzione nella zona 1:

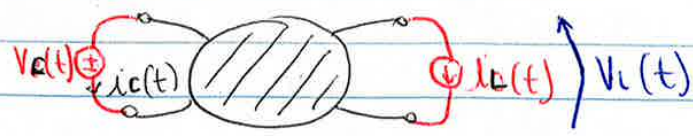
$$V_c(t) = [1-3] e^{\frac{t-1}{3}} + 3 \quad | \quad t=t_1=4s$$

25/11/21

Circuiti del II ordine → transistori



Obiettivo: imparare a scrivere l'equazione differenziale che lega le variabili di stato
 idea: ricavare le variabili "complementari" var di stato degli elementi dinamici (i_c, v_c)
 come: * usando KVL, KCL (se il circuito è RLF semplice)
 * usando il teorema di sostituzione + metodi analitici classici



In generale: $\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$

$x(t)$ $u(t)$

Equazioni di stato:

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + u$$

matrice di stato A vettore di stato $x(t)$ termine noto (vettore delle sorgenti) u

$$\left. \begin{aligned} \frac{di_L}{dt} &= A_{11} i_L + A_{12} v_C + u_1 \\ \frac{dv_C}{dt} &= A_{21} i_L + A_{22} v_C + u_2 \end{aligned} \right\}$$

Scegliendo dal campo i_L , riscriviamo una singola equazione in una variabile.

passo 1: differenzio la prima equazione

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} = A_{11} \frac{di_L}{dt} + A_{12} \frac{dv_C}{dt} + \cancel{\frac{du_1}{dt}}$$

passo 2: differenzio la seconda equazione

$$\left(\frac{dv_C}{dt} \dots \right) \quad \text{sostituisco } \frac{dv_C}{dt}$$

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} = A_{11} \frac{dv_C}{dt} + A_{12} [A_{21} i_L + A_{22} v_C + u_2]$$

passo 3: ricavo dalla seconda equazione v_C

$$v_C = \frac{1}{A_{12}} \left(\frac{di_L}{dt} - A_{11} i_L - u_1 \right)$$

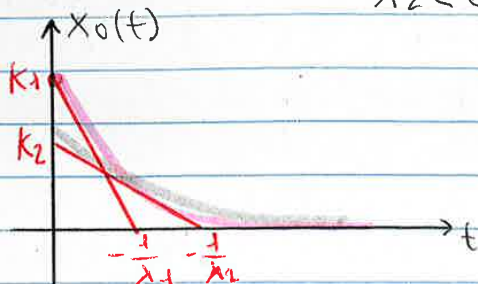
passo 4: sostituisco nell'equazione del passo 2

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} = A_{11} \frac{di_L}{dt} + A_{12} A_{21} i_L + A_{22} \frac{di_L}{dt} - A_{11} A_{22} i_L - A_{22} u_1 + A_{12} u_2$$

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} = \underbrace{(A_{11} + A_{22})}_{2d = -\text{Tr}(A)} \frac{di_L}{dt} + \underbrace{(A_{12} A_{21} + A_{11} A_{22})}_{\det(A) = \omega_0^2} i_L = \underbrace{A_{12} u_2 - A_{22} u_1}_{s_i(\text{cost})}$$

$x_0(t) = k_1 e^{\lambda_1 t} + k_2 e^{\lambda_2 t}$ "sovrasmorzamento"

OSSERVAZIONE: se $\alpha > 0 \rightarrow \lambda_1 < 0$
 $\lambda_2 < 0$] lim $x_0(t) = 0$
 $t \rightarrow \infty$



$$\begin{cases} e^{\lambda t} = e^{-t/\tau} \\ \tau = -\frac{1}{\lambda} \end{cases}$$

caso #2 $\alpha^2 = \omega_0^2$ "smorzamento critico"

$\lambda_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -\alpha$ no due soluzioni reali coincidenti

$x_0(t) = (k_1 + k_2 t) e^{\lambda t} = (k_1 + k_2 t) e^{-\alpha t}$

caso #3 $\alpha^2 < \omega_0^2$ "sottosmorzamento"

$\lambda_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -\alpha \pm \sqrt{(-1)(\omega_0^2 - \alpha^2)}$
 $\underbrace{\alpha^2 - \omega_0^2}_{< 0} \in \mathbb{C} \quad = -\alpha \pm j \underbrace{\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}}_{\beta \in \mathbb{R}}$

$\lambda_{1,2} = -\alpha \pm j\beta$ no due soluzioni complesse coniugate

quindi $x_0(t) = k_1 e^{\lambda_1 t} + k_2 e^{\lambda_2 t} = k_1 e^{-\alpha t} e^{j\beta t} + k_2 e^{-\alpha t} e^{-j\beta t}$

$x_0(t) = e^{-\alpha t} [k_1 e^{j\beta t} + k_2 e^{-j\beta t}]$

OSSERVAZIONE $x_0(t) \in \mathbb{R} \rightarrow k_1, k_2 \in \mathbb{C}!$

Circuiti del II ordine

28/11

relè / transistori del II ordine

con $\alpha^2 < \omega_0^2$ "sottosmorzato" (caso)

$\lambda_{1,2} = -\alpha \pm j\beta \quad \lambda_2 = \lambda_1^*$ no due soluzioni complesse coniugate

$x(t) \in \mathbb{R}!$

$x(t) = k_1 e^{\lambda_1 t} + k_2 e^{\lambda_2 t} = k_1 e^{-\alpha t} e^{j\beta t} + k_2 e^{-\alpha t} e^{-j\beta t} = e^{-\alpha t} [k_1 e^{j\beta t} + k_2 e^{-j\beta t}]$

vedere / far riferimento al materiale didattico → cartella Matlab

"sorzamento critico" e' la risposta piu' veloce

$$\frac{d}{dt} x(t) = Ax(t) + u = \frac{d^2}{dt^2} x(t) + 2\alpha \frac{d}{dt} x(t) + \omega_0^2 x(t) = \begin{cases} \delta_i \\ \delta_c \end{cases}$$

$$x(t) = X_0(t) + X_p(t)$$

$$X_0(t) = \begin{cases} k_1 e^{\lambda_1 t} + k_2 e^{\lambda_2 t} & \alpha^2 \neq \omega_0^2 \\ (k_1 + k_2) e^{\lambda t} & \alpha^2 = \omega_0^2 \end{cases}$$

soluzione omogenea

soluzione particolare

se i generatori sono costanti → termini forzanti costanti
 → $x_p(t) = x_p$ costante nel tempo

#1 se il circuito e' stabile ($\alpha > 0, \text{Re}\{\lambda\} < 0$)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} X_0(t) = 0 \rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_p$$

$$k_1 e^{\lambda_1 t} + k_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$\#2 \frac{d^2}{dt^2} x_p + 2\alpha \frac{d}{dt} x_p + \omega_0^2 x_p = \begin{cases} \delta_i \\ \delta_c \end{cases} \quad x_p = \begin{cases} \delta_i / \omega_0^2 \\ \delta_c / \omega_0^2 \end{cases}$$

posso calcolare x_p come soluzione del circuito a regime

$$x_p = \begin{cases} \int i_L(\infty) \\ v_C(\infty) \end{cases} \quad \begin{matrix} 0 \text{---} \infty \text{---} 0 \\ 0 \text{---} \text{||} \text{---} 0 \end{matrix} = \begin{matrix} 0 \text{---} i_L(\infty) \\ 0 \text{---} v_C(\infty) \end{matrix} !$$

#3 se considero l'equazione di stato matriciale

$$\frac{d}{dt} x_p = Ax_p + u = \vec{0} \quad x_p = -A^{-1}u = x(\infty)$$

↓

$$\begin{cases} i_L(\infty) \\ v_C(\infty) \end{cases}$$

* oppure $x_p = \begin{bmatrix} i_L(\infty) \\ v_C(\infty) \end{bmatrix} = -A^{-1}u = -\frac{1}{24} \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}$

* verificando (verifica)

$i_L(\infty) = I_e / \omega_0^2 = 84 / 24 = 7/2 A$

$v_C(\infty) = V_e / \omega_0^2 = 12 / 24 = -1/2 A$

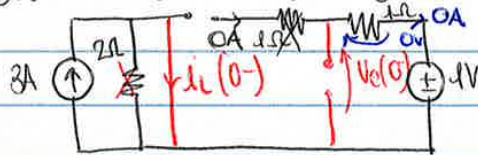
Soluzione generale

$i_L(t) = k_1 e^{\lambda_1 t} + k_2 e^{\lambda_2 t} + \frac{7}{2} A$

$v_C(t) = k_3 e^{\lambda_1 t} + k_4 e^{\lambda_2 t} + \frac{1}{2} V$

mi servono le "condizioni iniziali" per determinare k_1, k_2, k_3, k_4
 $i_L(0^+), v_C(0^+), \frac{di_L}{dt} \Big|_{0^+}, \frac{dv_C}{dt} \Big|_{0^+}$

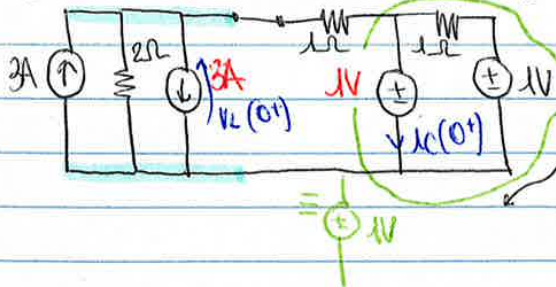
guardo / analizzo il circuito @ $t=0^-$



$i_L(0^-) = i_L(0^+) = 3A$

$v_C(0^-) = v_C(0^+) = 1V$

per le condizioni sulla derivata @ $t=0^+$



$v_L(0^+) = L \frac{di_L}{dt} \Big|_{0^+}$
 $1/6H \nearrow$

$i_C(0^+) = C \frac{dv_C}{dt} \Big|_{0^+}$

$v_L(0^+)$ calcolata ad esempio con Millman

$V_M = \frac{1/1 + 3A - 3A}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} V = \frac{1}{6} \frac{d}{dt} i_L \Big|_{0^+}$

quindi $\frac{d}{dt} i_L \Big|_{0^+} = \frac{12}{3} = 4 A/s$

(ugualmente calcolando v_C)

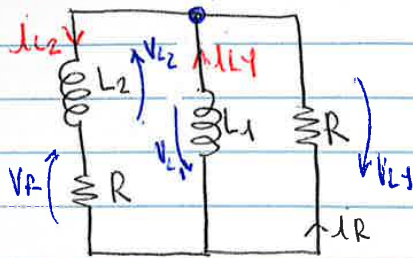
$$\gamma_L = \omega L = \frac{1}{2\Omega} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12} \text{ S}$$

$$\gamma_C = \omega C = 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \text{ S}$$

$$I_{L00} = 3 \text{ A}$$

$$V_{000} = 1 \text{ V}$$

Esercizio: scrivere il sistema di equazioni del di stato per la rete del II ordine in figura



Via #1: scrittura diretta con KVL/KCL

$$\text{KCL: } i_R = i_{L1} - i_{L2} \rightarrow V_{L1} - R i_R = -R i_{L1} + R i_{L2}$$

$$\text{KVL: } V_{L2} = -V_R - V_{L1} \rightarrow -R i_{L1} + R i_{L2} = R i_{L1} - 2R i_{L2}$$

$$V_{L1} = L_1 \frac{d}{dt} i_{L1}, \quad V_{L2} = L_2 \frac{d}{dt} i_{L2}$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_{L1} \\ i_{L2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L_1} & \frac{R}{L_1} \\ \frac{R}{L_2} & -\frac{2R}{L_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{L1} \\ i_{L2} \end{bmatrix}$$

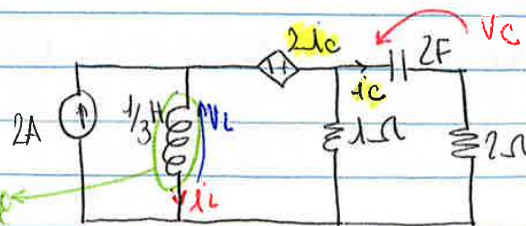
$$2\alpha = -\text{tr}(A) = \frac{R}{L_1} + \frac{2R}{L_2} > 0$$

Via #2: uso il principio di sostituzione:



$$V_{L1} = \frac{i_{L2} - i_{L1}}{\frac{1}{R} + 0} = R i_{L2} - R i_{L1}$$

Esercizio (tema d'esame)



verificare; moltiplicazione
con $\frac{1}{s}$

$$I_e = C \frac{dV_c}{dt} = C V_c' = \frac{[e(t) - V_c(t)]}{R}$$

$$V_c' = -\frac{1}{RC} V_c + \frac{e(t)}{RC}$$

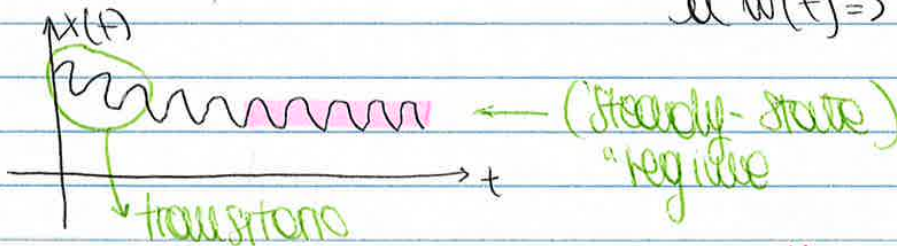
$$\begin{cases} x(t) = V_c(t) \\ w(t) = e(t) \\ \gamma = RC = 1/2s \end{cases} \quad \dot{x}(t) + \frac{x(t)}{\gamma} = \frac{w(t)}{\gamma} \quad (4)$$

Soluzioni $x_0(t) + x_p(t)$

$$k e^{-t/\gamma} = k e^{-2t}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_0(t) = 0$$

quindi $\lim_{t \rightarrow \infty}$ soluzioni = $x_p(t)$ → risposta rispetto a $w(t) \Rightarrow$ stazionaria



Calcolo la soluzione $x_p(t)$

* Assumiamo $x_p(t) = A \cos(2t) + B \sin(2t)$

* Calcoliamo $\dot{x}_p(t) = -2A \sin(2t) + 2B \cos(2t)$

* Sostituendo in (4) $[\dot{x} + 2x = \cos(2t)]$

$$-2A \sin(2t) + 2B \cos(2t) + 2A \cos(2t) + 2B \sin(2t) = \cos(2t)$$

$$\begin{aligned} (2B - 2A) \sin(2t) + (2B + 2A) \cos(2t) &= \cos(2t) \\ = 0 & \qquad \qquad \qquad = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 2A = 2B \\ 2A + 2B = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{4} \\ B = \frac{1}{4} \end{cases} \rightarrow x_p(t) = \frac{1}{4} \cos(2t) + \frac{1}{4} \sin(2t)$$

OSSERVAZIONE: $x_p(t) = A \cos(2t) + B \sin(2t) = X \cos(\omega t + \varphi)$

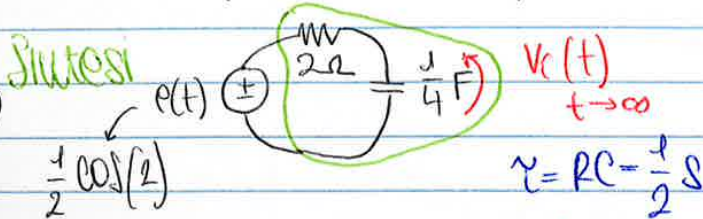
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

posso anche interpretare $x_p(t)$ come:

$$x_p(t) = \text{Re} \left\{ \hat{x}_p e^{j\omega_0 t} \right\} = \text{Re} \left\{ \frac{1}{2\sqrt{2}} \underbrace{e^{-j\frac{\pi}{4}} e^{j2t}}_{e^{j(2t - \pi/4)}} \right\}$$

$$x_p(t) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cos\left(2t - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}_{\frac{\sqrt{2}}{2}} \cos(2t) - \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}_{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \sin(2t) \right]$$

Quindi $x_p = \frac{1}{4} \cos(2t) + \frac{1}{4} \sin(2t)$ come prima!



A priori $v_c(t) = x(t) = k e^{-\frac{t}{\tau}} + x_p(t)$

Metodo: si calcola $x_p(t)$ sostituendolo nell'equazione differenziale

$$x_p(t) = \text{Re} \left\{ \hat{x}_p e^{j2t} \right\}$$

fattore associato $\hat{x}_p = x e^{j\varphi}$ e' un numero complesso

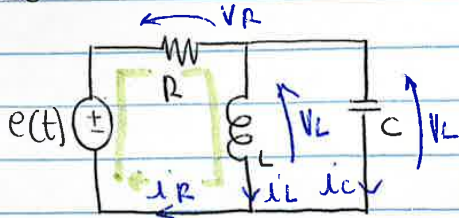
alla risposta della rete (in t)
 (guardare sommario sui numeri complessi)

Analisi delle reti in regime armonico - il metodo fasoriale 6/12/21

OSSERVAZIONI

- 1) Abbiamo sostituito tutte le sinusoidi con i fasori associati $x(t) = x \cos(\omega_0 t + \varphi) = \text{Re} \left[\underbrace{x e^{j\varphi}}_F e^{j\omega_0 t} \right]$

Esempio



$$e(t) = E_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\hat{E} = E_0 e^{j\varphi}$$

Soluzione generale

$$x(t) = k_1 e^{\lambda_1 t} + k_2 e^{\lambda_2 t} = x_p(t)$$

→ 0 per $t \rightarrow \infty$

Ipotesi: circuito da regime ($t \rightarrow \infty$); $x_0(t) \rightarrow 0$

→ tutte le tensioni / correnti sono sinusoidali e ω_0

$$\begin{aligned} v_R &= \text{Re} [\hat{v}_R e^{j\omega_0 t}] \\ i_R &= \text{Re} [\hat{i}_R e^{j\omega_0 t}] \\ v_L &= \text{Re} [\hat{v}_L e^{j\omega_0 t}] \end{aligned}$$

fasi associate

X KVL

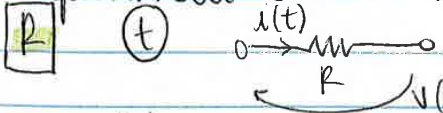
$$\text{Re} \left\{ \hat{E} - \hat{v}_R - \hat{v}_L \right\} e^{j\omega_0 t} = 0 \quad \text{Re} [\hat{E} e^{j\omega_0 t}] = \text{Re} [\hat{v}_R e^{j\omega_0 t}] + \text{Re} [\hat{v}_L e^{j\omega_0 t}]$$

le KVL / KCL valgono anche per i fasori!

Analisi di reti in (ω) → in metodo fasoriale

$$x(t) = X \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad x(t) = \text{Re} [X e^{j\varphi} e^{j\omega_0 t}]$$

Equazioni caratteristiche (casi tipici) di R, L, C in (ω)



$$V = Ri$$

$$V_M \cos(\omega_0 t + \varphi_v) = R I_M \cos(\omega_0 t + \varphi_i)$$

$$v(t) = R i(t) \quad v(t) = V_M \cos(\omega_0 t + \varphi_v)$$

$$i(t) = I_M \cos(\omega_0 t + \varphi_i)$$

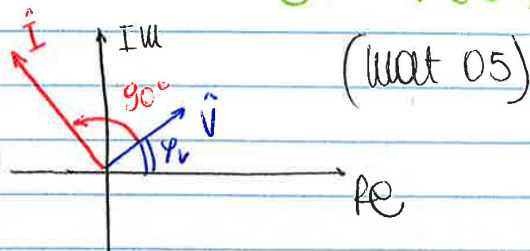
$$\text{Re} [V_M e^{j\omega_0 t} e^{j\varphi_v}] = R \text{Re} [I_M e^{j\omega_0 t} e^{j\varphi_i}]$$



$Z_C = \frac{1}{j\omega_0 C}$; $Y_L = j\omega_0 C$

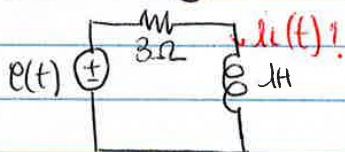
Interpretazione grafica $|\hat{I}| = I_M = \overbrace{|j\omega_0 C|}^{\omega_0 C} \cdot \overbrace{|\hat{V}|}^{V_M}$
 $= \omega_0 C V_M$

$\angle \hat{I}_M = \varphi_I = \angle(j\omega_0 C)\hat{V} = \angle j\omega_0 C + \angle \hat{V}$
 $e^{j\pi/2} \omega_0 C V_M e^{j\varphi_V}$



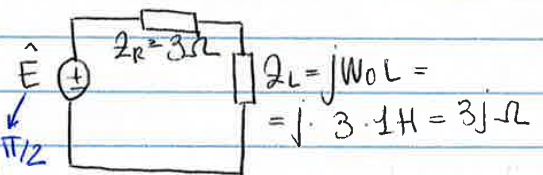
Analisi fasoriale (metodo) rete in (t)

Cou generatori (obsoletissimi!)



PASSO 1

rete in (w)



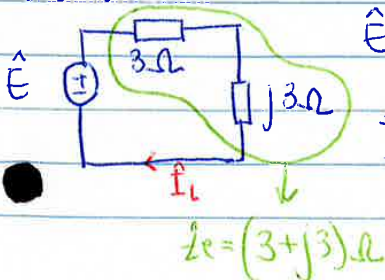
$e(t) = 4 \cos(3t) = 4 \cos(3t - \frac{\pi}{2})$
 $4e^{-j\pi/2}$

PASSO 2: Analisi della rete in (w) sfruttando tutte le tecniche e i teoremi visti fino ad ora

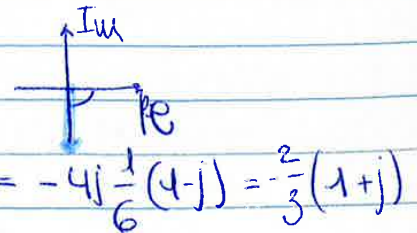
$\hat{I}_L = I_L e^{j\varphi_L}$

PASSO 3 $i_L(t) = I_L \cos(\omega_0 t + \varphi_L)$ dalla definizione del fasore $i_L(t) \hat{=} \text{Re} \{ \hat{I}_L e^{j\omega_0 t} \}$

Risoluzione



$\hat{E} = 4e^{-j\pi/2} = 4e^{-j90^\circ} = -4j$
 $\hat{I}_L = \frac{\hat{E}}{3\Omega + j3\Omega} = \frac{-4j}{3(1+j)} \cdot \frac{(1-j)}{(1-j)} = -4j \cdot \frac{1}{6} (1-j) = -\frac{2}{3}(1+j)$

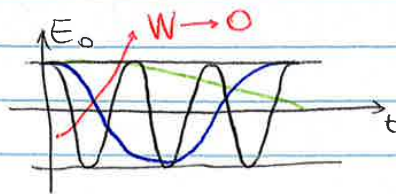


$$\begin{cases} Z_L = j\omega L \\ Z_C = \frac{1}{j\omega C} \end{cases} \begin{cases} 0 \Omega \text{ per } \omega = 0 \text{ corto} \\ \infty \text{ per } \omega \rightarrow \infty \text{ aperto} \end{cases} \begin{matrix} \text{rad/s} \\ \text{aperto} \\ \text{corto} \end{matrix}$$

$\omega = 0 \rightarrow$ generatori costanti

$$e(t) = E_0 \cos(\omega t)$$

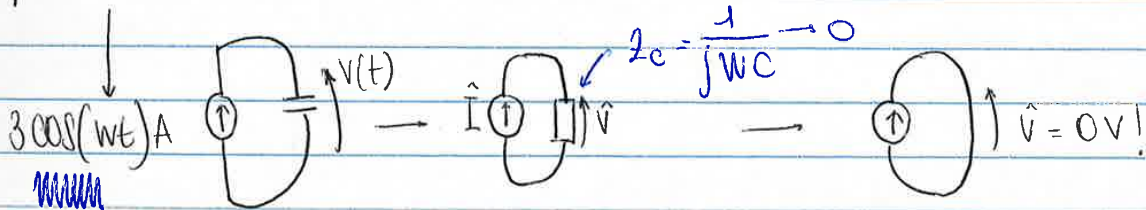
$\omega \rightarrow 0$



per generatori costanti, abbiamo già discusso il comportamento di L, C

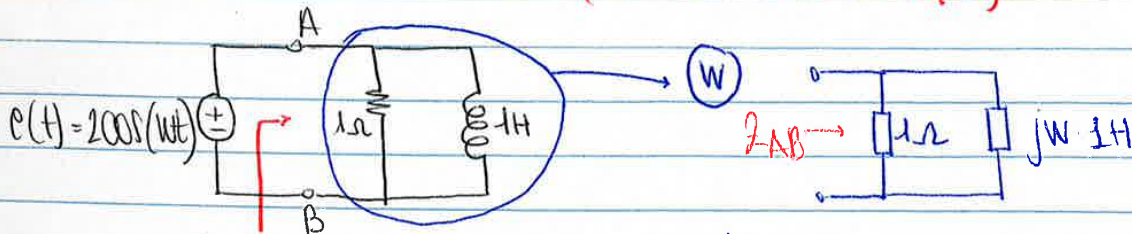
$$L \rightarrow j\omega L \rightarrow 0 \text{ corto}; \quad C \rightarrow \frac{1}{j\omega C} \rightarrow \infty \text{ aperto}$$

per $\omega \rightarrow \infty$




Esercizio #1 discutere il comportamento del bipolo A-B con $Z(\omega)$

$$\begin{matrix} (\omega = \omega_1 = 1 \text{ rad/s}) \\ (\omega = \omega_2 = 1 \text{ K rad/s}) \end{matrix}$$



Se voglio: $\hat{I} = \frac{\hat{E}}{Z_{AB}}$

NOTA: se avessi avuto \hat{A}  $\hat{V}_c = -\hat{A}Z_e$
 $= -(1+j)V$

$$\hat{V}_c = \sqrt{2}e^{j(\frac{\pi}{4} + \pi)}$$

$$V_c(t) = \sqrt{2} \cos(2t + \frac{5}{4}\pi) V$$

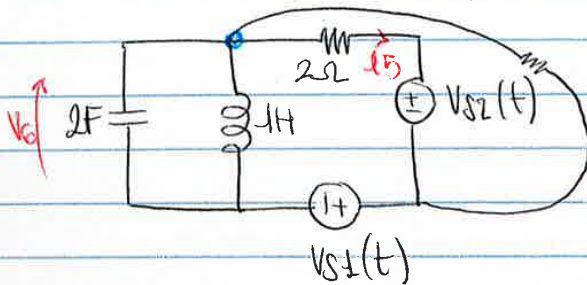
soluzione al regime di
 $V_c(t) \rightarrow t \rightarrow \infty$

Esercizio #3

calcolare $i_5(t)$, $V_6(t)$ per $t \rightarrow \infty$ con $V_{S1}(t) = 2 \cos(2t + 150^\circ) V$

$$V_{S2}(t) = 2 \cos(2t) V$$

stessa Wol!



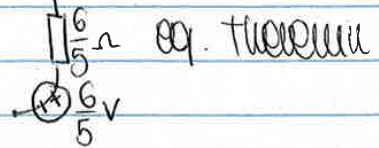
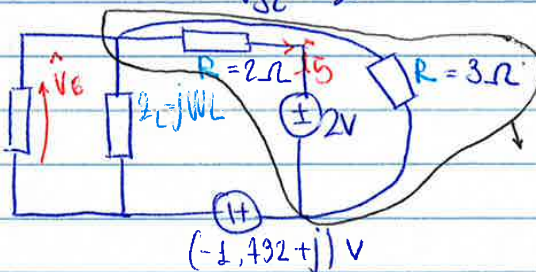
traccia di soluzione $\hat{V}_{S1} = 2e^{j150^\circ} V$

$$\hat{V}_{S2} = 2 V$$

rete in (W)

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C}$$

$$\frac{1}{j4} = -j\frac{1}{4}$$



da qui $V_6 = \dots$ Millivolt

Risultati

$$V_6(t) = 0,262 \cos(2t + 41^\circ) V \leftarrow 0,262 e^{j41^\circ} = \hat{V}_6$$

$$i_5(t) = 0,415 \cos(2t - 95^\circ) V \leftarrow \hat{I}_5 = 0,415 e^{j95^\circ}$$

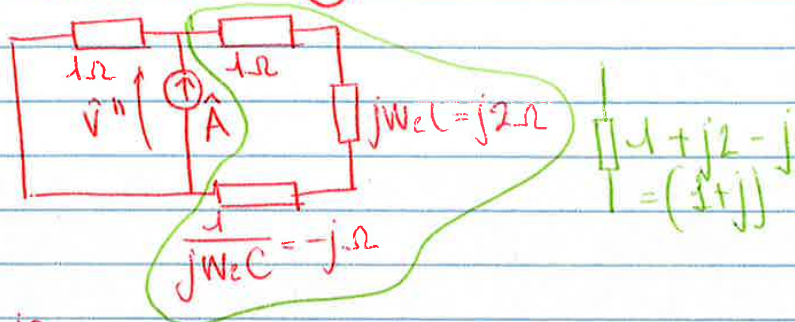
$$\hat{V}' = \frac{2}{5} [8 - j] = \frac{2}{5} \sqrt{10} \cdot e^{j\varphi_1}$$

$$\arctan\left(-\frac{1}{3}\right) = -0,3218 \text{ rad}$$

$$\text{oppure } -0,3218 \times \frac{180^\circ}{\pi} \approx -18,45^\circ$$

quindi $V'(t) = 2 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \cos(\omega_1 t - 0,32 \pi \text{ rad})$
1 rad/sec

$V''(t) \Rightarrow$ analisi in (ω)



$$\hat{A} = 2e^{j0} = 2A$$

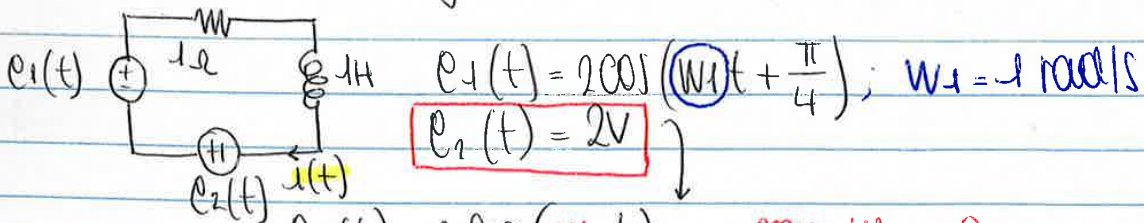
$$\hat{V}'' = \frac{2A}{A} \times \left[\frac{1\Omega (1+j)A}{1\Omega + (-1+j)} \right] = \dots$$

$$\hat{V}'' = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}} e^{j0,32}$$

quindi $V''(t) = 2 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \cos(\omega_2 t + 0,32 \text{ V})$
2 rad/s

$$\rightarrow V(t) = V'(t) + V''(t)$$

Come trattiamo i generatori costanti?



$$e_1(t) = 2 \cos(\omega_1 t + \frac{\pi}{4}); \omega_1 = 1 \text{ rad/s}$$

$$e_2(t) = 2V$$

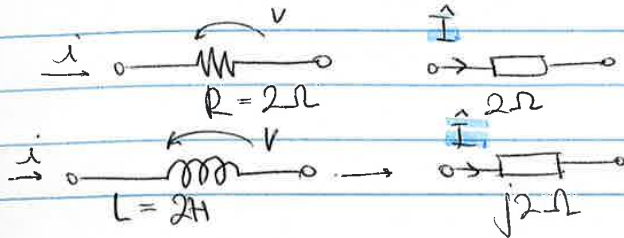
$$e_2(t) = 2 \cos(\omega_2 t) \text{ V} \quad \text{con } \omega_2 \rightarrow 0$$

soluzione per sovrapposizione

$$i(t) = i'(t) + i''(t)$$

Definiamo $\varphi = \varphi_V - \varphi_I$ e criticiamo ciò che si fa per R e L

($\times \omega = 1 \text{ rad/s}$)



$\hat{I} = 1A$ ($i(t) = 1 \times \cos(\omega t)$) $\varphi_I = 0$

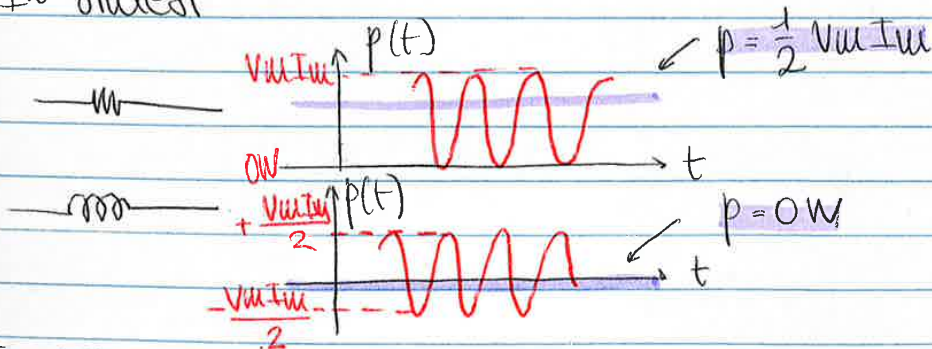
R: $\hat{V} = 1A \cdot 2\Omega = 2V = \frac{V_m}{2} e^{j\varphi_V} \rightarrow 0$
 L: $\hat{V} = 1A \cdot j2\Omega = \frac{V_m}{2} e^{j\varphi_V} \downarrow \frac{\pi}{2}$

quindi per R: $\varphi = 0$; L: $\varphi = \frac{\pi}{2}$

Resistor: $\frac{V_m I_m}{2} \cos(0) + \frac{V_m I_m}{2} \cos(2\omega t + \varphi_V + \varphi_I)$
 $p = \frac{V_m I_m}{2}$

Inductor: $\frac{V_m I_m}{2} \cos(\frac{\pi}{2}) + \frac{V_m I_m}{2} \cos(2\omega t + \varphi_V + \varphi_I)$
 $p = 0$

In sintesi



In generale

$p(t) = \frac{V_m I_m}{2} \cos(\varphi) + \frac{V_m I_m}{2} \cos(2\omega t + \varphi_V + \varphi_I)$
 $\varphi = \varphi_V - \varphi_I$
 $2\omega t + 2\varphi_I + (\varphi_V - \varphi_I)$

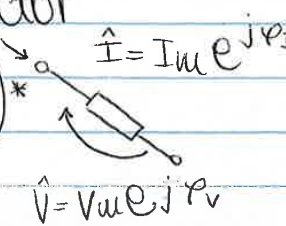
Valore efficace potenza

13/12/2021

- #2 potenza complessa (definizionale e convenzionale)
- #3 esempio
- #4 valore efficace
- #5 max power transfer
- #6 "nfa sollevato" → PF = power factor

#2
$$S \hat{=} \frac{1}{2} \hat{V} \hat{I}^* = \frac{1}{2} V_{\text{eff}} e^{j\varphi_V} (I_{\text{eff}} e^{j\varphi_I})^*$$

$$S = \frac{1}{2} V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} e^{j(\varphi_V - \varphi_I)}$$



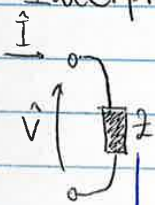
[A] = potenza apparente [volt Ampere]

$$S = \frac{1}{2} V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos \varphi + j \frac{1}{2} V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \sin \varphi = P + jQ$$

P = potenza attiva [watt]

Q = potenza reattiva [VAR]
volt Ampere reattivi

Interpretazione grafica ("triangolo delle potenze")

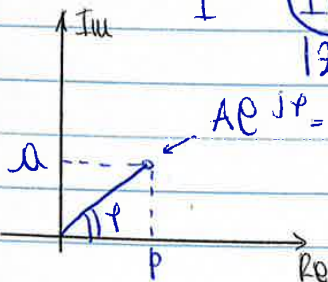


$$S = \frac{1}{2} \hat{V} \hat{I}^* = \frac{1}{2} V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} e^{j\varphi} \rightarrow \varphi_V - \varphi_I$$

$$S = P + jQ = A \cos \varphi + j A \sin \varphi$$

$$Z = \frac{\hat{V}}{\hat{I}} = \frac{V_{\text{eff}}}{I_{\text{eff}}} e^{j(\varphi_V - \varphi_I)}$$

fattore di potenza
 $PF \hat{=} \cos \varphi$

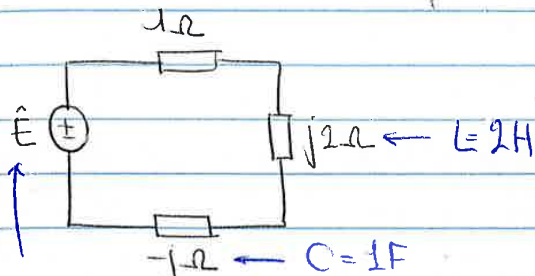


$$P = A \cos \varphi = A \cdot PF$$

$$Q = A \sin \varphi$$

$$\frac{Q}{P} = \tan \varphi$$

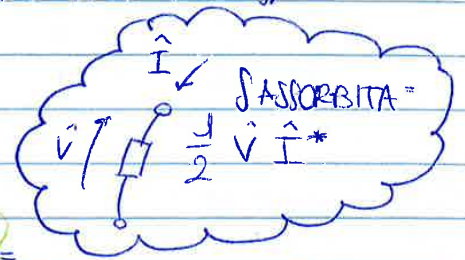
#3 Esempio



$i(t) = 2 \cos(\omega t) \rightarrow \hat{E} = 2V$
 1 mod/Re

Verificare il bilancio di potenza

$$\hat{I} = \frac{\hat{E}}{1+2j-j} = \frac{2}{(1+j)(1-j)} = (1-j)A$$



$$S_e = \frac{1}{2} \hat{E} (-\hat{I})^* = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (-1+j)^* =$$

$$S_e = -1W - j1VAR$$

resistore $S_R = \frac{1}{2} 1\Omega I_u^2 = 1 \text{ watt}$

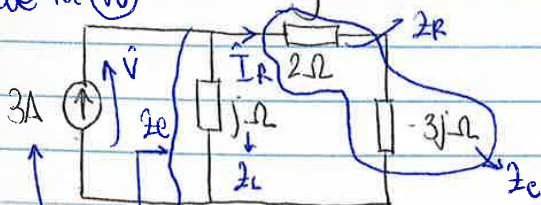
induttore $S_L = \frac{1}{2} (j2) I_u^2 = j2 \text{ VAR}$

condensatore $S_C = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{j1}\right) I_u^2 = -j1 \text{ VAR}$

Quindi $S_e + S_R + S_L + S_C = (-1-j) + (1) + (j2) + (-j) = 0 !$

Esempio calcolare \hat{I}_R e la potenza (complessa) erogata dal generatore

rete in (w)



$$Z_e = \frac{j(2-3j)}{j+(2-3j)} = \frac{3+2j}{2(1-j)} \cdot \frac{(1+j)}{(1+j)} = \frac{(3+2j) + (3j-2)}{4} = \frac{1}{4} + j\frac{5}{4}\Omega$$

Re Xe

fase $3e^{j0} \rightarrow i(t) = 3 \cos(\omega t + 0) A$