



centroappunti.it

CORSO LUIGI EINAUDI, 55/B - TORINO

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 2547A

ANNO: 2023

A P P U N T I

STUDENTE: Durin Francesco

MATERIA: Appunti di Meccanica dei Fluidi - Prof. Boano

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTI E NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.

Mechanica dei fluidi

Introduzione PROPRIETÀ DEI FLUIDI

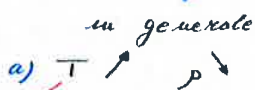
Mechanica del continuo - particelle di fluido - Volume sufficientemente grande da poter considerare un buon numero di molecole da poter ragionare su termini di media.

1) DENSITÀ ρ + PESO SPECIFICO γ

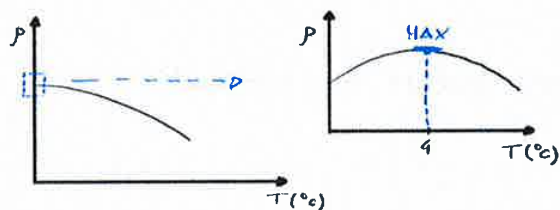
$$\rho = \frac{\text{MASSA}}{\text{VOLUME}} \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right] \quad \gamma = \frac{\text{PESO}}{\text{VOLUME}} \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^3} \right] = \frac{\text{MASSA} \cdot g}{\text{VOLUME}} = \rho \cdot g$$

Valori tipici T_{amb}, p_{amb}	H_2O	$\rho = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	$\gamma = 9800 \frac{\text{N}}{\text{m}^3}$
	ARIA	$\rho \approx 1,2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	$\gamma \approx 12 \frac{\text{N}}{\text{m}^3}$

Densità \rightarrow varia con temperatura e pressione (anche ρ)



d'acqua è un'eccezione

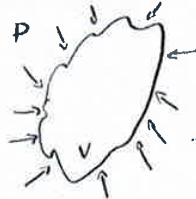


\Rightarrow Effetto: Da 4°C a 0°C la densità diminuisce quindi non c'è più rimescolamento e si ghiaccia solo la parte superiore

Ordine di grandezza: $\Delta T = 0(10^\circ\text{C}) \rightarrow$ max variazione $\rho \approx 1\%$ TRASCURABILE

b) Variazione ρ con pressione

COMPRESSIBILITÀ



Variazione pressione

$P + dP \rightarrow \phi$

implica variazione volume

$V + dV \rightarrow \phi$

$$-\frac{dV}{V} = \frac{dP}{E}$$

modulo di elasticità volumetrica $[Pa]$

(un fluido con E alto è molto rigido)

$E \uparrow$ poco comprimibile

Legame P con ρ :

In compressione $M = \rho V = \text{cost} \rightarrow dM = 0$

$dM = d\rho V + \rho dV = 0 \rightarrow -\frac{dV}{V} = \frac{d\rho}{\rho} \Rightarrow$

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dP}{E}$$

TENSIONE SUPERFICIALE

- La superficie che separa acqua e aria si comporta come una sottilissima pellicola in tensione
- Interfaccia tra un liquido e un altro fluido (LIQ/GAS)

Come un tamburo



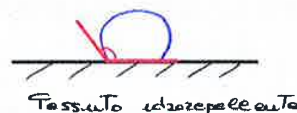
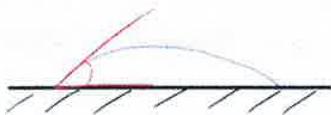
Tensione superficiale: $\sigma = \frac{F}{L} \left[\frac{N}{m} \right]$

$\sigma_{H_2O/aria} \approx 907 \frac{N}{m}$

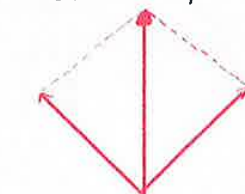
L taglio

ANGOLO DI CONTATTO

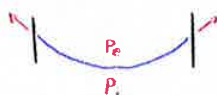
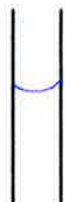
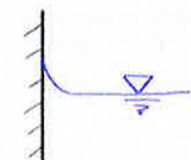
Gocciola su una superficie



Tossuto idrorepellente



Risultante non nulla ↑
filamentata da $P_e - P_i$ ↓
Differenza di pressione

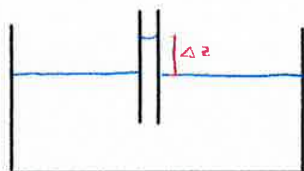


=>

LEGGE DI LAPLACE

$\Delta P = \frac{2\sigma}{R}$

R = raggio del tubo cilindrico



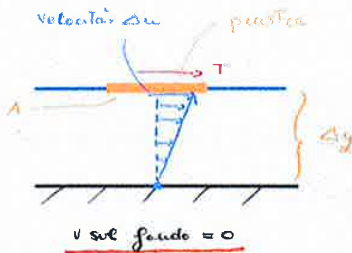
IN STATICA
 $\Delta z = \frac{\Delta P}{\rho_{LIQ}}$

Se $\Delta z < 1mm$ se $D > 1cm$
↓
diametro tubo

VISCOSITÀ

Es per definizione

T forza applicata



LEGGE DI NEWTON

Modulo della forza.

$|T| = \mu A \frac{\Delta u}{\Delta y}$

↳ Δy piccolo richiede più forza

data la maggiore interazione delle particelle del fondo che devono resistere forze

SFORZO TANGENZIALE

$|\tau| = \frac{T}{A} = \mu \frac{\Delta u}{\Delta y}$ ma anche

$|\tau| = \mu \frac{du}{dy}$

↳ a superficie

↳ direzione normale alla superficie

μ coefficiente di viscosità dinamica → es. distingue acqua, miele, aria

$\nu = \frac{\mu}{\rho}$

viscosità cinematica

$H_2O \rightarrow \mu = 10^{-3} Pa \cdot s$

$\nu = 10^{-6} \frac{m^2}{s}$

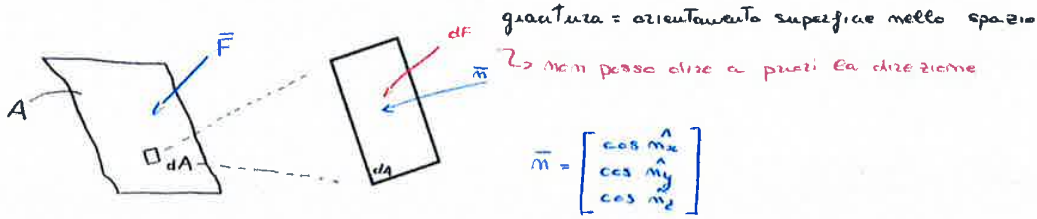
ARIA → $\mu = 10^{-5} Pa \cdot s$

$\nu = 10^{-5} \frac{m^2}{s}$

FLUIDI VISCOELASTICI

mix tra fluido e solido → a rete la deformazioni rimangono e a rete il corpo torna normale.

STATO TENSIONALE IN UN FLUIDO

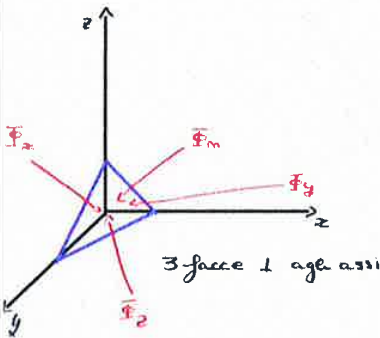


SFORZO $\phi_m = \frac{d\vec{F}}{dA} [Pa]$
 direzione
 normale alla superficie

Per calcolare la forza risultante \vec{F} : $\vec{F} = \int d\vec{F} = \int_A \vec{\phi}_m dA$

Devo trovare un modo per calcolare $\phi_m = \phi_m(x, y, z)$

ϕ_m dipende da orientamento della quantità stessa:



Teorema di Cauchy

$$\phi_m = \phi_x \cos \hat{m}_x + \phi_y \cos \hat{m}_y + \phi_z \cos \hat{m}_z$$

Stato tensionale definito da ϕ_x, ϕ_y, ϕ_z
 → Tensore degli sforzi (Φ) → matrice

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi_{xx} & \phi_{yx} & \phi_{zx} \\ \phi_{xy} & \phi_{yy} & \phi_{zy} \\ \phi_{xz} & \phi_{yz} & \phi_{zz} \end{bmatrix}$$

normale a superficie (pointing to the first column)
 componente (pointing to the rows)

la matrice è simmetrica xy, yx commutativo

Da bilancio alla rotazione: $\phi_{xy} = \phi_{yx}, \dots$

Sforzi tangenziali

$$\begin{aligned} \phi_{xy} &= \phi_{yx} = \tau_x \\ \phi_{xz} &= \phi_{zx} = \tau_y \\ \phi_{yz} &= \phi_{zy} = \tau_z \end{aligned}$$

Sforzi normali

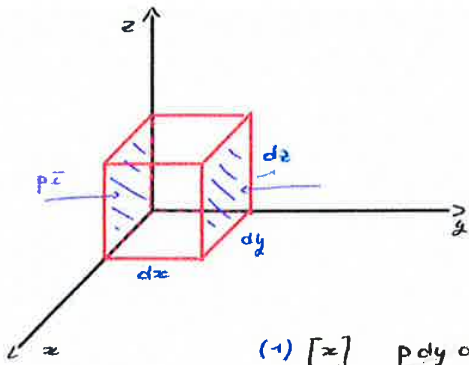
$$\begin{aligned} \phi_{xx} &= \sigma_x \\ \phi_{yy} &= \sigma_y \\ \phi_{zz} &= \sigma_z \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Phi = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_x & \tau_y \\ \tau_x & \sigma_y & \tau_z \\ \tau_y & \tau_z & \sigma_z \end{bmatrix}$$

6 sforzi da determinare → 3 sforzi normali σ
 → 3 sforzi tangenziali τ

PRESSIONE: $p = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}$ Media

CAUCHY: anche $\underline{\Phi}_m = \Phi \vec{m}$



Bilancio di Forze : $\bar{F}_{massa} + \bar{F}_{superf} = m \cdot \frac{A}{\rho} \cdot a$

↑
accelerazione
= a

(1) [x] $p dy dz \bar{i} - (p + \frac{\partial p}{\partial x} dx) dy dz \bar{i} = -\frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz \bar{i}$

variazione pressione su x spostamento

[y] $= -\frac{\partial p}{\partial y} dx dy dz \bar{j}$

[z] $= -\frac{\partial p}{\partial z} dx dy dz \bar{k}$

risultante forze di superficie

\bar{F}_{sup}

(1) $\bar{F}_{sup} = - \left(\frac{\partial p}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \bar{k} \right) dx dy dz$

∇p dV

(2) forze di massa specifica $\rightarrow \bar{f}_n = \frac{FORZA}{MASSA} \left[\frac{m}{s^2} \right]$

↳ vale per qualunque fluido fermo

· qualunque tipo di campo di forze

$\bar{F}_{MASSA} = \bar{f}_n (\rho dV)$

$\bar{F}_{MASSA} + \bar{F}_{sup} = 0 \Rightarrow \rho (\bar{f}_n - \nabla p) dx dy dz = 0 \Rightarrow$

$\rho \bar{f}_n = \nabla p$

Linee isobare $p = cost$ sono ortogonali a \bar{f}_n

Equazione indefinita della statica

EQUAZIONE GLOBALE DELLA STATICA

di un elemento dV :

$\rho \bar{f}_m = \nabla p$

$\rho \bar{f}_m dV = \nabla p dV \dots$

Legge di Stevino

ipotesi:

- 1) FLUIDO FERMO $\rho \bar{f}_m = \nabla p$
- 2) FORZA DI MASSA = FORZA DI GRAVITÀ $\bar{f}_m = -\nabla(yz)$ ↳ coordinata verticale
- 3) FLUIDO INCOMPRESSIBILE $p = cost, \rho = cost$

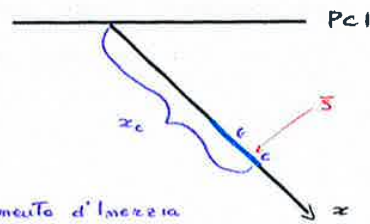
$$\Rightarrow \bar{S} = \bar{m} \underbrace{\gamma a_G A}_{\text{pressione nel baricentro}} = \bar{m} p_G A$$

pressione nel baricentro

POSIZIONE CENTRO DI SPINTA

Momento della spinta rispetto all'asse y.

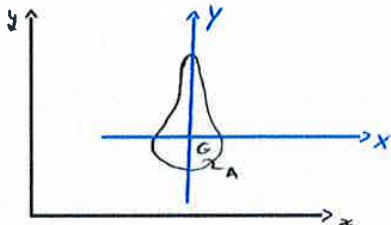
$$x_c S = \int x dS = \int \gamma \sin \alpha x^2 dA = \gamma \sin \alpha \underbrace{\int x^2 dA}_{I_y} = \text{Momento d'inerzia (rispetto all'asse y)}$$



$$x_c \cdot S = \gamma \sin \alpha I_y$$

$$x_c = \frac{\gamma \sin \alpha I_y}{S} = \frac{\gamma \sin \alpha I_y}{\gamma \sin \alpha x_G A} = \frac{I_y}{x_G A}$$

Calcolo del momento d'inerzia I_y



Momento d'inerzia o Momento d'area di ordine 2

$$I_y = \int_A x^2 dA$$

$$I_x = \int_A y^2 dA$$

$$I_{xy} = \int_A xy dA$$

Momento misto

Con assi baricentrici: MOMENTO D'INERZIA PRINCIPALE (I_y^G)

$$I_y = I_y^G + x_G^2 A \quad \Rightarrow \quad \text{riprendendo} \quad \boxed{x_c} = \frac{I_y}{x_G A} = \frac{x_G^2 A + I_y^G}{x_G A} = \boxed{x_G + \frac{I_y^G}{x_G A}}$$

↓
localizzato al centro di spinta

(relativamente $x_c > x_G$ cioè il centro di spinta si trova più in basso)

$$\Rightarrow S = p_G \cdot A \quad , \quad \bar{S} \perp \text{ alla superficie}$$

$$x_c = x_G + \frac{I_y^G}{x_G A}$$

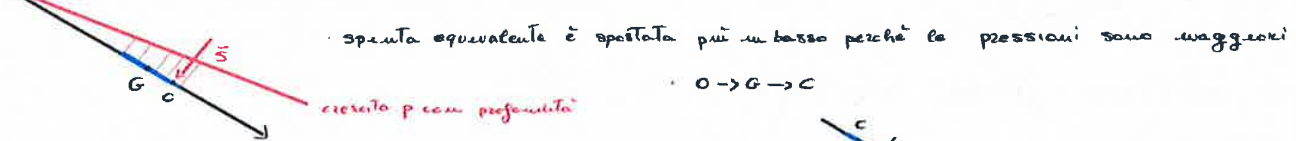
↳ Dipende quindi da forma, area + posizione rispetto al piano di carichi

$$\rightarrow y_c = \frac{I_{xy}}{x_G A} \quad \text{ragionamento analogo se la superficie è simmetrica (C è su asse di simmetria)}$$

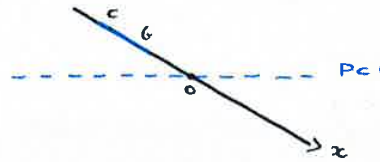
SPINTE SU SUPERFICI PIANE

$S = P_0 \cdot A$ $x_c = x_G + \frac{I_y}{x_G \cdot A}$ $(y_c = \frac{I_{xy}}{x_G \cdot A})$

Piano carico idrostatico



$O \rightarrow G \rightarrow C$



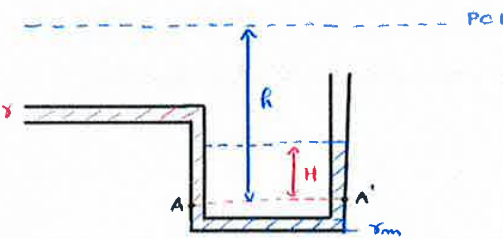
→ Unico caso in cui l'ordine si capovolge

Per i GAS: $\gamma_{GAS} \approx 0 \rightarrow$ piccola variazione delle pressioni $P_B = P_A + \gamma(z_A - z_B)$

$P \approx \text{cost} \rightarrow C = G$

MISURATORI DI PRESSIONE

Acque su portale **MANOMETRO**

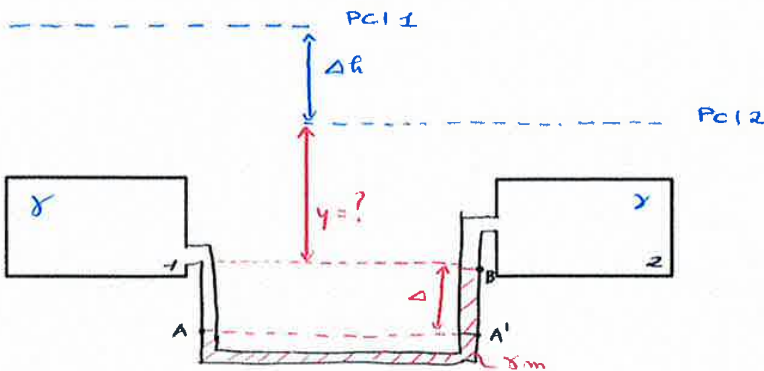


$P_A = \gamma h$ $P_A = \gamma_m H$

$P_A = P_{A'} \rightarrow \gamma h = \gamma_m H \rightarrow h = \frac{\gamma_m}{\gamma} H$

stessa pressione dello stesso fluido a uguale altezza

MANOMETRO DIFFERENZIALE



$P_A = \gamma(y + \Delta + \Delta h)$
 $P_B = \gamma y$
 $P_{A'} = P_B + \gamma_m \Delta = \gamma y + \gamma_m \Delta$

$P_{A'} = P_A$

$\gamma y + \gamma \Delta + \gamma \Delta h = \gamma y + \gamma_m \Delta$

$\Delta h = \frac{\gamma_m - \gamma}{\gamma} \Delta$

Se $\gamma_m \gg \gamma \rightarrow \Delta h \gg \Delta$

Configurazioni che valgono per differenze di carico elevate

Esempi

SPESORE DI UN TUBO IN PRESSIONE

ipotesi $h \gg D \rightarrow$ non grande variabilità della pressione nel tubo

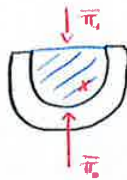
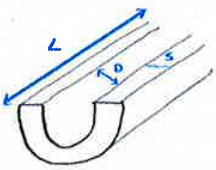


$$P_{media} = \gamma h$$

$$P_2 - P_1 = \Delta P = \gamma \Delta z$$

se $D \ll h \Rightarrow \Delta P \ll P_{media} \rightarrow$ Approssimiamo pressione costante nel fluido \rightarrow come per GA
 ut.izziamo pressione media

Posso trascurare anche l'effetto della gravità



$$\vec{G} + \vec{F}_c = 0$$

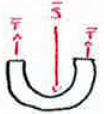
\rightarrow trascurabile

$$\vec{S} = -\vec{\Pi}_0$$

in intensità spinta fluido verso la parete

$$\rightarrow \vec{S} = -\vec{\Pi}_0 = \vec{\Pi}_i = p \cdot \frac{DL}{2}$$

\downarrow
 Π_i agisce su un rettangolo (piatto)



$$\vec{S} = 2\vec{F} \rightarrow T = \frac{\sigma}{2} = \frac{1}{2} p DL \quad (-)$$

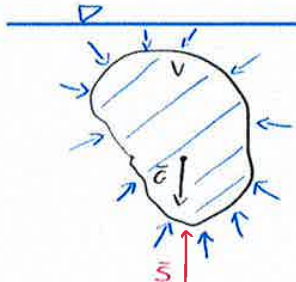
σ = sforzo di trazione massimo ammissibile (per materiale condotto)

$$T = \sigma (SL) \quad (2)$$

$$(-) = (2) \quad \frac{1}{2} p DL = \sigma SL \Rightarrow \sigma = \frac{pD}{2L} \quad \text{Formula di Barotto}$$

\hookrightarrow calcolo spessore tubo per resistere allo sforzo di trazione

SPINTA DI GALLEGGIAMENTO (Archimede)



Equazione globale

$$\vec{G} + \vec{S} = 0$$

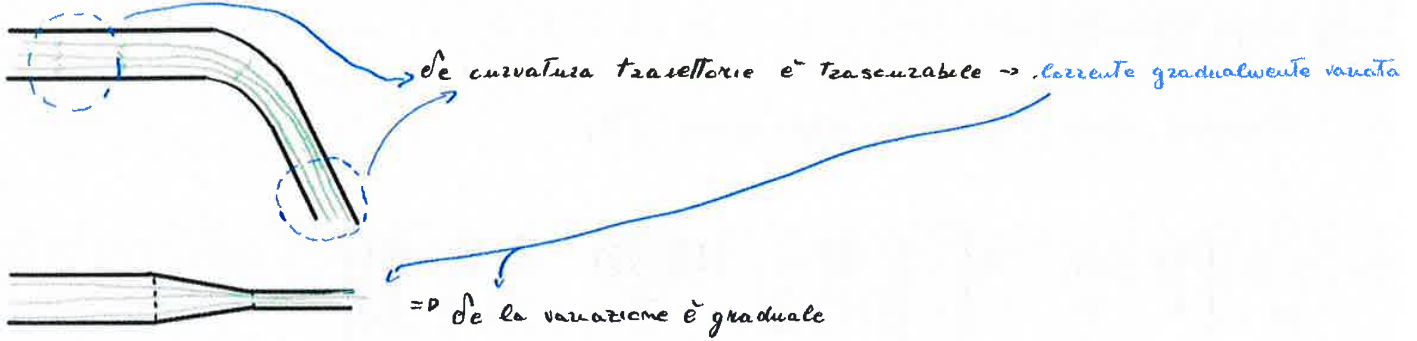
$$\vec{S} = -\vec{G} \rightarrow \vec{S} = \gamma_{fl} \cdot V \quad (\uparrow)$$

\hookrightarrow spinta di galleggiamento

Se $\gamma_{corp} < \gamma_{fl} \rightarrow$ Galleggia
 " " " " $>$ " \rightarrow Affonda

CLASSIFICAZIONE:

- > moto piano : 2D $\vec{v} = v(x,y)$
- > CORRENTE : 1D $\vec{v} = v(x)$ moto con una direzione preferenziale
 Traiettorie ~ parallele tra loro

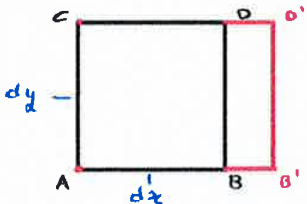


VELOCITÀ DI DEFORMAZIONE E ROTAZIONE

$$\nabla \vec{v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \quad \text{con } v = (u, v, w)$$

1) Velocità di deformazione lineare

es: moto 2D con $\frac{\partial u}{\partial x} = \phi$ e $v = \phi$; $u_A = \phi$ $u_B = u_A + \frac{\partial u}{\partial x} dx$



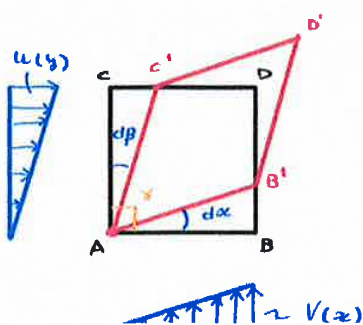
Deformazione lineare $d\epsilon_x = \frac{d\epsilon_{AB}}{l_{AB}} = \frac{BB'}{AB} = \frac{u_B dt}{dx} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} dx dt}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} dt$

Velocità di deformazione $\epsilon_x = \frac{d\epsilon_x}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}$ $\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$ $\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$
 Diagonale matrice $\nabla \vec{v}$

2) Velocità di deformazione angolare

DEF: $\frac{1}{2}$ velocità di riduzione di un angolo tra due rette perpendicolari

ES: 2D con $\frac{\partial v}{\partial x} > 0$ e $\frac{\partial v}{\partial y} > 0$



$$d\alpha \approx \tan(d\alpha) = \frac{BB'}{AB} = \frac{v_B dt}{dx} = \frac{(\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy) dt}{dx} = d\alpha = \frac{\partial v}{\partial x} dt$$

Analogamente -> $d\beta = \frac{\partial u}{\partial y} dt$

Velocità deformazione $\gamma_2 = -\frac{1}{2} \frac{d\gamma}{dt} = \frac{1}{2} (\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y})$

$$D_{i,j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)$$

$$\Omega_{i,j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)$$

$$\nabla \vec{v} = D + \Omega$$

↓
Effetto di ∇v è di determinare { Deformazione
Rotazione } delle particelle

• $\Omega = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{v} \rightarrow$ moto rotazionale \Rightarrow particelle si deformano solo

$$M_{in} - M_{out} = - \frac{\partial \rho u}{\partial x} dx dy dz dt \quad [x]$$

⇒ 3 direzioni spaziali:

$$[x] - \frac{\partial \rho u}{\partial x} dV dt$$

$$[y] - \frac{\partial \rho v}{\partial y} dV dt$$

$$[z] - \frac{\partial \rho w}{\partial z} dV dt$$

$$M_{in} - M_{out} = - \left(\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} \right) dV dt = - \operatorname{div}(\rho \vec{v}) dV dt \quad (1)$$

MASSA IN dV : ρdV

dopo dt $\left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} dt \right) dV$

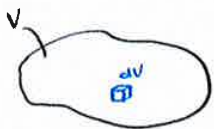
$$\Delta M = \frac{\partial \rho}{\partial t} dt dV \quad (2)$$

(1) = (2) $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0$ → Equazione di continuità (caso generale)

PER FLUIDO INCOMPRESSIBILE ($\rho = \text{cost}$)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad \rightarrow \quad \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0}$$

EQUAZIONE DI CONTINUITÀ IN FORMA GLOBALE



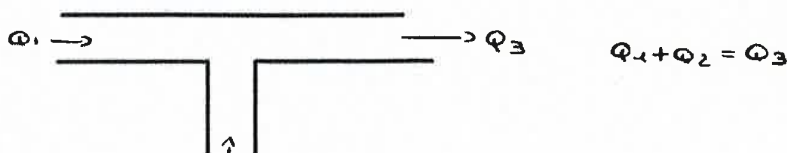
su dV : $\underbrace{\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV}_{(1)} + \underbrace{\int_V \operatorname{div}(\rho \vec{v}) dV}_{(2)} = 0$

(1) Velocità di variazione nel tempo della massa di fluido in V

(2) $\int_V \vec{\rho} \cdot \rho \vec{v} dV = - \int_A \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA = - \int_A \rho v_m dA$ → Portata in massa attraverso la superficie di V
 Th. di Gauss

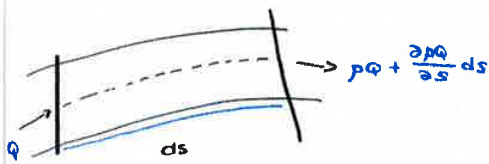
$$\boxed{\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = \int_A \rho v_m dA}$$

per fluido incompressibile $\rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \rho \int_A v_m dA = 0 \rightarrow \int dQ = 0 \Leftrightarrow \boxed{Q_{in} = Q_{out}}$



Parte finale cinematica

EQUAZIONE DI CONTINUITÀ PER UNA CORRENTE



nota -10 $Q = Q(s,t)$ portata

lavoriamo su tubo di flusso

$$\underbrace{M_{IN}}_{(1)} - \underbrace{M_{OUT}}_{(2)} = \Delta M \quad \text{variazione di massa}$$

$$(1) \quad M_{IN} = m_{IN} \cdot dt = \rho Q dt$$

$$M_{OUT} = \left(\rho Q + \frac{\partial \rho Q}{\partial s} ds \right) dt$$

$$M_{IN} - M_{OUT} = - \frac{\partial \rho Q}{\partial s} ds dt \quad (-)$$

(2) Massa al tempo t :

$$\rho dV = \rho A ds$$

Massa al tempo $t + dt$:

$$\left(\rho A + \frac{\partial \rho A}{\partial t} dt \right) ds$$

$$\Delta M = \frac{\partial \rho A}{\partial t} dt ds$$

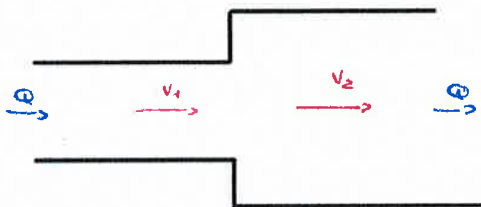
$$\textcircled{1} = \textcircled{2} \quad - \frac{\partial \rho Q}{\partial s} ds dt = \frac{\partial \rho A}{\partial t} ds dt \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial \rho A}{\partial t} + \frac{\partial \rho Q}{\partial s} = 0} \quad \rightarrow \text{Vale per tutti i fluidi}$$

Se fluido incompressibile $\rightarrow \rho \frac{\partial A}{\partial t} + \rho \frac{\partial Q}{\partial s} = 0$

Spesso $\frac{\partial A}{\partial t} = 0$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{Nota permanente} \\ \text{Condotta rigida} \end{array} \right.$

\downarrow

$\frac{\partial Q}{\partial s} = 0 \Rightarrow Q = \text{cost lungo } s.$



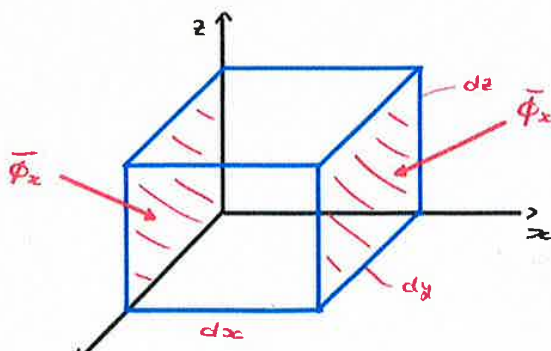
$$v_1 = \frac{Q}{A_1} \quad v_2 = \frac{Q}{A_2}$$

fluido si muove più velocemente nell'area più piccola a parità di portata

DINAMICA DEI FLUIDI

Equazione indefinita della dinamica dei fluidi

Bilancio di forze su un fluido qualsiasi (o di quantità di moto)



$$F_{MASSA} + F_{SUP} = m \cdot A$$

(1) (2) (3)

$$\bar{p}_x + \frac{\partial \bar{p}_x}{\partial x} dx$$

Abbiamo 10 mc. - Seg = 5 GDL → Seg da COMPORTAMENTO REOLOGICO DEL FLUIDO

→ FLUIDO PERFETTO

→ FLUIDO REALE → Newtoniano
 ↳ Non N.

EQUAZIONE GLOBALE DELLA DINAMICA

$$\rho(\bar{f}_m - \bar{A}) = \nabla \Phi \rightarrow \int_V \rho \bar{f}_m dV - \int_V \rho \bar{A} dV - \int_V \nabla \cdot \Phi dV = 0$$

(1) (2) (3)

$$\Rightarrow \boxed{\bar{G} + \bar{F}_c + \bar{H} + \bar{I} = 0}$$

• $\bar{G} = \int_V \rho \bar{f}_m dV$ RISULTANTE DELLE FORZE DI MASSA da (1)

• $\bar{F}_c = \int_V \bar{\phi}_m dA$ RISULTANTE FORZE AL CONTOURNO da (3)

$$\bar{F}_c = \bar{\pi} + \bar{\tau}$$

normali tangenziali

• \bar{H} e \bar{I} derivano da (2) $-\int_V \rho \bar{A} dV = -\int_V \rho \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} dV - \int_V \rho \bar{v} \cdot \nabla \bar{v} dV$

\bar{H} : Flusso della quantità di moto

$$\bar{H} = \int \rho \bar{v} v_m dA$$

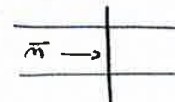
legato a acc. convettiva

$v_m dA = dQ$ Portata su volume attraverso dA

→ $\rho v_m dA = d\dot{m}$ " " massa " " → moltiplicata per \bar{v} dà una quantità di moto

$\rho \bar{v} v_m dA$ FLUSSO DI QUANTITÀ DI MOTO

Per una corrente: $\bar{v} = v \bar{m}$ $v_m = v$



$$\bar{H} = \int_A \rho \bar{v} v_m dA = \bar{m} \int_A \rho v^2 dA$$

H

$$H = \int_A \rho v^2 dA = \beta \rho U^2 A$$

β : COEFFICIENTE DI RAGGUAGLIO DEL FLUSSO Q.D.M.

↳ tiene conto della forma del profilo di \bar{v}

$$\beta = \frac{\rho \int v^2 dA}{\rho U^2 A}$$

$\int v^2 dA$ → $\frac{3}{8}$ laminar.
 $\int v^2 dA$ → $\frac{1}{2}$ Turbolento

legame tra \bar{v} e p (non euclideo)

TEOREMA DI BERNOULLI

- ipotesi: 1) fluido perfetto $\rho(\bar{f}m - \bar{A}) = \bar{v}_p$
- 2) forza di massa = gravità $\bar{f}m = -g \bar{v}_z$
- 3) fluido incompressibile $\rho, \delta = \text{cost}$
- 4) moto permanente $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

$$H = z + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2g} = \text{costante lungo la direzione del moto}$$

carico totale

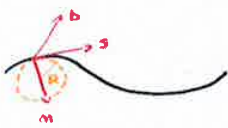
PROCEDIMENTO:

(1) + (2)
$$-\rho g \bar{v}_z - \rho \bar{A} = \bar{v}_p \rightarrow \bar{v}_z + \frac{1}{g} \bar{v}_p = -\frac{1}{g} \bar{A} \quad \text{ma } \delta = \text{cost} \quad \bar{v}_z + \frac{\bar{v}_p}{g} = -\frac{\bar{A}}{g}$$

$$\bar{v} \left(z + \frac{p}{\rho} \right) = -\frac{\bar{A}}{g} \Rightarrow \bar{v} h = -\frac{\bar{A}}{g}$$

 carico piezometrico h

coordinate intrinseche:



- s = tangente
- n = normale
- b = binormale

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A_s \\ A_n \\ A_b \end{bmatrix}$$

$A_s = \frac{Dv}{Dt} \rightarrow$ variazione di v su modulo

$A_n = \frac{v^2}{R} \rightarrow$ Acc. centripeta

$A_b = 0$

lungo direzione tangenziale al moto (s):

$$\frac{\partial h}{\partial s} = -\frac{A_s}{g} = -\frac{1}{g} \frac{Dv}{Dt} = -\frac{1}{g} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial s} \right) = -\frac{1}{g} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial s} \right)$$

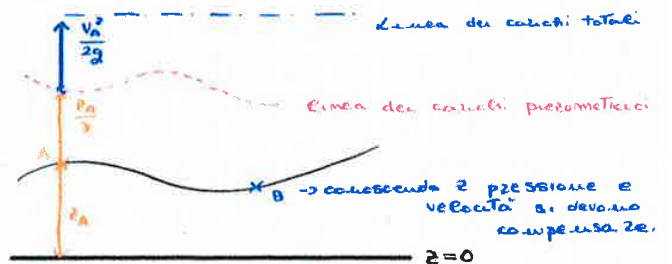
$$\frac{\partial h}{\partial s} + \frac{\partial \frac{v^2}{2g}}{\partial s} = -\frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial s} \left(h + \frac{v^2}{2g} \right) = -\frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t}$$

 \Rightarrow per ipotesi di moto permanente

$$\frac{\partial H}{\partial s} = 0 \Rightarrow H = \text{costante lungo } s$$

$$H = z + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2g} = \text{cost} \quad (\text{lungo } s)$$

teorema cinematico



Lezione 12

Ripartiamo dal Th. di Bernoulli

$$H = \underbrace{z + \frac{p}{\gamma}}_h + \frac{v^2}{2g} = \text{cost} \quad \text{lungo una traiettoria} \quad (\text{ricordare ipotesi})$$

In un GAS: a) $\gamma \approx 0 \rightarrow$ trascurabile il contributo di $z \rightarrow z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} = \text{cost}$

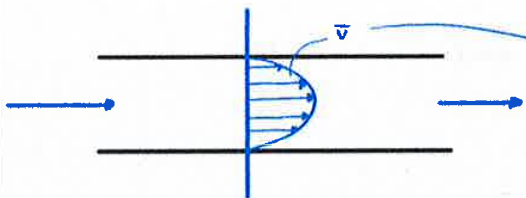
moltiplichiamo per $\gamma \rightarrow$ $p + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{cost}$

lungo una traiettoria

$$-\frac{\rho g}{\gamma} \nabla z - \rho \vec{A} = \nabla p$$

Da questa espressione si capisce che ∇z legato a γ ed è per questo che è trascurabile

POTENZA DI UNA CORRENTE



$$H = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} = \text{cost}$$

Velocità cambia in base alla traiettoria

+ spesso conosciamo velocità media $U = \frac{Q}{A}$

POTENZA DELLA CORRENTE: $P = \gamma Q H$

con $H = z + \frac{p}{\gamma} + \alpha \frac{U^2}{2g}$

α : Coefficiente di riaggiustamento della potenza cinetica

permette di lavorare con la velocità media

$$[P] = [\gamma][Q][H] = \frac{\text{PESO}}{\text{VOLUME}} \cdot \frac{\text{VOLUME}}{\text{TEMPO}} \cdot \frac{\text{ENERGIA}}{\text{PESO}} = \frac{\text{ENERGIA}}{\text{TEMPO}}$$



attraverso dA : $\rightarrow dP = \underbrace{\gamma}_{\text{cost}} \cdot \underbrace{dQ}_{\text{cost}} \cdot \underbrace{H}_{\text{cost}} = \text{cost}$

$P = \int dP = \text{cost} \rightarrow$ Normalmente non si dissipa energia

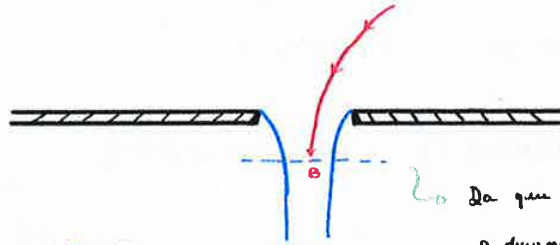
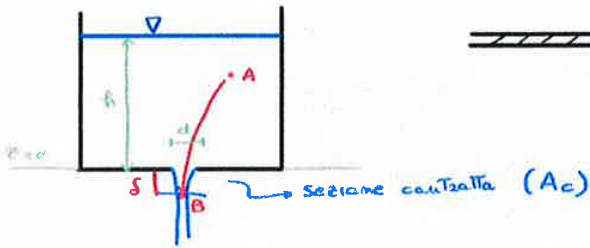
$$P = \int dP = \gamma \int_Q H dQ = \gamma \int_Q \left(h + \frac{v^2}{2g} \right) dQ =$$

$$= \underbrace{\gamma \int_Q h dQ}_a + \underbrace{\gamma \int_Q \frac{v^2}{2g} dQ}_b =$$

a) $\gamma \int_Q h dQ = \gamma h \int_Q dQ = \gamma h Q$

corrente gradualmente gradualmente variata \rightarrow traiettorio approssimabili rettilinee

Luce in parete sottile



Da qui in poi la sezione continua a diminuire un po' lentamente

$$\delta = 0,5 + 1 d$$

Coefficiente di contrazione $C_c = \frac{A_{contra}}{A_{luce}} \approx 0,64 \div 0,62$

Riduzione di circa il 40% dell'area

BERNOULLI :

$$H_A = H_B \quad z_A + \frac{P_A}{\rho} + \frac{v_A^2}{2g} = z_B + \frac{P_B}{\rho} + \frac{v_B^2}{2g}$$

$h \quad \approx 0 \quad -\delta \quad L \approx 0$

$$\left[\frac{P_B}{\rho} \approx 0 \right]$$

fl. non fermo ma ha v molto basse

Su sez. contratta : trasettorie rettilinee $\rightarrow z + \frac{P}{\rho} = \text{cost}$

il getto è a contatto con aria $\rightarrow P_B = P_{atm} = 0$ (valore su bordo getto)

$$\Rightarrow v_B = \sqrt{2g(h + \delta)} \approx \sqrt{2gh} = v_{TORR}$$

BATTENTE

FORMULA DI TORRICELLI

distanza tra sezione PCI

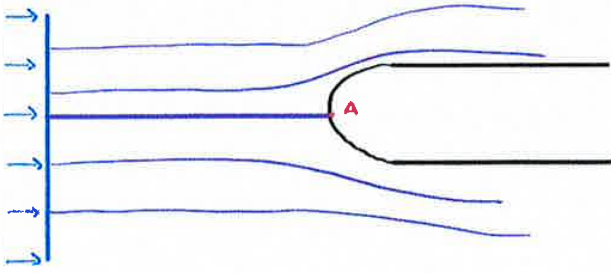
• In realtà : $v_{EFF} = C_v \cdot v_{TORR}$ coefficiente riduzione velocità $C_v = 0,98 + 0,99$

• PORTATA : $Q = v_{EFF} \cdot A_c = (C_v \sqrt{2gh}) (C_c A_{LUCE}) = \underbrace{C_v C_c}_{C_Q} \cdot A_{LUCE} \cdot \sqrt{2gh}$

Coefficiente di flusso ($C_Q \approx 0,6$)

Tubo di Pitot

• Corpo affusolato investito da una corrente



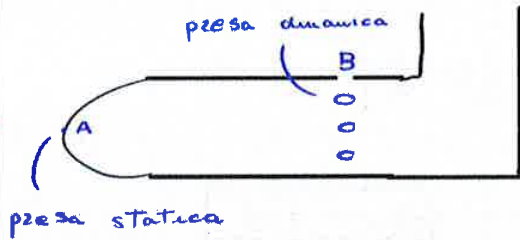
• A: punto di ristagno

$$v_A = 0$$

$$H_A = H_B$$

$$h_A + \frac{v_A^2}{2g} = h_B + \frac{v_B^2}{2g} \rightarrow v_{\infty} = \sqrt{2g(h_A - h_B)}$$

NEL TUBO DI PITOT:



$$v_{\infty} = \sqrt{2g(h_A - h_B)}$$

• GAS

$$\Delta h = \frac{\Delta P}{\gamma} + \frac{\Delta z}{\text{trascurato}}$$

$$\rightarrow v_{\infty} = \sqrt{2g \frac{\Delta P}{\gamma}} = \sqrt{2 \frac{\Delta P}{\rho}}$$

• FLUIDO NEWTONIANO INCOMPRESSIBILE :

$$\tau_{ij} = -2\mu D_{ij} \quad \textcircled{A}$$

• EQUAZIONE INDEFINITA DINAMICA : $\rho (\bar{f}_m - \bar{A}) = \nabla \cdot \bar{\Phi}$ \textcircled{B}

$$\textcircled{A} + \textcircled{B} : \quad \rho (\bar{f}_m - \bar{A}) = \nabla p - \mu \nabla^2 \bar{v}$$

EQUAZIONE DI NAVIER-STOKES (per fluido incompressibile)

EQUAZIONE GLOBALE DINAMICA $\bar{G} + \bar{F}_c + \bar{\pi} + \bar{T} = 0$

$$\bar{F}_c = \int_A \bar{\phi}_m dA$$

• se fluido perfetto : $\bar{\phi}_m = p \bar{m} \rightarrow \bar{F}_c = \bar{\pi} = \int_A p \bar{m} dA$ solo sforzi normali

• se fluido reale : $\bar{F}_c = \bar{\pi} + \bar{T}$ sforzi sia normali che tangenziali

$$\int_V \mu \nabla^2 \bar{v} dV = \int_V \mu \nabla \cdot \nabla \bar{v} dV \stackrel{\text{Gauss}}{=} - \int_A \mu \nabla \bar{v} \cdot \bar{m} dA = - \int_A \mu \frac{d\bar{v}}{dn} dA = \bar{T}$$

RISULTANTE SFORZI TANGENZIALI

$$-G \sin \alpha = -\gamma V \sin \alpha = -\gamma A L \sin \alpha = \gamma A (z_1 - z_2)$$

$z_2 - z_1$
differenza tra le 2
quote delle sezioni

$$T = \gamma A (z_1 - z_2) + (p_1 - p_2) A = \gamma A (z_1 - z_2 + \frac{p_1 - p_2}{\gamma}) = \gamma A (h_1 - h_2)$$

$\Delta H = \Delta h$

$$T = \gamma A (H_1 - H_2) = \gamma A J L = \gamma V J$$

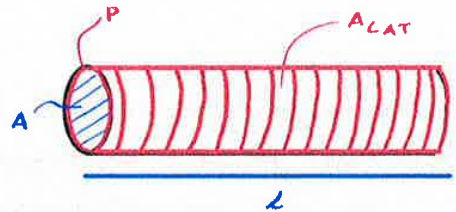
Perdita di carico totale → dissipazione energia

$T \leftrightarrow J$ legata

SFORZO TANGENZIALE A PARETE

$$\tau_0 = \frac{T}{A_{LAT}} = \frac{\gamma V J}{P \cdot L} = \gamma \left[\frac{A}{P} \right] J$$

el



Utile per confronto sezioni diverse

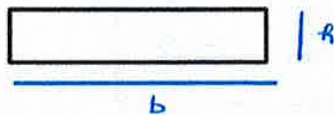
raggio idraulico

$$el = \frac{A}{P}$$

↳ perimetro bagnato

sez. circolare $el = \frac{\pi R^2}{2\pi R} = \frac{R}{2}$

sez. rettangolare
larga
($b \gg h$)



$$el = \frac{bh}{2b + 2h} \sim \frac{h}{2}$$

Corrente a superficie libera



raggio idraulico

SFORZO A PARETE :

$$\tau_0 = \gamma \varphi J$$