



*centroappunti.it*

**CORSO LUIGI EINAUDI, 55/B - TORINO**

**Appunti universitari**

**Tesi di laurea**

**Cartoleria e cancelleria**

**Stampa file e fotocopie**

**Print on demand**

**Rilegature**

**NUMERO: 2544A**

**ANNO: 2022**

# **A P P U N T I**

**STUDENTE: Di Noto Giulia**

**MATERIA: Termodinamica applicata alle macchine e  
trasmissione del calore - Prof. Iovieno**

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTI E NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.  
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.

## Proprietà generali dei fluidi e del loro movimento

### *Definizione di fluido e ipotesi del continuo*

I fluidi possono trovarsi sia in fase aeriforme che in fase liquida, ciò che contraddistingue le due fasi è principalmente il loro approccio al volume: i gas tendono a espandersi su tutto il volume del contenitore che li contiene, mentre i liquidi mantengono, in buona approssimazione, pressoché lo stesso volume. Esistono tuttavia situazioni intermedie: casi in cui i due stati convivono in una miscela, casi in cui la materia in esame passa da uno stato all'altro in una transizione di fase. Ma si cercherà di racchiudere tutti i risultati studiati in un unico modello di fluido bifase.

Ciò che caratterizza i fluidi e li differenzia dai solidi è che: si adeguano a qualsiasi forma statica senza tensioni interne; non oppongono resistenza alla deformazione, ma oppongono resistenza al moto; continuano a fluire finché c'è un'azione dinamica. Comunemente ai solidi, invece, sono in grado di trasmettere calore. Il modello di fluido che adotteremo sarà quello più generale, e non quello in bilico tra fluido speciale e solido amorfo; infatti, il fluido che studieremo sarà quello caratterizzato dalle tre ipotesi sopra e dal fatto che: può trasmettere pressioni interne da un punto all'altro; può sviluppare al suo interno sforzi viscosi; è termicamente conduttibile; può variare la sua densità e quindi essere compressibile.

Escluderemo i gas estremamente rarefatti, tali per cui il libero cammino medio  $\ell$  tra le molecole è ha un ordine di grandezza molto vicino a quello della scala macroscopica del fenomeno  $L$ . Adotteremo quindi fluidi in cui  $L$  sovrasta  $\ell$ , per cui tale condizione è regolata dal numero di Knudsen; Nei gas più comuni come l'aria, in condizioni ambiente di 1 bar e 288K, è tipicamente  $\ell = 10^{-7}m$ .

Nei liquidi le distanze medie tra le molecole sono ancora più piccole. Per studiare tali fenomeni usiamo il concetto di particella fluida, cioè un volume elementare sufficientemente grande da poter contenere al suo interno un numero di molecole tale per cui abbia senso parlare di quantità medie statistiche e sufficientemente piccolo da considerare tali proprietà come medie costanti.

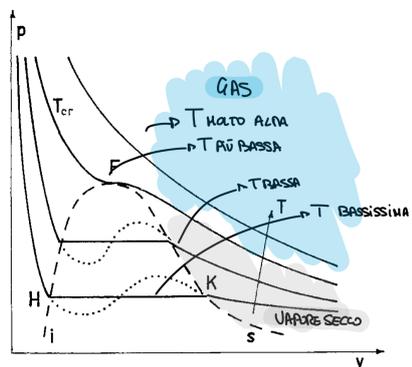
Le dimensioni delle particelle fluide identificano la scala differenziale e in questi termini ha senso considerare il fluido come un continuo. Infatti, questa è la teoria fisica dei campi, per cui parleremo di campo di velocità, di pressione, di temperatura ecc..

### *Proprietà di trasporto molecolare nei fluidi reali*

Particelle in moto in un fluido che seguono traiettorie adiacenti non possono avere velocità discontinue, se in una corrente inizialmente viene generato un confine interno, tra cui viaggiano velocità differenti, queste tenderanno a raccordarsi progressivamente; analogamente nei fluidi accade con la temperatura e la composizione chimica; infatti, accadrà che la caratteristica dell'un fluido si diffonderà nell'altro annullando la discontinuità. Tale fenomeno fu studiato sperimentalmente da Newton con l'esperimento della zattera, in cui notò che gli strati più superficiali del fluido che seguivano il moto della zattera tendevano ad accelerare gli strati in fondo del canale invece fermi e viceversa. Attraverso diverse misurazioni teorizzò la forza necessaria a mantenere uniforme il moto della zattera, in cui compare il coefficiente di viscosità dinamica, unicamente dipendente dalla natura e dallo stato in cui è il fluido, le cui unità di misura sono il Poise ( $(\text{dine s})/\text{cm}^2$ ), la cui unità centipoise è la viscosità dinamica (e cinematica) dell'acqua a 20° o il Pascal per secondo. Tale meccanismo fisico si manifesta attraverso la proprietà della viscosità di rappresentare l'attrito interno di un fluido, cioè la sua capacità o meno di sfumare le velocità all'interno del suo campo.

Il fenomeno corrispondente in termini di temperatura fu studiato da Fourier, in cui parliamo di flusso di calore, espresso in segno negativo poiché rappresenta il fatto che il calore fluisce spontaneamente dal soggetto a temperatura alta verso il soggetto a temperatura bassa, e mai viceversa. Analogamente al coefficiente di viscosità, abbiamo il coefficiente di conducibilità termica, infatti anch'esso dipende esclusivamente dalla natura del fluido e dallo stato in cui si trova. Tutte le considerazioni fatte sono state formate rispetto a una parete solida, ma non perdono di validità se si considera uno strato di fluido in quiete, la conducibilità tende infatti a smussare le differenze di temperatura all'interno del fluido. Sia nei gas, che ancor più nei liquidi, è complicato descrivere le cause fisiche della viscosità; quindi, l'approssimazione migliore per esprimere la viscosità è una legge esponenziale che mostra come la viscosità diminuisce al crescere della temperatura, in base alle caratteristiche del liquido. L'origine della conduzione termica ha invece radice nell'agitazione

Nei gas lo stato di equilibrio è individuato da tre variabili, da cui sono deducibili tutte le altre grandezze, questo è riassunto dell'equazione dei gas perfetti, in cui appare  $R^*$ , ovvero la costante specifica dei gas, pari a quella universale  $R$  divisa per la massa molecolare del gas in oggetto. Ad esempio per l'aria si ha  $M=29$  kg/mole e quindi  $R^*=287$  J/(kg K). Tale equazione può essere scritta in altre forme: la prima è scritta con riferimento al volume specifico, la seconda riprendendo la sua forma differenziale e la terza è la più generica, l'equazione di Van Der Waals. Infatti, se la prima formula descrive il comportamento dei gas perfetti, Van Der Waals descrive i gas reali, in cui  $a$  e  $b$  sono costanti caratteristica della sostanza in esame,  $b$  è il covolume e pone un limite di compressibilità al gas, evitando che un aumento repentino della pressione porti il volume specifico a zero; l'addendo con  $a$  invece tiene conto delle attrazioni intermolecolari che si hanno quando il gas è fortemente compresso. Questa equazione permette di generalizzare il modello di gas e liquidi e di capirne meglio il passaggio da uno stato all'altro: infatti nel piano  $p-v$ , le curve isoterme a diversi valori di temperatura, se questa è molto alta, assumono più la forma di iperboli, stato in cui il fluido è completamente gassoso. Quando la temperatura inizia a diminuire, si giunge al flesso e poi successivamente si prosegue su un alternarsi di punti di massimo e minimo contigui. Il diagramma si divide in liquidi, a sinistra ove le isoterme sono più ripide, e in aeriformi, a destra. La transizione da uno stato all'altro avviene a temperatura e pressione costante, per cui il tratto isoterma comprensivo di punti di massimo e minimo della temperatura, si trasforma in un segmento orizzontale rappresentante proprio la costanza della pressione. Questi segmenti rappresentanti tratti isoterma-isobari comprendono la parte di diagramma in cui sono contenuti i vapori saturi, cioè condizioni in cui il vapore è in presenza della sua parte liquida. Nella zona più oltre si ha il vapore secco o surriscaldato, che assume più le sembianze e le caratteristiche di un gas. Nel tratto costante quindi, il fluido passa da essere 100% liquido ad essere 100% vapore e ciò viene definito bene dal titolo di vapore, cioè il rapporto tra la massa del vapore e la massa totale di vapore e liquido, così esprimeremo la transizione dicendo che il fluido passa da titolo 0 a titolo 1.



Unendo tutte le isoterme-isobare si ottengono le due curve limite, inferiore a sinistra e superiore a destra, che delimitano al proprio interno così la zona del vapore saturo. L'isoterma che passa per il punto di flesso definisce la temperatura critica e il suo ramo di destra separa la regione del gas da quella del vapore secco, la cui differenza tra i due è che il vapore può essere ricondotto alla sua fase liquida attraverso una trasformazione isoterma-isobara, proprio perché si trova al di sotto il valore della temperatura critica, ciò non sarebbe ovviamente possibile per un gas senza che ci sia un abbassamento della sua temperatura sotto il valore critico.

Tenendo conto della temperatura critica si può riscrivere l'equazione di Van Der Waals rendendola più universale, poiché non compariranno più le costanti caratteristiche della sostanza in esame, per cui diventa un'equazione molto più generica da applicare. Essendo che gli stati di equilibrio di un vapore, per quanto detto prima, devono essere diversi da quelli di un gas, per ogni valore di pressione la temperatura sarà determinata da una nuova relazione chiamata equazione di stato dei vapori saturi: che non metterà più il volume specifico in relazione con pressione e temperatura, poiché essendo già pressione e temperatura legate tra loro,  $v$  risulterebbe sempre univocamente determinato, per tale ragione si preferisce usare il titolo che è variabile indipendente rispetto a temperatura e pressione:  $v = xv_s(T) + (1 - x)v_l(T)$ .

Le leggi di trasformazioni descrivono i parametri dello stato di un fluido prima e dopo una determinata trasformazione che ha portato il sistema da uno stato ad un altro, le più semplici sono i casi di: isoterma, isobara e isocora. Affinché avvenga una trasformazione, deve essere soddisfatto un bisogno energetico che può essere sostenuto fornendo o sottraendo calore, oppure impegnando lavoro meccanico, che non sono differenziali esatti, e la quantità di tale energia dipende dalla natura della trasformazione, per questo le quantità di calore impegnate vengono espresse sottoforma di calori specifici, validi per i gas perfetti.

Un altro tipo di trasformazione è quella di un sistema gassoso perfettamente isolato dall'esterno e non in grado di scambiare calore con esso: un sistema adiabatico. Se a tali ipotesi si aggiunge quella di reversibilità, allora si parla di trasformazione anche isentropica, dove il calore è scambiato reversibilmente e quindi viene

sprecare parte del salto di temperatura disponibile; la reversibilità richiede inoltre la totale assenza di attriti; le adiabatiche visto che devono essere reversibili, allora sono anche isentropiche.

Da tali considerazioni deriva il ciclo di Carnot, composto da due isoterme e da due adiabatiche isentropiche, ed è, a temperatura scelte, il ciclo con il massimo rendimento realizzabile tra le due isoterme: qualunque altro ciclo compreso tra le stesse non potrà non avere un rendimento minore.

La differenza tra un ciclo reversibile termico e un ciclo idraulico è che se il ciclo idraulico sviluppa una potenza meccanica utile è nulla, quella invece del ciclo reversibile termico può esistere ed essere positiva, questo perché una parte del fluido calorico ceduto al sistema è stata trasformata in lavoro meccanico. Se guardiamo però alla realtà, il rendimento massimo di un ciclo termodinamico non può superare mai un limite fisico imposto dall'ambiente esterno e dalla resistenza termica dei materiali della macchina, per cui le condizioni ambientali pongono un limite inferiore sotto al quale la temperatura bassa non può andare poiché il calore deve spontaneamente defluire, quindi in situazioni terrestri non sotto i 300K, mentre il limite per la temperatura superiore dipende dal tipo di macchina, valori elevati fino a 3000K vengono raggiunti nei motori alternativi a combustione interna, invece una macchina a flusso continuo come una turbina a gas pone come limite superiore valori medi dell'ordine di 1300K.

Dal ciclo di Carnot possiamo ricavare la relazione che mette in rapporto il calore scambiato con la temperatura per ciascuna isoterma, il cui integrale per il calore scambiato in una trasformazione reversibile è 0. Se consideriamo due punti A e B del ciclo reversibile, integrando tale rapporto possiamo ricavare una quantità S che scopriamo non dipende dal cammino percorso, dunque l'entropia S è una funzione di stato perché non dipende da stato iniziale e stato finale, tale risultato porta a rilevanti implicazioni. Supponendo che i due stati A e B siano tali che l'entropia in A è minore dell'entropia in B, allora: l'aumento di entropia subito da un fluido che passa da A a B è sempre pari alla differenza  $S_B - S_A$  indipendentemente dal tipo di trasformazione impiegata e che essa sia reversibile o meno; la diminuzione di entropia subito da un fluido che passa da B ad A è sempre pari alla differenza  $S_A - S_B$  indipendentemente dal tipo di trasformazione impiegata e che essa sia reversibile o meno; la variazione di entropia al termine di una trasformazione ciclica è nulla, indipendentemente dal tipo di trasformazione impiegata e che essa sia reversibile o meno. Per una qualsiasi trasformazione reversibile la variazione di entropia può solo essere positiva, quindi l'entropia può solo aumentare, non può diminuire né rimanere costante. Infatti la differenza tra una trasformazione reversibile ed una irreversibile tra due estremi identici non sta nel salto entropico, quanto più nella quantità di calore che è stato possibile scambiare col fluido a parità di temperature, che nel secondo caso sarà inferiore come conseguenza di attriti e dissipazioni. La stessa quantità di calore se scambiata irreversibilmente, produce un aumento di entropia maggiore di quello che produrrebbe se fosse scambiata reversibilmente; tutti i processi reali implicano una dose maggiore o minore di irreversibilità. Il cosiddetto principio dell'aumento dell'entropia vale allora per un sistema isolato, ciò che implica prima di tutto l'assenza di scambi di calore con l'esterno, in un ciclo chiuso infatti l'entropia si mantiene costante anche se il ciclo è irreversibile: per sua natura, infatti, un ciclo non è un sistema isolato, ma l'entropia può localmente diminuire a seguito di processi artificiali e perfino naturali.

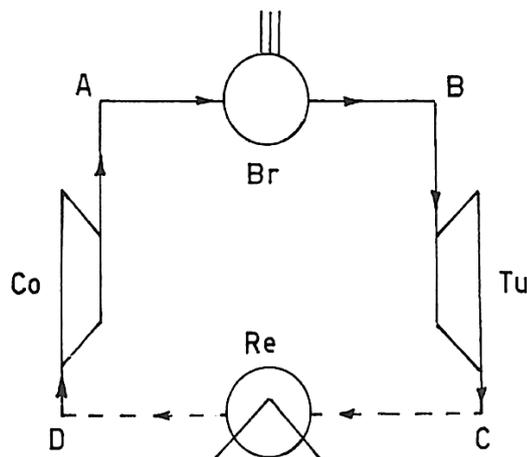
### *La funzione di stato entalpia*

Scrivendo in un'altra forma il primo principio della termodinamica possiamo introdurre una nuova grandezza: l'entalpia, una combinazione algebrica di variabili di stato, che la rendono dunque, una variabile di stato: in un'isobara, la variazione di entalpia agli estremi della trasformazione, corrisponde al calore trasmesso al fluido. Questo viene molto in aiuto nei trattamenti di casi di evaporazione di un liquido, poiché è un processo isobaro e isoterma, per cui si può dedurre il calore di evaporazione dal salto entalpico. Un'altra proprietà riguarda le trasformazioni adiabatiche e il lavoro impiegato, che esprime il lavoro scambiato con una massa unitaria di fluido che subisce una trasformazione ma che sostanzialmente non si sposta: tale lavoro può essere valutato attraverso l'esempio di un fluido in un condotto indefinito che viene spinto per un tratto grazie all'azione di una pressione agente sulla sua sezione frontale, come per esempio un pistone; tale lavoro si dice lavoro di spostamento e nel caso più generale viene valutato attraverso variazioni elementari. Dato che il pompaggio di un liquido non è normalmente associato a scambi termici può essere assunto come adiabatico per cui può essere misurato con la variazione di entalpia, che corrisponde quindi al lavoro richiesto alla pompa. La valutazione del lavoro non finisce in questo singolo

## Cicli termodinamici a gas

### Il ciclo termodinamico delle turbine a gas

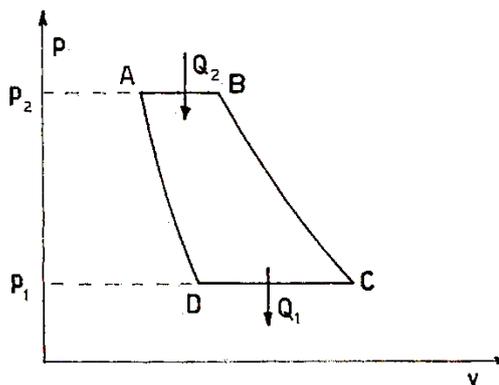
Nelle centrali termiche, le turbine a gas vengono spesso affiancate da quelle a vapore, queste hanno tempi di avviamento assai lunghi per via dell'ebollizione di grandi masse di acqua, però in tal modo il rendimento è più basso. Invece, in ambito di produzione industriale di potenza, lo schema di un impianto con turbina a gas è rappresentato come segue:



Un compressore preleva il gas e ne innalza la pressione dal valore posseduto nello stato D fino al valore in A; una somministrazione di calore aumenta la temperatura del gas: solitamente avviene ciò tramite una combustione interna al gas stesso, che funge quindi da comburente per un combustibile gassoso (metano) o liquido polverizzato (gasolio o cherosene), l'apparato in cui si realizza ciò è il bruciatore o combustore ed il fatto che la portata di massa del combustibile iniettato sia piccola rispetto a quella del gas permette di considerarla pressoché invariata. Da B il gas entra in una turbina entro cui si espande, trasformando parte della propria entalpia in lavoro meccanico, raccolto sull'albero, di cui grande parte sarà impiegata per l'azionamento del compressore e ciò spiega il ridotto rendimento negli impianti a gas rispetto a quelli a vapore: in questi ultimi la fase di compressione è sostituita dal pompaggio di un liquido in caldaia eseguita senza produrre variazioni di volume del fluido e che quindi è meno costosa in termini energetici.

All'uscita in C dalla turbina il gas è espanso e raffreddato, ma ad una temperatura sempre superiore di quella allo stato D da cui era stato prelevato, la sottrazione di calore dovrebbe avvenire tramite un refrigeratore Re, nella maggior parte dei casi reali, tuttavia, il gas è aria aspirata dall'atmosfera e restituita in questa.

Nella sua realizzazione ideale, le fasi di compressione ed espansione dovrebbero essere adiabatiche ed isentropiche, per evitare irreversibili perdite per dissipazione e scambi di calore, mentre raffreddamento e riscaldamento sono isobare. Sul piano ciò si rappresenta sottoforma di ciclo Joule-Brayton. Esso consta di due isobare, AB in cui viene somministrato calore  $Q_2$  al gas e CD in cui viene sottratto calore  $Q_1 < Q_2$ , i cui estremi sono congiunti da due isentropiche, che rappresentano DA la fase di compressione e BD l'espansione, lungo le quali lavoro meccanico viene speso e ricavato.



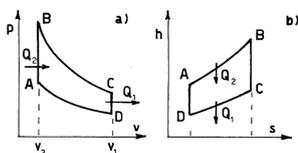
Dal rapporto delle due pressioni estraiamo il rapporto di compressione. In un ciclo Joule sono identici i prodotti dei valori dei volumi specifici letti in corrispondenza dei due vertici non consecutivi, proprietà analoga vale anche per le temperature. Inoltre, come nel ciclo di Carnot, il rendimento ideale dipende dalle temperature ai capi delle isentropiche e si esprime proprio tramite il loro rapporto, che sarà tuttavia nel ciclo Joule minore dal potenziamento ottenibile con un ciclo di Carnot ideale operante tra le stesse temperature. Per quanto verte sulle caratteristiche di massima di un impianto con turbina a gas conviene riferirsi alla rappresentazione sul piano  $(s, h)$ , nel quale il ciclo Joule è così rappresentato:

tempi e sviluppando quindi una potenza doppia, solitamente impiegato in configurazioni massicce di tipo Diesel. Il diagramma indicatore rappresenta la pressione interna durante le varie fasi del ciclo e di riportare quest'ultima sulle ordinate di un grafico avente per ascissa la posizione del pistone moltiplicata all'area della sezione retta del cilindro, così da avere direttamente il volume progressivamente occupato dal pistone e il cui integrale del grafico fornisce il lavoro termodinamico.

La pressione media indicata è la pressione media interna al cilindro durante il ciclo, i suoi valori sono dell'ordine di 9-10 bar per i motori di automobile a ciclo Otto e di 6 bar per i Diesel degli autocarri. Il lavoro interno di ogni giro rispetto all'albero coincide con quello fornito da ogni ciclo soltanto se il motore è contemporaneamente a due tempi e a semplice effetto, infatti:

- Se il motore è a quattro tempi un ciclo attivo richiede due giri invece che uno solo: un giro serve infatti alle operazioni di aspirazione e scarico.
- Se il motore è a doppio effetto succede il contrario: il numero di cicli attivi ad ogni giro dell'albero raddoppia.

### Motore ad accensione comandata



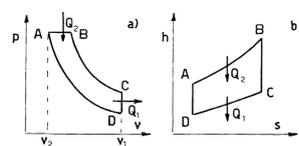
Il suo funzionamento teorico è descritto bene dal ciclo di Otto – Beau de Rochas, che consta di due isocore alternate a due isentropiche. L'isentropica inferiore corrisponde alla compressione da D ad A della miscela aria-benzina e in cui il volume specifico decresce.

Qui il rapporto di compressione, a differenza del ciclo Brayton, è un rapporto volumetrico anziché barometrico; C'è un limite superiore ai valori di tale rapporto, in quanto la temperatura in A non deve superare quella dell'infiammabilità del combustibile, pari a 693 K, al fine di evitare l'accensione spontanea ed incontrollata (con margine di sicurezza di 50K), per tale motivo il rapporto di compressione deve essere minore di 10 ed è superabile solo con additivi antidetonanti che innalzano i valori massimi ammissibili per la temperatura.

Da A a B si svolge la combustione, supposta avvenire completamente nello spazio morto e quindi a volume costante, comporta l'introduzione nel ciclo di una quantità di calore che innalza ulteriormente la temperatura fino al valore  $T_B$ . Da C a D si ha la cessione del calore residuo che, nella rappresentazione del ciclo ideale, dovrebbe avvenire per puro scambio termico tra il fluido e l'ambiente. In realtà essa avviene scaricando in quest'ultimo, sia calore sia l'intera massa della miscela costituita dall'aria e dai prodotti della combustione e sostituendola con una miscela di aria e combustibile. Il ciclo è formato da quattro politropiche opposte a due a due e con gli stessi esponenti, presentando inoltre due isentropiche sui lati opposti. Tale configurazione ci si era già presentata nel ciclo di Brayton, e proprio come allora si ricava che i prodotti delle temperature lette in corrispondenza di due vertici consecutivi sono uguali e che il rendimento ideale dipende soltanto dalle temperature ai capi delle isentropiche e, in questo particolare caso del ciclo di Otto, cresce col rapporto di compressione, che è però limitato dalla temperatura di infiammabilità della miscela. I valori teorici sono: rapporto di compressione 10, gamma 1.33, rendimento ideale 0.54.

Tali valori di rendimento non sono raggiungibili nella realtà a causa di deviazioni del ciclo reale da quello ideale nelle fasi di espansione, compressione, combustione e scarico.

### Motore ad accensione spontanea



Il suo funzionamento teorico è descritto dal ciclo Diesel, la sua differenza dal ciclo Otto si posiziona nella fase di combustione AB, adesso idealizzata come un'isobara.

Definito il rapporto di compressione come espresso nel ciclo di Otto, ora il condizionamento da imporre alla temperatura è di segno opposto, in quanto la compressione deve garantire il superamento della soglia di infiammabilità spontanea del combustibile anziché prevenirla. Si applica un margine di sicurezza di 50K, il rapporto di compressione deve risultare sufficiente a far sì che la temperatura superi la temperatura di 743K e si traduce nella condizione per cui tale rapporto deve essere maggiore di 15. I motori Diesel si caratterizzano per rapporti di compressione più elevati dei motori di Otto. Ciò presenta sia vantaggi che svantaggi:

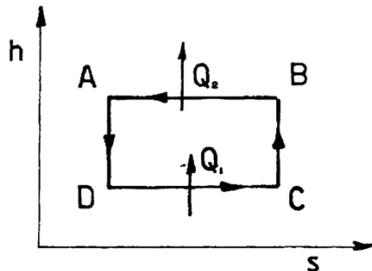
I vantaggi sono dal punto di vista del rendimento, ma le difficoltà emergono in fase costruttiva, legate al fatto che lo spazio morto occupa ora una frazione della cilindrata nettamente inferiore che nel motore Otto e quindi la disposizione delle valvole nella testa è limitata.

Nel ciclo Diesel il rendimento termodinamico ideale non dipende soltanto dal rapporto di compressione, ma anche dal rapporto di combustione.

Nel motore a ciclo Diesel si offre la possibilità di una regolazione diretta sulla potenza, attraverso il rendimento, cosa che non esiste nel motore a ciclo Otto.

### Cicli termodinamici inversi

Tutti i cicli finora descritti sono cicli diretti, percorsi in senso orario, per cui il loro integrale nel piano  $(p,v)$   $p dv$ , corrispondente al lavoro meccanico, risultava positivo, la cui finalità è la produzione di potenza meccanica a spese di un'energia termica. Si può, tuttavia, percorrere un ciclo in senso antiorario lasciando immutati i valori assoluti delle grandezze in gioco, ma invertendone il segno. Tale ciclo viene chiamato ciclo inverso e per la proprietà appena enunciata il lavoro meccanico è negativo, poiché descrive una macchina operatrice che assorbe lavoro meccanico al fine di sottrarre una quantità di calore da un ambiente a temperatura inferiore per cederne una diversa quantità di calore ad un ambiente a temperatura superiore. Si può prendere come esempio un ciclo di Carnot percorso in senso antiorario:



Partiamo dal punto C e proseguiamo in senso antiorario; il lato CB rappresenta una compressione isentropica adesso, al termine della quale il fluido raggiunge la temperatura massima  $T_2$  e la mantiene costante per cedere all'ambiente la quantità di calore  $Q_2$ , operazione che conduce da B ad A. Dal punto A inizia un'espansione isentropica, al termine della quale il fluido raggiunge la temperatura minima  $T_1$ , che mantiene costante fino ad assorbire dall'ambiente il calore  $Q_1$  che lo riporta allo stato D, da cui poi ricomincia.

Quello che otteniamo è un trasferimento netto di calore da una ambiente a temperatura più fredda ad uno a temperatura più calda, a spese di un lavoro che agisce sul fluido. Nella realtà le temperature estreme sono leggermente diverse per cui la differenza tra le due temperature non raggiunge suo il valore teorico, per motivi di deviazioni del comportamento reale rispetto a quello ideale.

Questo tipo di ciclo può avere due scopi:

- Riscaldare ulteriormente un ambiente già caldo, o mantenerlo alla sua temperatura mediante la fornitura di calore  $Q_2$  che compensano le perdite verso l'esterno, cioè *la pompa di calore*.
- Raffreddando ulteriormente un ambiente già freddo o mantenerlo alla sua temperatura mediante la sottrazione di calore  $Q_1$  compensando gli ingressi termici dall'esterno, cioè *macchina frigorifera*.

A seconda che venga usato a uno dei due scopi, l'effetto utile si differenzia in:

- Fattore di moltiplicazione termica per una pompa di calore, in cui l'accento cade su  $Q_2$  trasferito all'ambiente caldo e che riferisce tale calore al lavoro speso per trasferirlo.
- Fattore frigorifero per una macchina frigorifera, in cui l'accento cade su  $Q_1$  sottratto all'ambiente freddo e che riferisce tale calore al lavoro speso per trasferirlo.

Un ciclo può tuttavia fungere contemporaneamente sia da macchina frigorifera che da pompa di calore, in tal caso l'effetto utile della macchina è la somma di fattore frigorifero e fattore di moltiplicazione termica. Entrambi i fattori sono tanto più elevati quanto più prossime tra loro sono le temperature dei due ambienti.



## Aria umida

L'aria è una miscela di azoto, ossigeno, argon etc. e vapore d'acqua. Rispetto ai casi precedenti la temperatura a cui si trova la miscela è inferiore alla temperatura critica di uno dei componenti, l'acqua. L'acqua si trova quindi in condizione di vapore e come tale le trasformazioni subite dalla miscela possono portare ad una condensazione o solidificazione dell'acqua. La miscela ha quindi una composizione variabile. Possiamo vedere l'aria umida come una miscela di "aria secca", con composizione fissa, e di vapore d'acqua, trattando entrambi come gas perfetti. Il componente "aria secca" avrà le proprietà dei suoi componenti. L'aria umida ha grande importanza perché è la condizione normale dell'aria atmosferica. Riferendosi alla sola aria secca, si definisce titolo dell'aria umida il rapporto tra la massa del vapore e la massa dell'aria secca:

$$x = \frac{m_v}{m_{as}}$$

e si definisce umidità relativa il rapporto tra la massa di vapore e la massa di vapore saturo che potrebbe occupare lo stesso volume alla stessa temperatura:

$$\varphi = \frac{m_v}{m_{vs}(T)}$$

Se volessi esprimere queste grandezze come grandezze intensive

$$x = \frac{\rho_v}{\rho_{as}} \quad \text{e} \quad \varphi = \frac{\rho_v}{\rho_{vs}(T)}$$

Dal momento che a pari temperatura  $T$ ,  $\rho_v \leq \rho_{vs}(T)$ , ovvero la densità del vapore saturo è la massima densità possibile per il vapore ad una temperatura, l'umidità relativa è sempre minore o uguale ad uno. L'entalpia specifica dell'aria umida risulta definita come

$$h_{1+x} = \frac{H}{m_{as}} = \frac{m_{as}h_{as} + m_v h_v}{m_{as}} = h_{as} + x h_v$$

dove  $1+x$  sta ad indicare che la massa del sistema è  $1+x$  volte quella rispetto alla quale si sono normalizzate le variabili.

In modo analogo si può definire il volume specifico riferito all'aria secca come

$$v_{1+x} = \frac{v}{m_{as}} = v_{as} + x v_v$$

Si definisce temperatura di rugiada la temperatura alla quale inizia la condensazione a pari pressione, ovvero la temperatura alla quale si raggiunge la condizione di saturazione in un raffreddamento isobaro:

$$p_{vs}(T_R) = p_v$$

Da possiamo riscrivere:  $\varphi = \frac{p_{vs}(T_R)}{p_{vs}(T)}$

All'inizio della condensazione è necessario che il vapore passi da secco a saturo, un vapore è in tali condizioni quando la sua pressione parziale coincide con la pressione di saturazione, per cui si ha un'umidità relativa pari a 1, e di conseguenza la massa di vapore è presente in egual proporzione con la sua fase liquida ed ecco che iniziano a sorgere le prime goccioline di condensa.

Quando  $T = T_R$  si è sulla curva limite superiore in condizioni d'incipiente condensazione. Per un'espressione analitica della relazione tra  $\varphi$  e  $T_R$  si può utilizzare la soluzione approssimata di Clausius dell'equazione di stato:

$$\varphi = \exp\left(\frac{r}{R_v} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_R}\right)\right)$$

### Equilibrio in presenza di liquido

Nel caso che consideriamo, liquido e vapore si trovano alla stessa pressione, mentre in presenza di aria il liquido si trova alla pressione dell'aria umida, non alla pressione parziale del vapore. L'evaporazione o la

## Descrizione di alcuni flussi fondamentali. Convezione forzata.

È opportuno introdurre due concetti di fluidodinamica descrittiva prima:

- *Traiettoria*: il luogo, in una corrente fluida, delle successive posizioni occupate da una stessa particella durante il suo moto.
- *Linea di corrente*: una curva che in ciascun istante è tangente in ogni suo punto al locale vettore velocità; unisce i punti occupati da particelle fluide distinte, fornendo un'istantanea del campo di moto nella quale ogni particella può occupare un solo punto

In un moto instazionario le linee di corrente e le traiettorie non coincidono e sono distinte, poiché le direzioni delle velocità mutano nel tempo; invece, in un moto stazionario esse coincidono perché ogni linea di corrente si ripropone nel tempo sempre uguale a sé stessa.

### Corrente uniforme che investe un cilindro indefinito

Consideriamo una corrente uniforme che investe un cilindro la cui lunghezza trasversale è supposta molto superiore al suo diametro, per tale ragione all'estremità del cilindro si possono considerare così lontane dal piano normale all'asse del cilindro nel quale si studia il moto tali da non far sentire ivi i loro effetti, per cui il flusso può ritenersi anche identico qualunque sia tale piano.

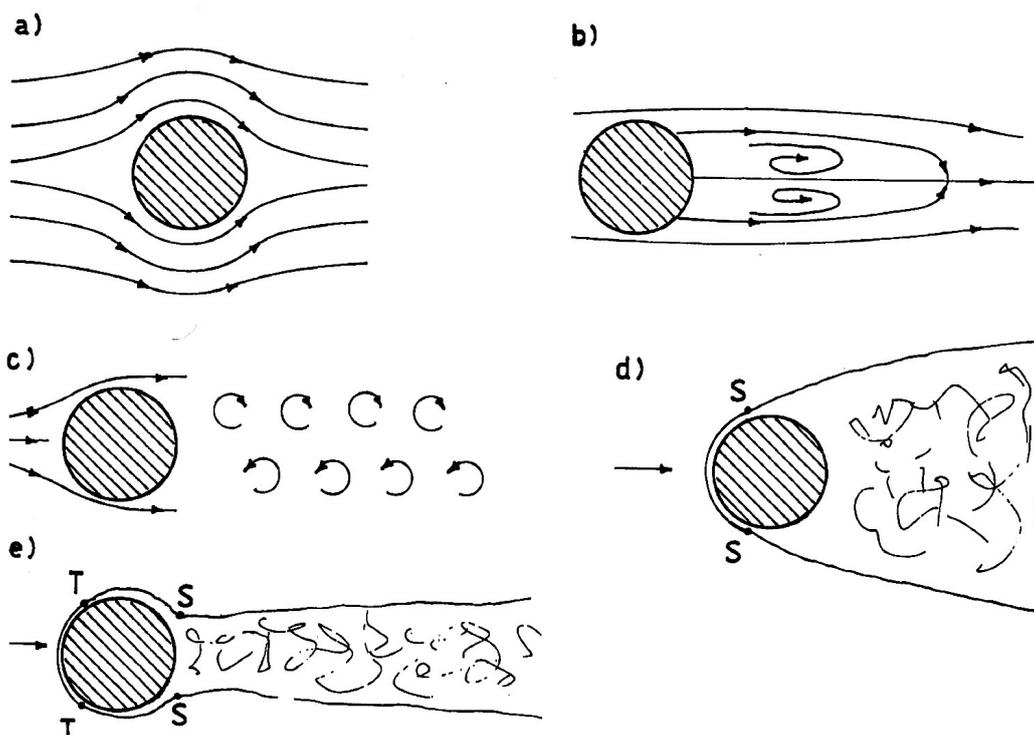
Le caratteristiche della corrente che si stabilisce intorno al cilindro dipendono dalla velocità della corrente  $U$ , dal diametro del cilindro, dalla densità e viscosità dinamica del fluido.

Le varie configurazioni del flusso possono essere messe in relazione, invece che con i valori singoli di velocità, diametro, densità e viscosità, con un unico parametro, il primo parametro di similitudine della fluidodinamica, che le racchiuda chiamato *numero di Reynolds*, che implica che:

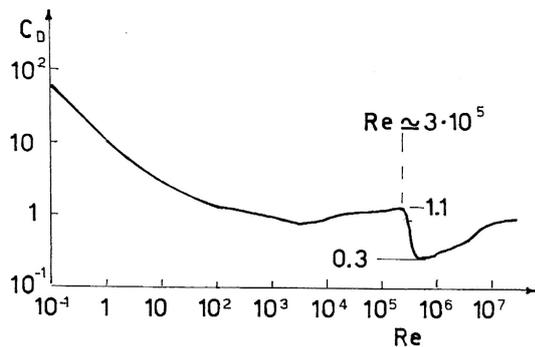
- Le correnti intorno a due cilindri sono identiche se il secondo ha diametro doppio del primo e velocità dimezzata;
- Anche le correnti in aria e in acqua sono identiche se il diametro del cilindro d'aria è 14.5 volte maggiore di quello del cilindro in acqua, avendo uguali le velocità.

Il numero di Reynolds fornisce un'indicazione sul peso reciproco dei fenomeni inerziali e di quelli viscosi.

Rappresentiamo graficamente e descriviamo l'evoluzione della corrente intorno al cilindro al crescere di  $Re$ :



L'andamento di  $C_D$  in funzione di  $Re$  è riportato su un diagramma rilevato tramite scale logaritmiche:



Emerge che per bassi  $Re$ , il coefficiente di resistenza è proporzionale all'inverso del numero di Reynolds.

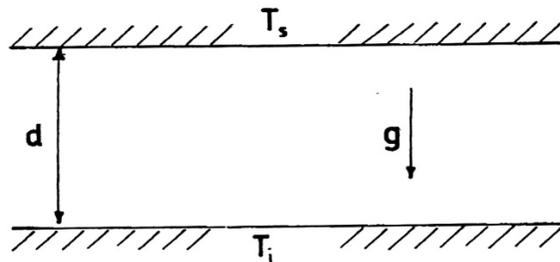
Per  $Re$  superiori a  $10^2$  si ha invece che il coefficiente di resistenza è circa 1.1 (cost).

Per  $Re \approx 10^3$  si ha un crollo del coefficiente di resistenza, che si riduce improvvisamente di circa tre volte, per via dei molteplici distacchi alternati a riattacchi tipici dei  $3 \cdot 10^5 < Re < 3 \cdot 10^6$

Visto che a bassi  $Re$  la resistenza è proporzionale alla velocità si può capire pensando che il moto è dominato dagli effetti viscosi e proprio la risultante di sforzi di taglio; la proporzionalità al quadrato della velocità per i  $Re$  più elevati si spiega con la formazione della scia.

### Convezione naturale

Consideriamo due pareti orizzontali, distanziate, tra le quali si trova del fluido in quiete:

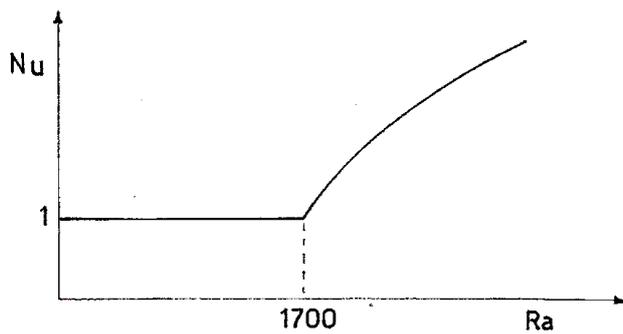


Le pareti sono supposte di estensione infinita, per cui il fluido presenta dappertutto le stesse caratteristiche; si suppone di poter variare le temperature delle due pareti:

- se  $T_i < T_s$  il fluido rimane in quiete per qualunque sia la differenza  $T_s - T_i$ ;
- se  $T_s < T_i$  e la differenza  $T_i - T_s$  supera un certo valore, possono innescarsi dei moti convettivi che producono il sollevamento delle masse fluide riscaldate dal contatto con la parete inferiore e lo sprofondamento delle altre.

Il fluido a contatto con la parete inferiore e più calda subisce gli effetti di dilatazione termica, per cui la sua densità diminuisce (poiché il volume aumenta e la massa rimane costante), essendo così più leggero del fluido freddo sovrastante, è soggetto a una spinta idrostatica ed inizia a sollevarsi, mentre il fluido più pesante scende occupando l'adesso spazio rimasto libero, generando quindi un moto di alternanza di correnti ascendenti e discendenti: **convezione naturale**.

Esperimenti condotti per diverse geometrie e fluidi hanno dimostrato che l'innescò della convezione naturale dipende in realtà dalla competizione di numerosi fattori: tra i fattori favorevoli all'innescò del moto abbiamo la differenza positiva delle temperature, l'accelerazione di gravità, il coefficiente di dilatazione termica del fluido e la distanza tra le pareti; tra i fattori avversi abbiamo elevati valori delle diffusività viscosa  $\nu$  e termica  $k$ , la prima perché si oppone di per sé al movimento (proprio come di norma fa la viscosità) e la seconda perché tende a uniformare le temperature all'interno del fluido (rendendo più difficile quindi l'azionamento del moto).



Al crescere di Ra il campo di moto passa attraverso configurazioni successive secondo una sequenza analoga a valle del cilindro al crescere di Re, dapprima le celle convettive perdono la forma cilindrica riorganizzandosi secondo uno schema regolare formato da punti di risalita verticale circondati da flusso in discesa (tipico della bassa atmosfera). Ulteriori aumenti di Ra producono il collasso anche di questa configurazione ed il graduale passaggio a moti sempre più intensi e disordinati nei quali si colloca infine il dominio **della convezione turbolenta**.

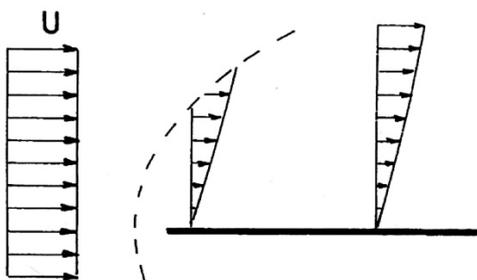
A differenza di quanto visto per il cilindro, dove il passaggio tra i vari regimi di moto era regolato solo dal numero Re, ora i valori di Re per cui si verificano transizioni successive è anche regolato dal numero di Prandtl. Abbiamo allora il quoziente

$$Gr = \frac{Ra}{Pr} = \frac{\alpha \Delta T g d^3}{\nu^2} = \frac{\alpha \Delta T g L^3}{\nu^2}$$

detto **numero di Grashof**.

Guardando al numeratore sono intuitivamente correlabili alle forze di galleggiamento, cioè le spinte idrostatiche che producono l'ascesa di masse fluide (infatti sono tutti quei parametri che abbiamo detto essere favorevoli ai moti convettivi), infatti un elevato valore di Gr significa che tali forze dominano su quelle viscose, che diventano quindi trascurabili (poiché se il numeratore è tanto più grande del denominatore (la viscosità), il numero Gr diventa enorme); di converso, per valori inferiori di Gr si ha un ruolo maggiore per le forze viscose, che in parte possono equilibrare le forze di galleggiamento, che sono sempre presenti comunque, restringendo così il ruolo di quelle d'inerzia. Nel primo caso il moto sarà caratterizzato da accelerazioni più intense poiché sono più grandi i fattori favorevoli, mentre nel secondo caso sarà un moto più frenato poiché saranno più presenti le forze viscose che si oppongono al moto.

Abbiamo già detto che il valore di **Re fornisce un'indicazione sul peso reciproco dei fenomeni inerziali e di quelli viscosi**.



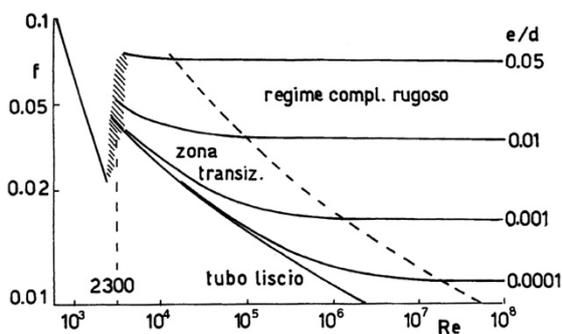
Il raccordo tra la velocità nulla della parete e la velocità del fluido avviene a opera dei fenomeni viscosi, per cui la regione occupata da tale raccordo è tanto più grande quanto più basso è Re.

Per valori di Re prossimi all'unità o alle decine, la lamina è avvolta da una regione entro la quale il profilo della velocità evolve con estrema gradualità, come mostrato in figura, la cui presenza modifica il cammino di una significativa porzione della corrente in arrivo, per tale motivo parliamo di campo di moto globalmente dominato da effetti viscosi.

Man mano che Re cresce la regione di raccordo si contrae, per  $Re \sim 10^4$  il suo spessore massimo si riduce al 1% della corda (come si vede nella figura seguente): in queste condizioni si può parlare di strato limite come ne avevamo parlato per il campo di moto intorno al cilindro per gli stessi valori di Re.

sufficientemente lungo, è possibile isolare una tratta centrale compresa tra due sezioni tale che in essa il flusso sia completamente sviluppato, cioè che la corrente sia stazionaria e uniforme, che le linee di corrente siano linee parallele all'asse x del condotto e che lungo queste le velocità delle particelle fluide siano costanti. Ciò, tuttavia, non implica anche la costanza delle velocità al variare della distanza della particella dall'asse x: per un fenomeno del tutto analogo a quello dell'esperimento di Newton, le particelle adiacenti alla parete interna del condotto sono ferme e la velocità massima appartiene a quelle che sono più distanti, cioè a quelle che scorrono lungo l'asse. Si generano così dei tipici profili: uno caratteristico del regime laminare ed uno di quello turbolento, per il caso di un tubo a sezione circolare in cui la distanza dall'asse è misurata dalla coordinata radiale r. Grazie alle fluttuazioni il regime turbolento si caratterizza per profili di velocità assai più appiattiti di quello laminare. A differenza dello strato limite, ora l'uniformità del flusso lungo x fa sì che tali profili si riproducano identici a sé stessi lungo tutta la tratta tra le due sezioni. Siano inoltre date le due pressioni agli estremi in cui il flusso è completamente sviluppato: in essa le particelle fluide non accelerano e quindi non si manifestano forze d'inerzia, il salto tra le due pressioni serve unicamente a contrastare gli sforzi d'attrito che la parete applica al fluido. Procedendo verso valle la pressione diminuisce perché la porzione di condotto restante si riduce e con essa l'effetto cumulativo degli sforzi d'attrito ancora da vincere. La caduta di pressione, o perdita di carico, per unità di lunghezza è esprimibile, ma nella pratica si usa il coefficiente di perdita di carico. In tubi lisci il coefficiente di perdita di carico dipende fortemente dalla velocità del flusso, dalle sue viscosità e densità e dalle dimensioni della sezione: racchiuse tutte nel numero di Reynolds.

Al variare di Re le caratteristiche del flusso cambiano ed in particolare si ha la transizione dal regime laminare a quello turbolento per  $Re=2300$ . A differenza di quanto visto per lo strato limite su una lamina piana, tale valore di Re non definisce una scissa di transizione, il flusso essendo identico a se stesso lungo tutta la tratta. Esso definisce piuttosto lo stato globale della corrente, che quindi risulta o tutta laminare o tutta turbolenta. Funzione di Re sono quindi anche i valori del coefficiente di perdita di carico, per il regime laminare  $f=64/Re$  con  $Re<2300$ , mentre per regime turbolento secondo la *legge di Blasius*  $f=0,32/Re^{1/4}$ . Se il condotto ha pareti interne non lisce, ma affette da rugosità di altezza media e, il numero di Reynolds da solo non è più sufficiente a caratterizzare il flusso e si richiede accanto ad esso la rugosità relativa  $e/d$  come secondo parametro adimensionale. Un'espressione più generale è data da *Colebrook*. Tutto ciò è riassunto nel diagramma di Moody, che riporta su scale logaritmiche i valori di Re sulle ascisse e quelli di f sulle ordinate.



Per  $Re<2000$  (circa) il regime laminare non è influenzato dalle ordinarie rugosità. Per valori di Re a cavallo di quello critico la transizione è influenzata in modo piuttosto confuso (regione tratteggiata) anche se la tendenza che si manifesta è quella di una sua anticipazione causata dalla rugosità. In regime turbolento gli effetti di quest'ultima sono rilevanti e sono evidenziati dalla presenza di un fascio di curve, una per ciascun valore di  $e/d$ .

Quella inferiore, rappresenta graficamente la relativa a rugosità nulla (tubo liscio). Si nota che le curve per  $e/d > 0$  si dividono in due tratti, separati tra loro da una linea tratteggiata. Nella regione a destra di tale linea le curve sono orizzontali: il regime di flusso è allora detto completamente rugoso perché i valori di f, non dipendendo più da Re, dipendono soltanto da  $e/d$ . Nella regione compresa tra il confine a tratti e la retta del regime laminare, i valori di f dipendono sia da da Re che da  $e/d$ : essa è quindi chiamata zona di transizione

L'energia cinetica è inizialmente quella della corrente indisturbata, però poi diminuisce verso valle per l'accumularsi della dissipazione dovuta a moti turbolenti ed agli incrementi di scambi diffusivi.

*Diffusione della quantità di moto e del calore in un fluido reale (problema di Stokes)*

Un fenomeno analogo a quello appena descritto in questi paragrafi si manifesta se la parete ha temperatura differente da quella del fluido che la lambisce e se l'attenzione si punta sulla trasmissione del calore dalla parete al fluido. Sostanzialmente analizzeremo quindi l'identità dei processi che presiedono alla formazione degli strati limite cinematico e termico.

Si consideri una parete infinita ed un fluido a riposo che riempie interamente il semispazio, si supponga che all'istante  $t=0$  la parete acquisti improvvisamente una velocità diretta perpendicolarmente ad essa e mantenuta costante: lo studio del moto che si genera nel fluido costituisce il *primo problema di Stokes*. Il moto è instazionario, il meccanismo alla base di tale coinvolgimento sfrutta gli sforzi di taglio, per cui la velocità imposta al sistema impone la sua direzione anche alle velocità delle particelle fluide, allora per quanto detto i valori di queste dipendono dalla distanza dalla parete e dal tempo, e non dalle altre due coordinate spaziali perpendicolari al piano della parete.

Convieni qui considerare un volume di fluido contenuto tra due piani orizzontali, l'equilibrio dinamico della particella si scrive allora:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{y_1}^{y_2} \rho u A dy = \tau_x(y_2, t)A - \tau_x(y_1, t)A$$

Dove  $\tau_x = \mu \partial u / \partial y$  è lo sforzo viscoso, cioè la componente della forza scambiata tra fluido e cilindro e diretta in senso opposto alla velocità,  $A$  è l'area delle due facce orizzontali, è la pressione si è considerata uniforme, dal momento quindi che  $y_1, y_2$  ed  $A$  non variano, eguagliando gli integrandi e sostituendo l'espressione di  $\tau_x$ , dividendo per  $\rho$ , l'equazione diventa

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Detta anche equazione della diffusione, o equazione di Fourier, o ancora equazione del calore, perché esprime in identica forma analitica anche la diffusione del calore in un corpo dotato di conducibilità termica. In questo caso essa esprime la diffusione della velocità in un fluido dotato di viscosità e va associata alle condizioni iniziali e con le condizioni al contorno:

$$\begin{aligned} u(0, t) &= u_0 \quad \forall t > 0 \\ \lim_{y \rightarrow +\infty} u(y, t) &= 0 \quad \forall t > 0 \end{aligned}$$

La prima condizione esprime il fatto che la parete è posta in movimento istantaneamente con la velocità, la seconda che a distanza infinita il fluido sia ancora fermo. La soluzione ottenuta da Stokes è allora:

$$u(y, t) = u_0 [1 - \text{erf}(\eta)]$$

Dove  $\text{erf}(\eta)$  è la funzione degli errori, o integrale della gaussiana, mentre  $\eta$  è la nuova variabile. In sostanza la velocità a parete è sempre pari a  $u_0$  per ogni  $t > 0$  (cioè rimane costante) e quella nel fluido tende ad assumere il valore  $u_0$  per tempi elevati. In altri termini,  $u_0/u(y, t)$  non dipende da  $y$  e  $t$  separatamente, ma dal loro accorpamento in un'unica variabile  $\eta$ .

Derivando lo spessore rispetto al tempo si trova la velocità di diffusione

$$v_d = 2 \sqrt{\frac{\nu}{t}}$$

Si consideri ora lo stesso problema, ma trasferendo il discorso dal contesto cinematico a quello termico: si supponga che un fluido a riposo provvisto di conducibilità termica e diffusività termica sia a contatto con una

però anche al regime turbolento, oltre che a quello laminare, se però  $\delta \ll L$ , e ciò è vero solo se  $Re$  è sufficientemente alto. Ragionamenti analoghi possono essere svolti per il caso termico; accanto allo strato limite cinematico si genera allora uno strato termico:

$$\frac{\delta_t(x)}{L} = \frac{1}{\sqrt{Pe}} \sqrt{\frac{x}{L}}$$

dove  $Pe$  è il *numero di Peclet*, detto anche numero di Reynolds termico:

$$Pe = \frac{UL}{\kappa}$$

Per cui vale:

$$Pe = Re Pr$$

e quindi per  $Pr=1$  gli strati limite cinetico e termico coincidono. Nei gas  $Pr$  non è mai troppo diverso dall'unità, perciò gli spessori dei due strati limiti sono poco differenti.

### Bilancio di energia cinetica

La variazione di quantità di moto è pari alla forza della parete sul fluido, la viscosità si rende responsabile del trasferimento di quantità di moto tra i vari strati di fluido ma di per sé, non altera la quantità di moto complessivo del fluido, consideriamo il bilancio di energia cinetica: Primo membro abbiamo la variazione nel tempo dell'energia cinetica per unità di massa e a secondo membro i due addendi: la diffusione di energia cinetica da parte della viscosità (negativo o positivo) e la dissipazione, sempre negativo, cioè la trasformazione di energia cinetica in energia interna da parte della viscosità.

$$\rho \frac{\partial u^2}{\partial t} \frac{1}{2} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} u$$

Integrando otteniamo a primo membro il lavoro della parete, infatti la potenza degli sforzi viscosi è data da:

$$\tau u = \mu \frac{\partial u}{\partial y} u = \mu \frac{\partial u^2}{\partial y} \frac{1}{2}$$

### Diffusione di calore

Consideriamo adesso che il fluido sia inizialmente alla temperatura, uniforme, e che la temperatura della piastra sia istantaneamente portata a  $T_p \neq T_0$ . Consideriamo che non ci siano variazioni di densità o conducibilità termica. A causa della simmetria del problema la temperatura del fluido sarà una funzione di  $(y,t)$  e non dipenderà da  $x$ . Non consideriamo il lavoro delle forze viscosi, il bilancio di energia si riduce al fatto che la variazione di entalpia di una stessa massa di fluido è pari alla potenza termica scambiata, quindi

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{y_1}^{y_2} \rho c_p T A dy = -\dot{q}_y(y_2, t) A + \dot{q}_y(y_1, t) A$$

Dove  $\dot{q} = -\lambda \nabla T$  è il flusso di calore in questo caso preso in direzione verticale. Sfruttando le condizioni viste nel paragrafo precedente, considerando la variabile  $\theta = T - T_0$  la soluzione delle variabili originali è

$$T = T_0 + (T_p - T_0) \left[ 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{y}{2\sqrt{\kappa t}} \right) \right]$$

Dove definiamo  $\kappa = \lambda / (\rho c_p)$ , che è la diffusività termica.

Dunque, lo spessore della regione riscaldata della parete per conduzione è proporzionale a

$\delta_T(t) = 2\sqrt{\kappa t}$ , mentre lo spessore della zona accelerata della parete a causa della viscosità è  $\delta(t) = 2\sqrt{\nu t}$ .

In entrambi i casi questo spessore cresce come  $t^{1/2}$ , comportamento caratteristico dei processi diffusivi.

Inoltre, il rapporto tra i due spessori è determinato unicamente dal numero di Prandtl

- Problema piano: consideriamo una lastra piana infinita compresa tra le superfici  $x_1$  e  $x_2$  alle quali sono assegnate le temperature  $T_1$  e  $T_2$ . Imponendo le condizioni al contorno si hanno due equazioni che determinano le costanti  $a + bx_1 = T_1$  ed  $a + bx_2 = T_2$  sicché la soluzione è

$$T(x) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Poiché la temperatura dipende solo da  $x$ , il flusso di calore sarà solo in tale direzione

$\dot{q}_x = -\lambda \frac{T_2 - T_1}{x_2 - x_1}$  e la potenza termica per unità di superficie che attraverso la piastra è sempre dalla superficie più calda a quella più fredda e il flusso di calore rimane costante.

- Problema assialsimmetrico: per risolvere un problema a simmetria sferica è sufficiente scrivere il laplaciano in coordinate cilindriche o sferiche. Consideriamo quindi un guscio cilindrico descritto da  $r_1 \leq r \leq r_2$  con temperature assegnate alle due facce; quindi, integrando e considerando  $a$  come costante di integrazione otteniamo il sistema  $a \log r_1 + b = T_1$  e  $a \log r_2 + b = T_2$  da cui la soluzione

$$T(r) = T_1 + (T_2 - T_1) \frac{\log r/r_1}{\log r_2/r_1}$$

Il flusso di calore sarà allora dato in componente radiale poiché  $T$  è solo in funzione di  $r$

$$\dot{q}_r = -\lambda \frac{T_2 - T_1}{\log r_2/r_1} \frac{1}{r}$$

Il flusso di calore non è uniforme ma decade con la distanza dall'asse come  $1/r$ . Tuttavia, la potenza termica di un flusso di calore che attraversa una superficie di altezza  $L$  è indipendente dal raggio della superficie cilindrica:

$$Q = \int_S \dot{q} \, nd\sigma = 2\pi r L \dot{q}_r = 2\pi L \lambda \frac{T_2 - T_1}{\log r_2/r_1}$$

- Problema sferico: consideriamo un guscio sferico, in coordinate polari, con assegnate le temperature sulle due facce, integrando la prima volta con  $a$  costante di integrazione otteniamo

$$T(r) = a \frac{1}{r} + b$$

Otteniamo quindi il sistema  $\frac{a}{r_1} + b = T_1$  e  $\frac{a}{r_2} + b = T_2$  da cui la soluzione:

$$T(r) = T_1 + (T_2 - T_1) \frac{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}}$$

Analogamente ai casi precedenti possiamo calcolarci il vettore del flusso di calore, che in questo caso è di nuovo composto solo dalla componente radiale, e la potenza termica.

$$\dot{q}_r = -\lambda \frac{T_2 - T_1}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} \frac{1}{r^2}$$

$$Q = \int_S \dot{q} \, nd\sigma = 4\pi \lambda \frac{T_2 - T_1}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}}$$

### Atmosfera isocora

Se si accoppia la legge di Stevino con la condizione di incompressibilità ( $d\rho = 0$ ), si ottiene l'andamento delle pressioni in un'atmosfera isocora. Nel caso di un'atmosfera gassosa isocora, la condizione applicata  $d\rho = 0$  alla legge di Stevino si conduce allo stesso gradiente verticale di pressione.

### Ambiente omocoro

L'atmosfera isoterma è la condizione tipica della stratosfera.

Possiamo ammettere che il campo gravitazionale terrestre  $g$  sia uniforme e se immaginiamo che la densità del fluido sia uniforme, possiamo riscrivere la legge di Stevino come

$$p(z) = p_0 - \rho_0 g(z - z_0)$$

La pressione diminuisce linearmente con la quota.

Ricordiamo il modulo di comprimibilità di un fluido e la stima delle variazioni relative di densità

$$\beta = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p}(p, T), \quad \frac{\Delta \rho}{\rho} \cong \beta \Delta p = \beta \rho g \Delta z$$

L'ipotesi che la densità sia uniforme può essere una valida approssimazione se  $\frac{\Delta \rho}{\rho} \ll 1$ , questo pone un limite alle differenze di quota  $\Delta z$  per le quali si può applicare,  $\beta \rho g \Delta z \ll 1$ . In un liquido scarsamente comprimibile,  $\beta$  è molto piccolo.

Le variazioni di pressione dovute alle variazioni di quota sono molto minori in un gas rispetto ad un liquido poiché la densità è molto minore,

$$\frac{p_{gas}(z) - p_0}{p_{liquido}(z) - p_0} = \frac{p_{gas}(z)}{p_{liquido}(z)} \ll 1$$

### Ambiente omotermo

Consideriamo un gas, sostituendo l'equazione di stato dei gas perfetti,  $p = (R/M)\rho T$ , possiamo scrivere un'equazione per la sola  $p$  o  $\rho$ .

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} = - \frac{g}{\left(\frac{R}{M}\right)T}$$

Bisogna però conoscere la distribuzione delle temperature; in un ambiente isoterma, in cui la temperatura sia uniforme,  $T \equiv T_0$ , possiamo integrare la situazione con la condizione  $p(z_0) = p_0$ ,

$$p(z) = p_0 e^{-\frac{g(z-z_0)}{(R/M)T_0}}$$

In generale, se conosciamo  $T(z)$  possiamo risolvere

$$p(z) = p_0 e^{-\frac{gM}{R} \int_{z_0}^z \frac{1}{T(z)} dz}$$

Densità e pressione, a parità di temperatura, diminuiscono più rapidamente per i gas a maggiore massa molare; quindi, in una miscela di gas la concentrazione dovrebbe variare con la quota, facendo sì che la frazione molare dei gas più pesanti si riduca mentre aumenti quella dei gas più leggeri, fenomeno contrastato dalla diffusione che tende a rendere uniformi le concentrazioni.

### Atmosfera omoentropica

In condizioni stabili, l'atmosfera non è propriamente immobile, ma sempre caratterizzata da lenti moti verticali; l'aria ha una conducibilità termica piuttosto bassa, per cui in prima approssimazione per tempi brevi la sua evoluzione è sempre adiabatica, se consideriamo pertanto una piccola massa d'aria, possiamo ammettere le seguenti ipotesi sulla massa:

Subisca trasformazioni adiabatiche reversibili

Sia in moto così lento che l'energia cinetica sia trascurabile rispetto alle variazioni di energia interna

Sia sempre alla stessa pressione dell'aria circostante

Ciò porta al modello statico di "atmosfera adiabatica", in cui  $p \propto \rho^\gamma$ .