NUMERO: **2541A** ANNO: 2022

A P P U N T I

STUDENTE: Di Noto Giulia

MATERIA: Fisica I - Prof. Bianco

Vettori

- Punto materiale → astrazione, entità geometrica di dimensioni trascurabili rispetto alla traiettoria del moto.
  - traiettoria → generica strada

SISTEMA

Fisico → **DI RIFERIMENTO:**

Non esiste un sistema di riferimento ASSOLUTO

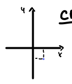
Si tratta di un insieme di corpi fissi, rispetto ai quali definiamo la posizione e il movimento del corpo studiato.

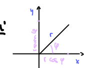
Geometrico → Come misuro le cose all'interno di un sistema di riferimento?

DI COORDINATE:

Permette la descrizione matematica del movimento rispetto al sistema di riferimento.

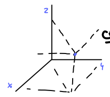
- PIANO BIDIMENSIONALE (2D)
  - CARTESIANE
  - POLARI

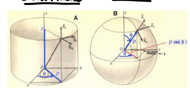




con $r>0$
$0 \le \varphi < 2\pi$

- SPAZIO TRIDIMENSIONALE (3D)
  - CARTESIANE
  - CILINDRICHE
  - SFERICHE

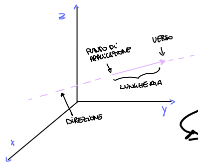




Cilindriche: $\rho>0$, $0 \le \theta < 2\pi$

Sferiche: $\rho>0$, $\phi \le \pi$, $0 \le \theta < 2\pi$

Vettori



Versore $\underline{u}$ di modulo unitario

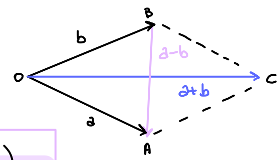
→ ente matematico che descrive grandezze definite non solo dall'intensità

es. Temperatura → basta l'intensità
velocità → necessita di direzione e verso

DEF. è un segmento orientato, la cui lunghezza ne indica l'intensità: insieme di tutti i segmenti orientati ed equipollenti

SOMMA E DIFFERENZA

- Proprietà commutativa $a+b=b+a$
- Proprietà associativa $a+(b+c)=(a+b)+c$



NOTA: $b-a$ ha verso opposto rispetto ad $a-b$

$$\boxed{a+b=(a_x+b_x)u_x+(a_y+b_y)u_y+(a_z+b_z)u_z}$$

SCOMPOSIZIONE:

- T. PITAGORA
- TRIGONOMETRICA:

$a_x = a \cdot \cos\theta$
$a_y = a \cdot \sin\theta$
$\operatorname{tg}\theta = \frac{a_y}{a_x}$

PRODOTTO

SCALARE

$a \cdot b = a \cdot b \cos\alpha$ = SCALARE

Proprietà:

- proprietà commutativa $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$
- proprietà distributiva $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$
- omogeneità $k(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (k\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (k\mathbf{b})$
- posso esprimerlo come somma delle componenti
  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$
- $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$ → QUADRATO DEL MODULO
- teorema di Carnot o del coseno
  $c^2 = (\mathbf{a}+\mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a}+\mathbf{b}) = a^2+b^2+2\,\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a^2+b^2+2ab\cos\alpha$
- **nullo per vettori ortogonali** $\alpha=90° \rightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}=0$
- per i versori $\mathbf{u}_x \cdot \mathbf{u}_x = \mathbf{u}_y \cdot \mathbf{u}_y = \mathbf{u}_z \cdot \mathbf{u}_z = 1$

VETTORIALE

VETTORIALE → $c = a \wedge b$, $c = ab\sin\theta$, $c \parallel N$, $c \perp a, b$

Proprietà:

- proprietà **anticommutativa** $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = -\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}$
- proprietà distributiva $\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{c}$
- omogeneità $k(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = (k\mathbf{a}) \wedge \mathbf{b} = \mathbf{a} \wedge (k\mathbf{b})$
- **NO** proprietà associativa $\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) \neq (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c}$
- $c = ab\sin\theta$ area del parallelogramma di lati a e b
- **nullo per vettori paralleli** $\theta = 0 \rightarrow \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = 0$
- per i versori $\mathbf{u}_x \wedge \mathbf{u}_x = \mathbf{u}_y \wedge \mathbf{u}_y = \mathbf{u}_z \wedge \mathbf{u}_z = 0$
  $\mathbf{u}_x \wedge \mathbf{u}_y = \mathbf{u}_z$; $\mathbf{u}_y \wedge \mathbf{u}_z = \mathbf{u}_x$; $\mathbf{u}_z \wedge \mathbf{u}_x = \mathbf{u}_y$
  $\mathbf{u}_y \wedge \mathbf{u}_x = -\mathbf{u}_z$; $\mathbf{u}_z \wedge \mathbf{u}_y = -\mathbf{u}_x$; $\mathbf{u}_x \wedge \mathbf{u}_z = -\mathbf{u}_y$ } ATTENZIONE AL SEGNO
- MATRICE
  $$\mathbf{c} = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

08.03

Cinematica

Un punto materiale è un oggetto dotato di massa, di coordinate, ma che non sarà caratterizzato da una dimensione fisica estesa. Per descrivere un punto materiale saranno sufficienti tre coordinate cartesiane nello spazio, due per descrivere il moto sul piano, una per descrivere il moto unidimensionale sulla retta. La traiettoria è la strada seguita dal movimento del punto materiale nello spazio in cui si trova, quindi sarà il luogo dei punti occupati dal punto materiale durante il moto, sarà in generale una traiettoria rettilinea, poi in due dimensioni la traiettoria sarà bidimensionale o curva generica (aperta o chiusa). Le grandezze chiave che andremo a definire adesso sono la posizione, velocità e accelerazione, tempo. In generale cercheremo la legge oraria, cioè l'espressione dello spazio in funzione del tempo.

Iniziamo dal moto unidimensionale, caso particolare del moto generico 2D. I nostri spostamenti saranno vincolati ad una retta, che chiamiamo asse delle x, e gli spostamenti li chiamiamo x, del punto materiale P valutati in funzione di un punto fisso, origine O fissa nello spazio e appartenente alla retta. Chiamiamo x_1 e x_2 le posizioni del punto lungo la retta negli istanti t_1 e t_2. Definiamo velocità media il rapporto dello spostamento fratto l'intervallo di tempo.

VELOCITÀ MEDIA $V_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$

O — P ← RETTA

Il tempo sarà sempre maggiore di 0, ma niente so delle posizioni, quindi la velocità può essere sia negativa sia positiva, in base a se mi muovo lungo la direzione della freccia o per il verso opposto. Definisco velocità il limite di dt che tende a 0 della velocità media, quindi la definisco in un sistema 1D come la derivata della posizione x fatta rispetto al tempo.

VELOCITÀ ISTANTANEA $V = \frac{dx}{dt} \xrightarrow{\text{Posso esprimere}} dx = v\,dt \xrightarrow{\text{integrare}} \int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} v\,dt \xrightarrow[\text{determinabile così}]{\text{legge oraria}} x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt$

DIPENDENZA DA X — posizione generica (x), posizione iniziale (x_0) — DIPENDENZA TEMPORALE

Il legame tra la velocità media e la velocità istantanea è dato da: $V_m = \frac{1}{t - t_0}\int_{t_0}^{t} v(t)\,dt$ (MEDIA INTEGRALE) (t e t_0 coincidono con t_1 e t_2 della relazione precedente)

Alla stessa maniera posso definire l'accelerazione media come la variazione della velocità in un certo intervallo di tempo tra t_1 e t_2.

ACCELERAZIONE $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_1 - v_2}{t_1 - t_2} \longrightarrow a = \frac{dv}{dt} \xrightarrow{\text{espressione esplicita della velocità in funzione del tempo è in forma di integrale}} V(t) = V_0 + \int_{t_0}^{t} a(t)\,dt$

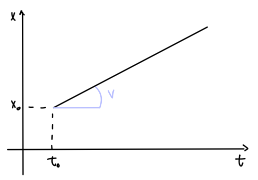
Le due relazioni date sono relazioni generali, in generale dato uno spostamento come calcolo la velocità, in generale data una velocità come ne calcolo l'accelerazione. Dati questi casi generali, vediamo quali sono i casi particolari, quindi quali sono le leggi orarie per il caso di velocità costante e per il caso di accelerazione costante. Partiamo dalla velocità costante: se suppongo che la velocità sia costante, significa che l'accelerazione sarà automaticamente zero, poiché la derivata di una costante è uguale a zero, io sono in grado di andare a esplicitare questo integrale:

$\boxed{V = \text{COSTANTE}}$

$V = \frac{dx}{dt} = \text{cost} \longrightarrow x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt = x_0 + v(t + t_0)$

$\longrightarrow \int_{t_0}^{t} v\,dt = v\int_{t_0}^{t} dt = v(t - t_0)$

ANDAMENTO GRAFICO →



RETTA CON COEFFICIENTE ANGOLARE LEGATO ALLA VELOCITÀ ← $\boxed{\textbf{MOTO RETTILINEO UNIFORME}}$

$\boxed{\text{Moto invece uniformemente accelerato,}}$ quindi nel secondo caso l'accelerazione è costante, diversa da zero, la velocità quindi non può essere costante nell'intervallo di tempo. Sapendo che l'accelerazione è costante posso risolvere questo integrale:

$V(t) = V_0 + \int_{t_0}^{t} a(t)\,dt = V_0 + a(t - t_0)$ * non è la legge oraria

(COSTANTE)

INTEGRANDO OTTENGO LA LEGGE ORARIA →

$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt = x_0 + \int_{t_0}^{t} \left[V_0 + a(t - t_0)\right] dt = x_0 + V_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$

È UNA COSTANTE: velocità nell'istante t_0, è un numero

SE L'ACCELERAZIONE DIPENDE DAL TEMPO QUESTA RELAZIONE NON È PIÙ VALIDA

ES. A = COST → GRAVITÀ

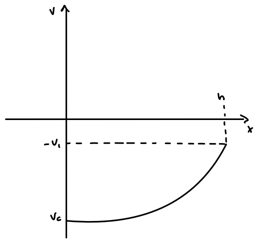
$$V_{(x)} = -\sqrt{V_i^2 + 2g(h-x)}$$

$$V_c = -\sqrt{V_i^2 + 2gh}$$

$$t^2 + 2\frac{V_i}{g}t - 2\frac{h-x}{g} = 0$$

$$t = -\frac{V_i}{g} \pm \sqrt{\frac{V_i^2}{g^2} + 2\frac{(h-x)}{g}} \longrightarrow t_c = -\frac{V_i}{g} + \sqrt{\frac{V_i^2}{g^2} + \frac{2h}{g}}$$

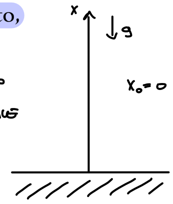
Soluzione con - addizione togliendola perché si trova un tempo negativo



Naturalmente il tempo di contatto è diverso dal precedente, perché lanciandolo verso il basso ci metterò un po' di meno.

Vediamo ora un terzo caso in cui io parta dal suolo e lanci l'oggetto verso l'alto con una certa velocità iniziale, in questo caso ridisegno il sistema di riferimento, cambiano le condizioni iniziali e per la prima metà del moto sarà decelerato, poi arriverà ad un massimo, tornerà indietro e sarà nuovamente accelerato.

PARTO DAL SUOLO E LANCIO L'OGGETTO VERSO L'ALTO CON UNA VELOCITÀ INIZIALE



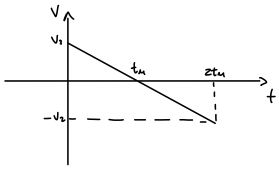
$X_0 = 0 \quad V_0 = V_2 \uparrow$

DECELERA E POI TORNA INDIETRO NUOVAMENTE ACCELERATO

$v(t) = V_2 - gt$

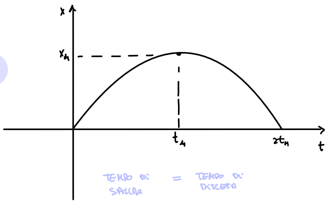
$v(t_M) = 0$ quota massima $= x_M$

$T_m = \frac{V_2}{g} \rightarrow$ TEMPO CHE CI METTE A RAGGIUNGERE LA QUOTA MASSIMA



$x(t) = V_2 t - \frac{1}{2}gt^2$

$x(t_M) = x_M = \frac{V_2^2}{2g}$



Una volta quando andrà verso l'alto sarà positiva, e quando tornerà ad andare verso il basso sarà negativa.

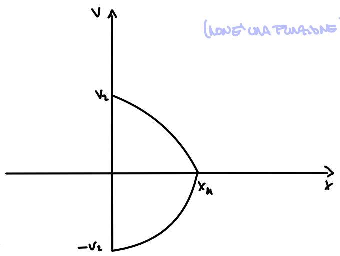
$$V(x) = \pm\sqrt{V_2^2 - 2gx}$$

VELOCITÀ DI CONTATTO AL SUOLO $V_c = -V_2$

$$t(x) = \frac{V_2}{g} \pm \sqrt{\frac{V_2^2}{g^2} - \frac{2x}{g}} = t_M \pm \sqrt{t_M^2 - \frac{2x}{g}}$$

CI STA IL $\pm$ PERCHÉ SALITA → SEGNO - POI ARRIVO AL MASSIMO → T_M DISCENDO → SEGNO +

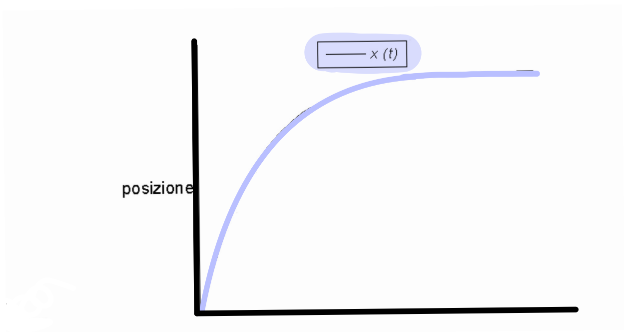
(NON È UNA FUNZIONE)



SOLO SE L'ACCELERAZIONE È COSTANTE, POSSO APPLICARE QUESTE LEGGI!!

Se l'accelerazione non è costante abbiamo ad esempio una molla, gli attriti daranno un'accelerazione costante.

Un altro esempio di moto rettilineo con accelerazione non costante è il $\boxed{\text{moto rettilineo smorzato,}}$ supponiamo di avere un moto in cui l'accelerazione sia direttamente funzione della velocità, pari a -kv, in cui k è una costante con delle dimensioni che dipende dal mio sistema, più vado veloce più ho una decelerazione grande in modulo. Questo esempio è la tipica resistenza aerodinamica durante il moto di un sistema viscoso in aria.



$$V = V_0 \exp(-kt) = \frac{dx}{dt}$$

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t V_0 \exp(-kt)\, dt$$

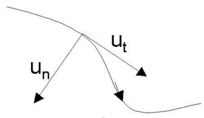
$$x - x_0 = V_0 \int_0^t \exp(-kt)\, dt = -\frac{V_0}{k}\left[\exp(-kt)\right]_0^t =$$

$$= -\frac{V_0}{k}\left[\exp(-kt) - 1\right] \quad \text{SE } x_0 = 0$$

$$\boxed{x(t) = \frac{V_0}{k}\left(1 - \exp(-kt)\right)}$$

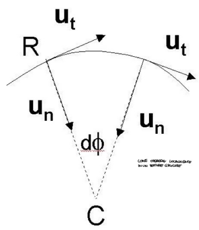
Il vettore velocità media non è tangente alla traiettoria, il vettore velocità istantanea è tangente alla traiettoria quando Δt tende a 0. Definito il versore tangente alla traiettoria u_t è automaticamente definito anche il suo versore perpendicolare, essendo che posso sempre definire una tangente alla traiettoria punto per punto se la traiettoria è continua, automaticamente posso definire una direzione u_n entrante perpendicolare ad essa, e la definisco direzione normale. Se io mi sposto lungo la traiettoria tutto dipende dal tempo, infatti per calcolare l'accelerazione andiamo a derivare rispetto al tempo.

Modulo della velocità per il versore tangente, se voglio calcolare l'accelerazione questa è la derivata rispetto al tempo di quel termine lì (tutti i termini infatti dipendono dal tempo).



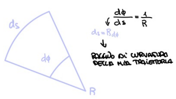
$$\mathbf{v} = \frac{ds}{dt}\mathbf{u}_t = v\mathbf{u}_t$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \leftarrow \text{Derivata seconda}$$



$$\mathbf{a} = \frac{d(v\mathbf{u}_t)}{dt} = \frac{dv}{dt}\mathbf{u}_t + v\frac{d\mathbf{u}_t}{dt} = \frac{dv}{dt}\mathbf{u}_t + v\frac{d\phi}{dt}\mathbf{u}_n$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{1}{R}v$$



accelerazione **tangenziale**

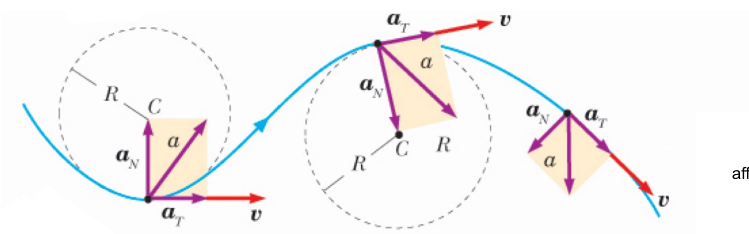
$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt}\mathbf{u}_t + v\frac{d\phi}{dt}\mathbf{u}_n = \underbrace{\frac{dv}{dt}}_{a_t}\mathbf{u}_t + \underbrace{\frac{v^2}{R}}_{a_n}\mathbf{u}_n = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_n$$

accelerazione **normale** o **centripeta**

Accelerazione centripeta = accelerazione normale

Il modulo del versore derivato è esprimibile come la velocità scalare fratto il raggio di curvatura, che cambia punto su una traiettoria, mentre su una circonferenza è costante.

All'interno della mia relazione l'accelerazione è esprimibile come un termine tangente, che quindi mi dà la variazione scalare della velocità lungo la direzione tangente rispetto alla mia traiettoria, più un termine V al quadrato fratto R, lungo la direzione normale. Quindi il tutto sarà la somma vettoriale della accelerazione tangenziale più l'accelerazione normale, detta anche accelerazione centripeta.
Se io percorro una curva con la macchina io mi sento spinto verso l'esterno in direzione normale rispetto alla tangente della mia traiettoria in modo più intenso nel momento in cui faccio una curva stretta.



Nel caso volessi affrontare il problema inverso:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0) + \int_{t_0}^{t}\mathbf{v}(t)dt$$

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(t_0) + \int_{t_0}^{t}\mathbf{a}(t)dt$$

Torniamo a valutare in modo completo questa figura, in cui rappresentiamo i raggi di curvatura a seconda di com'è fatta la traiettoria, la velocità è il vettore in rosso, punto per punto, dove la prendo la prendo è sempre tangente alla traiettoria (come con la macchina se non riesco a tenere la curva), l'accelerazione ha una direzione qualsiasi, però posso spezzarla in componenti, una componente che mi dice quanto aumento la velocità con la direzione, e una seconda componente perpendicolare alla prima che tira verso il centro C di curvatura. Se io conosco l'accelerazione o la velocità, posso calcolare l'altra attraverso processi di integrazione, come nel moto 1D, ma vettoriale.
Stabilito come sono messi questi vettori rispetto alla traiettoria, quindi stabilito che siamo stati in grado di vedere bene questi vettori, a questi punto torniamo indietro e vediamo come si descrivono le cose nei due sistemi di coordinate: polari e cartesiane. Vedremo che i risultati impliciti sono gli stessi, ma si vedono meno bene, non vedo questa dipendenza esplicita, cioè come sono messi i vettori velocità e posizione sulla traiettoria. Nelle coordinate cartesiane se la posizione è espressa in coordinate cartesiane, avrò due coefficienti che sono le proiezioni del vettore lungo x e y costanti nel tempo e fissi nello spazio, la velocità è la derivata di questo vettore rispetto al tempo, quindi si avrà derivando in modo scalare lungo y e x, senza derivare i versori perché costanti nel tempo.
Le componenti della velocità saranno date dalle derivate delle componenti del vettore posizione. Alla stessa maniera l'accelerazione si ottiene derivando un'altra volta e le sue componenti derivando rispetto al tempo le componenti della velocità sempre riferendosi agli stessi versori fissi.

Posizione: $r(t) = OP = x(t)u_x + y(t)u_y$

$$v = \frac{dr}{dt} = \frac{dx}{dt}u_x + \frac{dy}{dt}u_y$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2} = \frac{dv_x}{dt}u_x + \frac{dv_y}{dt}u_y = \frac{d^2x}{dt^2}u_x + \frac{d^2y}{dt^2}u_y = a_x u_x + a_y u_y$$

Solitamente andavamo a caccia della legge oraria, qui l'abbiamo, se la deriviamo rispetto al tempo, ottengo la velocità del mio punto.

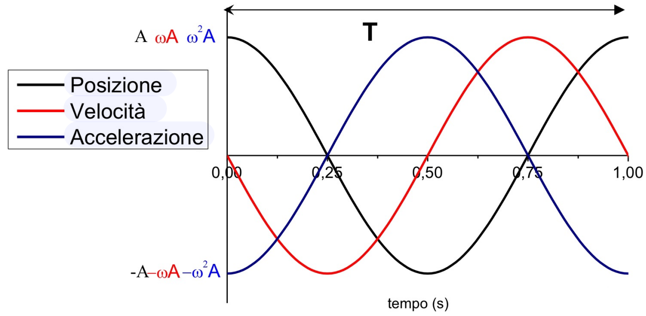
$v(t)=\frac{dx}{dt}=-A\omega\sin(\omega t+\varphi)$ Se io derivo un'altra volta rispetto al tempo ottengo l'accelerazione. $a(t)=\frac{dv}{dt}=-A\omega^2\cos(\omega t+\varphi)$

Trovo l'equazione differenziale caratteristica del moto armonico, in cui il rapporto tra accelerazione e spostamento è una costante negativa, perché omega al quadrato è certamente positivo, col meno davanti diventa negativo.

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0}$$ eq. differenziale caratteristica

Questa particolarità, in base alla quale l'accelerazione si mantiene proporzionale allo spostamento dallo zero secondo un fattore di proporzionalità negativo, contraddistingue e caratterizza i moti armonici. In base a ciò, quando troveremo dei sistemi nei quali si può affermare che accelerazione e spostamento sono legati in questo moto, potremo dire con certezza che tali sistemi si muovono di moto armonico. E anzi, dalla costante di proporzionalità sarà possibile dedurre T (quindi f, quindi ω).

Se io rappresentassi in un grafico posizione, velocità e accelerazione:



CONDIZIONI DI CONTORNO

$x(t=0)=x_0$ A ϕ $x(t)=A\cos(\omega t+\phi)$

$v(t=0)=v_0$ $a(t)=-\omega^2x(t)$ $v(t)=-\omega A\sin(\omega t+\phi)$

$a(t)=-\omega^2A\cos(\omega t+\phi)$

$x_0=A\cos\phi$

$v_0=-\omega A\sin\phi$ $\longrightarrow$ $\frac{v_0}{x_0}=-\omega\tan\phi$

$v_0^2+\omega^2x_0^2=\omega^2A^2\sin\phi+\omega^2A^2\cos^2\phi=\omega^2A^2(\sin^2\phi+\cos^2\phi)$

$v_0^2+\omega^2x_0^2=\omega^2A^2$

$a=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}\Rightarrow\int_{x_0}^{x}a\,dx=\int_{v_0}^{v}v\,dv\Rightarrow\frac{1}{2}(v^2-v_0^2)=-\omega^2\int_{x_0}^{x}x\,dx$

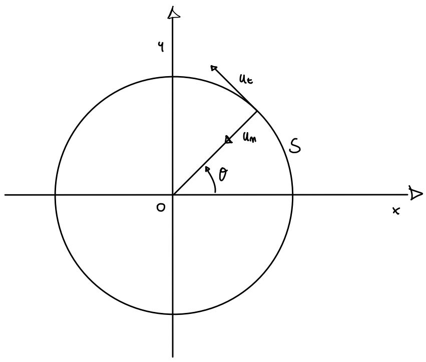
$\underbrace{-\frac{\omega^2}{2}(x^2-x_0^2)=\frac{1}{2}(v^2-v_0^2)}_{A}$

$\longrightarrow$ $v^2=\omega^2(A^2-x^2)$

$v=\pm\omega A$ al centro $x=0$

$v=0$ ai bordi $x=\pm A$

Strettamente legato al moto periodico c'è il moto circolare bidimensionale. Con **moto circolare** chiamiamo un moto in cui la traiettoria è una circonferenza, abbiamo visto numerose volte che ogni traiettoria curva è approssimabile localmente con una circonferenza, vediamo cosa succede se mi muovo in una circonferenza di raggio r, il moto è vincolato su questa circonferenza, sono nel caso in cui le coordinate intrinseche, cioè il versore tangente rispetto alla traiettoria coincide con il versore u_θ delle coordinate polari, e la direzione radiale coincide con la direzione normale del moto.



La circonferenza che descrive la mia traiettoria, lo spazio percorso è s(t), l'angolo varia nel tempo e di conseguenza S varia nel tempo, se al centro metto un sistema di riferimento su cui posso associare delle coordinate cartesiane, la posizione del mio punto materiale è esprimibile attraverso coordinate cartesiane attraverso le funzioni seno e coseno. Queste coordinate dipendono dal tempo perché durante il movimento del punto materiale la proiezione dello spostamento mi darà un segmento su y e x che dipendono dal tempo.

La derivata dell'angolo fratto il tempo è la velocità angolare.

Con questi tipo di traiettoria l'espressione dell'accelerazione trova una sua rappresentazione abbastanza immediata attraverso l'utilizzo dei vettori tangenti e dei versori normali, come visto in precedenza, notando che in questo caso il versore tangente è la tangente alla circonferenza, quindi il versore che gira attorno alla circonferenza, invece il versore normale ha direzione radiale che punta al centro della circonferenza. I termini dei coefficienti da mettere davanti a versori tangenti e normali sono espressi in funzione della velocità angolare e non della velocità lineare.

$s(t)=R\,\vartheta(t)$ *R* costante

$x(t)=R\cos\vartheta(t)$

$y(t)=R\sin\vartheta(t)$

def $\omega(t)=\frac{d\vartheta(t)}{dt}=\frac{1}{R}\frac{ds}{dt}=\frac{v(t)}{R}$

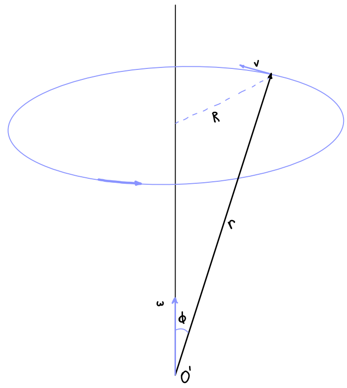
$\mathbf{a}=R\frac{d\omega}{dt}\mathbf{u}_t+\omega^2R\mathbf{u}_n=\mathbf{a}_t+\mathbf{a}_n$

Moto circolare uniforme → accelerazione normale alla traiettoria ⟵ SEMPRE

$\boxed{a_n=v^2/R=\omega^2R}$

Moto uniforme ω cost $\begin{cases} s(t)=s_0+vt \\ \vartheta(t)=\vartheta_0+\omega t \end{cases}$

Moto periodico con periodo $T=\frac{1}{f}=\frac{2\pi}{\omega}$



(Meno importanti) prendiamo una circonferenza e la mettiamo su un piano, con un asse di rotazione lungo la quale direzione sarà posizionato il mio vettore velocità angolare omega, al posto di guardare dal centro della circonferenza, mi sposto lungo l'asse di rotazione e ne definisco un punto O', la direzione della velocità sarà determinata dal raggio vettore r. Il vettore r ruota a sua volta attorno ad un asse di rotazione e l'intero moto risulta assumere una forma conica (come una trottola). Se studiamo la variazione del raggio r nel tempo, il modulo di r sarà costante, la direzione non sarà invece costante e quando derivo r, derivo il versore che mi dà un versore tangente rispetto al primo, e segue:

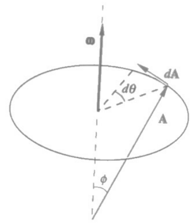
Nel moto di precessione del mio vettore r io vedo che la relazione mi lega la variazione nel tempo del mio vettore, come prodotto esterno di omega esterno il vettore stesso.

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = r\frac{d\mathbf{u}_r}{dt} = r\frac{d\vartheta}{dt}\mathbf{u}_t = r\omega\mathbf{u}_t = \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}$$

Chiamo moto di precessione un moto di rotazione di un asse rispetto ad un altro asse fisso, con il quale forma un angolo costante. Volendo abbiamo un moto di precessione anche per la velocità del moto, in cui R è un vettore e la sua direzione è generica ad un asse.

Si può generalizzare tutto ciò e si può dire che, se A è un vettore qualsiasi di modulo costante che descrive un moto di precessione con velocità angolare omega, sarà:

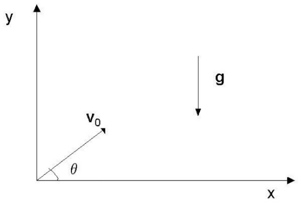
$$\boxed{\frac{dA}{dt} = \omega \wedge A}$$



La sua derivata rispetto al tempo è legabile alla sua velocità angolare di rotazione esterno il modulo del vettore stesso.

Ultima applicazione della cinematica è quella del moto parabolico, cioè un esempio di composizione di moti nel piano cartesiano. Andremo a discutere ora il moto di un punto materiale che viene lanciato con una velocità iniziale inclinata rispetto all'orizzontale asse x, cioè un moto che avviene sotto l'azione dell'accelerazione di gravità, come già visto nel moto verticale, è diretta verso il basso e dunque discorde rispetto all'asse delle y fissato.

Faremo questa trattazione in coordinate cartesiane, partendo da un tempo iniziale e una posizione iniziale che coinciderà con l'origine, questo moto viene definito spesso anche come moto del proiettile. Supponiamo di conoscere la velocità iniziale e l'angolo, vogliamo trovare le leggi orarie del mio moto, che saranno due una lungo l'asse delle x e una lungo l'asse delle y, vogliamo trovarne la traiettoria del moto bidimensionale,perché la velocità é nel piano.



$\vec{V_0}, \theta$

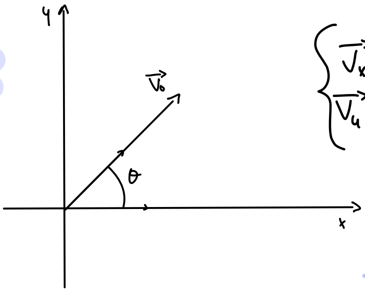
asse x $\quad x(0) = 0$
asse y $\quad y(0) = 0$ } PARTIAMO DALL'ORIGINE

$V_x(0) = V_0 \cos\theta$
$V_y(0) = V_0 \sin\theta$

$a_x(0) = 0$ NON HO ACCELERAZIONE LUNGO X
$a_y(0) = -g$

TRASCURIAMO L'ATTRITO

Lungo l'asse delle x abbiamo un moto rettilineo uniforme e lungo y un moto uniformemente accelerato.



$$\begin{cases} \vec{V_x} = V_0 \cos\theta \, \vec{u}_x \\ \vec{V_y} = V_0 \sin\theta \, \vec{u_y} \end{cases} \longrightarrow \begin{array}{ll} \text{asse } x & V_x(t) = V_0 \cos\theta \\ \text{asse } y & V_y(t) = V_0 \sin\theta - gt \end{array}$$

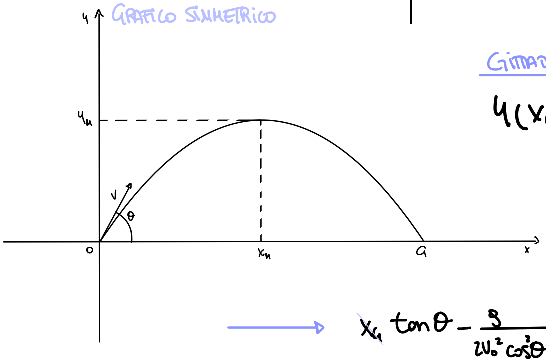
MOTO RETTILINEO UNIFORME

MOTO UNIFORMEMENTE ACCELERATO

$$\longrightarrow \begin{array}{l} x(t) = V_0 \cos\theta \, t \\ y(t) = V_0 \sin\theta \, t - \frac{1}{2} g t^2 \end{array} \Rightarrow t = \frac{x}{V_0 \cos\theta}$$

$$\longrightarrow y = V_0 \sin\theta \frac{x}{V_0 \cos\theta} - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{V_0 \cos\theta} \right)^2 = x \tan\theta - \frac{g}{2V_0^2 \cos^2\theta} x^2$$

GRAFICO SIMMETRICO



GITTATA

I DUE MOTI SONO INDIPENDENTI!!

$$y(x_G) = 0$$

$$x_M = \frac{x_G}{2} = \frac{V_0^2 \cos\theta \sin\theta}{g} = \frac{V_0^2 \sin 2\theta}{2g} \qquad (\sin 2\theta = 2 \sin\theta \cos\theta)$$

$$y_M = y(x_M) = \frac{V_0^2 \cos\theta \sin\theta}{g} \frac{\sin\theta}{\cos\theta} - \frac{g}{2V_0^2 \cos^2\theta} \frac{V_0^4 \cos^2\theta \sin^2\theta}{g^2} = \frac{V_0^2 \sin^2\theta}{2g}$$

GRAZIE ALLE CONDIZIONI DI SIMMETRIA

$$\longrightarrow \cancel{x_G} \tan\theta - \frac{g}{2V_0^2 \cos^2\theta} \cdot x_G^{\cancel{2}} = 0 \Rightarrow x_G = \frac{2V_0^2 \cos\theta \sin\theta}{g}$$

TEMPO DI VOLO $\quad t = \frac{x}{V_0 \cos\theta} \xrightarrow{\text{SOSTITUISCO}} x = x_G \longrightarrow t_G = \frac{x_G}{V_0 \cos\theta} = \frac{2V_0^2 \cos\theta \sin\theta}{g} = \frac{2V_0 \sin\theta}{g} = 2t_M$

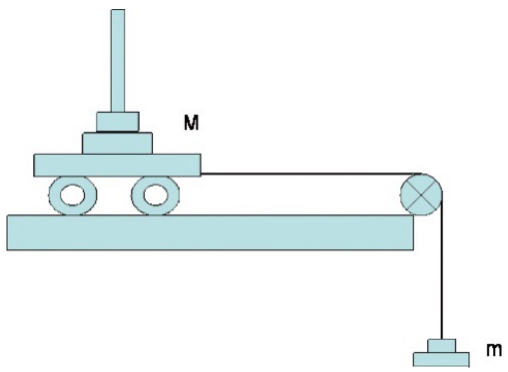
TEMPO CHE IMPIEGA IL PUNTO MATERIALE PER ARRIVARE A TERRA

TEMPO CHE IMPIEGA IL PUNTO MATERIALE A RAGGIUNGERE IL MASSIMO

Dinamica

Il passo successivo alla cinematica consiste nel cercare di rispondere alla seguente domanda : qual'è la causa del moto ?
Newton riuscì a trovare una risposta inventando così la dinamica, che dunque è quella branca della Fisica che studia le cause del moto e le leggi naturali che collegano le cause con gli effetti.
Osservando i fenomeni naturali Newton scoperse che alcuni moti, non tutti, apparivano essere connessi con una ben precisa causa.
Se ad esempio un giocatore di bigliardo colpisce con una stecca una biglia ferma essa si pone in movimento e tanto maggiore è il colpo tanto più velocemente la biglia si muove. Inoltre la direzione di moto della biglia dipende dalla direzione da cui proviene il colpo. Da questo esempio sembrerebbe di capire che la causa del moto deve essere una grandezza vettoriale, perchè l'effetto del colpo dipende sia dall'intensità che dalla direzione.
Tuttavia vi erano moti che almeno apparentemente non sembravano causati da nulla: il moto dei pianeti, la caduta dei corpi pesanti, ecc.
L'ipotesi di Newton era molto semplice ma assolutamente rivoluzionaria: assumere che qualsiasi moto fosse causato da una grandezza fisica vettoriale, cui diede il nome di forza. In particolare Newton riuscì a spiegare le leggi empiriche di Keplero sul moto dei pianeti, inventando la forza di gravità.

Gli oggetti in movimento tendono a restare in movimento



$$\vec{F}=m\cdot\vec{a}$$

Un principio in fisica è un'affermazione che viene imposta all'interno della teoria, che quindi è basata su osservazioni sperimentali e sulla descrizione della natura, ma di per sé non può essere dimostrato, è dunque un assunto a priori dal quale ricavo delle conseguenze. Il primo principio della dinamica, o prima legge di Newton, o principio di inerzia, ci dice che un corpo non soggetto a forze non subisce cambiamenti di velocità, cioè si mantiene in quiete oppure in moto rettilineo uniforme. Altrimenti detto, introducendo un concetto che approfondiremo più avanti, in un sistema di riferimento inerziale, un punto materiale libero si muove con velocità costante che può essere anche zero. Nel presentare questo principio compare per la prima volta il concetto di forza che è una grandezza che esprime l'interazione tra sistemi fisici, quindi se un corpo non è soggetto a forze mantiene le sue condizioni di moto che sono quiete o moto rettilineo uniforme, dunque avremo il legame tra forza e concetto di accelerazione. Chiamiamo inerzia la tendenza del mio corpo a mantenere queste condizioni di moto rettilineo uniforme o di quiete se si trova in quiete. Quindi quando tentiamo di far cambiare la velocità di un oggetto, esso si oppone a questo cambiamento e l'opposizione che il mio oggetto fa a questo cambiamento viene detta inerzia, che è una caratteristica interna del mio corpo, cioè è propria del mio punto materiale e di tutti i corpi che tratteremo (anche con corpi estesi più complessi), sarà sempre una caratteristica intrinseca che si manifesta ogni volta che applico una sollecitazione per variarne le condizioni di moto attraverso una forza.
Nota bene: assenza di forza non implica assenza di movimento, cioè la velocità legata allo spostamento spaziale e l'accelerazione legata alla forza sono concetti diversi, io mi posso spostare in assenza di forze.

Se io prendo complessivamente il sistema la risultante delle forze è uguale a 0, quando scriveremo le equazioni del moto però prenderemo in considerazione i punti materiali uno alla volta, solo con i sistemi di punti li prenderemo in considerazione tutti insieme. Quindi nel moto non devo considerare azioni e reazione, con le forze che si compensano sempre.

Cosa sono le forze? Esistono 4 tipi di forze: interazione gravitazionale, interazione elettromagnetica, interazione nucleare debole e interazione nucleare forte (Unione del 2 e 3 con una legge non completissima). L'interazione nucleare forte è responsabile dell'interazione dei nucleoni, che tiene insieme i quark, l'interazione nucleare debole tiene insieme tra di loro i nucleoni e di coesione del nucleo, l'interazione elettromagnetica tiene insieme gli atomi, l'interazione gravitazionale è su larga scala ed è responsabile dell'interazione planetaria di grandi masse, lega tra di loro corpi massivi. Sono tutte interazioni a lunga distanza, che avvengono attraverso l'utilizzo di mediatori, cioè particelle bosoni, quelli nucleari forti gluoni e pioni, nucleare debole w e z, elettromagnetica fotoni, gravitazionale gravitoni. L'interazione gravitazionale è importante e si vede solamente in presenza di masse molto grandi per questo si tratta di un 10, è dunque responsabile dei movimenti planetari, delle interazioni che tengono insieme i corpi è assolutamente trascurabile in ogni tipo di interazione terrestre, di trattazione diretta di oggetti piccoli. Le interazioni con cui abbiamo a che fare tutti i giorni sono interazioni di tipo elettromagnetici, orbitali atomici che non possono entrare l'uno con l'altro e posso dunque applicare le forze.

Andiamo a vedere un'altra importante definizione e altri teoremi. Definiamo quantità di moto il prodotto della massa per la velocità. La quantità di moto è una grandezza di tipo vettoriale, essendo la velocità un parametro vettoriale, inevitabilmente lo sarà anche la quantità di moto. Quindi se ne studio la variazione della quantità di moto rispetto al tempo:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{dm}{dt} v = m \cdot a + \frac{d(mv)}{dt} v$$

Se io considero un razzo spaziale che col tempo consuma il carburante e riduce la sua massa, quindi la massa non è più costante , posso misurare la sua forza così, l'effetto della spinta della propulsione.

Se la massa é costante, la forza: $F = ma = m\frac{dv}{dt} = \frac{d(mv)}{dt} = \frac{dp}{dt}$

Nella fisica moderna di usa di più la quantità di moto e il momento angolare. Applicando questa ultima relazione, tiriamo fuori la prima delle relazioni di conservazione.

TEOREMA DELL'IMPULSO

$\mathbf{F}dt = d\mathbf{p}$ → posso integrare questa relazione nel tempo

Chiamo $\mathbf{J} = \int_{t_0}^{t} \mathbf{F}dt$ **impulso** della forza **F** → **J // F**

$$\boxed{\mathbf{J} = \int_{t_0}^{t} \mathbf{F}dt = \int_{p_0}^{p} d\mathbf{p} = \mathbf{p} - \mathbf{p}_0 = \Delta\mathbf{p}}$$

Teorema dell'impulso (forma integrale della legge di Newton)

Può essere visto come una nuova forma integrale, un'estensione, della legge di Newton. Entriamo e capiamo cosa abbiamo fatto, l'impulso, l'integrazione nel tempo della forza, vuol dire che prendo in considerazione una forza che si estende per un intervallo di tempo e ne sommo tuti gli effetti complessivi, l'effetto complessivo è stato quello di spingere il corpo e farne variare la quantità di moto, l'accelerazione complessiva sta all'interno del sistema, quello che vedo terminata l'interazione, sarà stata una variazione di velocità. Nel moto parabolico abbiamo osservato che avrò una componente di accelerazione durante lo sparo, quindi come posso dire che non ho accelerazione lungo x, l'effetto complessivo dello sparo è la creazione di un impulso, che è concentrato nel tempo, è una botta data al punto materiale concentrata nel tempo che mi dà una certa quantità, ho studiato quindi cosa succede nel moto dopo l'impulso. Quindi descrive cosa succede quando applico delle forze circoscritte nel tempo ad un punto materiale in modo da metterlo in moto, questi effetti generano velocità e quantità di moto. Fenomeno molto circoscritto nel tempo!! Come se fosse un intervallo infinitesimo.

Se la funzione varia con continuità esiste sempre un valore medio:

NB: se **F** = **F**(t), conoscendo $\Delta\mathbf{p}$ e applicando il teorema della media all'integrale $\int_0^t \mathbf{F}(t)dt$ posso calcolare il valore medio $\mathbf{F}_m$ della forza nell'intervallo di tempo t → $\mathbf{F}_m = \Delta\mathbf{p}/t$.

Molto importante è la conservazione di quantità di moto, la prima delle tre leggi di conservazione. Partiamo sempre dal secondo principio della dinamica:

$$\boxed{\mathbf{F} = m\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}}$$

$$\boxed{\text{Se} \quad \mathbf{F} = 0 \rightarrow \frac{d\mathbf{p}}{dt} = 0 \rightarrow \mathbf{p} = \text{costante}}$$

La dinamica sta proprio nel generare del movimento, qual è l'azione dinamica delle forze è prendere in considerazione tutte le forze agenti nel sistema e andarle a valutare nel loro effetto, a seconda di quali sono le forze agenti presenti nelle direzioni e qual è il moto effettivo del sistema che mi aspetto avere. L'azione dinamica significa dandogli il concetto di equazione del moto scrivendo F=ma.

L'equazione del moto sarà F=ma:

Moto rettilineo uniforme (**v** = costante, **a** = 0) → **F** = 0

Risultante delle forze=0

Moto uniformemente accelerato (**a** = costante) → **F vettorialmente** costante

Qui accelerazione costante e quindi una forza vettorialmente costante, non solo in modulo.

F variabile → moto vario → nel caso del moto piano curvilineo:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}_t + m\mathbf{a}_n = \underbrace{m\frac{dv}{dt}\mathbf{u}_t}_{\mathbf{F}_t \text{ forza tangenziale}} + \underbrace{m\frac{v^2}{r}\mathbf{u}_n}_{\mathbf{F}_n \text{ forza centripeta}}$$

Cominciamo dalla forza peso, abbiamo già visto che come evidenza sperimentale, un corpo che cade per qualsiasi massa che esso abbia, cade in assenza di attriti, subisce un'accelerazione costante detta di gravità di modulo in media 9.81. La seconda legge di Newton per la forza peso P=mg, con g vettore diretto verso il basso. la forza peso è una forza costante, cioè uguale in ogni punto, quindi se considero un punto materiale a terra vale tot, con piccoli spostamenti vale tot, non parliamo di grandi spostamenti rispetto alla superficie terrestre. È una forza costante quindi e andassi a rappresentare le linee di forza che mi rappresentano la direzione della forza in tutto lo spazio, che sarà il campo di forza, queste linee sono tutte parallele e tutte perpendicolari rispetto al pavimento, ad una forza costante in assenza di altre forze è associato un moto uniformemente accelerato, già visto con il moto verticale.

È costante perché causata da un campo che, nei pressi della superficie telereste, è uniforme.

Secondo tipo di forze sono le forze di attrito, in particolare partiamo dalle forze di attrito radente quindi forze di interazione tra il punto materiale che si muove lungo una superficie e la superficie stessa. Cominciamo con l'attrito radente statico, cioè appoggio la mia scatola sulla superficie, su di essa agirà sicuramente la forza peso, lungo y sicuramente la scatola non si muove perché alla forza peso reagirà una reazione vincolare N vista in precedenza, se provo a tirare la mia scatola attaccando una corda al baricentro e provo a tirare applicando una forza F orizzontale, sta scatola se non si muove rimango in condizioni statiche, vuol dire che all'interno del mio sistema deve essere presente un'altra forza che si oppone alla mia forza F, ciò fa sì che il mio sistema rimanga in condizioni statiche. Chiamo questa forza opponente la forza di attrito che è lungo la retta di azione della forza che applico io, forza opposta e in modulo uguale alla mia, poiché la risultante è 0. L'attrito è un'interazione tra la scatola e la superficie. Sperimentalmente si può far vedere che il corpo non si muove finché la forza con cui cerco di tirare la scatola è minore o uguale a:

$$\boxed{F \le \overset{/mu/}{\mu_s} N}$$

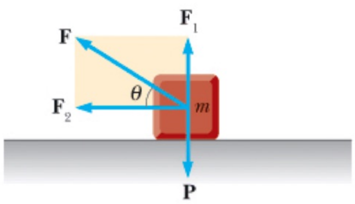
→ S= CONDIZIONI STATICHE

Nel caso in cui mi muovo nel piano orizzontale e applico una forza esattamente parallela al mio piano N=mg. La condizione limite di questa condizione è la forza di primo distacco. Attenzione il prodotto visto sopra non è la mia forza di attrito, ma è la massima forza di attrito che io posso sopportare prima di mettermi in movimento, la forza di attrito è esattamente uguale a F perché sommate devieni dare 0 e così condizioni statiche. Finché la forza rimane minore di quel prodotto la forza di attrito ha lo stesso modulo della forza applicata. per un sistema un po' più complicato come applicare una forza F che non sia orizzontale in condizioni di quiete, se io cerco di tirare la scatola con una forza inclinata rispetto al terreno, questa forza mi conviene scomporla in componenti:

Condizione di **quiete** se **F** non è parallela al piano:

$$\boxed{F_2 \le \mu_s N}$$

FORZA PREMENTE CHE NON COINCIDE PIÙ CON mg



Alla forza peso devo levare la componente F1.

$$F\cos\theta \le \mu_s\left(P - F\sin\theta\right)$$

$$F \le \frac{\mu_s mg}{\cos\theta + \mu_s \sin\theta}$$

La forza di attrito statico fra due superfici è sempre opposta alla componente parallela alla superficie della risultante delle altre forze applicate e può assumere valori compresi fra zero e $\mu_s N$.

Possiamo discutere il segno del termine:

1) $\sin\theta - \mu_d \cos\theta > 0 \quad \tan\theta > \mu_d$
$v(d) > v_0$

Moto accelerato, la velocità in fondo è più grande rispetto alla velocità di quando sono partito.

2) PERFETTO EQUILIBRIO
$\mu_d = \tan\theta \Rightarrow$ MOTO UNIFORME

Sono nel caso particolare in cui la velocità è costante e il moto è uniforme e la risultante delle forze applicate risulta uguale a 0.

3) $\tan\theta < \mu_d \Rightarrow$ MOTO DECELERATO
$v(d) < v_0$

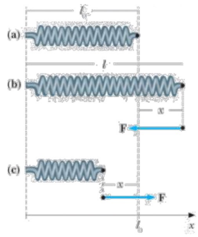
La velocità in fondo al piano più piccola rispetto alla velocità con cui sono partita, e devo studiare perché potrebbe anche non arrivarci in fondo bruciando tuta la velocità è l'energia cinetica e non arrivare in fondo.

Torniamo alle forze, abbiamo visto forza peso e forze di attrito, adesso vediamo la forza elastica. La definizione generale intesa come forza unidirezionale, la forza elastica in generale è una forza con direzione costante e verso diretto sempre un attrattore di forza centrale O, ha una intensità proporzionale alla distanza da O, più sono lontana più la forza è intensa e tende a tirarmi verso questo punto O. La forza elastica è associata al tantissimi moti e fenomeni, nel nostro corso quando parliamo di forza elastica tendenzialmente parliamo di molle, tipico oggetto macroscopico che esercita una forza di tipo elastico, queste mole rispondono in maniera elastica alle sollecitazioni, ciò che caratterizza tipicamente una molla riferendoci all'immagine: una sua lunghezza di riposo, che è la lunghezza della molla nel momento in cui non è sollecitata dunque non c'è una forza agente, ad esempio questa molla in configurazione orizzontale non è né tirata ne compressa, quando è sollecitata da una forza di trazione, la molla si allunga e avrà una lunghezza maggiore di ℓ_0 mentre quando è compressa avrà un valore di lunghezza minore rispetto a ℓ_0. La molla si comporta in maniera simmetrica, cioè si comportano alla stessa maniera in allungamento e compressione, mentre quantitativamente si comportano grazie ad una costante elastica k. Il punto O coincide con la posizione di ℓ_0, quando la molla è a riposo. Le forze associate alle molle devono essere proporzionali allo spostamento e seguono la legge di Hooke, che dice che l'allungamento o compressione della molla è proporzionale alla forza applicata. Nel momento in cui applico una forza F di trazione diretta lungo il verso delle x positive, la risposta della molla è una forza diretta lungo il verso delle x negative, indicato dalla presenza del - nella formula. Se invece comprimo la molla con una forza diretta verso il verso negativo delle x, la forza rispondente sarà diretta verso le x positive. Quindi la forza è sempre opposta alla sollecitazione.

$$\boxed{\mathbf{F} = -kx\,\mathbf{u}_x}$$

x: deformazione della molla; forza diretta lungo asse *x*

La forza ha **segno negativo** poiché è sempre **opposta allo spostamento**



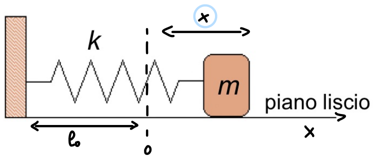
La forza è diretta sempre la mia origine O in corrispondenza della lunghezza ℓ_0. La forza di una molla è elastica perché tende a portarmi sempre verso il suo punto O di equilibrio statico. Se la molla è posta verticalmente dobbiamo tenere conto della forza peso. La forza elastica si esprime in N/m, non tutte le molle mantengono per tutte le forze un po' stesso regime elastico, superato questo regime, la molla "si smolla", fuori dal regime elastico si chiama regime plastico, quindi non tende più a tornare alla condizione di equilibrio, la caratteristica che gli da carattere armonico. I gas si comportano in maniera elastica, i soldi lo fanno anche in due dimensioni, in torsione, in generale il comportamento elastico è più generale. La forza esercitata dalle molle è diretta lungo l'asse della molla spesso e punta sempre verso il punto O di equilibrio statico, questo in fisica di dice che è il comportamento caratteristico di una forza chiamata Forza centrale, unidimensionale che tende sempre verso un punto. Le forza centrali sono forze le le quali, in qualsiasi punto, la direzione passa per un punto fisso (centro della forza) e il modulo è funzione soltanto della distanza. Le molle possono essere compresse o allungate, quindi o che esercita forze all'interno del mio sistema fisico con un comportamento di tipo statico, oppure possono essere un termine che risponde ad una sollecitazione nel tempo ed è questo che studiamo per prima. Studiamo la legge oraria massa-molla:
Se una molla si muove nel vuoto mantiene perennemente il suo moto. La massa è importante perché esprimiamo le leggi su un punto materiale di massa m, questo sistema è un sistema orizzontalmente, quindi la forza peso sarà perpendicolare rispetto alle direzioni del moto, quindi sarà ininfluente e il piano è liscio quindi non ho accelerazione legata all'interazione con l'attrito.

L'equazione del moto è:

$$-kx = ma$$

$$-kx = m\frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow \boxed{\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x}$$

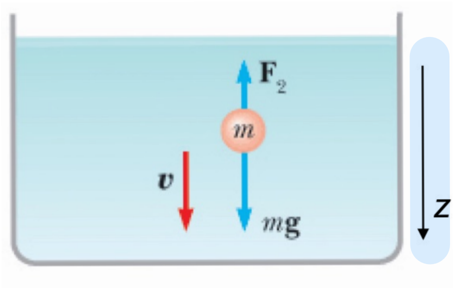
RELAZIONE CARATTERISTICA ASSOCIATA AD UN MOTO DI TIPO ARMONICO



Abbiamo fatto la forza peso, le forze di attrito radente, le forze elastiche associate alle molle. Altro esempio simile a ciò che abbiamo già visto in cinematica, le forze di attrito viscoso, avevamo parlato del fatto che in determinati contesto ci sono delle accelerazioni che sono proporzionali in modulo alla velocità del corpo, fenomeni tipici di attrito viscoso e di fenomeni come sferette in un fluido. Muovendomi in un fluido, in determinati casi, io sento una forza di resistenza che si oppone al mio moto, non è una forza sempre uguale ma dipende dalla forma del mio oggetto, dall'area che io oppongo al movimento e dalla velocità con cui l'oggetto si muove nel mio mezzo viscoso. Il caso più semplice in cinematica è un'accelerazione in funzione della velocità, il corrispondente caso dinamico passiamo da accelerazione a forza, quello di trattare una forza di attrito viscoso direttamente proporzionale alla velocità.
Andando a mutuare il formalismo usato in cinematica:

$$\mathbf{F}_v = -b\mathbf{v} = -mk\mathbf{v}$$

k costante $\quad [k] = [T^{-1}]$



Questa costante la posso esplicitare come prodotto di mk, avevamo visto in cinematica che dimensionale nate k è una costante che deve essere un tempo alla meno uno. Questa relazione è verificata per il moto di una sferetta in un fluido, per la maggior parte degli oggetti reali il problema è un po' più complicato, cioè se la forza è effettivamente proporzionale dalla velocità ma con un coefficiente davanti che a sua volta dipende dalla velocità. Lavoriamo quindi in un caso piuttosto particolare. Il disegno è un po' fuorviante perché disegnato così sembra che descriviamo il moto di una pallina in un contenitore di acqua, naturalmente questo approccio va bene per una pallina innacqua ma manca un componente importante che è la spinta di Archimede che tratteremo dopo. Questo approccio va quindi meglio per i fluidi non pesanti, dunque i gas. L'accelerazione come in cinematica è -kv.

VETTORIALE:

$$\vec{P} + \vec{F_v} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

Lavoriamo con l'asse z rivolto verso il basso

SCALARE (lungo z):

$$mg - mkv = m\frac{dv}{dt}$$

$$\int_0^v \frac{dv}{g-kv} = \int_0^t dt \rightarrow \quad y = g - kv \quad dy = -k\,dv \quad dv = -\frac{1}{k}dy$$

$$\int_0^y -\frac{1}{k}dy = -\frac{1}{k}\Big[\ln y\Big]_0^y$$

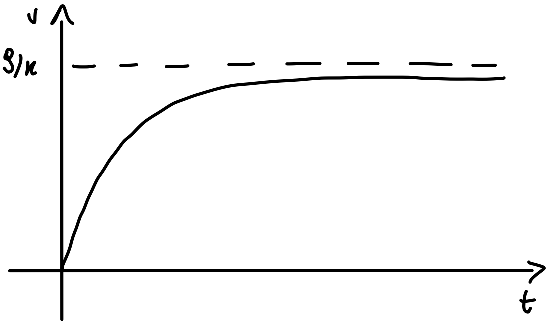
$$-\frac{1}{k}\Big[\ln(g-kv)\Big]_0^v = t$$

$$\Big[\ln(g-kv)\Big]_0^v = -kt \qquad \ln(g-kv) - \ln g = -kv$$

$$\ln\left(\frac{g-kv}{g}\right) = \ln\left(1-\frac{k}{g}v\right) = -kt$$

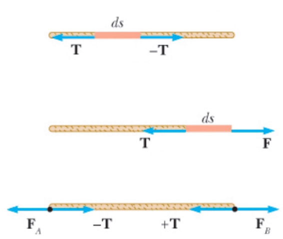
$$1-\frac{k}{g}v = e^{-kt} \longrightarrow v(t) = \frac{g}{k}\left(1-e^{-kt}\right)$$

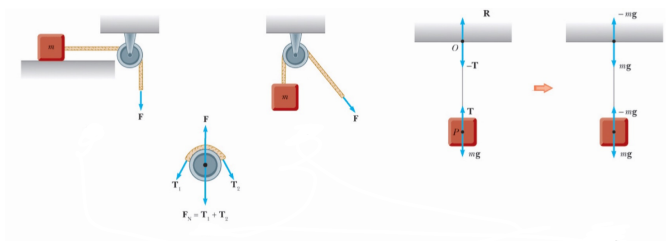
(MOTO SMORZATO)

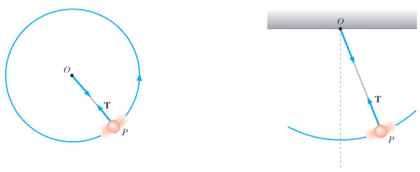


con $t \to \infty$
TENDE AD UN MOTO UNIFORME

Finora abbiamo visto come reazione vincolare tipica la reazione vincolare di un piano, altro tipico esempio di reazione vincolare che serve per trasferire forze all'interno dei sistemi fisici è la presenza di funi o fili. La reazione tipica vincolare è quella di un piano, altro tipico esempio di reazione vincolare che serve per trasferire forze all'interno di sistemi fisici è la presenza di funi o fili, che hanno due caratteristiche: sono inestendibili e hanno massa trascurabile, non rientrano quindi nell'equazione del moto, il filo sarà un trasmettitore di forza, ma non avrà una sua equazione del moto. Cominciamo col guardare la figura in alto, il caso A, trattare la fune come elemento in quiete, l'elemento infinitesimo di lunghezza s è in quiete fermo, cioè lungo la fune agiranno dello forze che dovranno essere in equilibrio tra di loro così che mantengano le condizioni di quiete nel sistema, quindi le tensioni da un lato e dall'altro dovranno essere in equilibrio, la tensione T compensata dalla tensione -T dall'altra parte, tale ragionamento posso applicarlo a tutto il filo e ciò mi fa capire che la tensione è la stessa lungo tutto il filo, in particolare se prendo i, pezzo di fune sul bordo dove applico la mia forza F la risposta della fine sarà una tensione T uguale in modulo e opposta in verso rispetto alla forza F. La fune è una trasmettitore di forza che permette di legare elementi distanti. Se guardo la mia fune in quiete tirata con forze agli estremi, compariranno agli estremi delle forze che andranno a compensare se in condizioni di quiete, o se sono diversi agli estremi, la fune si mette in movimento, sarà comunque presente una T che compensa e che fa si che la fune sia in movimento ed è importante ricordare che i fili sono inestensibili quindi le accelerazioni di ogni punto saranno le stesse. Quindi se io connetto due masse attraverso una fune inestensibile mi permette di dire che se l'accelerazione di una delle due masse è uguale all'altra massa. Questi non implica che il filo debba essere per forza rettilineo, utilizzeremo carrucole per deviare la direzione delle funi e spostare la forza, le carrucole ideali sono sistemi che mi permettono di spostare la forza che è un vettore, dunque segue la linea del mio filo. Se io appendo un punto materiale al mio soffitto, quindi come punto di vincolo, la mia fune porta la tensione fino al punto di applicazione al soffitto che dovrà rispondere con una sua forza di reazione tale da tenermi il sistema fermo, con una reazione vincolare R pari alla tensione T che tiene fermo il mio sistema.







$$T = m\frac{v^2}{r} = m\omega^2 r$$

Esempio molto semplice, se ho una mia pallina di massa m e la faccio girare su un piano orizzontale vincolata con una fune, la fune gioca proprio il ruolo del vincolo che mi esercita una forza centripeta sul mio punto materiale e permette di percorrere una traiettoria di tipo circolare, di conseguenza se la pallina gira su un piano orizzontale con una velocità tenuta dalla mia fune di lunghezza pari al raggio della mia circonferenza, la tensione della mia fune sarà una forza di tipo centripeto. Se il mio filo ha una carico di rottura, cioè può sopportare una forza oltre la quale si rompe, posso andare a calcolare la velocità massima con cui la pallina può girare senza rompere il filo, oltre la quale il filo si spezza e la pallina parte tangenzialmente alla traiettoria circolare.

Applichiamo questa cosa nella descrizione di un sistema di questo tipo: in cui abbiamo una carrucola ideale, cioè una carrucola che ha massa nulla e non ho presenza di attrito problemi di slittamento del filo. Applico alla carrucola due masse creando quindi una macchina di Atwood.

$-m_1 g + T = -m_1 a$ SCENDE $-a$ (1)

$-m_2 g + T = m_2 a$ SALE $+a$ (2)

(2) - (1)

$-m_2 g + T + m_1 g - T = m_2 a + m_1 a$

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$$

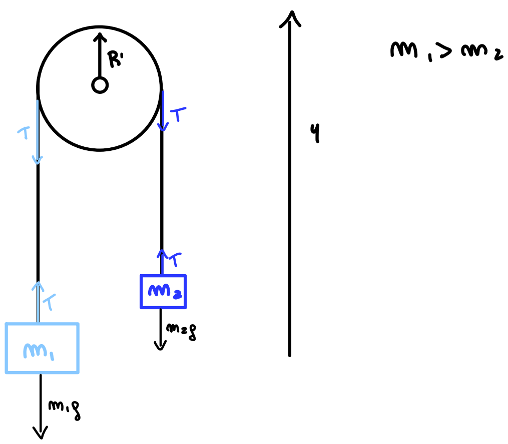
$$T = m_1 g - m_1 a = m_1 g - m_1 \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g =$$

$$= \frac{2 m_1 m_2}{m_1 + m_2} g = T$$

$$R = 2T = \frac{4 m_1 m_2}{m_1 + m_2} \cdot g$$

$$\frac{R_s}{R} = 1 + \frac{(m_1 - m_2)^2}{4 m_1 m_2} > 1$$

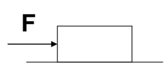
STATICO $R_s = (m_1 + m_2) g > R$



Energia e Potenza

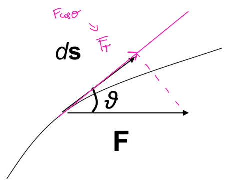
Chiamiamo lavoro infinitesimo della forza F il prodotto: $dw = F\,dx$

Questa definizione non tiene conto di alcuni aspetti come per esempio prendiamo un caso di movimento unidimensionale, una scatola poggiata su un piano e prendiamo in considerazione due applicazioni di forza, la prima applicata orizzontale al piano e una non parallela al piano di euguale modulo, quindi quella formula non mi tiene conto del vettore.



L'infinitesimo ds sarà un termine tangente alla traiettoria quindi lungo la direzione della velocità, se la forza non è applicata lungo ds ho problemi. Il prodotto scalare tra lo spostamento infinitesimo ds è la forza, ma ds è vettoriale, lungo la direzione tante alla mia traiettoria, quindi esprimo questo ds come lo spostamento infinitesimo scalare moltiplicato per il versore tangente. Il prodotto scalare sarà quindi:

def $$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = F \cos\vartheta \, ds$$



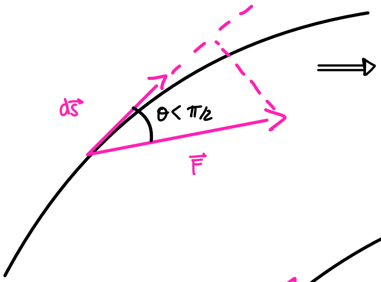
Posso ragionare che il prodotto è la proiezione del vettore lungo la direzione dello spostamento, agisce lavora solo la componente lungo lo spostamento la componente tangente della mia forza.

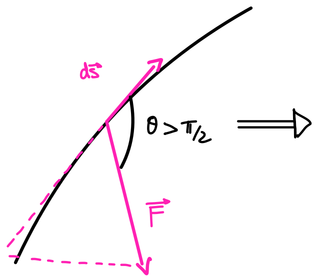
Se la mia curva è una curva finita, quindi vado da A a B, questo mio percorso voglio calcolarne il lavoro complessivo dello spostamento, applico i concetti del calcolo differenziale e integro la relazione lungo tutto il percorso, si tratta di uno spazio curvilineo perché solitamente si trattano le curve.

$$W_{AB} = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_A^B F \cos\vartheta \, ds = \int_A^B F_t \, ds$$

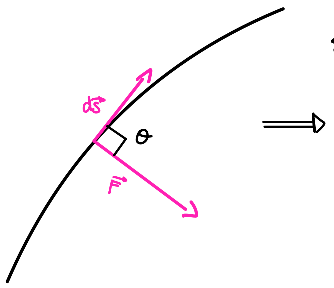
IL LAVORO È UNO SCALARE

Cosa possiamo notare? Che c'è una dipendenza spaziale del legame tra come è messa la forza rispetto allo spostamento:





Situazione limite



LAVORO NULLO

es. la forza centripeta che non fa cambiare la velocità del punto materiale, ma ne modifica la traiettoria. La forza centripeta non lavora sul punto.

- il lavoro sarà positivo se l'angolo $\vartheta < \pi/2$
- il lavoro sarà negativo se l'angolo $\vartheta > \pi/2$
- il lavoro sarà nullo se forza e spostamento sono ortogonali fra di loro

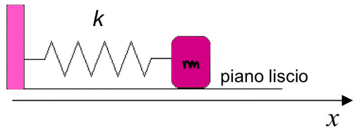
Se io sono in presenza di più forze quindi ho numerose forze agenti sul mio punto materiale, l'equivalente del principio delle azioni simultanee, la forza complessiva sarà data dalla risultante di tutte le forze, questo integrale lo posso spezzare in tutti i singoli contributi e poterlo separare in N integrali tra A e B di tutti i contributi energetici portati dalle forze con il loro segno.

$$W_{AB} = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_A^B (\mathbf{F}_1 + \ldots + \mathbf{F}_n) \cdot d\mathbf{s} = \int_A^B \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{s} + \ldots + \int_A^B \mathbf{F}_n \cdot d\mathbf{s} = W_1 + \ldots + W_n$$

L'energia potenziale della forza peso dipende dalla massa, g costante e dalla quota, coordinata y, in generale l'energia potenziale è una funzione delle coordinate. Questa è l'energia potenziale della forza peso e mi dice che il lavoro compiuto da A a B è opposto alla variazione di questa funzione, dunque non dipende dal particolare percorso usato per andare da A a B. In questo caso il lavoro è negativo perché mi sono mosso lungo la forza, cioè sono sceso, e per definizione se mi muovo lungo la direzione della forza, ho una variazione negativa dell'energia potenziale. Questo segno meno nella formula ci dice che quando sono più in alto, ho più energia di quando sono giù.

Legge di Hooke:

$$\mathbf{F} = -kx\mathbf{u}_x$$



Ora passiamo al lavoro della forza elastica, abbiamo sempre un sistema massa-molla, con una massa attaccata ad una molla di costante elastica k, poggiata in orizzontale sul piano liscio, quindi niente attriti, la legge di Hooke mi dice che la la forza è opposta rispetto allo spostamento x, spostamento rispetto alla posizione di equilibrio. In questo caso è di nuovo semplice, la molla è intrinsecamente un elemento unidirezionale, esercita una forza che esiste sull'asse della molla è il movimento associato al punto materiale avverrà lungo l'asse della molla, quindi nel momento in cui andrò a calcolare il lavoro della forza elastica, sarà automaticamente un lavoro lungo quella direzione, in condizioni molto simili a quella iniziali, quindi:

$$W_{AB} = \int_A^B \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_A^B -kx\mathbf{u}_x \cdot \mathbf{u}_x dx = \int_A^B -kx dx = -\left(\frac{1}{2}kx_B^2 - \frac{1}{2}kx_A^2\right)$$

$$W_{AB} = -(E_{p,B} - E_{p,A}) = -\Delta E_p$$

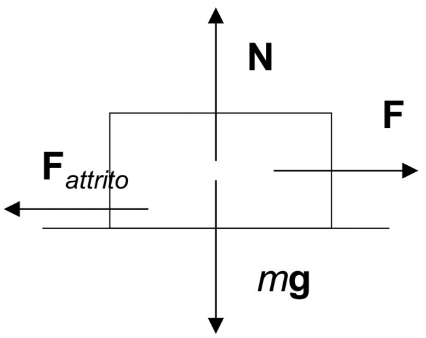
Simmetricamente al caso di prima, posso nuovamente esprimere il lavoro attraverso una variazione di un'energia potenziale della forza elastica, quindi nuovamente per le stesse considerazioni di poco fa, raccogliendo il segno meno.

$$\boxed{E_p = \frac{1}{2}kx^2}$$

energia potenziale elastica

Se io prendo invece in considerazione una forza di attrito radente, cosa succede? Prendiamo la nostra scatola su un piano orizzontale scabro, la forza F che uso per trascinare la mia scatola, suppongo di applicare una forza sufficientemente intensa tale da mettere in moto la mia scatola, parlo dunque dell'attrito dinamico, perché in attrito statico c'è spostamento nullo che è associato a lavoro nullo. La forza di attrito associata al movimento della mia scatola è un termine di forza che ha un modulo pari al prodotto del coefficiente di attrito dinamico per la forza premente normale al piano, la esprimo vettorialmente come opposta al versore velocità per ricordarmi che se io tiro la forza di attrito è una forza resistente che va in direzione opposta rispetto allo spostamento.

Il lavoro da definizione è l'integrale da A a B dell'attrito dinamico per ds. Io mi muovo lungo un piano orizzontale e quindi il versore della velocità è a sua volta tangente rispetto allo spostamento.



$$W_{AB} = \int_A^B \mathbf{F}_{ad}\cdot d\mathbf{s} = \int_A^B -\mu_d N\mathbf{u}_v \cdot d\mathbf{s} = -\mu_d N\int_A^B ds$$

Questo integrale lo posso ridurre a un termine che dipende solamente dal punto iniziale e finale del mio moto? Lo posso ridurre ad una mera funzione delle coordinate iniziale e finale? No, perché se io mi muovo lungo il mio piano, percorrerò un certo tratto di strada, questo è un integrale di linea calcolato su una certa traiettoria. Se per esempio lo spostamento è di questo tipo (in rosa): prima in salita e poi in discesa, il percorso sarebbe assolutamente diverso da quello precedente e io l'integrale lo valuterei su questa nuova traiettoria, questo per dire l'integrale che mi salta fuori valutando il lavoro di una forza di attrito, contiene l'effettiva lunghezza del mio percorso e questo mi dà una differenza molto grande di ciò che avevo in precedenza a proposito della forza peso, in cui seguendo una qualsiasi traiettoria l'energia potenziale risulta la stessa.

FORZE CONSERVATIVE

Lavoro forza peso

$$\begin{cases} W_{AB} = -(mgy_B - mgy_A) \\ W_{AB} = -(E_{p,B} - E_{p,A}) = -\Delta E_p \end{cases}$$

$E_p = mgy$ Energia potenziale della forza peso

Lavoro forza elastica

$$\begin{cases} W_{AB} = -\left(\frac{1}{2}kx_B^2 - \frac{1}{2}kx_A^2\right) \\ W_{AB} = -(E_{p,B} - E_{p,A}) = -\Delta E_p \end{cases}$$

$E_p = \frac{1}{2}kx^2$ Energia potenziale elastica

Le forze conservative sono forze per cui possiamo definire un'energia potenziale.

E se nel mio sistema sono presenti anche forze non conservative, cosa posso dire sull'energia meccanica?

$$W_{AB} = W_c + W_{nc} = E_{k,B} - E_{k,A}$$

$$W_c = -(E_{p,B} - E_{p,A}) = -\Delta E_p$$

$$\Downarrow$$

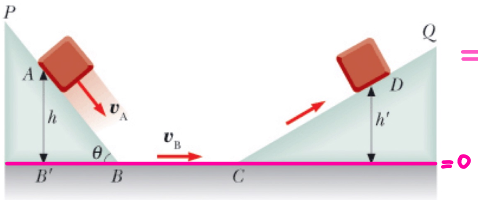
$$W_{AB} = E_{p,A} - E_{p,B} + W_{nc} = E_{k,B} - E_{k,A}$$

$$W_{nc} = (E_{k,B} + E_{p,B}) - (E_{k,A} + E_{p,A})$$

E in definitiva:

$$\boxed{W_{nc} = E_{m,B} - E_{m,A}}$$

Esempio 1



⟹ SISTEMA CONSERVATIVO

Piani lisci (= NO ATTRITI) con diversa inclinazione. Il punto materiale parte da A da fermo, $v_0 = 0$.
Voglio determinare la quota di arrivo del punto materiale → $h' = ?$

$$dw = \vec{F} \cdot d\vec{s} = F ds \cos\theta$$

A: $E_{p,A} = m g h$, $E_{k,A} = 0$, $E_{m,A} = m g h$

B: $E_{p,B} = 0$, $E_{k,B} = \frac{1}{2} m v_B^2$, $E_{m,B} = \frac{1}{2} m v_B^2$

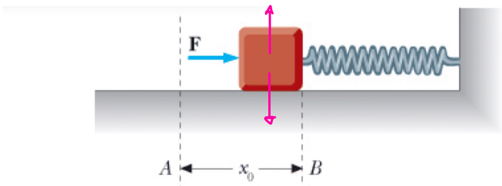
$$E_{mB} = E_{mA}$$

$$mgh = \frac{1}{2} m v_B^2 \rightarrow v_B = \sqrt{2gh}$$

$v_B = v_c$ $\qquad \frac{1}{2}\cancel{m} v_c^2 = \cancel{m} g h' \Rightarrow h = h'$

$$h' = \frac{v_c^2}{2g} \quad v_B = v_c$$

Esempio 2



Piano liscio, punto materiale inizialmente in quiete in A (punto di equilibrio del sistema).
Fornisco un breve impulso **J** parallelo e concorde all'asse x, che causa una velocità iniziale v_0.
Calcolare la compressione massima della molla → $x_0 = ?$

Sul sistema saranno agenti la forza peso, la normale al piano, tutte perpendicolari rispetto agli spostamenti, la forza impulsiva F solo prima dell'inizio del moto, poi non è agente continuamente, agisce come forze impulsiva (equivalente dello sparo del cannone), è dunque un sistema conservativo.

METODO CINEMATICO

$F = -kx \qquad a = -\frac{k}{m} x \qquad a = a(x)$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} \Rightarrow \int_0^{x_0 = B} a\,dx = \int_{v_0 = A}^{v = B} v\,dv$$

$$-\frac{k}{m}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{x_0} = \left[\frac{v^2}{2}\right]_{v_0}^{0} \qquad -\frac{k}{m}\frac{x_0^2}{2} = -\frac{v_0^2}{2} \Rightarrow x_0 = \sqrt{\frac{m}{k}}\, v_0$$

ok

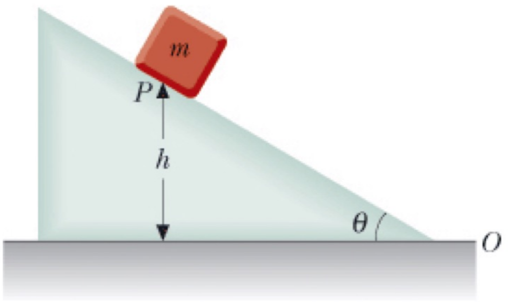
$$\vec{J} = \int \vec{F} \cdot d\vec{s} = \Delta\vec{p}$$

$$\vec{J} = m\vec{v}_0 \longrightarrow J = m v_0 \Rightarrow v_0 = \frac{J}{m}$$

$$\underbrace{E_{k,A} = \frac{1}{2} m v_0^2 \quad E_{p,A} = 0}_{E_{m,A} = \frac{1}{2} m v_0^2} \qquad \underbrace{E_{k,B} = 0 \quad E_{p,B} = \frac{1}{2} k x_0^2}_{E_{m,B} = \frac{1}{2} k x_0^2}$$

$$\frac{1}{2} k x_0^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 \Longrightarrow x_0 = v_0 \sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{J}{m}\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Esempio 4



Piano inclinato scabro con coefficienti di attrito μ_s, μ_d
Velocità iniziale nulla
$\tan\theta > \mu_s$
Valutare la velocità del punto materiale in fondo al piano inclinato.

LAVORO DELLA FORZA DI ATTRITO DINAMICO

$\mu_d \quad v_0 = 0 \quad W_A = -\mu_d N d$

$N = mg\cos\theta \quad h = d\sin\theta$

$W_A = -\mu_d\, mg\cos\theta \dfrac{h}{\sin\theta}$

$\boxed{W_A = \Delta E_M = E_{MF} - E_{Mi}}$

$E_{Mi} = mgh \quad E_{MF} = \frac{1}{2} m v^2$

$-\mu_d \dfrac{mgh}{\tan\theta} = \frac{1}{2} m v^2 - mgh$

$v = \sqrt{2gh\left(1 - \dfrac{\mu_d}{\tan\theta}\right)}$

Il lavoro delle forze conservative causa una variazione dell'energia meccanica, quindi energia meccanica finale meno energia meccanica iniziale, quindi brucio una certa quantità di energia, cioè l'energia meccanica iniziale sarà più grande dell'energia meccanica finale e dunque il termine dopo l'uguale dovrà essere minore di zero. In alternativa i lavoro delle forze di attrito le segno sempre minori di zero.

Se F_x, F_y e F_z sono le tre componenti di una forza conservativa, il lavoro infinitesimo che è prodotto scalare di F e ds, dw è un differenziale esatto, quindi posso esprimere la forza come un prodotto delle tre componenti per le variazioni infinitesime lungo le tre direzioni, e l'integrale lungo la linea chiusa (quindi la circuitazione) di questo termine risulta essere uguale a zero.
Si può dimostrare che questa proprietà è condizione necessaria e sufficiente all'esistenza di una funzione delle coordinate E_p per cui:

$$dW = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = F_x dx + F_y dy + F_z dz = -dE_p$$

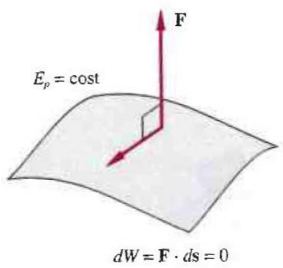
$$\oint (F_x dx + F_y dy + F_z dz) = 0$$

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x} \qquad F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y} \qquad F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z}$$

$$\Rightarrow \qquad \mathbf{F} = -\nabla E_p$$

Abbiamo un legame tra le componenti della forza e derivate spaziali lungo le tre direzioni, quindi le tre componenti della forza sono legate alle derivate parziali dell'energia potenziale lungo le tre direzioni x y e z, c'è un seno meno introdotto già nel legame tra l'energia potenziale e il lavoro. Mettendo insieme questi concetti vediamo che la forza è uguale a meno il gradiente del potenziale.

Il segno meno indica inoltre che la forza è diretta secondo il verso di massima diminuzione dell'energia potenziale. Abbiamo anche visto che se questa è una superficie a energia potenziale costante, il gradiente risulta essere punto per punto perpendicolare rispetto alla superficie, cioè si muove perpendicolarmente rispetto a un termine in cui ho lavoro nullo. Nella forza peso superfici a energia potenziale costante sono dei piani ad altezza costante, se mi muovo lungo un piano parallelo al pavimento quel movimento prevede un lavoro della forza peso pari a zero, infatti il vettore è verticale e perpendicolare a questi piani. Nella forza elastica le regioni ad energia potenziale costante sono piani perpendicolari all'asse della molla, sono posizioni successive di distanza rispetto al punto neutro della molla e la forza è diretta perpendicolarmente a questo piano.



- Forza peso (asse y orientato verso l'alto)

$$E_p = mgy \qquad \mathbf{F} = -\frac{\partial E_p}{\partial y}\mathbf{u}_y = -mg\mathbf{u}_y$$

- Forza elastica

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 \qquad \mathbf{F} = -\frac{\partial E_p}{\partial x}\mathbf{u}_x = -kx\mathbf{u}_x$$

Abbiamo definito il momento angolare qualcosa che si conserva, dopo la quantità di moto ed energia meccanica. Vediamo il teorema del momento angolare, che è l'equivalente del termine che abbiamo ottenuto derivando rispetto al tempo la quantità di moto, avevamo trovato la forza (secondo principio della dinamica), vediamo che succede:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \overset{\vec v}{\underbrace{\boxed{\frac{d\mathbf{r}}{dt}}}_{=0}} \wedge m\mathbf{v} + \mathbf{r} \wedge m\frac{d\mathbf{v}}{dt} \qquad \mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$$

$\vec v \wedge m\vec v = m\vec v \wedge \vec v = 0$

Se *O* è **fermo**: $\boxed{\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}}$

$$\mathbf{r} \wedge m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{r} \wedge m\mathbf{a} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{F} = \mathbf{M}$$

in dinamica: $\vec F = \frac{d\vec p}{dt}$

La relazione mi dice che la variazione di momento angolare è uguale al momento delle forze. Queste non sono relazioni alternativa l'una all'altra, per il punto materiale libero questa relazione non mi dice niente perché non ho momento angolare, per punto materiale vincolato invece mi dà variazioni. La componente radiale è sempre nulla perché nel prodotto vettoriale vado a selezionare il termine tangente che è quello che mi fa variare velocità e dunque fa variare il momento angolare, concetto non troppo dissimile dall'effetto della forza centripeta e forza tangente.
Abbiamo la variazione nel tempo di un parametro fisico L con M=0 quando la forza è nulla o r ed F sono paralleli, prima avevo fatto il parallelismo che la variazione di quantità di moto è uguale alla forza applicata, L non cambia nel tempo è costante:

M = 0 se la forza è nulla o se **r** e **F** sono paralleli; in tal caso:

$$\boxed{\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0}$$

L costante
conservazione del momento angolare

Facendone la valutazione nel tempo possiamo anche trovare l'equivalente del teorema del l'impulso, cioè il teorema del momento dell'impulso, cioè se abbiamo a che fare con una forza impulsiva, ovvero quelle forze particolarmente intense in un breve istante di tempo, mi aspetto che la posizione del mio punto materiale in quel breve intervallo di tempo cambi molto poco e dunque che r sia sostanzialmente trattabile come una costante, vado dunque a valutare:

$$\int_0^t \mathbf{M}dt = \int_0^t (\mathbf{r} \wedge \mathbf{F})dt = \overset{\text{perchè costante}}{\mathbf{r}} \wedge \int_0^t \mathbf{F}dt = \mathbf{r} \wedge \mathbf{J} = \Delta\mathbf{L}$$

Il teorema dell'impulso mi diceva che l'impulso J è uguale al,a variazione di quantità di moto:
Altre formule che possiamo ricavare, come il lavoro nel moto circolare:

$\vec J = \Delta \vec p$

$\vec r \wedge \vec J = \vec r \wedge \Delta \vec p = \Delta \vec L$

$$W = \int_A^B F_t ds = \int_A^B F_t r d\vartheta = \int_{\vartheta_A}^{\vartheta_B} M d\vartheta$$

Se ho a che fare con un moto puramente circolare e voglio trarne il lavoro, questo dipende dalla componente tangente alla forza. Se il momento è costante posso tirarlo fuori dall'integrale. Se ho una forza applicata mi aspetto un moto circolare generico, perché non so se la forza è costante o meno.

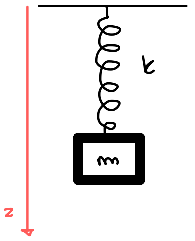
La componente normale della forza ha momento nullo rispetto al centro della circonferenza. Ultima espressione è un richiamo alle forze centrali, in qualunque punto il vettore forza passa per un punto fisso che chiamiamo centro della forza, in cui modulo è funzione soltanto della distanza. In campo di forze centrali il momento della forza rispetto al centro è ovunque nullo perché r ed F sono paralleli, dunque in presenza di sole forze centrali il momento angolare è costante, dunque il piano che contiene r e la velocità é un piano fisso, ad esempio in gravitazione.

L è se,pre ortogonale al piano contenente r e v, il momento angolare L costante significa che tale piano è fisso.

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{L} \text{ costante}$$

* APPROFONDIMENTI OSCILLAZIONI

L'unica forza agente che ha una importanza dinamica nel mio sistema è la forza elastica della molla, poiché la forza pesa è contrastata dalla reazione vincolare del piano. In questo sistema, che è diverso, essendo verticale sulla massa saranno agenti sia la forza elastica che la forza peso. Studiamo questo sistema attraverso le condizioni di contorno. La posizione di equilibrio statico in questo caso non coincide con quando la molla è a riposo, ma si ottiene quando la forza di richiamo elastica verso l'alto risulta uguale alla forza peso.



Suppongo di uscire dal mio equilibrio statico e suppongo di portare la mia massa m fino al valore pari a due volte la z: $z = 2z_s$ con $z_s = \frac{mg}{k}$

Equazione del moto:
$ma = m\frac{d^2z}{dt^2} = mg - kz$

Se tiro la massa verso il basso, la forza sarà diretta verso l'altro, se sono imbevve in compressione, tirerà verso la posizione di equilibrio statico quindi verso le z positive.

Se chiamo $\underset{\text{pulsazione}}{\omega^2} = \frac{k}{m} \longrightarrow \frac{d^2z}{dt^2} + \omega^2 z = g$ eq. non omogenea perché ho g

Chiamo $\omega^2 = \frac{k}{m} \quad \rightarrow \quad \frac{d^2z}{dt^2} + \omega^2 z = g$ equazione non omogenea

Soluzione generale dell'omogenea associata $\quad z_O(t) = A\sin(\omega t + \phi)$

Soluzione particolare dell'equazione completa $\quad z_p(t) = z_s = \frac{mg}{k}$

Soluzione generale dell'equazione completa $\quad z(t) = z_O(t) + z_p(t) = A\sin(\omega t + \phi) + \frac{mg}{k}$ $\xrightarrow{\text{se derivo rispetto al tempo}}$ $v(t) = \frac{dz}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \phi)$

Condizioni al contorno: conoscere il sistema in qualche istante.

Condizioni al contorno
$$z(0) = 2z_s = \frac{2mg}{k} = A\sin\phi + \frac{mg}{k}$$
$$v(0) = 0 = \omega A\cos\phi$$
$$\Downarrow$$
$$A = \frac{mg}{k} \qquad \underset{\text{fase iniziale}}{\phi} = \frac{\pi}{2}$$

$$z(t) = \frac{mg}{k}[1 + \cos(\omega t)] \quad \rightarrow \quad z(t) - z_s = z_s\cos(\omega t)$$
DERIVO
$$v(t) = -\omega\frac{mg}{k}\sin(\omega t)$$
DERIVO
$$a(t) = -g\cos(\omega t) = -\omega^2[z(t) - z_s]$$

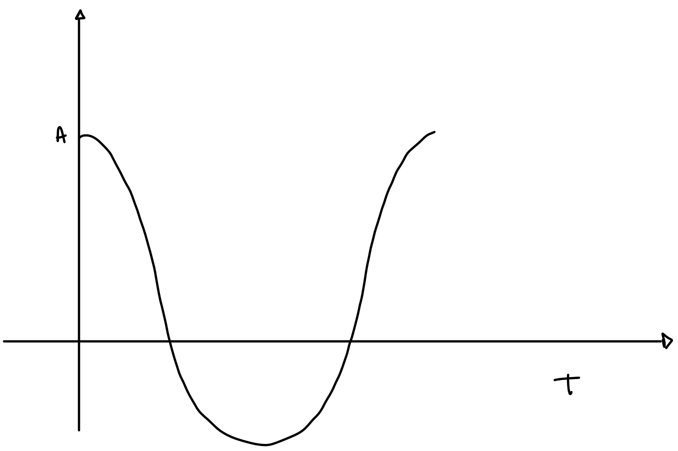
$a(t) = -\omega^2\frac{mg}{k}\cos\omega t = -\frac{k}{m}\frac{mg}{k}\cos\omega t = -g\cos\omega t$

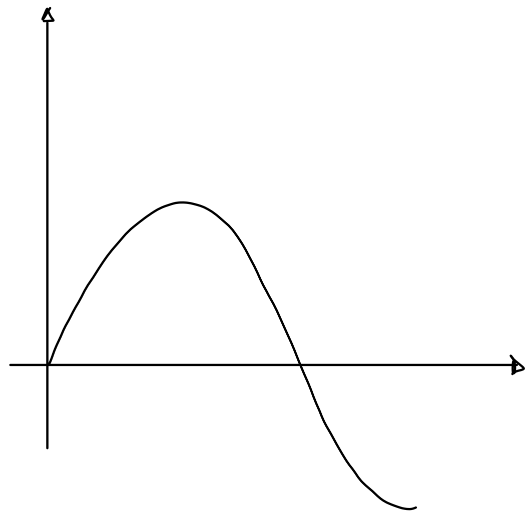
$z_s = \frac{g}{\omega^2} = \frac{mg}{k}$

$g = z_s\omega^2$

→ moto armonico **identico al caso orizzontale** (cambiano solamente le costanti legate alle condizioni iniziali).

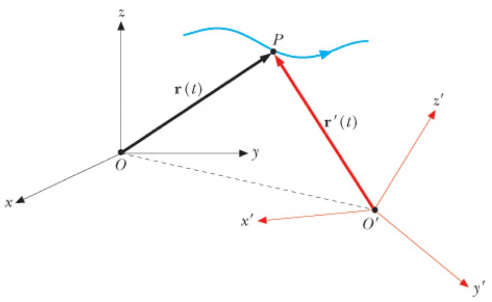
Il moto risulta essere un moto armonico identico al precedente, che risulta essere soltanto traslato rispetto al precedente, perché non oscilla attorno all'equilibrio della molla, ma attorno all'equilibrio statico della molla un po' allungata.



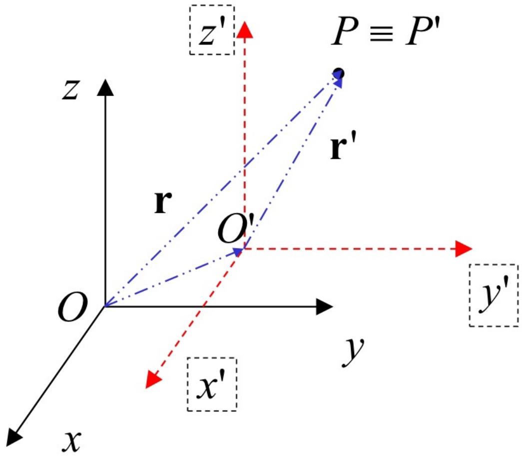


MOTI RELATIVI

E' sperimentalmente provato che, sotto opportune condizioni, le leggi fisiche non dipendono dal sistema di riferimento: data una proprietà verificata in un sistema di riferimento, essa rimane vera in un altro sistema di riferimento legato al primo da una generica roto-traslazione statica, quindi in un sistema di riferimento spostato rispetto al primo. Ci dice che lo spazio è omogeneo e isotropo, omogeneo significa che le proprietà fisiche non dipendono dal posto in cui mi trovo perché muovendomi nello spazio ritrovo sempre le stesse caratteristiche fisiche, isotropo vuol dire che tutte le direzioni sono uguali dal punto di vista della fisica. Questa invarianza rispetto ai sistemi di riferimento traslati l'uno rispetto all'altro è la stessa invarianza vista nelle proprietà vettoriali. Questa invarianza però non vale in sistemi di riferimento che sono tra di loro in moto reciproco, vedremo proprio questo, che F=ma vale nel mio sistema inerziale. I sistemi di riferimento che tratteremo sono per esempio:



Ogni moto relativo può essere scomposto in una rotazione e in una traslazione, combinandole posso ottenere qualsiasi tipo di spostamento. Noi tratteremo due sistemi di riferimento in moto reciproco mutuo, di cui avremo uno fermo, tipicamente xyz con l'origine senza pedice, e uno in movimento, caratterizzato dai pedici. Sfrutteremo questa proprietà di discoppiare questi movimenti. Cosa vuol dire che un sistema di riferimento è fermo? Come fermo rispetto a qualcosa che è sicuramente fermo e che genericamente riteniamo fermo.



Supponiamo di avere a disposizione due sistemi di riferimento cartesiani: sistema fisso (in nero) e sistema mobile (in rosso). Avendo più sistemi di riferimento possiamo inserire traiettorie, posizione di punti ecc.. chiameremo allora raggio vettore il vettore che mi identifica la posizione di un punto partendo da O origine, analogamente avremo quello sul sistema mobile r'. Possiamo vedere il movimento del sistema mobile guardando dal sistema di riferimento fisso e quindi posizioneremo un raggio vettore O-O' della posizione di O' espressa rispetto al sistema fisso. Di conseguenza:

$$\vec{r} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z \qquad \vec{r}' = x'\vec{u}_{x'} + y'\vec{u}_{y'} + z'\vec{u}_{z'}$$

$$\vec{OO'} = x_{o'}\vec{u}_x + y_{o'}\vec{u}_y + z_{o'}\vec{u}_z$$

O'

RISPETTO SISTEMA FISSO

LEGAME TRA I DUE SISTEMI

$$\boxed{\vec{r} = \vec{OO'} + \vec{r}'}$$

Esprime la posizione del punto P rispetto al sistema fisso.

$\vec{v}$ VEL. ASSOLUTA $\quad \vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{u}_x + \frac{dy}{dt}\vec{u}_y + \frac{dz}{dt}\vec{u}_z$

$\vec{v}'$ VEL. RELATIVA $\quad \vec{v}' = \frac{dx'}{dt}\vec{u}_{x'} + \frac{dy'}{dt}\vec{u}_{y'} + \frac{dz'}{dt}\vec{u}_{z'}$

$$\vec{V}_{OO'} = \frac{d\vec{OO'}}{dt} = \frac{dx_{o'}}{dt}\vec{u}_x + \frac{dy_{o'}}{dt}\vec{u}_y + \frac{dz_{o'}}{dt}\vec{u}_z$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{OO'}}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt} = \vec{V}_{OO'} + \frac{d}{dt}\left(x'\vec{u}_{x'} + y'\vec{u}_{y'} + z'\vec{u}_{z'}\right) =$$

$$= \vec{V}_{OO'} + \vec{v}' + \underbrace{x'\frac{d\vec{u}_{x'}}{dt} + y'\frac{d\vec{u}_{y'}}{dt} + z'\frac{d\vec{u}_{z'}}{dt}}_{=0 \text{ PER PURA TRASLAZIONE}}$$

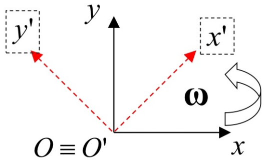
$\longrightarrow \vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}_{OO'}$ PER PURA TRASLAZIONE $\longrightarrow \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}_{OO'} + \vec{a}' = \frac{d\vec{V}_{OO'}}{dt} + \frac{d\vec{v}'}{dt}$ | PER PURA TRASLAZIONE

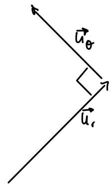
Come abbiamo già detto, avevamo impostato il caso più generale, ora dobbiamo affrontare il problema in cui il sistema di riferimento in moto non abbia solo un moto di traslazione, ma anche un moto di rotazione. Adesso ci occupiamo del termine di rotazione, portandoci dietro anche i termini già visti di traslazione.

$\vec{r} = \vec{r'} + \vec{OO'}$

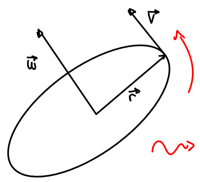
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_{OO'} + \vec{v}' + \underbrace{x'\frac{d\vec{u}_{x'}}{dt} + y'\frac{d\vec{u}_{y'}}{dt} + z'\frac{d\vec{u}_{z'}}{dt}}_{*}$$

*Questo temine l'avevamo trascurato perché per traslazione pura questi termini coincidono con i versori di riferimento fermo, ora non è così come si vede in figura.

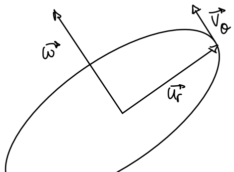




$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta = \omega\vec{u}_\theta$$



$\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$



Questa velocità sarà diretta proprio come il nostro versore perpendicolare $\vec{u}_\theta$

FORMULE DI POISSON

$$\boxed{\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{u}_r} \longrightarrow \frac{d\vec{u}_{x'}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{u}_{x'} \qquad \frac{d\vec{u}_{y'}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{u}_{y'} \qquad \frac{d\vec{u}_{z'}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{u}_{z'}$$

$$\vec{v} = \vec{v}_{OO'} + \vec{v}' + \vec{\omega} \wedge \overbrace{(x'\vec{u}_{x'} + y'\vec{u}_{y'} + z'\vec{u}_{z'})}^{\vec{r}'} =$$
$$= \vec{v}_{OO'} + \underbrace{\vec{v}' + \vec{\omega} \wedge \vec{r}'}_{\frac{d\vec{r}'}{dt}}$$

→ TEOREMA DELLE VELOCITA' RELATIVE

Noi vogliamo ricavarci le forze apparenti, quindi serve che deriviamo ancora una volta per trovare l'accelerazione:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \underbrace{\frac{d\vec{v}_{OO'}}{dt}}_{\vec{a}_{OO'}} + \underbrace{\frac{d\vec{v}'}{dt}}_{1} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r}' + \underbrace{\vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{r}'}{dt}}_{2}$$

1 $$\frac{d\vec{v}'}{dt} = \left[\frac{d^2x'}{dt^2}\vec{u}_{x'} + \frac{d^2y'}{dt^2}\vec{u}_{y'} + \frac{d^2z'}{dt^2}\vec{u}_{z'}\right] + \left[\frac{dx'}{dt}\vec{\omega} \wedge \vec{u}_{x'} + \frac{dy'}{dt}\vec{\omega} \wedge \vec{u}_{y'} + \frac{dz'}{dt}\vec{\omega} \wedge \vec{u}_{z'}\right] = \vec{a}' + \vec{\omega} \wedge \vec{v}'$$

2 $$\frac{d\vec{r}'}{dt} = \vec{v}' + \vec{\omega} \wedge \vec{r}'$$

$$\vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{r}'}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{v}' + \omega \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}')$$

$$\vec{a} = \vec{a}' + \underbrace{\vec{a}_{OO'} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}') + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r}'}_{\text{ACC. TRASCINAMENTO}} + \underbrace{2\vec{\omega} \wedge \vec{v}'}_{\text{ACC. CORIOLIS}}$$

L'accelerazione di trascinamento dipende da parametri del moto relativo tra i due sistemi di riferimento. L'accelerazione complementare o di Coriolis dipende dal moto di P rispetto al sistema mobile.

$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_{tr} + \vec{a}_c$ → TEORIA DELLE ACCELERAZIONI RELATIVE

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \mathbf{a}_{tr} + \mathbf{a}_c \begin{cases} \text{se } \boldsymbol{\omega} = 0 \Rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{a}' + \mathbf{a}_{OO'} & \text{solo traslazione} \\ \text{se } \mathbf{v}_{OO'} = 0 \Rightarrow \mathbf{a}' + \boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}') + \dfrac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \wedge \mathbf{r}' + 2\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}' & \text{solo rotazione} \end{cases}$$

CASI PARTICOLARI

▶ APPROFONDIMENTO MOTO RELATIVO

Supponiamo adesso che l'accelerazione O' sia diversa da zero. Non siamo in un caso di formazione, ma di pura traslazione.

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{OO'} + \vec{r'} \\ \vec{v} = \vec{V_{OO'}} + v' \\ \vec{a} = \vec{a_{OO'}} + a' \end{cases}$$

Se O' ha un'accelerazione costante $\vec{a}_{OO'} = \vec{a}_{tr}$ e velocità iniziale V_i e O' coincide con O al t=0, allora avremo un moto uniformemente accelerato:

$$OO'(t) = V_{OO'} = V_i \cdot t + \frac{1}{2} a_{tr} t^2$$
$$V_{OO'} = V_i + a_{tr} \cdot t$$

PROIETTIAMO LUNGO GLI ASSI:

$$\begin{cases} x' = x - V_i \cdot t - \frac{1}{2} a_{tr} \cdot t^2 \\ V'_x = V_x - V_i \\ a'_x = a_x - a_{tr} \end{cases} \qquad \begin{cases} y' = y \\ V'_y = V_y \\ a'_y = a_y \end{cases}$$

LEGGE DI TRASFORMAZIONE

ASCENSORE (razzo in lancio)

Ha un moto verticale, cosa succede all'interno?

$$\vec{a}_{OO'} = \vec{a}_{tr}$$
$$\vec{a}' = \vec{a} - \vec{a}_{OO'} = \vec{a} - \vec{a}_{tr}$$
$$\vec{a} = g$$
$$\vec{a}' = \vec{g} - \vec{a}_{tr} \qquad \vec{F}' = m\vec{a} = m(\vec{g} - \vec{a}_{tr})$$

La relazione di peso è data dalla Normale:

$$\vec{N}' = -\vec{F}' \qquad \vec{N}' = m(\vec{a}_{tr} - \vec{g})$$ relazione vettoriale

DISCUTIAMO DEI CASI:

1) $\vec{a}_{tr}$ discorde a $\vec{g}$

<u>ESEMPI REALI</u>: l'ascensore sale accelerando e scende decelerando

$$\vec{N}' = m(\vec{a}_{tr} - \vec{g}) = m[\vec{a}_{tr}\vec{u}_z - (-g)] = m(a_{tr} + g)\vec{u}_z$$

$N' > mg \Rightarrow$ Quindi mi sento più pesante

2) $\vec{a}_{tr}$ concorde a $\vec{g}$ $\quad a_{tr} < g$

$$\vec{N}' = m(\vec{a}_{tr} - \vec{g}) = m[-a_{tr}\vec{u}_z - (-g\vec{u}_z)] = m(g - a)\vec{u}_z$$

$N' < mg \Rightarrow$ Mi sento più leggero

<u>ESEMPI REALI</u>: l'ascensore sale frenando e scende accelerando

3) $\vec{a}_{tr} = \vec{g} \longrightarrow$ CADUTA LIBERA $\quad N' = 0$

4) $\vec{a}_{tr}$ concorde a $\vec{g}$ $\quad a_{tr} > g \longrightarrow$ DISTACCO DAL PAVIMENTO $\quad N' < 0$

ESEMPIO : LA TERRA

Un sistema con origine sul centro della massa del sistema solare e con assi diretti verso le stesse — — —- è un buon sistema inerziale. Normalmente però ci si riferisce a sistemi di riferimento terrestri, ma qualsiasi riferimento solidale con la terra non è inerziale. Per un sistema di riferimento terrestre si ha:

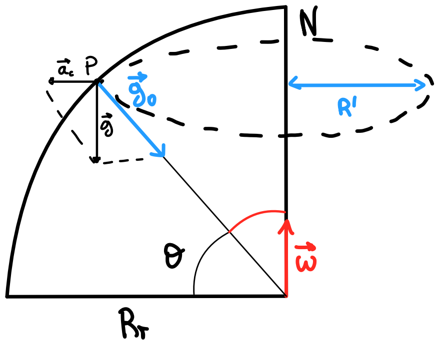
$$T = 24\,h = 8.64 \cdot 10^4\,s \Longrightarrow \omega = 7.27 \cdot 10^{-5}\,rad/s$$

acc. di gravità in un sistema inerziale

$$g_0 = g + \omega \wedge (\omega \wedge r) + 2\omega \wedge v'$$

acc. rispetto ad un sistema terrestre

Velocità del punto materiale rispetto al sistema terrestre

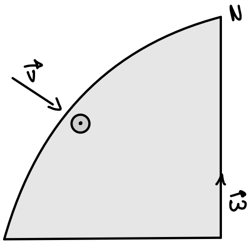


$$g = g_0 - \underbrace{\omega \wedge (\omega \wedge R)}_{\text{acc. centripeta}} - \underbrace{2\omega \wedge r'}_{\text{acc. Coriollis}}$$

$R' = R\cos\theta$ $\quad$ R = RAGGIO TERRESTRE $\quad$ θ = LATITUDINE

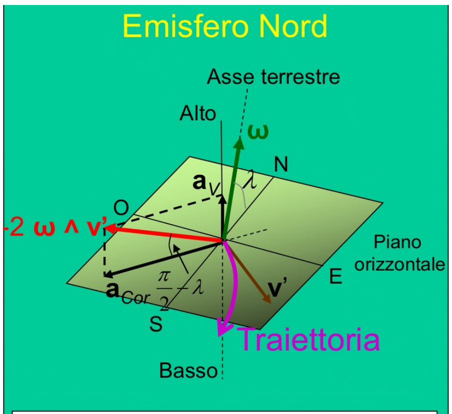
$$|\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{R}_T)| = \omega \cdot \omega R_T \sin\left(\pi/2 - \theta\right) = \omega^2 R_T \cos\theta = \omega^2 R$$

I termini di accelerazione sono diretti verso il centro della terra, il termine di accelerazione centrifuga spinge un po' l'accelerazione g verso l'equatore, dove in modulo diventa leggermente più piccola. La componente centrifuga è sempre diretta verso l'esterno.
Il termine centrifugo è perpendicolare all'asse terrestre. La correlazione a g a latitudine di 45° è $2.4 \cdot 10^{-2}\,m/s$, cioè una deviazione di circa 0.1°.

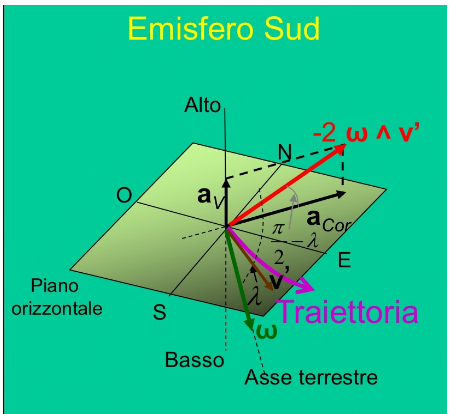


⊗ ENTRANTE
⊙ USCENTE

Se ho un moto di caduta verticale, quindi suppongo di avere una velocità di questi tipo. In questo caso, com'è messa la forza di Coriollis? È un termine agente sulla caduta libera, che risulterà essere un termine uscente rispetto al foglio che tende a spingere il punto materiale tangente rispetto ad un parallelo. Naturalmente questa spinta durante la caduta libera sarebbe nulla ai poli, dove v è parallela a omega, e sarebbe massima rispetto all'equatore. Per il moto generale lungo la superficie terrestre mi rifaccio a questa figura:



Quando un corpo si muove in un piano orizzontale, nell'emisfero nord, la componente dell'accelerazione di Coriolis punta a destra della direzione del moto.



Quando un corpo si muove in un piano orizzontale, nell'emisfero sud, la componente dell'accelerazione di Coriolis punta a sinistra della direzione del moto.

Prendiamo un piano nell'emisfero nord, dunque tangente rispetto alla terra sul quale ci muoviamo, e siano definiti un sopra è un sotto (alto e basso). L'emisfero sud l'asse di rotazione della terra è rappresentato dalla velocità angolare. La direzione della forza dì Coriollis sarà perpendicolare rispetto alla velocità, è una deviazione che tende a spingermi verso destra nell'emisfero nord. Se lo guardo nell'emisfero sud, devo invertire il senso della rotazione terrestre, omega risulta invertito rispetto al precedente, quindi la componente dell'accelerazione di Coriollis punta a sinistra della direzione del moto.

Il termine di Coriollis è nullo lungo l'equatore, perché va con il seno della latitudine. Naturalmente questo è un termine che influenza principalmente i moti di grandi dimensioni, ad esempio i voli aerei, se infatti vediamo il volo aereo nell'emisfero nord, io non devo unire direttamente il punto di partenza al punto di arrivo, perché la rotazione della terra mi farebbe mancare il mio obiettivo a causa dell'accelerazione di Coriollis che spinge la traiettoria verso destra nell'emisfero nord, e spinge la mia traiettoria verso sinistra nell'emisfero sud. Questi effetti si vedono ad esempio nei movimenti delle masse d'aria e quindi la forza di Coriollis spinge verso destra le direzioni dei venti nell'emisfero nord e sono attratti dalle zone di bassa pressione, che tende a farli girare, ma la spinta iniziale è verso destra e l'effetto complessivo è una rotazione complessivamente antiorario per le masse d'aria nell'emisfero nord, a contrario nell'emisfero sud. Questo è vero per il moto dei venti ed è tendenzialmente vero per il moto delle correnti.

Per rappresentare il nostro sistema in maniera più complessiva ci serve un nuovo parametro: il centro di massa, che è un punto nello spazio definito così:

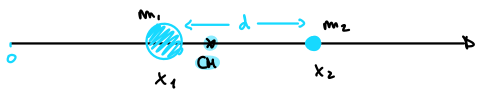
def $$\boxed{\mathbf{r}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{\sum_i m_i}}$$

È in pratica una media esatta dei punti, quindi punti più massivi determinerà un centro di massa più vicino a loro rispetto a punti materiali più leggeri che possono trovarsi più lontani.

Le coordinate del vettore posizione centro di massa si calcolano attraverso i prodotti delle masse per le componenti fratto le masse totali.

$$x_{CM} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i} \qquad y_{CM} = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i} \qquad z_{CM} = \frac{\sum_i m_i z_i}{\sum_i m_i}$$

La posizione del centro di massa non dipende dal sistema di riferimento, ma solo dai sistemi di punti, naturalmente nel momento in cui cambio il sistema di riferimento, cambio le posizioni del centro di massa con leggi di trasformazione che tengono conto delle composizioni vettoriali simili a quelle che abbiamo già visto. Esempio dell'espressione del centro di massa:



$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \qquad d = x_2 - x_1 \qquad x_2 = d + x_1$$

NON DIPENDE DA O

$$x_{CM} = \frac{1}{m_1 + m_2}\left[m_1 x_1 + m_2 x_1 + m_2 d\right] = x_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} d$$

I punti sono in generale punti in movimento, essendo quindi punti in moto la posizione del centro di massa non è una costante del nostro sistema, ma si muove a sua volta, ha una sua velocità e una sua accelerazione. Quindi derivando posizione posso calcolarle:

$$\mathbf{v}_{CM} = \frac{d\mathbf{r}_{CM}}{dt} = \frac{\sum_i m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt}}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{v}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\mathbf{P}}{\sum_i m_i}$$

quantità di moto del sistema

$$\boxed{\mathbf{P} = \left(\sum_i m_i\right)\mathbf{v}_{CM}}$$

$$\mathbf{a}_{CM} = \frac{d\mathbf{v}_{CM}}{dt} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{a}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i \mathbf{F}_i}{\sum_i m_i}$$

$$\sum_i \mathbf{F}_i = \left(\sum_i m_i\right)\mathbf{a}_{CM}$$

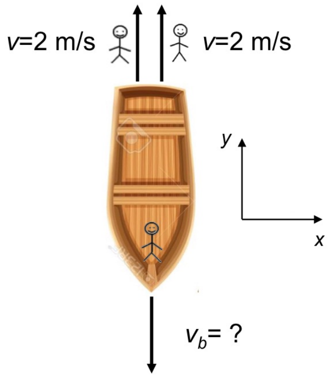
Un punto materiale equivalente che si trovi in corrispondenza del punto di massa, questo punto si muove con la velocità del centro di massa e rappresenta tutta la quantità di moto totale del mio sistema di punti, è come se io avessi a che fare con un singolo punto materiale dove è concentrata tutta la massa dei miei punti e che contiene tutta la quantità di moto dei miei punti. Se io conosco il movimento del mio centro di massa, conosco tutto sulla quantità di moto totale del mio sistema. Naturalmente non mi dice niente sulla quantità di moto dei miei singoli punti materiali. Derivo un'altra volta e ottengo l'accelerazione, vediamo rappresentate delle forze anche che sono tutte le forze agenti sul mio sistema di punti (interne ed esterne), ma una volta sommato posso ricordarmi di disaccoppiare le forze interne e le forze esterne, mi ricordo che la risultante delle forze interne è zero e mi rimane quindi solo la risultante delle forze esterne, questo mi permette di arrivare alla prima legge Cardinale della dinamica, che dice che complessivamente il mio sistema di punti si può vedere come un solo punto materiale posizionato sul mio centro di massa che si muove con l'accelerazione del centro di massa e grazie alla risultante delle forze esterne, questo non mi dice però quasi niente sulla dinamica dei singoli punti.

$$\sum_i \mathbf{F}_i = \sum_{i,j} \mathbf{F}_{i,j} + \sum_i \mathbf{F}_i^{(e)} = 0 + \mathbf{R}^{(e)} = \left(\sum_i m_i\right)\mathbf{a}_{CM}$$

$$\boxed{\mathbf{R}^{(e)} = \left(\sum_i m_i\right)\mathbf{a}_{CM} = \sum_i m_i \frac{d\mathbf{v}_{CM}}{dt} = \frac{d\mathbf{P}}{dt}}$$

I Legge Cardinale della dinamica

b) due bambini si tuffano in direzione nord dalla poppa dell'imbarcazione con una velocità di 2 m/s rispetto all'osservatore esterno.



VETTORIALE

b) $\vec{P}_f = (M+m)\vec{V}_b + 2m\vec{V}_{tuffo\,b}$ $\qquad M+m$

METTIAMO i SEGNI

$= -(M+m)V_b\vec{u}_y + 2mV_{tuffo\,b}\vec{u}_y = \left[-(M+m)V_b + 2mV_{tuffo\,b}\right]\vec{u}_y$

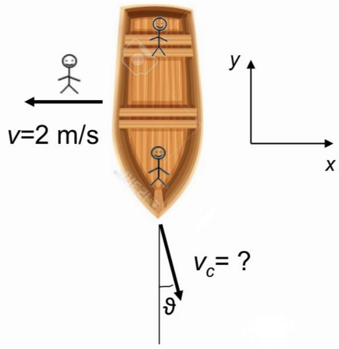
$\vec{P}_i = \vec{P}_f \qquad (M+3m)\vec{v} = (M+m)\vec{V}_b + 2m\vec{V}_{tuffo\,b}$

$\longrightarrow \vec{V}_b = \frac{(M+3m)\vec{v} - 2m\vec{V}_{tuffo\,b}}{M+m} = \frac{-(M+3m)v - 2mV_{tuffo}}{M+m}\vec{u}_y = -\frac{M+5m}{M+m}v\vec{u}_y$

$V_b = \frac{M+5m}{M+m}v \longrightarrow V_b = 4.29$ m/s

SPINTA DEI BAMBINI

c) uno dei bambini si tuffa verso ovest (in direzione perpendicolare rispetto alla barca) con una velocità di 2 m/s.



c) $M+2m$

$\vec{P}_{ix} = 0$

$\vec{P}_{iy} = (M+3m)v(-\vec{u}_y)$

$\vec{V}_c = V_{cx}\vec{u}_x - V_{cy}\vec{u}_y$

$\vec{P}_{fx} = mv(-\vec{u}_x) + (M+2m)V_{cx}\vec{u}_x$

$\vec{P}_{fy} = (M+2m)V_{cy}(-\vec{u}_y)$

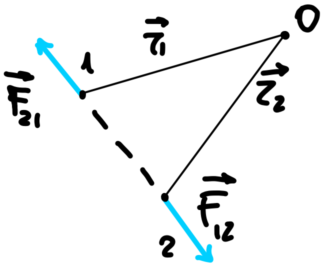
$\vec{P}_i = \vec{P}_f \Longrightarrow x \qquad 0 = -mv\vec{u}_x + (M+2m)V_{cx}\vec{u}_x$

$V_{cx} = \frac{m}{M+2m} \longrightarrow V_{cx} = 0.44$ m/s

$V_c = \sqrt{V_{cx}^2 + V_{cy}^2} \Longleftarrow y \qquad (M+3m)v(-\vec{u}_y) = (M+2m)V_{cy}(-\vec{u}_y)$

$\longrightarrow V_c = 2.48$ m/s $\qquad V_{cy} = \frac{M+3m}{M+2m}v \qquad V_{cy} = 2.44$ m/s

$\theta = \arctan\left(\frac{V_{cx}}{V_{cy}}\right) \longrightarrow \theta \simeq 10.2°$



$$\vec{M}^{(i)} = \sum \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i^{(i)} =$$
$$= \vec{r}_1 \wedge \vec{F}_{21} + \vec{r}_2 \wedge \vec{F}_{12} =$$
$$= \vec{r}_1 \wedge \vec{F}_{21} - \vec{r}_2 \wedge \vec{F}_{21} =$$
$$= \underbrace{(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \wedge \vec{F}_{21}}_{\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{r}_{12} \parallel \vec{F}_{21}} = 0 \qquad \forall \text{ polo}$$

$V_0 \neq 0$ VELOCITÀ COSTANTE

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{v}_i - \vec{v}_0$$

← Velocità del srd

sdr in moto

sdr fermo

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\sum \vec{r}_i \wedge m_i \vec{v}_i\right] = \sum \frac{d\vec{r}_i}{dt} \wedge m_i \vec{v}_i + \sum \vec{r}_i \wedge m_i \frac{d\vec{v}}{dt} =$$
$$= \sum \vec{v}_i \wedge m_i \vec{v}_i - \sum \vec{v}_0 \wedge m_i \vec{v}_i + \vec{M}^{(e)}$$

$$\vec{v}_0 \wedge \sum m_i \vec{v}_i = \sum m_i \vec{v}_0 \wedge \vec{V}_{CM} = \vec{v}_0 \wedge \vec{P}$$

$$\vec{V}_{CM} = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{\sum m_i} \qquad \sum m_i \vec{v}_i = \sum m_i \vec{V}_{CM}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \underbrace{\overset{\text{esterno}}{\vec{M}^{(e)}} - \vec{v}_0 \wedge \vec{P}}_{\text{legato al moto del polo}}$$

Questa seconda parte di polo mobile non è poi così cruciale, perché problema per problema si definirà sempre di calcolare i momenti rispetto a quale polo.

II Legge Cardinale della dinamica

$$\boxed{\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}^{(e)}}$$

II Legge Cardinale della dinamica

(o teorema del momento angolare)

$$\left(\text{se} \quad -\left(\sum_i m_i\right)\mathbf{v}_O \wedge \mathbf{v}_{CM} = 0\right)$$

QUESTO TERMINE È UGUALE A ZERO SE:

CM = CENTRO DI MASSA

- polo O fisso → $v_O = 0$
- CM in quiete → $v_{CM} = 0$
- O e CM coincidono → $v_O = v_{CM}$
- v_O e v_{CM} parallele

MOVIMENTI PARALLELI → PRODOTTO ESTERNO = 0

POLO COINCIDENTE CON IL CM

$$\vec{V}'_{CM} = \frac{\sum_i m_i \vec{V}'_i}{\sum_i m_i} = 0$$

$$\vec{H}' = \sum_i \vec{r}'_i \wedge \vec{F}'_i =$$

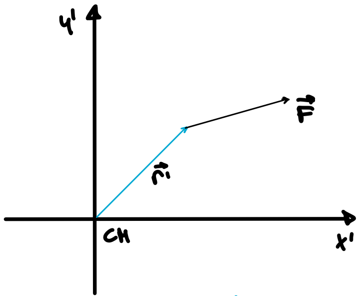
$$= \sum_i \vec{r}'_i \wedge \vec{F}_i^{(e)} + \sum_i \vec{r}'_i \wedge \vec{F}_i^{(i)} - \sum_i \vec{r}'_i \wedge m_i \vec{a}_{CM} \Rightarrow \vec{H}'^{(e)} - \underset{0}{\underbrace{\left(\sum_i m_i \vec{r}'_i\right)}} \wedge \vec{a}_{CM} = \vec{H}'^{(e)}$$

$$\vec{F}'_i = \vec{F}_i^{(e)} + \vec{F}_i^{(i)} - m_i \vec{a}_{CM}$$

CONTRIBUISCONO SOLO LE FORZE VERE

$$\vec{H}'^{(e)} = \vec{H}^{(e)} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

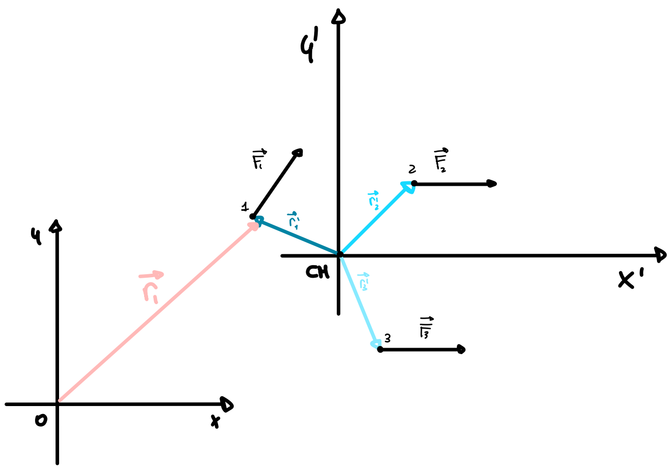
$$\vec{r}_i = \vec{r}'_i + \vec{r}_{CM} \qquad \vec{V}_i = \vec{V}'_i + \vec{V}_{CM}$$



$$\vec{H}' = \vec{r}' \wedge \vec{F} = \vec{H}$$

Noi stiamo sostanzialmente, in un sistema di punti, affrontando un problema in cui ho un oggetto o un sistema di punti, applico un momento, questo oggetto è vincolato e questo momento si riferisce ad un certo punto, questo oggetto è messo in rotazione, come descrivo questa roba? Questo è il contenuto ultimo della seconda legge cardinale: applico una forza ad un sistema che ha la possibilità di ruotare perché è vincolato e dunque deve rotare, dalla forza devo passare a fare dei riferimenti al momento, ho un asse di rotazione, queste rotazioni le definisco attraverso il momento della quantità di moto. Il primo omino aprirà la porta più facilmente rispetto al secondo, la differenza sta nel punto di applicazione.

$$\vec{H} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$



Oxy sdr fermo

Le posizioni di 1,2,3 rispetto al sistema di inerziale sono queste. Questo sistema di riferimento tuttavia non l'ho usato quasi completamente in questa trattazione, perché per il calcolo dei momento conta solo la distanza dal polo al punto materiale, se dunque metto il polo sul centro di massa, quello che conta sono quei raggi lì.

$$\vec{H}'_{CM} = \vec{r}'_1 \wedge \vec{F}_1 + \vec{r}'_2 \wedge \vec{F}_2 + \vec{r}'_3 \wedge \vec{F}_3$$

$$\vec{H}_{CM} = \vec{H}'_{CM}$$

$$\underbrace{\vec{H}' = \sum_i \vec{r}'_i \wedge \vec{F}_i = \vec{H}'^{(e)} = \vec{H}^{(e)}}$$

$$\vec{H}' = \sum \vec{r}'_i \wedge \vec{F}'_i$$

$$\vec{F}'_i = \vec{F}_i - m_i \vec{a}_{CM} = \vec{F}_i^{(e)} + \vec{F}_i^{(i)} - m_i \vec{a}_{CM}$$

$$= \underbrace{\sum_i \vec{r}'_i \wedge \vec{F}_i^{(e)}}_{= \vec{H}'^{(e)}} + \underbrace{\sum_i \vec{r}'_i \wedge \vec{F}_i^{(i)}}_{0} - \sum_i \vec{r}'_i \wedge m_i \vec{a}_{CM} =$$

$$- \underset{0}{\underbrace{\left(\sum_i m_i \vec{r}'_i\right)}} \wedge \vec{a}_{CM} = 0$$

Secondo teorema di König

Energia cinetica totale:

$$E_k = \sum_i E_{k,i} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

Legame tra i due sistemi di riferimento:

$$\begin{cases} \mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{CM} + \mathbf{r}'_i \\ \mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{CM} + \mathbf{v}'_i \end{cases}$$

SOSTITUISCO →

$$E_k = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\mathbf{v}_{CM} + \mathbf{v}'_i\right)^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{CM}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i v'^2_i +$$

$$+ \underbrace{\sum_i m_i \mathbf{v}_{CM} \cdot \mathbf{v}'_i} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{CM}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i v'^2_i = E_{k,CM} + E'_k$$

POSSO RISCRIVERLO COME:

$$\underbrace{\left(\sum m_i \vec{v}_i\right)}_{=0} \cdot \vec{v}_{CM} = 0$$

POSSO PERCHÉ IL PRODOTTO SCALARE È COMMUTATIVO

Analogamente abbiamo un contributo dell'energia cinetica del punto materiale di massa pari al centro di massa e che si muove come lui e un secondo contributo come se il centro fosse il centro di massa. Abbiamo quindi sempre un moto del centro di massa e un moto rispetto al centro di massa. Ad esempio un gas in questa stanza è macroscopicamente in quiete, perché non c'è un movimento globale complessivo dell'aria in questa stanca, quindi l'energia cinetica delle molecole nella stanza è uguale a zero, ma noi sappiamo che le particelle sono in moto caotico e frenetico rispetto a un centro di massa, quindi l'energia cinetica complessiva dell'aria nella stanza é diversa da zero.

Come abbiamo visto i teoremi di König sono diversi, sono due definizioni di aspetti diversi del nostro sistema, hanno però un tratto in comune, la separazione è cioè la scomposizione del moto del nostro sistema di punti in due termini, uno che è il moto medio, inteso come il moto del centro di massa, che rappresenta una media pesata di tutti i punti, a cui si aggiunge un moto interno rispetto al centro di massa, non abbiamo invece un teorema rispetto alla quantità di moto, perché avevamo già visto che la quantità di moto del mio sistema è data dalla quantità di moto del centro di massa, che riassume va già completamente le proprietà necessari per descrivere il sistema di punti.

Teorema di König per il momento angolare:

Il momento angolare del sistema di punti in un sistema di riferimento inerziale si può scrivere come somma del momento angolare del centro di massa e del momento angolare rispetto al centro di massa.

Teorema di König per l'energia cinetica:

L'energia cinetica del sistema di punti in un sistema di riferimento inerziale si può scrivere come somma dell'energia cinetica del centro di massa e dell'energia cinetica rispetto al centro di massa.

Inoltre possiamo approfondire il fatto che per il singolo punto materiale il momento angolare è il momento di quantità di moto, quindi r esterno p, se la quantità di moto è uguale a zero, questo implica necessariamente che L è uguale a zero. Per il sistema di punti abbiamo invece visto che il momento angolare è un termine momento angolare L' rispetto al centro di massa più il termine di momento angolare L del centro di massa, quindi la quantità di moto totale del mio sistema uguale a 0, non implica momento angolare totale uguale a zero per il sistema di punti, stessa cosa analoga per l'energia cinetica, perché contribuisce anche il moto interno, velocità del centro di massa uguale a zero non implica energia cinetica uguale a zero perché c'è il moto interno.

Passiamo a parlare di energia, lo schema fondamentale è mutuiamo quello che abbiamo fatto per la dinamica del singolo punto materiale. Per l'energia le cose sono un po' più simili rispetto all'energia del singolo punto. Per il singolo punto materiale abbiamo definito il lavoro: dW=F dr, per il sistema di punti abbiamo posto la distinzione tra forze esterne e forze interne e portano due contributi:

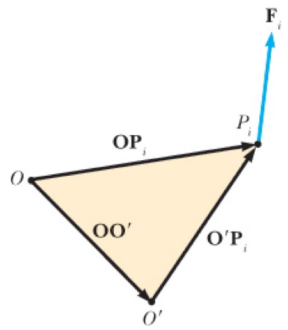
$$dW_i = \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i = \mathbf{F}_i^{(e)} \cdot d\mathbf{r}_i + \mathbf{F}_i^{(i)} \cdot d\mathbf{r}_i = dW_i^{(e)} + dW_i^{(i)}$$

Ragioniamo sulle forze interne, come saranno fatti questi termini di lavoro infinitesimo della coppia di punti? Saranno contributi di questo tipo:

$$\underbrace{\mathbf{F}_{i,j}}_{\text{FORZA CAUSATA DA } i \text{ A } j} \cdot d\mathbf{r}_j + \underbrace{\mathbf{F}_{j,i}}_{\text{FORZA CAUSATA DA } j \text{ A } i} \cdot d\mathbf{r}_i = \mathbf{F}_{i,j} \cdot \left(d\mathbf{r}_j - d\mathbf{r}_i\right) = \mathbf{F}_{i,j} \cdot d\mathbf{r}_{i,j}$$

e sono associati ai cambiamenti delle distanze relative dei punti, in questo caso in generale i contributi non sono nulli, al lavoro delle forze interne è legato il cambiamento delle distanze mutue tra i punti. Ad esempio, quando abbiamo parlato di conservazione di quantità di moto, abbiamo portato esempi in cui erano presenti solo forze interne, come il caso dell'omino che cammina su una lastra poggiata su un piano liscio, l'omino ha quindi un'interazione di attrito con la lastra, che causerà del lavoro e una dissipazione di energia meccanica, il fatto che questa forza di attrito sia sentita come forze interna, quindi sia dall'omino rispetto alla lastra, che dalla lastra rispetto all'omino, non elimina i contributi di lavoro, quindi le dissipazioni di energia meccanica, all'interno di questo sistema, quindi io dei termini energetici lì ne devo tenere conto. Detto ciò vale il teorema di energia cinetica per i sistemi di punti materiali, con gli opportuni formalismi, analogo a quello che abbiamo per il singolo punto materiale.

Principio di portata generale: non è limitato alla meccanica macroscopica che vediamo adesso, ma sarà estendibile anche alla fisica microscopica e dunque estendibile ai concetti che stanno nella fisica moderna.
Ora vogliamo parlare di sistemi di forze applicate su punti diversi dello spazio, insiemi di forze applicati a sistemi di punti. Se io ho un insieme di forze ho una risultante complessiva del mio insieme di forze, il fatto di avere risultante complessiva uguale a zero non implica che il momento complessivo sia uguale a zero, anche nel caso in cui sia in presenza di un sistema di forze con risultante totale nulla, io rispetto a un polo potrei avere un momento delle forze:

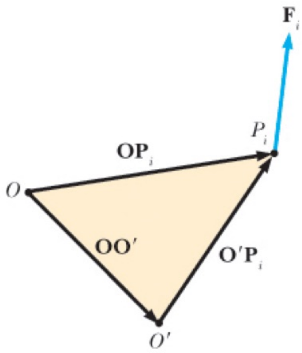


$$\mathbf{R} = \sum_i \mathbf{F}_i$$

NON È LEGATO AD UNA RISULTANTE

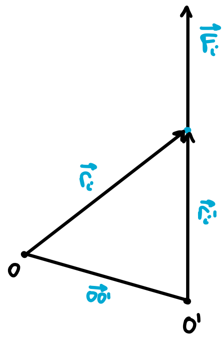
$$\mathbf{M}_O = \sum_i \overrightarrow{OP}_i \wedge \mathbf{F}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{F}_i$$

→ INDIPENDENTI



$$\mathbf{M}_O = \overrightarrow{OO'} \wedge \mathbf{R} + \mathbf{M}_{O'}$$

$\sum_i \vec{F}_i = \vec{R}$



$\vec{r}_i - \vec{r}_i' = \overrightarrow{OO'}$

$\vec{M}_O = \sum_i \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i =$

$\sum_i (\vec{r}_i' + \overrightarrow{OO'}) \wedge \vec{F}_i =$

$= \sum_i \vec{r}_i' \wedge \vec{F}_i + \overrightarrow{OO'} \wedge \sum_i \vec{F}_i =$

$= \vec{M}_{O'} + \overrightarrow{OO'} \wedge \vec{R}$

Se $\vec{R} = 0 \rightarrow \vec{M}_O = \vec{M}_{O'}$ NON DIPENDE DAL POLO

Se $\vec{R} \neq 0 \rightarrow \vec{M}_O \neq \vec{M}_{O'}$ DIPENDE DAL POLO

$\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i$ $\quad \vec{M}_O = \sum \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i$

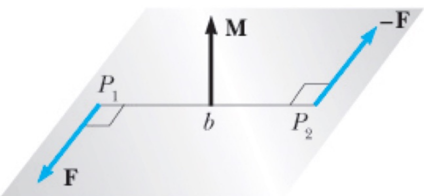
$\vec{R} = \sum m_i \vec{a}_{cm}$ $\quad \vec{M}_O^{(e)} = \frac{d\vec{L}}{dt}$

$\boxed{\cancel{\vec{M}_O \neq \sum_i \vec{r}_i \wedge \vec{R}}}$

Definizione di **coppia di forze**:

sistema formato da 2 forze uguali in modulo e di verso opposto, aventi diversa retta d'azione. $b=P_1P_2$ è detto **braccio** della coppia.

La risultante delle forze è nulla → **M** non dipende dal polo, **M** ortogonale al piano delle forze.



$M = b\,F$

Teorema

Dato un sistema di forze applicate in punti diversi (→ **R**) e fissato un polo per i momenti (→ $\mathbf{M}_O$), questo sistema può essere **sempre** ridotto ad una forza **R** con retta d'azione passante per il polo (quindi di momento nullo rispetto al polo) e ad una coppia di forze di momento $\mathbf{M}_O$ (che ha risultante nulla e momento indipendente dal polo).

(non lo dimostriamo)

Fatte queste premesse qualitative, vediamo che il corpo rigido è un caso particolare del sistema di punti materiali, in questo caso passiamo all'utilizzo della massa infinitesima dm, il pezzettini piccolo del mio corpo rigido tanto che può essere usato come punto materiale, dividere il mio corpo in tanti cubi dm, e alla fine prenderemo tutti i contributi assieme per descrivere il contributo generale. Se finora abbiamo sempre avuto a che fare la somma delle m, per il corpo rigido si passerà a integrare il dm.

$$m_i \Rightarrow dm$$

Le forze esterne sono responsabili del moto del CM:

$$\mathbf{R} = m\mathbf{a}_{CM}$$

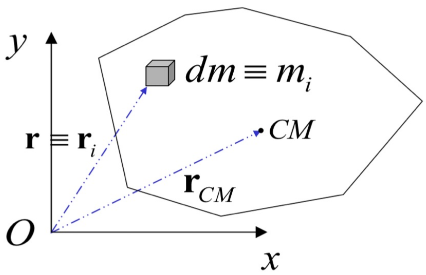
I momenti delle forze esterne sono responsabili delle rotazioni intorno al polo O:

$$\mathbf{M}_O = \frac{d\mathbf{L}_O}{dt} = \sum_i \frac{d}{dt}\left(\mathbf{r}_i \wedge m_i \mathbf{v}_i\right)$$

Il lavoro delle forze esterne varia l'energia cinetica del sistema:

$$W_{AB} = E_{k,B} - E_{k,A}$$

Abbiamo già introdotto il concetto di centro di massa, ora vediamolo nel corpo rigido, se l'oggetto è un oggetto continuo, la posizione del cubetto dm rispetto ad un sistema inerziale esterno fisso sarà data da un raggio, stabilito quali sono tutti i cubetti che definiscono il mio corpo, la posizione del CM si otterrà da questa integrazione del dm per il mio corpo:



$$\mathbf{r}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{\sum_i m_i} \rightarrow \mathbf{r}_{CM} = \frac{\int \mathbf{r}\,dm}{\int dm}$$

(discreto) (continuo)

Al denominatore c'è un integrale di volume. Tendenzialmente dato un oggetto la valutazione del suo CM é una valutazione matematica attraverso open integrale di volume. Possiamo introdurre nel nostro sistema il concetto di densità che è la massa fratto il volume, considerazione valida solo per corpi omogenei quindi con densità costante, altrimenti se non è costante può essere data da una valutazione locale: Densità ρ → $dm = \rho\, dV$ dV elemento di volume occupato da dm

$$\mathbf{r}_{CM} = \frac{\int_V \mathbf{r}\rho\, dV}{\int_V \rho\, dV} \underset{\text{per } \rho \text{ costante}}{=} \frac{\int_V \mathbf{r}\,dV}{\int_V dV} = \frac{\int_V \mathbf{r}\,dV}{V} \rightarrow$$

dipende solo da V (→ forma), non da m

Se la densità è costante può uscire dall'integrale ed essere semplificata, l'integrale del dv valutato nel volume mi dà il volume complessivo, e mi permette di notare un aspetto importante: che la posizione del centro di massa è una questione di volume, dunque di forma geometrica, non di massa. Il passaggio dal discreto al continuo, è un passaggio formale, nel senso che se ho un oggetto macroscopico posso passare ad una trattazione continua di mettere assieme tutti gli elementi di massa dm fino a raggiungere il completo insieme.
Se la densità non fosse uniforme, cioè con una parte più massiva dell'altra, o dobbiamo conoscere la distribuzione di densità, oppure trattiamo due pezzi con densità diverse e sommiamo. Noi faremo sempre una trattazione del continuo, cioè noi del fatto che intrinsecamente la materia sia costituita da molecole o atomi, non andremo a livello microscopico, noi faremo una trattazione del continuo del nostro sistema, le uniche trattazioni molecolari saranno quelle in termodinamica.

ρ NON COSTANTE

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{m}\int_V \vec{r}\rho\, dv$$

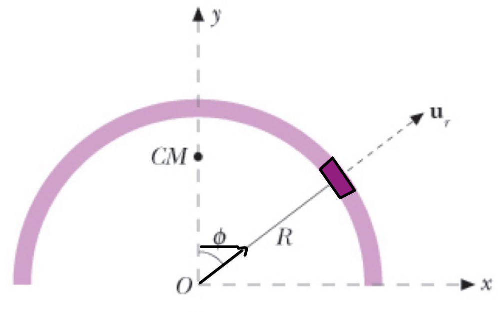
Certe volte è molto più utile lavorare su una superficie di densità superficiale: $\boxed{\rho_s = \frac{dm}{dS}}$

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\int_V \vec{r}\rho\, dV}{\underbrace{\int_V \rho\, dv}_{= m}}$$

$$\rho = \rho(x,y,z)$$

Come se io lavoro con un elemento unidimensionale spesso è utile riportare la densità lineare: $\boxed{\rho = \frac{dm}{dl}}$

26·04·2021



$R, \rho_e \quad m = \rho_e \pi R \quad dm = \rho_e dl$

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\int \vec{r}\, dm}{\int dm} = \frac{\int \vec{r} \rho_e dl}{m}$$

$\vec{r} = R\vec{u}_r \qquad \vec{u}_r = \sin\phi\, \vec{u}_x + \cos\phi\, \vec{u}_y$

$dl = R\, d\phi$

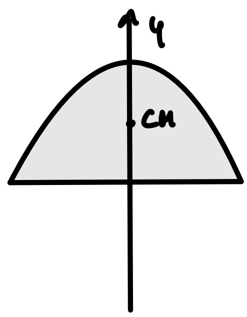
$$\int_l \vec{r} \rho_e dl = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} R(\sin\phi\, \vec{u}_x + \cos\phi\, \vec{u}_y)\rho_e R\, d\phi$$

$$= R^2 \rho_e \left[\vec{u}_x \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin\phi\, d\phi + \vec{u}_y \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\phi\, d\phi \right] =$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin\phi\, d\phi = \Big[-\cos\phi \Big]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 0 \qquad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\phi\, d\phi = \Big[\sin\phi \Big]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 1 - (-1) = 2$$

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\overset{2R^2 \rho_e \vec{u}_y}{\overset{\parallel}{\int_l \vec{r} \rho_e dl}}}{m} = \frac{2R^2 \rho_e}{m} \vec{u}_y = \frac{2R^2 \rho_e}{\rho_e \pi R} \vec{u}_y = \frac{2R}{\pi} \vec{u}_y$$

$$y_{CM} = \frac{\int_{sup} y\, dm}{\int_{sup} dm} \qquad \rho_s \qquad \begin{aligned} ds &= \pi r\, dr \\ dm &= \rho_s ds \end{aligned}$$



$$y_{CM} = \frac{1}{m} \int_{sup} y \rho_s ds = \frac{1}{m} \int_0^R \left(\frac{2r}{\pi}\right) \rho_s \pi r\, dr = \frac{2\rho_s}{m} \int_0^R r^2 dr = \frac{2\rho_s}{m} \frac{R^3}{3}$$

Nel caso in cui invece la mia omega velocità angolare non sia costante, io posso valutare la variazione del momento angolare nel tempo, che è uguale al momento delle forze applicate, nel caso particolare in cui L sia parallelo a omega abbiamo:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(I_z \boldsymbol{\omega}\right) = I_z \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = I_z \boldsymbol{\alpha} \qquad \boldsymbol{\alpha} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \mathbin{//} \boldsymbol{\omega} \qquad \boxed{\mathbf{M} = I_z \boldsymbol{\alpha}}$$

Equazione del moto di rotazione

$$\Updownarrow \qquad \vec{F} = m\vec{a}$$

Qui di nuovo il momento di inerzia gioca il ruolo della massa nella dinamica del punto materiale

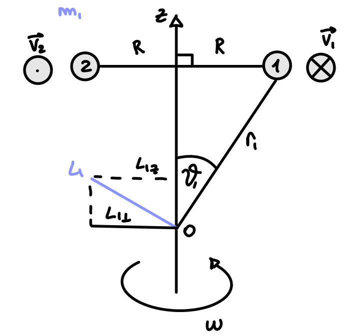
Qualora invece L non fosse parallele a omega m nel caso un po' più generale. Posso spezzare le considerazioni che ho fatto per la componente del momento angolare perpendicolare e parallela rispetto all'asse di rotazione, per quest'ultima vedo che la variazione della componente del momento angolare è associata al prodotto del momento di inerzia rispetto all'asse per il modulo dell'accelerazione angolare.

$$\frac{dL_z}{dt} = \frac{d}{dt}\left(I_z \omega\right) = I_z \frac{d\omega}{dt} = I_z \alpha \qquad \boxed{M_z = I_z \alpha}$$

$$\frac{dL_\perp}{dt} = M_\perp$$

$M_\perp$ è perpendicolare all'asse di rotazione e quindi non porta ad una variazione di ω

La componente lungo gli assi dei momenti applicati è quella che mi spinge, che mi fa variare la cinetica di rotazione del mio oggetto, i termini perpendicolari è come si mi modificassero la direzione di questo vettore L perpendicolare, giocano il ruolo che giocavano le componenti centripete delle forze durante i moti di rotazione dei punti materiale su circonferenze, hanno un effetto di variazione di direzione,ma non hanno un effetto cinetico nel senso di spinta, un effetto che mi fa variare l'energia cinetica e la velocità lineare dei punti componenti il mio oggetto. Il momento di inerzia è infinite proprietà intrinseche del corpo, perché per ogni asse di rotazione, che sono infiniti passanti per un corpo, io posso calcolare un momento di inerzia rispetto a ciascun asse di rotazione, e ogni asse di rotazione a priori ha associato un momento di inerzia diverso.



$m_1 = m_2 = m_3$

$2R$

ω costante

No attriti

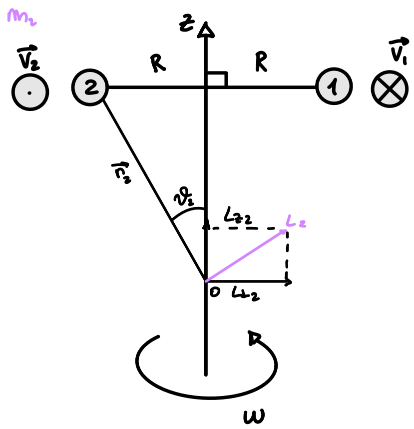
$|\vec{V}_1| = |\vec{V}_2| = V = \omega R$

m_1

$\vec{L}_1 = \vec{r}_1 \wedge m\vec{v}_1 \qquad L_1 = r_1 m v_1$

$L_{1z} = L_1 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta_1\right) = L_1 \sin\vartheta_1 \rightarrow L_{1z} = r_1 m_1 v_1 \sin\vartheta_1 = R m v_1 = m R^2 \omega \qquad r_1 \sin\vartheta_1 = R$

$L_{1\perp} = L_1 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right) = L_1 \cos\vartheta_1$



m_2

$\vartheta_2 = \vartheta_1$

$\vec{v}_2 = -\vec{v}_1$

$L_z = L_{1z} + L_{2z} = 2 m R^2 \omega$

$L_\perp = L_{1\perp} + L_{2\perp} = 0$

$\vec{L} = \left(2mR^2\right)\vec{\omega} = \underbrace{I_z}_{\text{MOMENTO DI INERZIA}} \cdot \vec{\omega}$

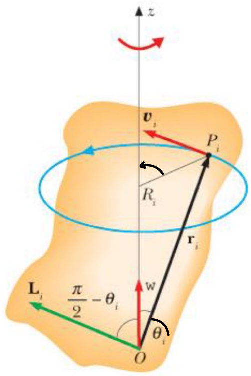
Immaginiamo di spezzettare Pi, la massa del mio sistema è la sommatoria delle masse che compongono il sistema. Nella rotazione intorno ad un asse z fisso, ogni punto materiale mi che si muove con velocità vi su una circonferenza di raggio Ri porta un contributo di energia cinetica di rotazione pari a:

$$E_{k,rot,i} = \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

L'energia cinetica totale di rotazione è:

MOMENTO DI INERZIA

$$E_{k,rot} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\left(\sum_i m_i R_i^2\right)\omega^2 = \frac{1}{2} I_z \omega^2$$



Se applico un momento esterno che compie lavoro:

teorema dell'energia cinetica → $W = \Delta E_k = \frac{1}{2} I_z \omega_{fin}^2 - \frac{1}{2} I_z \omega_{in}^2$

Se parliamo di energia cinetica per rotazione intorno ad un asse z fisso:

$$dW = dE_k = I_z \omega \, d\omega = I_z \frac{d\vartheta}{\cancel{dt}} \alpha \, \cancel{dt} =$$

$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$

$d\omega = \alpha \, dt$

$$= I_z \alpha \, d\vartheta = M_z d\vartheta$$

$$W = \int_0^{\vartheta} M_z d\vartheta$$

$$P = \frac{dW}{dt} = M_z \frac{d\vartheta}{dt} = M_z \omega$$

Il suo effetto sarà un effetto che avviene durante la rotazione, quindi a seconda di quanto faccio rotare il mio oggetto, il lavoro complessivo sarà questo. Valutando questo rispetto al tempo, ottengo la potenza.

Se $\mathbf{L} = I_z \boldsymbol{\omega} \rightarrow \omega = \frac{L}{I_z} \rightarrow E_k = \frac{L^2}{2I_z}$

Altrimenti $E_k = \frac{L_z^2}{2I_z}$

Se dò delle botte, dei colpi delle forze impulsive, ho l'andamento del teorema a dell'impulso angolare, che è l'effetto di un momento nel tempo, questo è un termine utile nel momento in cui si ha a che fare con delle forze impulsive, forze concentrate in brevi istanti di tempo, il manubrio di prima è stato messo in rotazione da un colpo, da una forza impulsiva che poi non agisce più, se l'intervallo di tempo è breve posso ragionatamente supporre che r è costante, quindi se vado a valutare:

$$\int_0^t \mathbf{M} dt = \int_0^t (\mathbf{r} \wedge \mathbf{F}) dt = \mathbf{r} \wedge \int_0^t \mathbf{F} dt = \mathbf{r} \wedge \mathbf{J} = \Delta \mathbf{L}$$

$M = \frac{dL}{dt}$

$\int_0^t \mathbf{M} dt$ → **impulso angolare** o **impulso del momento**

$\int \vec{M} \, dt = \int d\vec{L} = \Delta L$

La valutazione complessiva del momento nell'intervallo di tempo è uguale al momento del l'impulso. La variazione del momento angolare è uguale all'impulso angolare, e di conseguenza al momento dell'impulso applicato al corpo.
Questa scrittura è utile nel caso di forze impulsive (grande intensità e tempo di applicazione molto breve→"botta").
Le forze di reazione dell'eventuale vincolo non compaiono perché sono a momento nullo prendendo come polo il punto di vincolo.

$$I_{df} = I_p - I_v$$

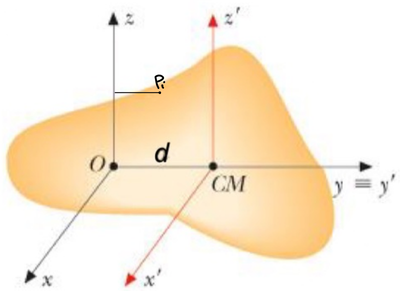
I_{df} → disco forato, I_p → disco pieno, I_v → disco vuoto

$$I_{df} = \frac{1}{2} m_p R_1^2 - \frac{1}{2} m_v R_2^2 = \frac{1}{2}\pi h \rho R_1^4 - \frac{1}{2}\pi h \rho R_2^4 = \frac{1}{2}\pi h \rho (R_1^4 - R_2^4) = \underbrace{\frac{1}{2}\pi h \rho (R_1^2 - R_2^2)}_{m}(R_1^2 + R_2^2) =$$

$$\boxed{= \frac{1}{2} m (R_1^2 + R_2^2)}$$

Quindi, il momento di inerzia dipende dall'asse di rotazione, ogni corpo rigido ha infiniti momenti di inerzia, abbiamo delle possibilità di valutare le caratteristiche di rotazione di un oggetto se io uso un asse che è parallelo rispetto ad un asse passante per il centro di massa. Il teorema di Huygens-Steiner ci permette di generalizzare un po', chiariamo che non ci permette di calcolare qualsiasi momento di inerzia noto un momento di inerzia di un asse passante per il CM, ma ci permette di calcolarlo rispetto ad assi distanti d rispetto al CM e paralleli al primo asse. il momento di inerzia di un corpo di massa m rispetto ad un asse z a distanza d rispetto al CM, si ottiene:

$$\boxed{I_z = I_{z'} + md^2}$$



La condizione fondamentale per questo teorema è che $I_{z'}$ sia il momento di inerzia passante per il centro di massa e che l'asse z risulti parallelo rispetto al primo distante d.

Supponiamo che lo spostamento avvenga lungo y, quindi le trasformazioni sono:

Dim: $x = x' \quad y = y' + d \quad z = z'$

Momento d'inerzia del punto P_i rispetto all'asse z → $I_{i,z} = m_i (x_i^2 + y_i^2)$

$$I_z = \sum_i I_{i,z} = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) = \sum_i m_i \left[x'^2_i + (y'_i + d)^2\right] =$$

$$= \sum_i m_i (x'^2_i + y'^2_i) + \sum_i m_i d^2 + \cancel{2d \sum_i m_i y'_i}$$

$$\sum_i m_i y'_i = m y'_{CM} = 0$$

Come conseguenza del teorema di Steiner, abbiamo espresso:

$$E_k = \frac{1}{2} I_z \omega^2 \qquad I_z = I_{z'} + md^2$$

z' ASSE PASSANTE PER CM

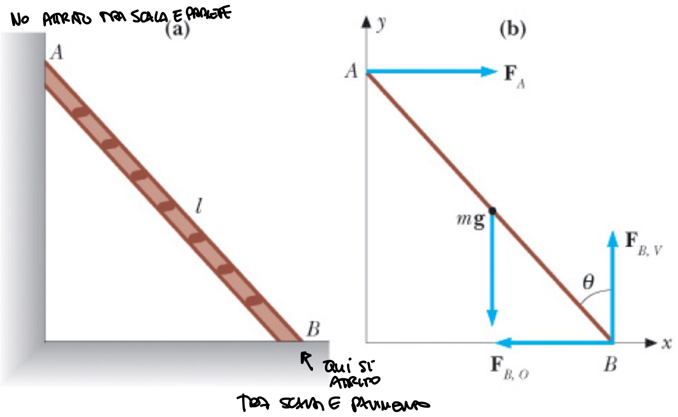
$$E_k = \frac{1}{2}(I_{z'} + md^2)\omega^2 =$$

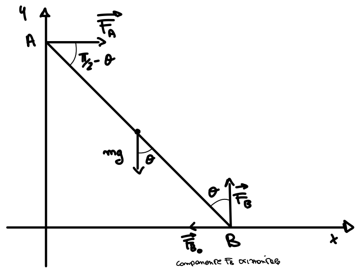
$$= \frac{1}{2} I_{z'} \omega^2 + \frac{1}{2} m d^2 \omega^2 =$$

$v_{CM} = d\omega \qquad E_{k'} = + \frac{1}{2} m v_{CM}^2 \Rightarrow$ König

La statica non prevede soltanto risultante delle forze uguale a zero, ma anche momenti complessivi uguale a zero, queste due condizioni assieme ci garantiscono che l'oggetto, il corpo rigido, si trova in condizioni statiche. R=0 l'avevamo imposto per ottenere quantità di moto costante

LA SCALA





$\vec{R} = 0$

x) $F_A - F_{B_O} = 0 \quad F_A = F_{B_O}$

y) $F_{BV} - mg = 0 \quad F_{BV} = mg$

$\vec{M} = 0$ Polo in B $\vec{\ell} \wedge \vec{F_A} + \frac{\vec{\ell}}{2} \wedge m\vec{g} = 0$ RELAZIONE VETTORIALE

Ho cambiato un segno perché la forza Fa cerca di farmi girare la scala, la forza peso cerca di farmi girare la scala dall'altra parte, quindi i momenti delle due forze sono opposti, per questo metto il segno meno.

$\ell F_A \underbrace{\sin(\pi/2 - \theta)}_{\cos\theta} = \frac{\ell}{2} mg \sin\theta$

$\Longrightarrow F_A = \frac{1}{2} mg \tan\theta$ = Forza orizzontale in B

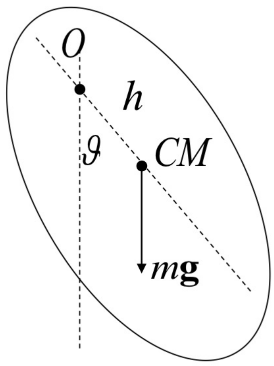
$F_B = \sqrt{F_{B_O}^2 + F_{BV}^2} = mg\sqrt{1 + \frac{\tan^2\theta}{4}}$

B μ_s $\quad \frac{1}{2}\cancel{m}g\tan\theta \le \mu_s F_{BV} = \mu_s \cancel{m}g$

$\tan\theta \le 2\mu_s$

PENDOLO COMPOSTO

È un oggetto generico appeso per un suo punto che non sia il centro di massa, perché altrimenti saremmo come allena visto in condizioni statiche, appenderlo con un asse verticale e lasciato libero. Supponiamo di conoscerne il movimento di inerzia rispetto all'asse z. Chiamiamo h la distanza tra il polo O e la posizione del centro di massa, la risultante delle forze peso risultano essere una forza applicata nel centro di massa di valore mg, dove m è la massa totale del mio oggetto.



$$M = -|\mathbf{r} \wedge m\mathbf{g}| = -mgh\sin\vartheta$$

Il segno meno davanti ai momento è per lo stesso motivo per cui c'era il segno meno nel pendolo semplice, è un momento di richiamo che tende sempre a portarmi il mio oggetto verso una posizione di equilibrio statico, condizione in cui il centro di massa si trova nella verticale rispetto a O. Dal punto di vista matematico ciò lo rappresento da un segno meno che rappresenta una forza di richiamo.

$$\frac{dL_z}{dt} = I_z\alpha = I_z\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -mgh\sin\vartheta$$

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \frac{mgh}{I_z}\sin\vartheta = 0$$

Piccole oscillazioni $\longrightarrow$

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \frac{mgh}{I_z}\vartheta = 0$$

$\longrightarrow$

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \frac{mgh}{I_z}\vartheta = 0$$

Equazione caratteristica di un moto armonico → soluzione

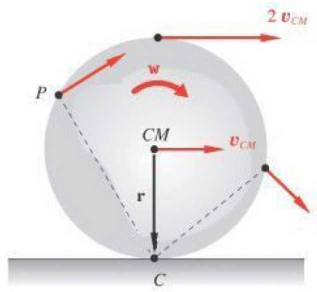
$$\vartheta(t) = \vartheta_0\cos(\Omega t + \Phi) \quad \text{con} \quad \Omega = \sqrt{\frac{mgh}{I_z}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I_z}{mgh}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

$l = \frac{I_z}{mh}$ **lunghezza ridotta** del pendolo

Problema della ruota

Prendiamo in considerazione un corpo in grado di rotolare, caratterizzato dunque da un raggio (che nel disegno non è r) e consideriamo il sistema in movimento rispetto ad un piano. Un oggetto con una distribuzione radiale, un oggetto omogeneo.



Cominciamo a pensare se questo piano è perfettamente liscio, se tale fosse il mio oggetto non interagirebbe con il mio piano sottostante, non sentirebbe ciò che sta sotto, il movimento complessivo del mio oggetto sarebbe dunque di trascinamento, le velocità dei punti sarebbero tutte parallele orizzontali e parallele al terreno, il sistema non sarebbe un sistema rotante, dunque per aver è un rotolamento devo avere un'interazione col piano che sta sotto, che voglio definire in una maniera controllata, nel senso che voglio accoppiare completamente il movimento di rotazione con il movimento di spostamento lineare, quindi puro rotolamento e non che rotoli e strisci contemporaneamente. Ciò che ci interessa imporre per avere il movimento che non preveda un assieme di rotolamento e strisciamento, è che C sia il punto di contatto sia un singolo punto, quindi abbiamo una circonferenza e un piano perfetto, il punto di contatto C risulta essere sugante per istante fermi rispetto alla superficie che ci sta sotto, se il punto di contatto ha velocità nulla rispetto al piano che sta sotto, allora avrò un rotolamento puro.

Come posso quindi immaginare questa rotazione in movimento? Come se avvenisse rispetto ad un asse passante per il punto C perpendicolare rispetto al foglio (lavagna). Istante per istante il contatto si avrà tra il corpo che rotola e la superficie attraverso un punto C' infinitamente vicino a C e si ripete la rotazione intorno a un nuovo asse. Se il punto di contatto deve rimanere fermo è come se il punto di contatto fosse fermato, ciò che lo ferma è una forza di attrito, di conseguenza essendo il punto fermo la forza di attrito sarà una forza di attrito statico. Il punto di contatto ha velocità nulla rispetto al movimento del centro di massa, non rispetto al piano. Il punto non è sempre lo stesso, nel suo avanzare ci sarà sempre un punto di contatto C' a sua volta a contatto con la superficie che mi terra conto dello spostamento dell'asse geometrico di rotazione durante il movimento del mio corpo lungo il piano. Di conseguenza le velocità di tutti i punti rispetto ad un asse di rotazione passante per il punto di contatto (asse che si sposta insieme al corpo, non è fisso) sono velocità perpendicolari rispetto alla congiungente che unisce il punto con l'asse di rotazione (quindi col punto di contatto C), la velocità angolare di rotazione naturalmente è invece sarà comune per tutti i punti.

$$v = PC \cdot \omega$$

Andiamo ad applicare questa relazione per andare a definire la velocità del mio punto C in un sistema di riferimento inerziale che voglio esprimere in funzione della velocità in un sistema di riferimento non inerziale solidale con la ruota in movimento, che si muove con velocità del centro di massa e che ruota attorno al centro di massa. La velocità quindi del punto C in un sistema di riferimento inerziale sarà data:

Il teorema delle velocità relative dà la legge di trasformazione delle velocità:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{OO'} + \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}'$$

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_{CM} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}$$

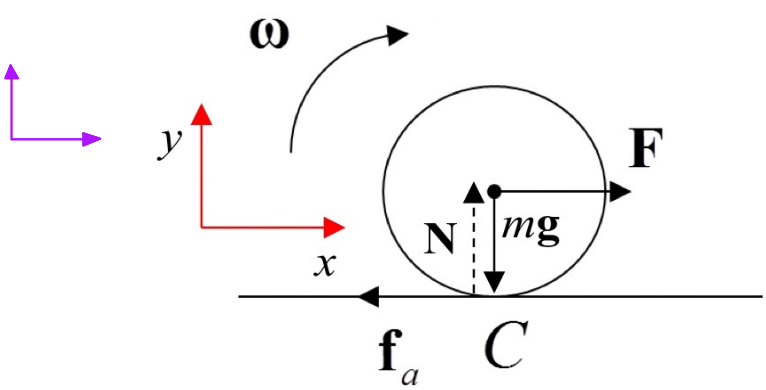
Condizione di puro rotolamento:

Se $\mathbf{v}_C = 0 \longrightarrow \mathbf{v}_{CM} = -\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}$

Il moto del centro di massa è regolato dalle seguenti equazioni

$$\boxed{\begin{aligned} v_{CM} &= \omega\, r \\ a_{CM} &= \alpha\, r \end{aligned}}$$

Riassumendo nel complesso abbiamo descritto la rotazione attraverso successioni di rotazioni infinitesime, punti di contatto che cambiano istante per istante, mettendo tutto insieme abbiamo una roto-traslazione, in cui il centro di massa avanza con velocità lineare mentre il corpo ruota con una velocità angolare rispetto al centro di massa. Trattiamo ora dei casi: io applico una forza di spinta alla mia ruota, una forza che sia applicata al centro di massa, se la ruota è un cilindro all'asse del cilindro, una forza costante di trascinamento orizzontaste e ne descrivo l'avanzamento del mio sistema:



Energia meccanica nel rotolamento

Il mio punto C di contatto è fermo, il che vuol dire che lì non compio lavoro, che significa che descrivere il moto di rotolamento puro anche su superficie scabra non implica di introdurre un termine dissipativi all'interno del sistema quindi il moto di rotolamento puro lo possiamo definire conservativo per il quale possiamo applicare le condizioni di energia meccanica e possiamo esprimere quindi:

$$\boxed{E_k = \frac{1}{2} I\omega^2 + \frac{1}{2} m v_{CM}^2}$$

Energia cinetica → termine rotazionale + termine traslazionale (teorema di König)

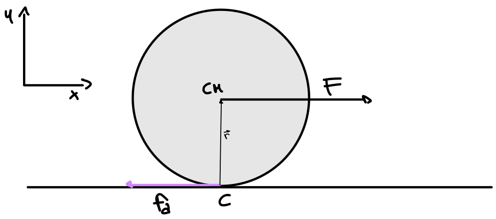
$$\boxed{E_p = mgh_{CM}}$$

Energia potenziale della forza peso → variazione della quota del CM

$$\boxed{E_m = E_k + E_p = \text{cost}}$$

in presenza di sole forze conservative (o con lavoro nullo)

Abbiamo discusso la volta scorso le direzioni delle forze di attrito mei due casi descritti, abbiamo visto che se applico un momento la mia forza di attrito deve impedire al punto C di andare verso le x negative, nel caso precedente invece la forza di attrito si oppone alla forza che tira il mio oggetto e quindi impedisce al punto C di andare verso le x positive. Il segno di questa forza di attrito devo saperlo a priori? No, posso ragionarci fisicamente, ma anche se sbagliassi inizialmente il verso, quando scrivo le condizioni del moto per il rotolamento, se metto una forza di attrito in entrambe le relazioni e risolvo il sistema, il risultato finale sarà Fa con un numero negativo, e questo mi farebbe capire che ho sbagliato segno, l'unica cosa importante è mantenere il segno della forza di attrito coerente in entrambe le due relazioni.
Naturalmente il polo è arbitrario, se io volessi metterlo nel punto C, stabilito che non tutte le posizioni sono intelligenti alla stessa maniera, però mettere il polo nel CM o nel punto C sono posizioni sensate, se metto il polo nel punto C annullo un'altra componente:



Traslazione

$$\begin{cases} x: & F - f_a = m a_{CM} \\ y: & N - mg = 0 \end{cases}$$

Rotazione $\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{F} = I_C \vec{\alpha}$

$$\begin{cases} F \cdot r = I_C \alpha \\ a_{CM} = \alpha r \end{cases}$$

Le forze verticali non hanno momento

$$I_C = I_{CM} + mr^2$$

$$F \cdot r = I_C \frac{a_{CM}}{r}$$

$$a_{CM} = \frac{Fr^2}{I_C} = \frac{Fr^2}{I_{CM} + mr^2} = \frac{F\cancel{r^2}}{m\cancel{r^2}\left(1 + \frac{I_{CM}}{mr^2}\right)}$$

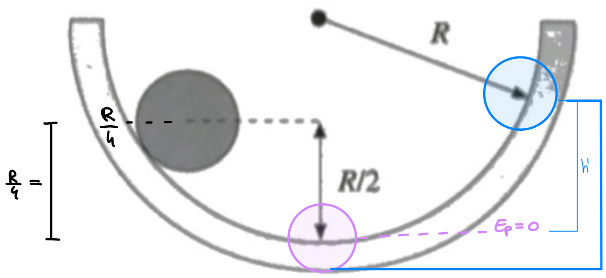
RISULTATO ANALOGO AL CASO PRECEDENTE QUINDI POSSO APPLICARE IL POLO SIA IN CM SIA IN C

Per vincere il momento legato all'attrito volvente devo applicare una forza di trazione che sia più grande del termine di attrito volvente fratto il raggio della mia ruota. L'esempio riporta quanta forza devo applicare per il puro rotolamento o per farlo rotolare se l'oggetto ha un attrito volvente. Sperimentalmente si osserva che un corpo che rotola senza strisciare su un piano orizzontale, in assenza di forze o di momenti applicati, si arresta dopo un certo tempo. esiste un'altra forma di attrito (attrito volvente o di rotolamento), legata alla deformazione locale del piano e del corpo che rotola nel punto di contatto. La forza di attrito può essere rappresentata come effetto di un momento frenante Mv:

$\boxed{M_v = h \cdot mg}$ h: coefficiente di attrito volvente Dimensionalmente $[h]=[L]$ $h \to$ m

Per vincere il momento dovuto all'azione dell'attrito volvente si deve applicare al corpo che rotola (di raggio r) una forza di trazione F: $F \geq \frac{hmg}{r}$

Abbiamo visto il piano inclinato in cui so definire le componenti della forza perpendicolari rispetto al piano e definire il moto della mia massa. Supponiamo di avere un rotolamento lungo un sistema curvo: abbiamo un cilindro pieno che si muova all'interno di un mezzo tubo, particolare perché abbiamo una superficie scabra nella parte sinistra e invece una superficie liscia nella parte di destra, voglio trovare la velocità angolare del cilindro quando sono nel punto più basso quindi nell'ultima parte scabra del sistema, e la quota più alta a cui può arrivare nella parte liscia.



Cilindro pieno (raggio $R/4$) parte da fermo e rotola in un mezzo tubo (raggio R) partendo dalla quota $R/2$. Lato sinistro scabro, lato destro liscio. Trovare ω nel punto più basso e la posizione di arrivo del cilindro.

1)

Quanto scende? $\frac{R}{2} - \frac{R}{4} = \frac{R}{4}$

$E_{M_i} = mg\frac{R}{4}$ $\quad E_{M_f} = \frac{1}{2} I_{CM}\omega^2 + \frac{1}{2} m v_{CM}^2$

$I_{CM} = \frac{1}{2} m \left(\frac{R}{4}\right)^2$ $\quad v_{CM} = \omega \frac{R}{4}$

$E_{M_i} = E_{M_f}$

$\cancel{m}g\left(\frac{R}{4}\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{2}\cancel{m}\left(\frac{R}{4}\right)^2 \frac{v_{CM}^2}{\left(\frac{R}{4}\right)^2} + \frac{1}{2}\cancel{m} v_{CM}^2$

$g\frac{R}{4} = \frac{3}{4} v_{CM}^2$ $\quad v_{CM} = \sqrt{\frac{Rg}{3}}$ $\quad \boxed{\omega = 4\cdot\sqrt{\frac{g}{3R}}}$

2)

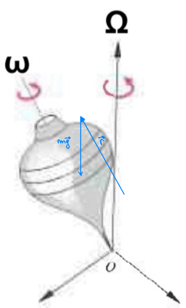
$E_{K_{rot}} = \frac{1}{2} I_{CM}\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{2} m \frac{R^2}{16} 16 \frac{g}{3R} = \frac{1}{12} mgR$

$\frac{1}{2} m v_{CM}^2 = \frac{1}{2} m \frac{Rg}{3} = \frac{1}{6} mgR = mgh'$ $\Longrightarrow$ $h' = \frac{R}{6} = \frac{2}{3}\left(\frac{R}{4}\right)$

$h = h' + \frac{R}{4} = \frac{5}{3}\left(\frac{R}{4}\right)$

Cosa succede se la lascio andare e torna indietro? Lui stava girando in senso antiorario, se lo lasciamo tornare indietro, torna e nel momento in cui il corpo si affaccia alla parte scabra, può mettersi subito a rotolare di rotolamento puro? No perché ci sarebbe uno strisciamento del mio punto di contatto con la superficie di contatto quindi non posso imporre condizioni di rotolamento puro.

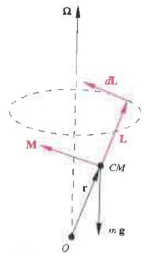
Più complicato è il caso di rotazione del rotatore pesante detto trottola, oggetto simmetrico di forma qualsiasi che ha asse passante per il suo centro, che mettiamo in rotazione su se stesso attorno alla verticale, il punto fisso del nostro giroscopio è il punto O che è il punto di contatto, la nostra trottola gira su se stessa rispetto a questo asse di simmetria che passa per il CM della trottola con una velocità angolare, ha un moto di precessione attorno ad un asse verticale con una velocità di precessione.
Posso esprimere come momento angolare del mio sistema la rotazione attorno a questo asse di inerzia.
Velocità angolare della trottola è molto più piccola della velocità angolare del moto di precessione.



$\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega} \qquad \mathbf{M} = \mathbf{r} \wedge m\mathbf{g}$

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M} = \mathbf{r} \wedge m\mathbf{g}$$

L cost → **L** ha anche un **moto di precessione** → chiamo **Ω** la velocità angolare di precessione:



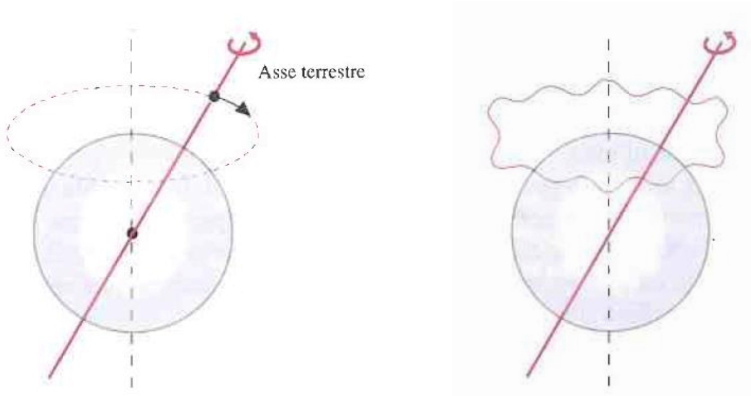
$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{L} = \boldsymbol{\Omega} \wedge I\boldsymbol{\omega}$$

$\boxed{\boldsymbol{\Omega} \wedge I\boldsymbol{\omega} = \mathbf{r} \wedge m\mathbf{g}}$ con **Ω** // **g**, **ω** // **r**, $\boxed{\Omega << \omega}$

$$\boldsymbol{\Omega} = -\frac{mr}{I\omega}\mathbf{g} \qquad T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi\, I\omega}{mgr}$$

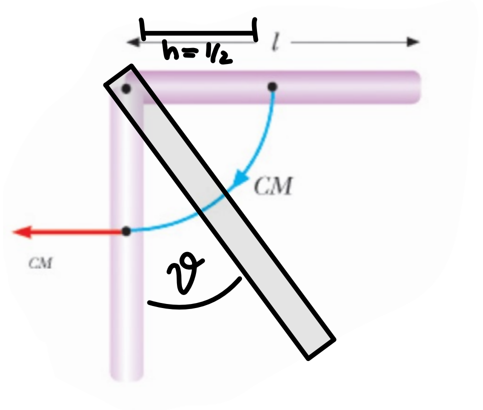
Perchè sono antiparalleli

Se la trottola girano molto più velocemente su se stessa rispetto a quanto faccia per il moto di precessione, questo L rispetto alla velocità angolare della trottola su se stessa è tutto il momento angolare e si trascura il momento angolare del moto di precessione. L'equilibrio di queste componenti fa si che la trottola rimanga in un certo senso in piedi.
Nel caso terrestre, la terra è caratterizzata da un asse terrestre inclinato rispetto al piano dell'orbita, intesa come orbita di rotazione intorno al sole. Esistono momenti esterni legati principalmente al momento della luna, di conseguenza il moto del sistema è soggetto un momento esterno, ad esso legato un moto di precessione chiamato precessione degli equinozi, moto legato ad una verticale, che è la verticale dell'orbita. Esista quindi un angolo di precessione (in viola):



pura precessione — precessione + nutazione

Abbiamo quindi un periodo di precessione, cioè quanto sta la terra a compiere un giro attorno a questo asse, periodo T= 27725 anni, causa delle variazioni delle stagioni e dei cambiamenti climatici. In realtà la traiettoria dell'asse terrestre alla precessione si somma un moto di nutazione oscillatorio, facendo capire che l'asse di rotazione della terra non è un asse di inerzia poiché non passa per il CM, questo aggiunge un ulteriore momento al momento complessivo, momento di oscillazioni che sono periodiche nelle parti dei 19 anni che causano le oscillazioni attorno alla circonferenza di precessione. La causa della mutazione e che l'asse di rotazione terrestre non è un asse centrale di inserita, perché non passa per il centro di massa per la terra, poiché valgono tutte quelle condizioni complicate.



Se invece ho corpi in movimento di questo tipo possiamo fare dei ragionamenti, un esempio di movimento di un corpo rigido sotto l'azione della forza peso in cui posso ragionare sfruttando i principi i di conservazione dell'energia meccanica, come in questo esempio di sbarra vincolata da un estremo, inizialmente ferma in posizione orizzontale, la lascio scendere sotto l'azione del,a forza peso, qui viene evidenziata la traiettoria del centro di massa che è una traiettoria è un arco di circonferenza di raggio L/2, voglio esprimere l'accelerazione angolare in funzione dell'angolo teta:

$\alpha = \alpha(\vartheta)$ $\quad a_{CM,t} = ?$
$h = \ell/2$ $\quad a_{CM,n} = ?$

Componenti tangenti e normali dell'accelerazione tangente rispetto alla traiettoria del centro di massa che è questo arco di circonferenza e normali ad essere (quindi componente centripeta) tutto in funzione dell'angolo teta.

L'asta è vincolata, ho sostanzialmente a che fare, tenendo conto che non sono in condizioni di oscillazioni piccole, tuttavia assomiglia molto al pendolo composto, di conseguenza ho un momento del,a forza peso rispetto alla posizione del mio asse di rotazione che sarà dato da:

$\vec{M} = \vec{h} \wedge m\vec{g}$ → MOMENTO DI RICHIAMO QUINDI IN MODULO HO UN SEGNO – → $M = -hmg\sin\vartheta = I_0 \cdot \alpha$

$\alpha(\vartheta) = \frac{-mgh}{I_0} \cdot \sin\vartheta$

Il momento di inerzia di un'asta rispetto al centro di massa abbiamo già bistro che è :

$I_{CM} = \frac{1}{12} m\ell^2 \xrightarrow{\text{STEINER}} I_0 = \frac{\ell}{3} m\ell^2$ con $h = \frac{\ell}{2}$ (DISTANZA TRA PUNTO MEDIO E ASSE)

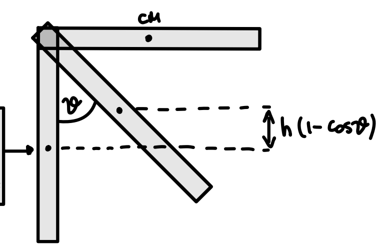
$I_0 = I_{CM} + m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2$

SOSTITUENDO → $\alpha(\vartheta) = -\frac{3g}{2\ell} \sin\vartheta$

Quindi l'accelerazione angolare non è costante e il momento angolare non è costante in questo sistema, domanda del primo appello: se momenti angolare e momenti applicati sono costanti? No, dipendono da teta, il momento dipenda da quando sono distante rispetto all'asse di rotazione.

$a_{CM,t} = \alpha h = \alpha \frac{\ell}{2}$ $\qquad a_{CM,t} = -\frac{3}{4} g \sin\vartheta$

$\omega = \omega(\vartheta)$ ⟹ La ottengo applicando la legge di conservazione dell'energia meccanica



Pongo qui lo zero della mia energia potenziale, nella condizione iniziale

$\vartheta = \pi/2$ COND. INIZIALE $\quad E_{M_i} = E_P(\vartheta = \pi/2) = mgh$

ϑ GENERICO $\quad E_M = E_P(\vartheta) + E_K(\vartheta) = mgh(1 - \cos\vartheta) + \frac{1}{2} I_0 \omega^2$

$E_{M_i} = E_M \longrightarrow \cancel{mgh} = mgh(\cancel{1} - \cos\vartheta) + \frac{1}{2} I_0 \omega^2$

$mgh(\cos\vartheta) = \frac{1}{2} \frac{1}{3} m\ell^2 \omega^2$

$\omega^2 = \frac{3g}{\ell} \cdot \cos\vartheta$

questa espressione evidenza una dipendenza di omega dall'angolo e mi permette di ricavare il termine normale dell'accelerazione del centro di massa.

$a_{CM,N} = \omega^2 h = \omega^2 \frac{\ell}{2} = \frac{3}{2} g \cos\vartheta$

PUNTO DI PARTENZA $\quad \vartheta = \pi/2 \quad \alpha = -\frac{3g}{2\ell} \quad a_{CMT} = -\frac{3}{4} g \quad a_{CMN} = 0$

VERTICALE $\quad \vartheta = 0 \quad \alpha = 0 \quad a_{CMT} = 0 \quad a_{CMN} = \frac{3}{2} g$

12.05.2021

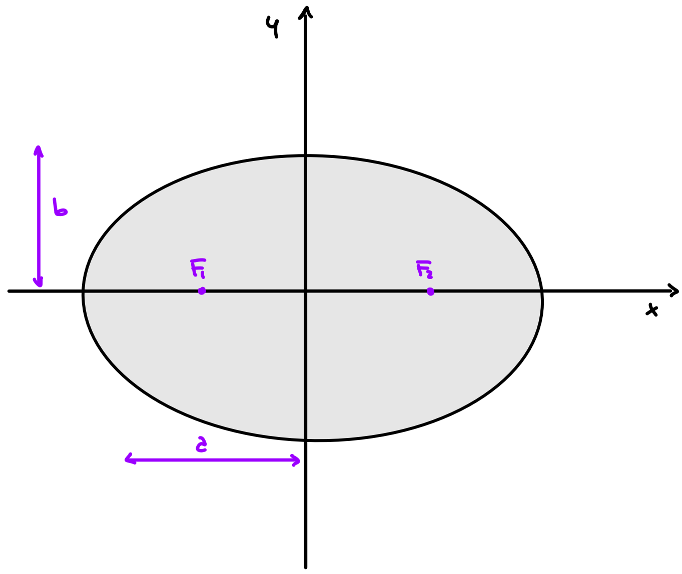
Gravitazione

→ Ellisse

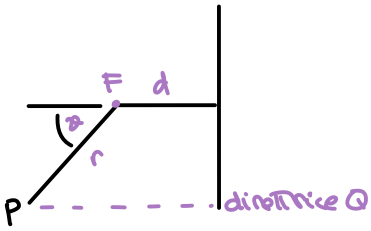
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ ECCENTRICITÀ $\varepsilon \geq 0$

SE $\varepsilon = 0$ e $a = b$ → CIRCONFERENZA



L'ellisse fa parte delle curve coniche, hanno costante il rapporto tra la distanza di un punto detto fuoco e la distanza di una retta detta direttrice:



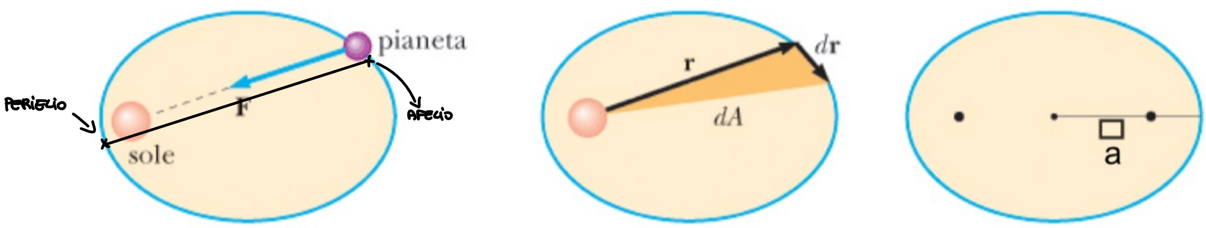
$$\varepsilon = \frac{PF}{PQ} = \frac{r}{d + r\cos\theta}$$

$\frac{1}{r} = \frac{1}{\varepsilon d} - \frac{1}{d}\cos\theta \Rightarrow$ CONICA IN COORDINATE POLARI

Chiusa o Aperta?

CONICHE
- $\varepsilon < 1$ ELLISSE C
- $\varepsilon = 1$ PARABOLE A
- $\varepsilon = 0$ CIRCONFERENZE C
- $\varepsilon > 1$ IPERBOLE A

Partiamo dal 1600, quando le osservazioni fenomenologiche vennero messe all'interno di leggi fisiche. L'ellisse non è una funzione perché associa due y a una singola x. Sostanzialmente la nostra descrizione parte dalle leggi di Keplero, intorno al 1600, osservazioni sperimentali delle traiettorie planetarie e leggi che ne descrivono l'andamento. I moti planetari noi li vediamo da un sistema che a sua volta si muove, per questo vennero enunciate solo nel 1600. La prima legge di Keplero dice che ogni pianeta percorre un'orbita ellittica, con il sole, stella di riferimento, posizionato in uno dei due fuochi dell'ellisse, la seconda legge di Keplero parla della velocità del movimento del pianeta sull'orbita, non parla della velocità angolare diretta, ma dice che la velocità areale (velocità con cui evolvé l'area spazzata dal vettore che identifica la posizione del mio pianeta rispetto al centro) spazzata dal raggio vettore che unisce il sole al pianeta è costante nel tempo, la terza legge lega il quadrato del periodo di rotazione e il cubo del semiasse maggiore dell'ellisse, una legge matematica mi dice che il quadrato del periodo di rotazione è proporzionale tramite una costante K al cubo del semiasse maggiore dell'ellisse.



orbita ellittica — I legge

dA/dt = costante — II legge

$T^2 = ka^3$ — III legge

Possiamo ancora introdurre che se il Sole di trova in uno dei due fuochi dell'ellisse, si possono definire il perielio e l'afelio, i due estremi della traiettoria, e notiamo nell'espressione delle forze che si tratta di forze centrali, sempre dirette lungo la direttrice che collega il sole al pianeta. I sistemi planetari si mantengono immutati nel tempo, non possiamo avere dissipazione dell'energia meccanica perché avremmo un collasso del sistema, quindi è naturale pensare che questo tipo di sistemi sia associato a forze di tipo conservativo.

Andiamo ora a discutere e ragionare la costante qui davanti, la costante è che dipende dal sistema, sta nella terza legge di Keplero, non è una costante universale anche se non varia tantissimo, quindi possiamo ancora ragionarci su, prendiamo in considerazione il sistema Sole-Terra che rientra bene nelle nostre approssimazioni di moto circolare, il sistema di due punti interagenti tra di loro con forze mutue che vanno tipo terzo principio della dinamica, quindi se prendo la forza di interazione che il Sole esercita sulla Terra, sarà un termine:

$\Longleftrightarrow$

Sistema Sole - Terra

$$F_{S-T} = \frac{4\pi^2}{k_T}\frac{m_T}{r^2} \frac{m_S}{m_S}$$

$\gamma = \frac{4\pi^2}{k_T m_S}$

Principio di azione e reazione

$$m_T k_S = m_S k_T$$

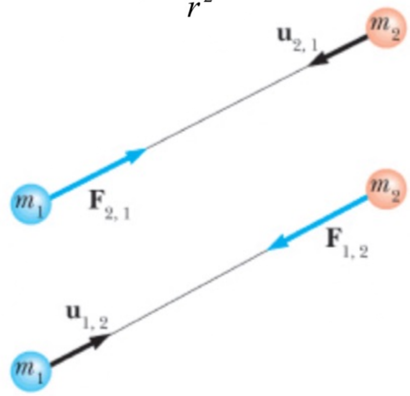
Sistema Terra - Sole

$$F_{T-S} = \frac{4\pi^2}{k_S}\frac{m_S}{r^2}$$

def $\quad \gamma = \frac{4\pi^2}{m_T k_S} = \frac{4\pi^2}{m_S k_T} \quad \Rightarrow \quad F = \gamma \frac{m_S m_T}{r^2}$

$$\boxed{\mathbf{F}_{1,2} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \mathbf{u}_{1,2}}$$

FORZA ATTRATTIVA



In generale il versore che mi identifica la direzione della forza di interazione, estendendo dal caso circolare al caso ellittico, la relazione vale anche per traiettorie di tipo ellittico, abbiamo un versore radiale della traiettoria, una costante di gravitazione universale gamma che ha delle dimensioni, sarà una forza per una lunghezza al quadrato diviso una massa al quadrato:

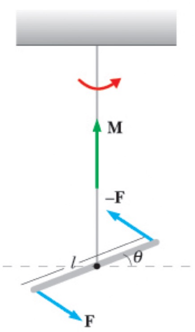
Dimensionalmente $[\gamma]=[F]\,[L^2M^{-2}]=[M^{-1}L^3T^{-2}]$ $\quad \boxed{\gamma = 6.673\cdot 10^{-11}\ m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}$

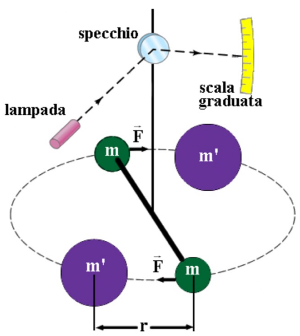
Qualche altra costante $\quad m_T = 5.98\cdot 10^{24}$ kg $\quad r_T = 1.5\cdot 10^{11}$ m (orbita)

TERRA PIÙ VICINA AL SOLE ← perielio $1.47\cdot 10^{11}$ m $\quad$ afelio $1.52\cdot 10^{11}$ m → SOLE PIÙ LONTANO ALLA TRAIETTORIA ELLITTICA

$\varepsilon = 0.017$ (orbita terrestre)

Due parole su come si può misurare gamma, naturalmente è un parametro planetario, costante molto piccola e tiene conto: l'interazione di cui parliamo è interazione gravitazionale, è enormemente meno intensa rispetto alle altre interazioni ed è sempre trascurabile tranne quando le masse in gioco sono molto grandi, ed è proprio questo il caso. Questa interazione è scarsa e rispecchiata da una costante gamma che è piuttosto piccola e difficile da misurare, è stata misurata dalla bilancia di Cavendish, in cui utilizziamo un pendolo di torsione, mi aspetto quindi un movimento di tipo armonico, l'equazione di base è: $F\,l = k\theta$





Note le masse posso ricavarne la costante gravitazionale universale attraverso la leva ottica, con uno specchio utilizzando un raggio laser che amplifica il movimento del mio specchio. Si ottiene un risultato di oscillazione che assomiglia a quello dell'oscillatore smorzato e dalla stima del semi periodo posso ricavarne la forza agente e quindi la costante.

Parallelismi: forza gravitazionale e forza elettrostatica

C'è un'altra forza di interazione che va come l'interazione gravitazionale, e sono le forze di tipo elettrostatico, di interazione tra sistemi carichi. Quello che si osserva è che per strofinio si può indurre un certo effetto sulla materia che non è unico, ma dipende dai materiali che prendo in considerazione. Se prendo in considerazione una bacchetta di vetro e avvicino un'altra bacchetta di vetro su cui ho lavorato per strofinio, ottengo una forza di interazione di tipo repulsivo, se invece avvicino una bacchetta di plastica su cui ho sempre agito per strofinio, ottengo una forza di interazione di tipo attrattivo. Quindi abbiamo forze di tipo attrattivo o repulsivo a seconda dei materiali che utilizziamo. Ci sono materiali, isolanti, che possono essere caricati per strofinio, mentre ci sono materiali, conduttori tipicamente i metalli, che non possono essere caricati per strofinio, che con opportuni studi sperimentali ha portato alla trattazione di una legge fisica sperimentale: tra due corpi caricati per strofinio, in cui introduciamo una caratteristica chiamata carica, tra questi due corpi si genera una forza di interazione F che dipende da una costante, il prodotto delle due cariche va come 1/r con direzione radiale, analoga rispetto al termine visto nella gravitazione, la differenza rispetto al caso precedente è che si ha che se nel caso di prima avevamo messo esplicitamente un segno meno per indicare che la forza era sempre di tipo attrattivo, in questo caso invece la forza dipende dal segno del prodotto mutuo tra le due cariche, quando questo è maggiore di zero allora le due cariche sono dello stesso tipo, allora il termine risulta essere maggiore di zero e lo è anche la forza, così è quindi repulsiva, se invece il prodotto è minore di zero e le cariche sono diverse, compare un segno meno e allora la forza è di tipo attrattivo. ← LEGGE DI COULOMB

$$\mathbf{F} = k\frac{q_1 q_2}{r^2}\mathbf{u}_r$$

$q_1q_2>0 \rightarrow$ forza repulsiva

$q_1q_2<0 \rightarrow$ forza attrattiva

Abbiamo introdotto la carica del nostro sistema introdotto attraverso Q, ad ogni corpo o particella è assegnata una carica elettrica che può essere positiva, negativa, o neutra. La carica elettrica è una proprietà fondamentale della materia. La carica è discreta, si trova quindi in forma di multipli di una carica elementare, che è la carica dell' elettrone. Principio inviolato è che la carica si conserva, la somma algebrica delle cariche rimane costante nel tempo in un sistema isolato in cui non ho flussi di cariche dall'interno verso l'esterno o viceversa, questo principio va d'accordo con il principio di conservazione della massa.
Nel sistema internazionale l'unità di misura della carica è il coulomb, non è una grandezza fondamentale bensì derivata, dato che è definita a partire dall'intensità di corrente che si misura in ampere, osserviamo che è 1 C è una carica di dimensione molto grande.
Sia la forza gravitazionale che la forza elettrostatica dipendono simmetricamente dal prodotto delle proprietà delle due caratteristiche fisiche che esercitano una forza reciproca, la forza elettrostatica è però enormemente più intensa di quella gravitazionale e, a livello macroscopico, i corpi sono neutri. Le forze centrali sono forze conservative, quindi possiamo definirne un'energia potenziale. Lavoriamo principalmente con forze di interazione gravitazionale, ogni tipo di movimento può essere svolto lungo una traiettoria qualsiasi che può essere spezzata sempre tramite movimenti radiali e archi di circonferenza, nel,e forze centrali contano solamente i movimenti radiali, come succedeva per la forza peso, sono gli unici spostamenti che contribuiscono al lavoro. Definiremo quindi energie potenziali che dipenderanno solamente dalle coordinate rispetto al centro. Ad un percorso chiuso non viene associato lavoro.

INTERAZIONE GRAVITAZIONALE

$$\vec{F} = -\gamma\frac{mM}{r^2}\vec{u}_r \Rightarrow F = -\gamma\frac{mM}{r^2}$$

$$W_{AB} = \int_{r_A}^{r_B} -\gamma\frac{mM}{r^2}\,dr = -\gamma mM\int_{r_A}^{r_B}\frac{dr}{r^2} = -\gamma mM\left[-\frac{1}{r}\right]_{r_A}^{r_B} = -\gamma\frac{mM}{r_B} - \left(\gamma\frac{m_1M}{r_B}\right)$$

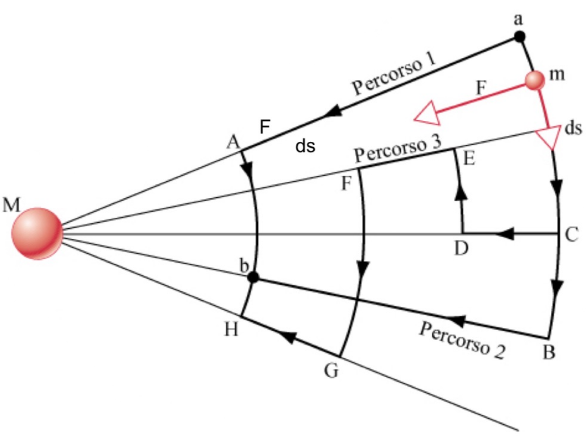
$W_{AB} = -\Delta E_p$ $\qquad$ $E_p = -\gamma\frac{mM}{r}$ $\qquad$ $W_{AB} = E_{pA} - E_{pB} = -\Delta E_p \Rightarrow$ OK

FORZA COULOMBIANA

$\vec{F} = k\frac{q_1q_2}{r^2}\vec{u}_r$ $\qquad$ $F = k\frac{q_1q_2}{r^2}$

$$W_{AB} = \int_{r_A}^{r_B} k\frac{q_1q_2}{r^2}\,dr = kq_1q_2\left[-\frac{1}{r}\right]_{r_A}^{r_B} = -k\frac{q_1q_2}{r_B} - \left(-k\frac{q_1q_2}{r_A}\right)$$

$E_p = k\frac{q_1q_2}{r} \Rightarrow W_{AB} = E_{pA} - E_{pB} = -\Delta E_p$ $\qquad$ $E_p \propto 1/r$



$M = m_T$ MASSA TERRA $\qquad \omega^2 = \gamma \frac{m_T}{r^3}$

$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{\gamma m_T}}$

$\Downarrow$

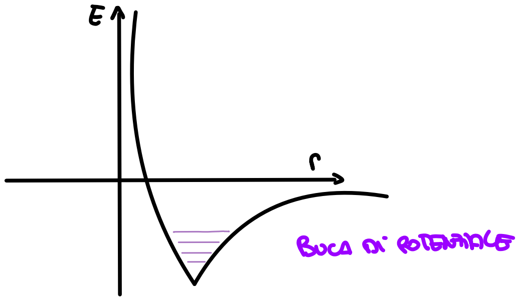
$r = \sqrt[3]{\gamma m_T \frac{T^2}{4\pi^2}}$

SATELLITI GEOSTAZIONARI

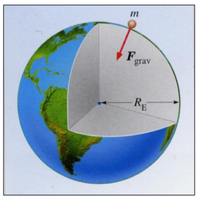
$T = 24h = 8.64 \cdot 10^4 s$

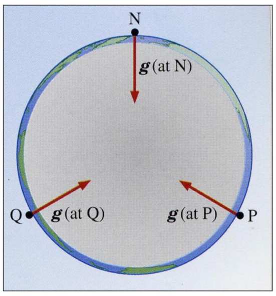
$r \simeq 4.23 \cdot 10^7 m = 42300 km$ RISPETTO AL CENTRO DELLA TERRA

LAVORO CHE DEVO SPENDERE PER UN CAMBIO DI ORBITA $\rightarrow$ $W = \Delta E_M = E_{M_2} - E_{M_1} = -\gamma \frac{m m_T}{2r_2} + \gamma \frac{m m_T}{2r_1} = \gamma \frac{m m_T}{2}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$ [J]



Era difficile accettare che l'interazione della terra con sole e tutte le interazioni gravitazionali avvenissero a distanza e senza un messo, i concetti della fisica hanno stabilito che non c'è bisogno di un mezzo effettivo con il quale trasmettere le interazioni ed è molto utile così introdurre il concetto di campo. Il concetto di campo mi permette di formalizzare l'interazione a distanza tra due enti fisici, il campo associato alle forze di interazione gravitazionale mi permette di descrivere l'interazione a distanza atra una massa 1 e una massa 2, se ho parallelamente che cariche queste saranno in interazione anche a distanza anche nello spazio vuoto, interazione che posso esprimere anche attraverso un campo espresso come perturbazione dello spazio e perturbazione delle proprietà fisiche dello spazio. Questo mi permetterà di sganciare la descrizione delle interazioni dalle loro sorgenti, nel senso che lo spazio attorno al sole è tutto permeato dalla presenza del campo gravitazionale del sole e ogni massa che ci passa dentro entra e sente l'interazione del sole e il campo gravitazionale generato dal sole. Definiamo il campo partendo dalle forze come il rapporto della forza fisica sentita da un ente fisico opportuno diviso l'ente fisico stesso, cioè rapporto come forza F e la sonda che va a sentire il campo, la sonda è l'ente fisico che sente l'interazione, nel caso gravitazionale sono le masse e nel caso elettrostatico sono le cariche.
L'accelerazione g è già un esempio di campo:



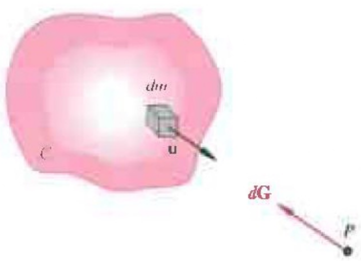


$$\mathbf{G} = \frac{\mathbf{F}}{\text{"sonda"}}$$

I campi sono in generale funzioni nello spazio, le funzioni in generale possono essere scalari o vettoriali, i campi scalari ad esempio si rappresentano da linee isoterme o isobare, mentre nei campi vettoriali le proprietà fisiche sono rappresentate da vettori ad esempio il campo di vento. I campi che andremo a descrivere adesso saranno campi vettoriali. Se la forza di interazione gravitazionale è espressa così:

$$\mathbf{F}_{12} = \left(-\gamma \frac{m_1}{r^2}\mathbf{u}_{12}\right)m_2 \qquad \mathbf{F}_{21} = \left(-\gamma \frac{m_2}{r^2}\mathbf{u}_{21}\right)m_1 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{array}{ll} \mathbf{G}_1 = -\gamma \frac{m_1}{r^2}\mathbf{u}_1 & \mathbf{F}_{12} = m_2\mathbf{G}_1 \\ \mathbf{G}_2 = -\gamma \frac{m_2}{r^2}\mathbf{u}_2 & \mathbf{F}_{21} = m_1\mathbf{G}_2 \end{array}$$

Se le masse sono puntiformi seguiamo le regole espresse in precedenza, se le masse sono invece dei corpi estesi possiamo generalizzare questa relazione esprimendo il campo gravitazionale generato dall'elemento di massa dm, e sentiremo nello spazio la combinazione di tutti i campi generati dalle masse puntiformi che costituiscono il mio corpo complessivo, il campo generato si otterrà attraverso una combinazione vettoriale dei campi generati da tutti gli elementi di massa dm.



$$\mathbf{G}(P) = \sum_1^n \mathbf{G}_i = \sum_1^n \left(-\gamma \frac{m_i}{r_i^2}\mathbf{u}_i\right)$$

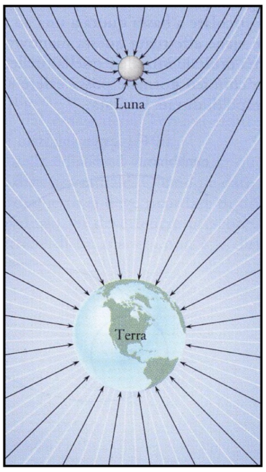
Per sistemi continui

$$d\mathbf{G} = -\gamma \frac{dm}{r^2}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{G}(P) = \int_C -\gamma \frac{dm}{r^2}\mathbf{u} = \int_V -\gamma\rho \frac{dV}{r^2}\mathbf{u}$$

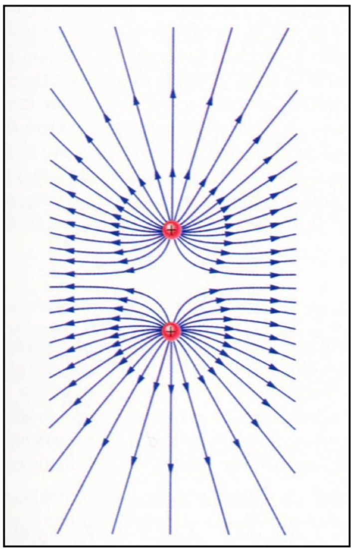
$$dm = \rho dV$$

Finora abbiamo parlato di una singola massa e di una singola carica, se ho più masse o più cariche entra in gioco il principio di sovrapposizione, per ogni punto dello spazio passa una e una sola linea di campo ed una e una sola linea di forza, perché se ne passassero due e si inc crociassero, avrei la combinazione vettoriale degli affetti e dunque tirerei fuori un vettore solo. Quindi se io rappresento il campo gravitazionale della terra, quindi ho effetto radiale delle linee di forza, vicino alla luna domina lei ed ho il suo effetto radiale, se mi metto in mezzo ho una zona in cui ho la presenza di entrambe le linee di forza quindi zona di interazione e le linee di campo vanno calcolate conoscendo le masse mutue.



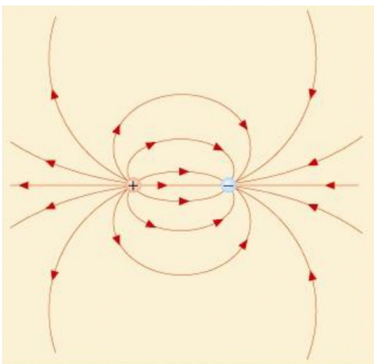
$$\mathbf{G}_{ris} = \mathbf{G}_{Terra} + \mathbf{G}_{Luna}$$

Se ho più sistemi di cariche distribuiti nello spazio, allo stesso modo mi andrò a calcolare le distribuzioni di campo generate dalle singole cariche e avrò delle zone in cui ci sarà interazione e dunque somma vettoriale degli effetti:



Il campo elettrostatico generato da due cariche uguali e positive

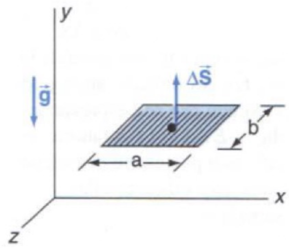
$$\mathbf{E}_{ris} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$$



Il campo elettrostatico generato da due cariche uguali e opposte

$$\mathbf{E}_{ris} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$$

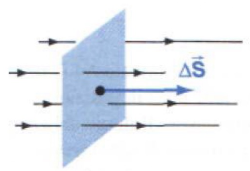
Per arrivare alla dimostrazione del teorema di gauss diamo prima due definizioni: l'angolo solido e il concetto di flusso. Dato un campo vettoriale, quanto di questo campo passa attraverso una superficie è il flusso di campo, è una grandezza scalare che dipende dalla superficie attraverso la quale lo calcolo. Il caso più semplice è un campo A vettoriale uniforme, con vettori tutti uguali distribuiti nello spazio, e consideriamo una superficie che abbia una dimensione, è utile per la definizione del flusso dare un carattere vettoriale alla superficie, che si definisce introducendo il vettore superficie ΔS che ha modulo pari alla dimensione della superficie moltiplicato per il versore perpendicolare alla superficie stessa u_n.

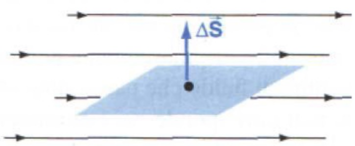


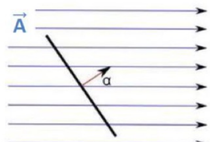
$$\Delta \mathbf{S} = \Delta S \mathbf{u}$$

$$\boxed{\Phi = \mathbf{A} \cdot \Delta \mathbf{S}}$$

Voglio rendere conto del fatto che se io affaccio la superficie perpendicolarmente rispetto al mio insieme di vettori ho la massima quantità di questo vettore A che passa attraverso la superficie, se viceversa io metto la superficie perfettamente di taglio rispetto a come sono diretti i vettori del campo vettoriale A, nessun vettore taglia sostanzialmente la superficie quindi mi aspetto di dover prevedere un flusso 0 in questa condizione. Il caso intermedio, visto in sezione, in cui al vettore A associo una superficie inclinata, che sarà caratterizzata dal suo versore perpendicolare rispetto alla superficie e questo prodotto sarà un termine che contiene i moduli di entrambi i vettori, la dimensione della superficie e il coseno dell'angolo, quindi mi tiene conto che il flusso sarà massimo quando la normale alla superficie è allineata rispetto al campo vettoriale e sarà nullo quando la normale alla superficie è perpendicolare rispetto al campo vettoriale, sempre in approssimazione di A costante.







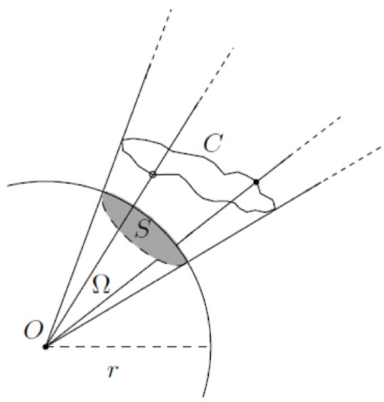
$$\boxed{\Phi = \mathbf{A} \cdot \Delta \mathbf{S} = A \Delta S \cos \alpha}$$

Naturalmente questo versore che mi identifica la posizione della superficie, non è univoco, perché può essere sia uscente che entrante, se io rientro il contorno e dico che il vettore sarà caratterizzato dalla normale uscente dò anche un verso a questo vettore. Se il campo vettoriale non è costante lungo tutta la superficie, divido la superficie in pezzetti sufficientemente piccoli, così che il campo risulti effettivamente costante su ogni singolo pezzetto e poi integro:

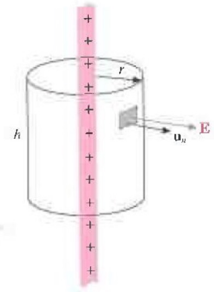
$$\Delta \mathbf{S}_i \rightarrow 0 \qquad \boxed{d\Phi = \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_n dS} \qquad \boxed{\Phi = \oint \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_n dS}$$

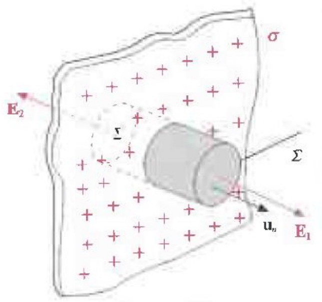
La seconda definizione è di angolo solido, che è "l'ombra sottesa" ad una superficie nello spazio, prendiamo in considerazione la generica C e ci mettiamo in un punto O, l'angolo solido definitivo dalla superficie C sarà l'angolo definito attraverso il cono geometrico che si ottiene seguendo tutto il contorno della superficie C centrato con il vertice nel punto O. Lo quantifico posizionandomi nel centro O e definendo una sfera di raggio R, lo,Bra definita dalla superficie C definisce una certa porzione della sfera e allora identifico l'angolo solido attraverso il rapporto: Naturalmente se io voglio definire l'angolo solido generico identificato da tutte le superfici, devo tenere conto di come sono orientate tutte queste superfici rispetto alla direzione radiale che congiunge O con la posizione, quindi se voglio dare una definizione più precisa, dovrò analogamente mettere assieme la direzione di r e la direzione della mia superficie con due versori:

$$\boxed{\Omega = \frac{S}{r^2}}$$



$$\boxed{d\Omega = \frac{\mathbf{u}_r \cdot d\mathbf{S}}{r^2} = \frac{\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_n dS}{r^2}}$$





CAMPO ELETTRICO RADIALE PERPENDICOLARE USCENTE DA ENTRAMBI I LATI

σ DENSITÀ SUP CARICA

$q = \sigma S$

$\phi(E) = ES \cdot 2 = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$ Sup base cilindro

$\Downarrow$

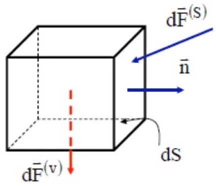
CAMPO ELETTRICO $\rightarrow E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ COSTANTE

$\sigma = \frac{Q}{Sup_{lastra}}$

Il 2 è perché mi aspetto di avere un campo perpendicolare rispetto alla superficie, quindi questo comporta che se io prendo una superficie di gauss rappresentata da un cilindro le cui basi parallele alla superficie, il flusso avverrà solamente attraverso le superfici di base e non rispetto a quelle alterali su cui corre parallelo, quindi posso calcolare solo quanto campo elettrico passa attraverso le superfici di base del cilindro che sono 2, e il campo elettrico sarà perpendicolare uscente dalla lastra nella direzione segnata e uscente dall'altro lato, di conseguenza avrò il flusso attraverso le DUE superfici di base del mio cilindro e dunque due volte il campo elettrico attraverso le superfici di base.

Sistema in equilibrio: dunque le carica sono sostanzialmente in equilibrio statico, dunque non si muovono e allora nessuna forza agisce su di esse, non mi aspetto allora che ci sia un campo tangente alla superficie, anzi mi aspetto un campo elettrico perpendicolare rispetto alla lastra, perché se così non fosse, potrei scomporre il campo elettrico e derivarne una componente parallela alla lastra e ciò muoverebbe le cariche che non sarebbero più in equilibrio statico. Dunque mi aspetto che il campo elettrico sia costante per superficie parallele rispetto alla lastra, quindi una buona superficie di gauss è quella rappresentata: un cilindro con basi parallele rispetto alla superficie della lastra, perché se il campo elettrico risulta essere parallelo allora il flusso avviene solo per le superfici circolari di base e non per le laterali.

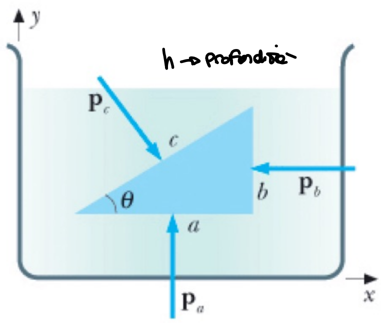
Gli sforzi di taglio li vedremo spesso nella prosecuzione dei nostri studi, sono forse di taglio sono componenti di forze che risultano parallele rispetto alle superfici. Se prendo in considerazione un volume di fluido ed applico una forza rispetto ad una suoerifcie laterale del mio cubo, questa forza vettoriale generica, sarà scomponibile in una forz aperpnedicolare rispetto alla superifcie è una componente parallela rispetto alla surorifcie che mi genera una componente di forza chiamata forza di taglio che genererebbe una scorrimento della mia suoerifice è se voglio mantenere in equilibrino il mio sistema le forze lungo la suoerifcie gli sforzi di taglio non li posso avere perché non supportato nei sistemi di fluidi, nel fkuidi in moto invece avremo sforzi di taglio che determineranno spostamenti.



$$\left.\begin{array}{l} F_t^{(S)} \Rightarrow \dfrac{dF_t^{(S)}}{dS} = \tau \\ F_n^{(S)} \Rightarrow \dfrac{dF_n^{(S)}}{dS} = p \end{array}\right\} \Rightarrow \text{scalari}$$

Per un fluido non pesante in equilibrio le pressioni sono caratteristiche uguali lungo tutte le direzioni, quindi prendiamo in considerazione questa parte di fluido:

FLUIDO NON PESANTE (GAS)
CONDIZIONI DI EQUILIBRIO



$$P_a = \frac{F_a}{S_a} = \frac{F_a}{a \cdot h}$$

$$P_b = \frac{F_b}{b \cdot h} \qquad P_c = \frac{F_c}{c \cdot h}$$

CONDIZIONI DI EQUILIBRIO

$x \Rightarrow F_b = F_c \sin\vartheta$

$y \Rightarrow F_a = F_c \cos\vartheta$

$\Longrightarrow$

$x \Rightarrow P_b\, b\cancel{h} = P_c\, c\cancel{h} \sin\vartheta \qquad b = c\sin\vartheta$

$y \Rightarrow P_a\, a\cancel{h} = P_c\, c\cancel{h} \cos\vartheta \qquad a = c\cos\vartheta$

$\Longrightarrow$

$x \Rightarrow P_b\, c\sin\vartheta = P_c\, c\sin\vartheta \qquad P_b = P_c$

$y \Rightarrow P_a\, c\cos\vartheta = P_c\, c\cos\vartheta \qquad P_a = P_c$

FLUIDO NON PESANTE $\quad P_a = P_b = P_c = P$

Tra due punti qualsiasi alle quote y_1 e y_2: $\boxed{\int_{p_1}^{p_2} dp = -\rho g \int_{y_1}^{y_2} dy} \rightarrow \boxed{p_2 - p_1 = -\rho g (y_2 - y_1)}$

Sulla superficie libera → $p_2 \equiv p_{atm}$: $\boxed{p_{atm} - p_1 = -\rho g h} \rightarrow \boxed{p_1 = p_{atm} + \rho g h}$

h = profondità

Suppongo di chiamare h la profondità complessiva del contenitore, quindi posso integrare questa espressione tra h e ,a quota 0, e che alla quota h ci sia pressione esterna, cioè pressione atmosferica. Questa è la legge di Stevino, che mi dà la variazione di pressione per ogni variazione di quota del mio sistema, in particolare se una delle due è la pressione esterna, mi dice come varia la pressione al discendere nel mio fluido pesante. Se il mio fluido è l'aria ρgh è trascurabile.

Il sistema è un sistema incomprimibili e abbiamo approssimato che la densità sia costante. La pressione atmosferica ha valori grandi di grandezza 10 alla 5, se io mi immergo nell'acqua e scendo in profondità di una quota h, la variazione della pressione segue grossomodo questa relazione:

$$\boxed{p(h) = \left(10^5 + 10^3 \cdot 9.8 \cdot h\right) \ \text{Pa}}$$

ogni 10 metri la pressione aumenta di circa 1 bar (circa 1 atm). Considero l'acqua praticamente incomprimibile, quindi a densità costante.

Si trova la legge di Stevino anche calcolando il peso di una colonna di liquido alta h:

$$\boxed{mg = \rho V g = \rho S h g \Rightarrow p = \frac{F}{S} = \frac{\rho S h g}{S} = \rho h g}$$

Una conseguenza della legge di Stevino è la legge di Pascal: Legge di Stevino $\boxed{p_1 = p_0 + \rho g h}$ p_0 pressione esterna

Se aggiungo però una variazione di pressione, questa di distribuisce equamente in ogni quota, cioè le espressioni che si trasmetto all'esterno si trasmettono all'interno del mio fluido.

$$\begin{cases} p_1 = p_0 + \rho g h_1 \\ p_i = p_0 + \rho g h_i \end{cases}$$

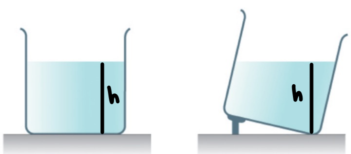
Se la pressione esterna subisce una variazione:

$$p_0 \rightarrow p_0 + \Delta p_0$$

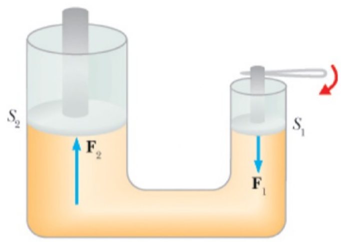
$$\begin{cases} p_1' = p_1 + \Delta p_0 \\ p_i' = p_i + \Delta p_0 \end{cases}$$

tutti i punti nel fluido subiscono la stessa variazione di pressione.

La legge di Stevino mi dice che la pressione dipende solamente dalla quota all'interno del fluido, allora dipende dai due tratti segnati, i termini a pressione costante saranno superfici orizzontali e corrisponde con la superficie a energia potenziale della forza peso costante.



Superficie libera di un liquido



Pressa idraulica

La pressa idraulica (o torchio) è un sistema a tubi chiuso con due uscite, una uscita caratterizzata da S1 e l'altra caratterizzata da S2, in cui S1<S2, io applico una forza sulla superficie S1, voglio vedere che succede a parità di quota dall'altra parte, la legge di Stevino ci dice che in condizioni statiche la pressione dipende solo dalla quota, quindi alla stessa quota dall'altra parte sarà uguale alla pressione P1.

$S_1 < S_2$

$P_1 = \frac{F_1}{S_1}$

$P_2 = P_1$

$\frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2} \Rightarrow F_2 = \frac{S_2}{S_1} F_1$

$F_2 > F_1$