



centroappunti.it

CORSO LUIGI EINAUDI, 55/B - TORINO

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 2516A

ANNO: 2021

A P P U N T I

STUDENTE: Forestieri Andrea

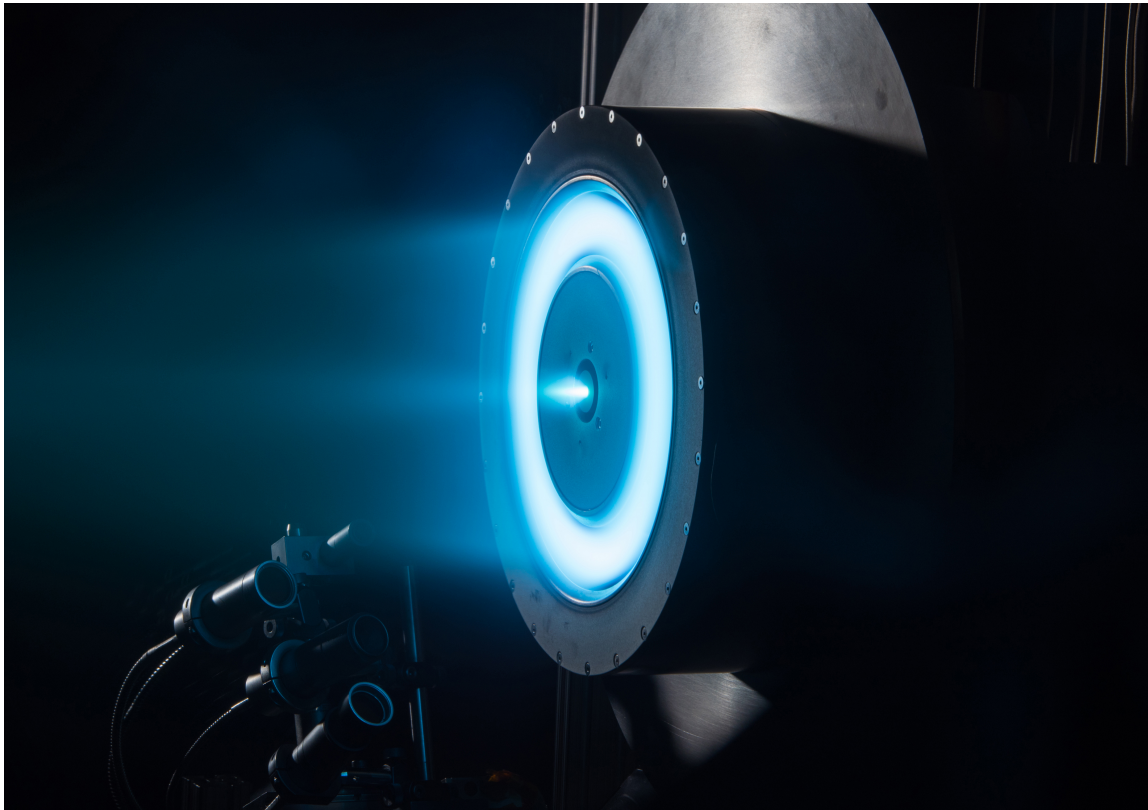
MATERIA: Propulsione - Prof. Casalino

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.

PROPULSIONE SPAZIALE



Dispense del corso

Politecnico di Torino

Indice

1	Generalità della propulsione spaziale	7
1.1	Perfomance del sistema propulsivo	8
1.2	Propulsione chimica e propulsione elettrica	12
1.3	Generatore di potenza	14
1.4	Ottimizzazione del payload	15
1.4.1	Caso 1	15
1.4.2	Caso 2	19
1.5	Richiami di meccanica del volo spaziale	24
1.5.1	Parametri orbitali	26
	Quantità utili	30
1.5.2	Variazione dei parametri orbitali	30
1.6	Prestazioni dei razzi	37
1.6.1	Razzo monostadio	37
1.6.2	Razzo multistadio	40
2	Manovre	46
2.1	Lancio	46
2.2	Trasferte tra orbite circolari e complanari	49
2.2.1	Trasferta di Hohmann	50
2.2.2	Trasferta biparabolica	55
2.2.3	Trasferta biellittica	56
2.3	Escape	57
2.4	Cambio di piano	61
2.5	Trasferte interplanetarie	63
2.6	Manovre con propulsione elettrica	67
2.6.1	Approssimazione di Edelbaum	67
2.6.2	Manovra di Edelbaum	71
3	Fondamenti della propulsione elettrica	78
3.1	Campo elettrico	78
3.2	Potenziale e energia del campo elettrico	81
3.3	Corrente elettrica	83
3.4	Campo magnetico	83
3.5	Circuiti	85
3.6	Onde elettromagnetiche	88
3.7	Conducibilità	89
3.8	Ionizzazione	90
3.8.1	Ionizzazione di molecole	97

Indice

4.6	Arcogetti	147
4.6.1	Principio di funzionamento	147
4.6.2	Design	154
4.6.3	Vita e affidabilità	155
	Equilibrio energetico del catodo	155
	Equilibrio energetico dell'anodo	155
	Equilibrio energetico del propellente	156
4.6.4	Innesco dell'arco	157
4.6.5	Perdite	158
4.6.6	Power processor unit	158
4.6.7	Integrazione con il satellite	159
4.6.8	Materiali	159
4.6.9	Prestazioni	159
4.7	Propulsori a microonde e propulsori laser elettrotermici	160
4.8	Dispositivi pulsati	161
5	Propulsione elettrostatica	162
5.1	Propulsori a ioni	163
5.1.1	Ionizzazione	163
5.1.2	Accelerazione degli ioni	168
	Analisi unidimensionale	168
	Accelerazione-decelerazione degli ioni	172
	Analisi bidimensionale	174
5.1.3	Neutralizzazione	176
	Catodo cavo	178
5.1.4	Prestazioni	180
5.1.5	Punti critici	182
5.1.6	Applicazioni	182
5.2	FEEP e colloidal thruster	183
5.2.1	FEEP	183
5.2.2	Propulsori colloidali	184
5.3	Propulsori ad effetto Hall	185
5.3.1	Principi fisici	185
5.3.2	Funzionamento	187
5.3.3	Prestazioni	189
5.3.4	Punti critici	192
5.4	Confronto tra i propulsori elettrostatici	193
6	Propulsione elettromagnetica	194
6.1	VASIMR	194
	Prestazioni previste	196
6.2	Principi della propulsione elettromagnetica	197
	Equazioni della magnetogasdinamica	198
	Forma unidimensionale e stazionaria	198

1 Generalità della propulsione spaziale

La propulsione si basa sul principio di azione e reazione. Se si considera un sistema isolato, la quantità di moto si conserva. Nello spazio non c'è (quasi) nulla con cui scambiare quantità di moto, pertanto il sistema spacecraft è isolato. L'unico modo per generare spinta consiste nell'averne a bordo del sistema qualcosa con cui scambiare quantità di moto: il propellente. Quando si vuole accelerare qualcosa per spingerlo via e ottenerne spinta si necessita di energia. La fonte di questa energia delimita i due grandi campi di propulsione spaziale: propulsione chimica e propulsione elettrica. Nel primo la fonte dell'energia è data da una reazione chimica mentre nel secondo da un generatore di potenza elettrica. Si consideri un sistema isolato, lontano da qualunque altra massa che possa generare attrazione gravitazionale. Il sistema è caratterizzato da una velocità v al tempo t . Si effettua uno studio unidimensionale. Dopo un tempo infinitesimo dt lo spacecraft ha espulso una massa dm_p di propellente e cambia la sua velocità da v a $v + dv$. La massa dm_p di propellente è stata espulsa con una velocità c rispetto allo spacecraft, quindi con velocità assoluta $c - v$. Si applica il principio di conservazione della quantità di moto:

$$mv = (m - dm_p)(v + dv) - dm_p(c - v)$$

Semplificando:

$$mdv = dm_p c$$

Il cambiamento infinitesimo di velocità è direttamente proporzionale alla quantità infinitesima di propellente espulso e alla velocità con cui viene espulso. Quest'equazione dev'essere leggermente modificata in quanto il propellente allo stato gassoso viene espulso in modo continuo. Si introduce quindi la portata:

$$\dot{m}_p = \frac{dm_p}{dt}$$

Il differenziale dm_p può essere scritto come portata per dt mentre il differenziale dv può essere scritto come accelerazione per dt . Pertanto:

$$m \frac{dv}{dt} = \dot{m}_p c$$

Questa equazione esprime il prodotto della massa e dell'accelerazione del sistema a massa variabile. Il prodotto massa per accelerazione è uguale alla spinta:

$$T = \dot{m}_p c$$

Se si vuole accelerare il propellente da velocità nulla a velocità c rispetto al sistema di riferimento spacecraft si necessita di una certa quantità di energia. Riferendosi all'unità di tempo, la potenza della spinta è definita come:

$$P_T = \frac{1}{2} \dot{m}_p c^2 = \frac{1}{2} T c$$

1.1. Performance del sistema propulsivo

Per ragioni storiche si è deciso di utilizzare il peso $m_p g_0$ sulla superficie terrestre e non la massa m_p per la definizione di impulso specifico. Nel caso in cui spinta e portata rimangono costanti durante la manovra si ha:

$$I_{sp} = \frac{I_t}{m_p g_0} = \frac{T \Delta t}{\dot{m}_p \Delta t g_0} = \frac{T}{\dot{m}_p g_0} = \frac{c}{g_0}$$

Il significato di I_{sp} e c è fondamentalmente lo stesso e si passa da uno all'altro per mezzo della costante g_0 . L'impulso specifico, espresso in secondi, è approssimativamente la velocità efficace di scarico diviso 10. Esso misura quanto efficacemente viene usata la massa di propellente espulsa. Si immagini di avere una certa massa di propellente m_p e di voler generare della spinta con una velocità efficace di scarico c . Si immagini che la spinta T generata sia uguale al peso del propellente:

$$T = m_p g_0$$

Ci si chiede: per quanto tempo il motore può darmi questo livello di spinta? L'impulso totale è:

$$I_t = T \Delta t = I_{sp} m_p g_0$$

Ma la spinta del motore è proprio $m_p g_0$:

$$T \Delta t = I_{sp} T$$

Da cui:

$$\Delta t = I_{sp}$$

A parità di massa di propellente, se si ha c più grande, si avrà la stessa spinta per un tempo maggiore. Si avrà quindi una variazione di velocità maggiore. L'impulso specifico può essere visto quindi come il tempo per cui una certa quantità di propellente può dare una spinta pari al suo peso sulla Terra. Il significato pratico è che più è grande I_{sp} più si può avere una stessa spinta per un tempo maggiore o una spinta più grande per uno stesso tempo. Da un punto di vista dell'effetto ottenuto, avere spinta grande per un tempo piccolo o spinta piccola per un tempo grande non fa alcuna differenza (in prima approssimazione). Se si vuole cambiare la velocità di un satellite spingere con 10 N per 1 s o spingere con 1 N per 10 s non fa (quasi) alcuna differenza. In realtà non è proprio così perché ci sono altre forze che agiscono sullo spacecraft, ad esempio la gravità. Infatti, l'impulso totale $I_t = m_p c$, pur indicando quello che un motore è capace di dare in base a quanto propellente ha a bordo e quale velocità efficace di scarico (impulso specifico) è capace di produrre, non inquadra pienamente le caratteristiche del sistema propulsivo. Infatti, quello che interessa è il cambiamento di velocità, ovvero l'effetto dell'accelerazione nel tempo. Lo stesso impulso totale ha effetto diverso sul cambiamento di velocità di un sistema di massa piccola rispetto a uno di massa grande. Si introduce un'ulteriore grandezza per descrivere questo effetto: la velocità caratteristica, detta "delta-V". Essa è l'integrale dell'accelerazione che il propulsore dà al sistema per mezzo della spinta:

$$\Delta V = \int_{t_0}^{t_f} \frac{T}{m} dt$$

1.1. Performance del sistema propulsivo

$\Delta V/c$	m_f/m_0	m_0/m_f
5	0.0067	148
2	0.135	7.39
1	0.368	2.72
0.5	0.606	1.65
0.2	0.819	1.22
0.1	0.905	1.11

Tabella 1.1: Risultati dell'equazione del razzo

Se si parte con 100 kg e $\Delta V = c$ si arriva a destinazione con 37 kg avendo usato 63 kg di propellente. Le cose peggiorano in fretta se ΔV è il doppio di c : si arriva a destinazione con 13 kg avendo usato 87 kg di propellente. Per contenere 87 kg di propellente magari serve un serbatoio che pesa 10 kg, quindi dei 13 kg a destinazione solo 3 kg sarebbero di carico utile. In soldoni, se si necessita di un certo ΔV la velocità efficace di scarico dei motori deve essere comparabile (tanto meglio quanto c è più grande). Tanto più grande è c e tanto meno propellente è richiesto per una data manovra. Per ogni missione, assegnata l'orbita di partenza e di arrivo, si può identificare un ΔV tipico associato alla missione:

Missione	ΔV [km/s]
Inserimento in LEO	10
Station keeping per un anno	0.5
LEO-GEO (impulsiva)	3.5
LEO-GEO (continua)	6
Fuga dalla Terra (impulsiva)	3.2
Fuga dalla Terra (continua)	8
Terra-Marte (impulsiva)	5.5
Terra-Marte (continua)	6
Terra-Giove (continua)	16.7
Terra-Alpha Centauri	30000

Tabella 1.2: Velocità caratteristiche tipiche

In prima approssimazione, per una data massa media del sistema, l'impulso totale dipende solo dal tipo di missione (dal ΔV):

$$I_t \approx m_{\text{avg}} \Delta V$$

1.2. Propulsione chimica e propulsione elettrica

questa tipologia di propulsori estremamente scalabili. Si possono costruire propulsori piccoli che bruciano portate piccole fornendo spinte piccole e propulsori grandi che bruciano portate grandi fornendo spinte grandi (si passa dai mN ai MN). La scalabilità della spinta è data dal poter aumentare o diminuire la portata a parità di velocità efficace di scarico. Si ha quindi il vantaggio di avere spinte arbitrariamente grandi, con lo svantaggio che però vengono fornite con consumi piuttosto elevati.

Per la propulsione elettrica invece la portata di propellente \dot{m}_p passa all'interno del propulsore e riceve una certa potenza elettrica P_E . Il propulsore è capace di usare la potenza elettrica per convertirla in potenza cinetica del propellente:

$$\eta P_E \approx \dot{m}_p \frac{c^2}{2} = T \frac{c}{2} = P_T$$

Mentre per i propulsori chimici il rendimento per la conversione di energia chimica in cinetica è molto elevato, questo non è vero per i propulsori elettrici. Infatti, la conversione di energia dalla forma elettrica a cinetica viene accompagnata da perdite notevoli. Il segno \approx è presente per le medesime considerazioni fatte in precedenza: si trascura l'energia iniziale del propellente e si trascura la differenza tra u_e e c . Da questa equazione si ha:

$$c = \sqrt{\frac{2\eta P_E}{\dot{m}_p}}$$

Si possono, almeno in teoria, avere valori di c grandi a piacere o aumentando P_E o diminuendo \dot{m}_p . Almeno in teoria nel senso che poi effettivamente bisogna accelerarlo in qualche modo il propellente, ma quest'analisi preliminare non si cura delle tecnologie utilizzate per realizzare l'accelerazione. Per un propulsore chimico, la potenza fornita ($\dot{m}_p E_{ch}$) e richiesta ($\dot{m}_p \frac{c^2}{2}$) sono legate alla massa di propellente: se aumenta una allora aumenta anche l'altra. In questo caso invece la fornita P_E e la richiesta $\dot{m}_p \frac{c^2}{2}$ sono scorrelate. Pertanto, a parità di potenza, si può far accelerare di più una massa più piccola o far accelerare di meno una massa più grande. Da

$$\eta P_E \approx T \frac{c}{2}$$

si può anche scrivere:

$$c = \frac{2\eta P_E}{T}$$

Si possono, almeno in teoria, avere valori di c grandi a piacere o aumentando P_E o diminuendo T . Questa è la sostanziale differenza tra propulsione elettrica e chimica; la propulsione chimica è capace di generare spinte arbitrariamente grandi con un impulso specifico limitato. Viceversa, la propulsione elettrica è capace di generare impulsi specifici molto maggiori della propulsione chimica ma con lo svantaggio di dover avere a bordo una sorgente di energia elettrica (pannelli solari, generatore nucleare) e di dover accettare spinte piccole (qualche N di spinta al massimo). Se si volessero spinte grandi si dovrebbero avere P_E elevatissime, ma il generatore ha una sua massa e ciò ricadrebbe sull'accelerazione del sistema (vedere in seguito). La scelta tra una propulsione o l'altra viene effettuata a seconda delle necessità e della convenienza. Di certo non si può fare un inserimento in orbita con propulsione elettrica a causa

1.4. Ottimizzazione del payload

1.4 Ottimizzazione del payload

In luce con quanto esposto, nasce la necessità di cercare un compromesso tra aumentare l'impulso specifico e limitare la massa del generatore di potenza:

$$c = \frac{2\eta P_E}{T}$$

A parità di spinta, un aumento di impulso specifico comporta un aumento di potenza necessaria. L'aumento di potenza necessaria si traduce in aumento di massa del generatore:

$$m_s = \alpha P_E = \alpha \frac{Tc}{2\eta}$$

Il processo di ottimizzazione ha come scopo la massimizzazione del payload. Per svolgere questo studio si parte dall'esplicitizzazione della massa iniziale:

$$m_0 = m_u + m_p + m_s$$

La massa di propellente, per un certo sforzo propulsivo (per un certo I_t), è inversamente proporzionale all'impulso specifico:

$$m_p = \frac{I_t}{g_0 I_{sp}}$$

La massa del generatore, a parità di spinta, è invece tanto più grande quanto è grande l'impulso specifico. Si cerca quindi il valore ottimale di c che massimizza m_u . Si esprimeranno pertanto tutte le grandezze in funzione di c . Prima di farlo, bisogna però definire in modo preciso la missione. A questo scopo, si possono utilizzare diversi approcci a seconda di come la si vuole specificare. Qui verranno riportati due esempi. Il primo è più facile dal punto di vista della trattazione numerica perché permette di ottenere soluzioni in forma chiusa, i.e. si ottiene direttamente una formula che esprime l'impulso specifico ottimale. Tuttavia, il primo approccio definisce la missione in modo non preciso. Infatti, esso fa riferimento all'impulso totale, il quale dipende dalla massa media durante la missione. A sua volta, la massa media dipende da quanto propellente viene consumato, e pertanto dall'impulso specifico. Si nota quindi come si impone a priori una grandezza, l'impulso totale, che in realtà non può essere specificata perché dipende dalla soluzione del processo di ottimizzazione. Il secondo modo è più accurato perché fa riferimento al ΔV , la quale è una grandezza praticamente costante per un certo tipo di missione ed è indipendente dall'evoluzione della massa durante la missione stessa. La missione è anche definita dalla sua durata, parametro che verrà utilizzato in questa trattazione (in alternativa si potrebbe utilizzare il valore della spinta).

1.4.1 Caso 1

Si hanno 3 aspetti da tenere in conto: dove si vuole andare (l'orbita target determina I_t), la durata di missione Δt e il livello tecnologico del propulsore (α e η). La trattazione può essere svolta fissando una massa iniziale o esprimendo tutto in termini relativi rispetto alla massa iniziale.

1.4. Ottimizzazione del payload

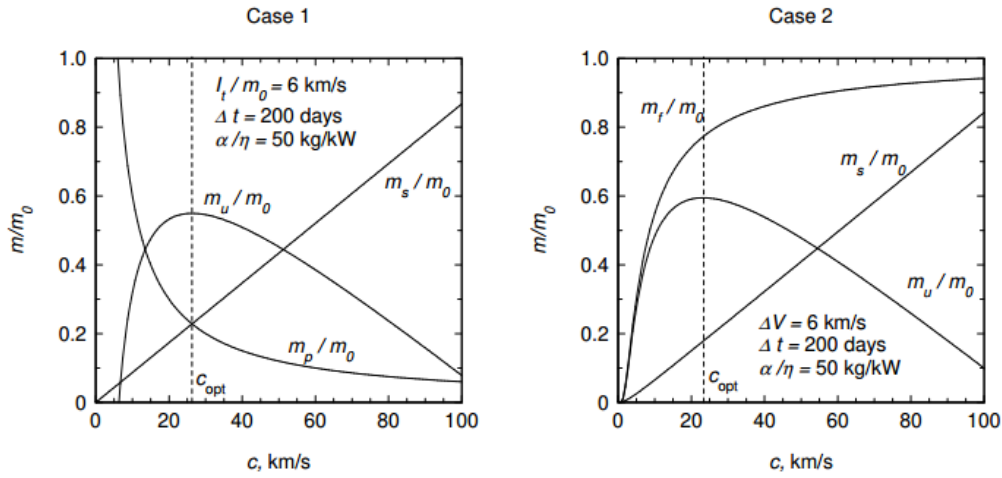


Figura 1.1: Velocità efficace di scarico ottimale

$$\frac{\Delta t}{c^2} - \frac{\beta}{2} = 0$$

$$c_{\text{opt}} = \sqrt{\frac{2\Delta t}{\beta}} = \sqrt{\frac{2I_t}{\beta T}}$$

In fig.1.1, a sinistra viene rappresentato lo studio analitico appena svolto in forma grafica per determinati valori dei parametri. Si può verificare numericamente che nella condizione

$$c_{\text{opt}} = \sqrt{\frac{2\Delta t}{\beta}} = \sqrt{\frac{2I_t}{\beta T}}$$

ovvero la condizione che massimizza il carico utile, si ha la particolarità che la massa del generatore è esattamente uguale alla massa del propellente. Questo è facilmente verificabile sostituendo il valore di c ottimale in:

$$\left(\frac{m_p}{m_0}\right)_{c_{\text{opt}}} = \frac{I_t}{c_{\text{opt}}} \frac{1}{m_0} = \frac{I_t}{\sqrt{\frac{2I_t}{\beta T}}} \frac{1}{m_0} = \sqrt{\frac{\beta}{2}} \sqrt{\frac{T}{m_0}} \frac{I_t}{m_0} = \sqrt{\frac{\beta}{2}} \sqrt{\frac{1}{\Delta t}} \frac{I_t}{m_0}$$

$$\left(\frac{m_s}{m_0}\right)_{c_{\text{opt}}} = \beta \frac{T c_{\text{opt}}}{2} \frac{1}{m_0} = \beta \frac{T}{2} \sqrt{\frac{2I_t}{\beta T}} \frac{1}{m_0} = \sqrt{\frac{\beta}{2}} \sqrt{\frac{T}{m_0}} \frac{I_t}{m_0} = \sqrt{\frac{\beta}{2}} \sqrt{\frac{1}{\Delta t}} \frac{I_t}{m_0}$$

Sostituendo nell'equazione del carico utile si ha:

$$\left(\frac{m_u}{m_0}\right)_{c_{\text{opt}}} = 1 - \left(\frac{m_p}{m_0}\right)_{c_{\text{opt}}} - \left(\frac{m_s}{m_0}\right)_{c_{\text{opt}}} = 1 - 2 \sqrt{\frac{\beta}{2}} \sqrt{\frac{T}{m_0}} \frac{I_t}{m_0}$$

1.4. Ottimizzazione del payload

L'effetto di dimezzare β o raddoppiare Δt è lo stesso. Viceversa, se varia l'impulso totale, ovvero il tipo di missione, l'iperbole che rappresenta m_p/m_0 cambia. Se viene aumentato I_t è ragionevole pensare che aumenti anche Δt (e.g. se bisogna andare su un pianeta più lontano servirà senz'altro più tempo). Pertanto, il caso di cambiamento di destinazione della missione viene qui studiato come cambiamento di I_t a parità di T , ovvero assumendo che I_t e Δt aumentino nello stesso modo. Così facendo, la curva m_s/m_0 non cambia. L'iperbole che rappresenta m_p/m_0 si alza all'aumentare di I_t , portando ad avere una payload fraction ottimale che diminuisce in corrispondenza di c maggiori.

Quando bisogna scegliere quale propulsore mettere a bordo per una data missione queste considerazioni diventano estremamente utili. Si può concludere che, fissati la missione e il livello tecnologico, tanto più tempo si ha a disposizione quanto più è conveniente avere impulsi specifici elevati. Allo stesso modo, per una data missione e per un dato tempo, se si ha un livello tecnologico migliore conviene adottare impulsi specifici più elevati. Allo stesso modo, se si vuole andare più lontano l'impulso specifico deve crescere per massimizzare il payload. Ribaltando il discorso, si può osservare che propulsori che danno impulsi specifici elevati saranno adatti a missioni che vanno lontano, a missioni con un livello tecnologico elevato e a missioni che hanno tanto tempo a disposizione. Viceversa, se si ha una missione vicina o breve o con un livello tecnologico basso allora propulsori con impulsi specifici bassi sono più adatti. Infatti, nell'ambito della propulsione elettrica, la propulsione elettrotermica fornisce impulsi specifici bassi e viene utilizzata per missioni a basso ΔV . Invece, i propulsori elettrostatici hanno impulsi specifici alti e vengono usati per missioni interplanetarie.

Si ribadisce che questa trattazione appena svolta è approssimata, perché ogni missione è caratterizzata da un certo ΔV ed invece qui si è imposto l'impulso totale. Bisogna modificare allora la trattazione per tenere in conto che a seconda del c che si adotta la massa media durante la missione cambia e a parità di ΔV l'impulso totale che si deve fornire è funzione di c , mentre nella trattazione appena svolta i due erano indipendenti.

1.4.2 Caso 2

Al posto di avere assegnato I_t , si assegnano le grandezze ΔV , Δt e β . Si scrive la massa iniziale come:

$$m_0 = m_f + m_p$$

Con

$$m_f = m_u + m_s$$

Si può quindi scrivere il payload senza far comparire direttamente la massa di propellente:

$$m_u = m_f - m_s$$

Il legame tra massa iniziale e finale è dato dall'equazione di Tsiolkowski:

$$m_f = m_0 e^{-\frac{\Delta V}{c}}$$

La massa del generatore è data da:

$$m_s = \alpha P_E = \alpha \dot{m}_p \frac{c^2}{2} \frac{1}{\eta}$$

1.4. Ottimizzazione del payload

ha il termine

$$\left(1 - e^{-\frac{\Delta V}{c}}\right)$$

che tende a 1 quando $c/\Delta V$ tende a 0 e tende a 0 quando $c/\Delta V$ tende a ∞ . Il termine viene però moltiplicato per $(c/\Delta V)^2$, pertanto nella zona vicino a $c/\Delta V = 0$ si comporta come una parabola, partendo con tangente orizzontale e portandosi sopra la curva m_f/m_0 per poi tornare sotto. Quando $c/\Delta V$ tende a ∞ c'è un termine $(c/\Delta V)^2$ che moltiplica un termine $\left(1 - e^{-\frac{\Delta V}{c}}\right)$ e il risultato netto è che la curva tende a diventare una retta. Il carico utile è la differenza tra m_f e m_s , pertanto la payload fraction è la distanza tra le due curve. Si ha che se c è piccolo si hanno dei carichi utili negativi, in quanto m_s sarebbe superiore a m_f . Pertanto, solo quando c è sufficientemente grande si ha che m_f diventa maggiore di m_s , permettendo di avere payload. Ovviamente i valori di c per cui questo non avviene sono da scartare perché la missione non è possibile. Dal punto di vista grafico si osserva che il punto di ottimo si ha dove la derivata del carico utile è 0, questo vuol dire dove la derivata della massa finale è uguale alla derivata della massa del generatore i.e. quando la tangente alle due curve è uguale. Anche in questo caso ci si chiede cosa succede se si ha più tempo a disposizione, se si cambia il target della missione e se cambia il livello tecnologico. In questo caso il ragionamento si basa tutto sul vedere cosa accade al parametro

$$\frac{\alpha \Delta V^2}{2\eta \Delta t}$$

Se cambia il parametro, l'unica cosa che cambia è la curva m_s/m_0 . Se il livello tecnologico è migliore, Δt cresce o ΔV diminuisce (il target è più vicino) allora il parametro diminuisce e la curva m_s/m_0 a valori minori per ogni ascissa e il payload ottimale aumenta in corrispondenza di $c/\Delta V$ più elevati. In termini di c , i ragionamenti sono analoghi a prima: se migliora il livello tecnologico bisogna adottare c più elevato e si ha carico utile ottimale maggiore. Idem per tempi a disposizione maggiori. Un'analisi più accurata deve essere fatta per la diminuzione di ΔV . Infatti, sebbene dal grafico non si possa notare, è vero che il carico utile aumenta in corrispondenza di $c/\Delta V$ più elevati. Tuttavia, sebbene $c/\Delta V$ aumenti si ha che c diminuisce (diminuiscono sia c che ΔV , ma ΔV diminuisce di più e il loro rapporto aumenta). Nel caso in cui invece il parametro aumenta, la curva m_s/m_0 sale fino ad arrivare ad un caso limite dove le due curve diventano tangenti. In questo caso il carico utile ottimale è nullo, ovvero il meglio che si può fare è portare nulla a destinazione. Questo caso rappresenta un limite di fattibilità della missione. In genere, si ragiona a target e livello tecnologico fissato, quindi la variabile il tempo di spinta. Se il tempo diventa troppo piccolo si arriva al caso limite ed esso rappresenta quindi il carico limite della missione. A partire da questo valore, facendo crescere il tempo la curva si abbassa, il payload ottimale aumenta e c per ottenere il payload ottimale aumenta. Al limite, se il tempo fosse infinito, si potrebbe adottare un impulso specifico infinito che consentirebbe di portare a destinazione tutta la massa con la quale si è partiti; si avrebbe un generatore infinitesimo che produrrebbe un impulso specifico infinito, che consente di fare la missione senza propellente.

Tirando le somme:

- l'impulso specifico ottimale cresce e il payload diminuisce quando la missione richiede uno sforzo propulsivo maggiore (i.e. quando I_t e ΔV aumentano)

1.4. Ottimizzazione del payload

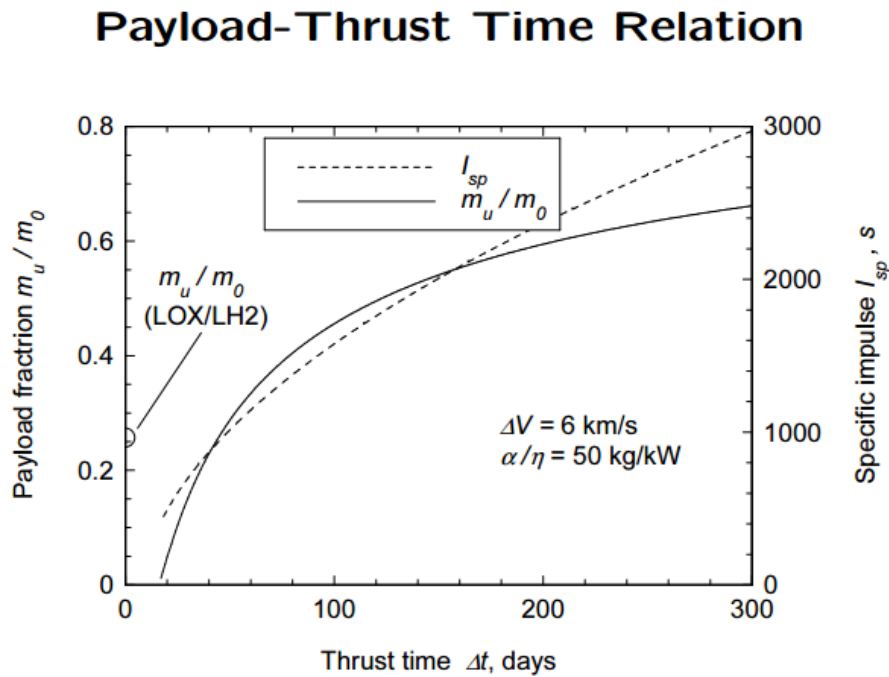


Figura 1.2: Relazione tra tempo a disposizione, payload ottimale e impulso specifico

Va notato che a bordo del satellite spesso c'è già un generatore di potenza per altri scopi, e.g. per l'elettronica di bordo. Si può osservare che, se si può togliere al payload la potenza elettrica per alcuni periodi, la si può usare per il sistema propulsivo. In questo caso, la presenza del generatore a bordo non andrebbe vista come una penalità in termini di massa, perché dal punto di vista della missione propulsiva il generatore di potenza fa parte del payload. Pertanto, nell'espressione del carico utile il termine di massa del generatore non andrebbe esplicitata:

$$\frac{m_u}{m_0} = 1 - \frac{I_t}{m_0} \frac{1}{c}$$

Per massimizzare il carico utile bisogna quindi molto semplicemente aumentare l'impulso specifico, così da diminuire la massa di propellente necessaria. L'impulso specifico ottimale sarebbe pari a infinito e, dal momento che la potenza elettrica disponibile è limitata, la spinta andrebbe ad annullarsi:

$$T = \frac{2\eta P_E}{c}$$

Il tempo di missione risulterebbe quindi infinito. Anche in questo caso bisogna cercare un compromesso: bisognerà utilizzare il massimo valore di impulso specifico in base al tempo che si ha a disposizione.

Un satellite geostazionario ha bisogno di manovre di stationkeeping per contrastare le perturbazioni causate dagli effetti gravitazionali della Luna e del Sole. Per determinati periodi

1.5. Richiami di meccanica del volo spaziale

Con

$$\mu = GM$$

parametro gravitazionale, prodotto della costante di gravitazione universale e della massa del corpo principale. Si possono quindi scrivere le equazioni del moto:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{V}$$

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{g} + \frac{\mathbf{T}}{m} + \frac{\mathbf{D}}{m} + \frac{\mathbf{L}}{m}$$

La derivata del vettore velocità è dato genericamente dalla somma dei vettori accelerazione gravitazionale, spinta, resistenza e portanza. Accanto alle equazioni del moto si aggiunge l'equazione che esprime la variazione di massa dello spacecraft:

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{T}{c}$$

In generale, potrebbero essere presenti altre forze, come effetti gravitazionali dovuti ad altri corpi. Tuttavia, nel problema dei due corpi essi vengono trascurati. Se ci si riduce alla sola presenza di \mathbf{g} , si dimostra che la soluzione del problema, ovvero la traiettoria dello spacecraft, è una conica di equazione:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \nu}$$

con p semilato retto, e eccentricità e ν anomalia vera. Il corpo principale occupa uno dei due fuochi. A seconda del valore di e la conica può essere:

- un cerchio per $e = 0$
- un'ellisse per $0 < e < 1$
- una parabola per $e = 1$
- un'iperbole per $e > 1$

Il punto da cui si misura ν è il periastro. La soluzione mostra che esistono due integrali primi, i.e. due costanti del moto:

- Energia totale

$$\mathcal{E} = \frac{V^2}{2} - \frac{\mu}{r}$$

qui sopra riportata come energia totale specifica, riferita all'unità di massa dello spacecraft. La somma di energia cinetica e energia potenziale gravitazionale è costante. Si assume che l'energia potenziale gravitazionale, definita a meno di una costante, sia nulla quando la distanza dal corpo principale tende a infinito. Pertanto, la costante di integrazione è pari a 0. La conservazione dell'energia totale si traduce in decrementi di velocità allontanandosi dal corpo e incrementi di velocità avvicinandosi ad esso.

1.5. Richiami di meccanica del volo spaziale

Esso è legato al momento angolare dell'orbita come indicato sopra e geometricamente rappresenta la distanza tra il corpo principale e il punto dell'orbita in cui l'anomalia vera è 90° o 270°.

- **Eccentricità e**
Definisce la forma dell'orbita. Si può esprimere come:

$$e = \sqrt{1 + 2\mathcal{E} \left(\frac{h}{\mu}\right)^2}$$

Si può anche definire un vettore eccentricità, con espressione:

$$\mathbf{e} = \frac{\left(V^2 - \frac{\mu}{r}\right) \mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{V}) \mathbf{V}}{\mu}$$

Esso ha come modulo il valore dell'eccentricità e punta nella direzione del periastro.

- **Inclinazione i**
Definita dall'angolo tra il piano dell'orbita e la normale al piano di riferimento. Si definisce il sistema geocentrico equatoriale: centrato nella Terra, con asse \hat{I} che punta in direzione dell'equinozio di primavera, asse \hat{J} perpendicolare a \hat{I} sul piano equatoriale e asse \hat{K} a completare la terna verso l'emisfero che contiene Polaris. L'inclinazione è data da:

$$i = \cos^{-1} \left(\frac{h_K}{h} \right)$$

con h_K componente di h lungo \hat{K} .

- **Ascensione retta del nodo ascendente Ω**
Definita dall'angolo tra la linea dei nodi e l'asse \hat{I} . La definizione matematica è:

$$\Omega = \cos^{-1} \left(\frac{n_I}{n} \right)$$

Con:

$$\mathbf{n} = \mathbf{K} \times \mathbf{h}$$

vettore linea dei nodi, che punta verso il nodo ascendente.

- **Argomento del periastro ω**
Definito dall'angolo tra la linea dei nodi e il vettore eccentricità (che punta verso il periastro). La definizione matematica è:

$$\omega = \cos^{-1} \left(\frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}}{en} \right)$$

- **Anomalia vera ν**
Definisce dove si trova lo spacecraft lungo l'orbita ed è data dall'angolo tra il vettore

1.5. Richiami di meccanica del volo spaziale

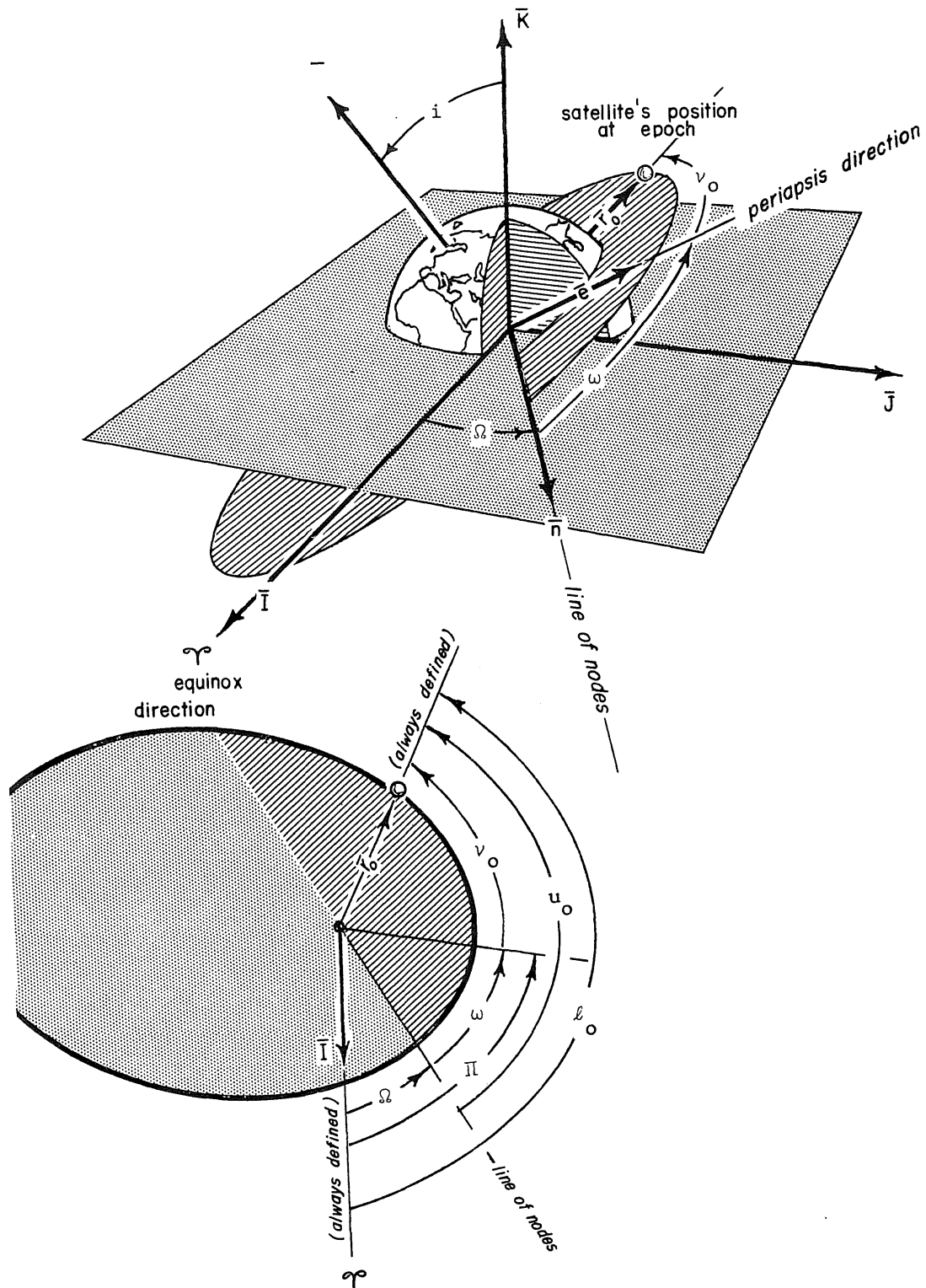


Figura 1.3: Parametri orbitali classici

1.5. Richiami di meccanica del volo spaziale

- direzione tangenziale a_T (direzione dell'orizzonte)
- direzione normale al piano dell'orbita a_W

Il secondo fa riferimento a:

- direzione lungo la velocità a_V
- direzione sul piano e normale alla velocità a_N (diretta verso l'interno)
- direzione normale al piano dell'orbita a_W

Le relazioni tra queste grandezze sono:

$$a_R = \frac{h}{pV} [(e \sin \nu) a_V - (1 + e \cos \nu) a_N]$$

$$a_T = \frac{h}{pV} [(1 + e \cos \nu) a_V + (e \sin \nu) a_N]$$

Si possono anche introdurre la velocità angolare media e l'anomalia media:

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$$

$$M = n(t - t_p)$$

L'anomalia media è l'anomalia vera che si avrebbe allo stesso tempo dal passaggio al periastro se l'orbita fosse circolare. La variazione dei parametri orbitali in funzione delle componenti di accelerazione è data dalle equazioni di Gauss:

$$\dot{a} = \frac{2a^2}{\sqrt{\mu p}} \left[(e \sin \nu) a_R - \left(\frac{p}{r}\right) a_T \right] = \left(\frac{2a^2 V}{\mu}\right) a_V$$

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[(\sin \nu) a_R + \left(\frac{r}{p}\right) (e \cos^2 \nu + 2 \cos \nu + e) a_T \right] = \\ &= \frac{1}{V} \left[2(e + \cos \nu) a_V - \left(\frac{a \sin \nu}{r}\right) a_N \right] \end{aligned}$$

$$i = \frac{r}{\sqrt{\mu p}} \cos(\omega + \nu) a_W$$

$$\dot{\Omega} = \frac{r}{\sqrt{\mu p}} \frac{\sin(\omega + \nu)}{\sin(i)} a_W$$

$$\begin{aligned} \dot{\omega} &= -\dot{\Omega} \cos i - \frac{\sqrt{\frac{p}{\mu}}}{e} \left[(\cos \nu) a_R - \sin \nu \left(1 + \frac{r}{p}\right) a_T \right] = \\ &= -\dot{\Omega} \cos i + \frac{1}{eV} \left[(2 \sin \nu) a_V + \frac{r}{p} (2e + \cos \nu + e^2 \cos \nu) a_N \right] \end{aligned}$$

1.5. Richiami di meccanica del volo spaziale

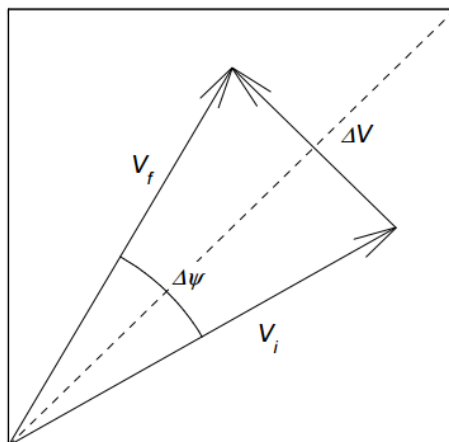


Figura 1.4: Cambio di piano

lo scopo della manovra è cambiare il semiasse, ovvero l'energia, il punto più conveniente per farla è il periastro e il punto più sconveniente è l'apoastro.

Un altro importante tipo di manovra è il cambiamento di inclinazione del piano dell'orbita. L'inclinazione dell'orbita che si può ottenere da un lancio è come minimo la latitudine del sito di lancio (può essere maggiore ma non minore). Infatti, è facilmente visualizzabile geometricamente che, data una certa latitudine, i piani orbitali disponibili sono quei piani che intersecano il centro della Terra e il sito di lancio. Per esempio, se si lancia da Cape Kennedy (latitudine 28° nord), è facilmente visualizzabile che il piano equatoriale non passa da Cape Kennedy. Pertanto, i piani orbitali che si possono ottenere dal lancio sono i piani con un minimo di 28° di latitudine, su cui giacciono Cape Kennedy e il centro di massa della Terra. Pertanto, se si vuole mettere un satellite in orbita geostazionaria, bisogna cambiare il piano dell'orbita qualora il satellite non sia lanciato dall'equatore. Il piano orbitale è definito dal vettore posizione e dal vettore velocità. Il vettore posizione può essere cambiato solo come conseguenza della variazione del vettore velocità, pertanto per cambiare il piano orbitale bisogna variare la direzione della velocità del satellite. Fig. 1.4 mostra che per ruotare una velocità V di un angolo $\Delta\psi$ è necessario un ΔV pari a:

$$\Delta V = 2V \sin\left(\frac{\Delta\psi}{2}\right)$$

In questo specifico caso si ipotizza una spinta impulsiva, ovvero un cambiamento di velocità istantaneo. La conclusione che si trae è che se si vuole cambiare l'inclinazione dell'orbita il costo è maggiore tanto più è grande la velocità. Pertanto, il punto più efficace per eseguire la manovra è l'apoastro.

Le considerazioni fatte sull'energia si possono vedere da un altro punto di vista. Si richiama l'equazione del moto:

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{\mathbf{T}}{m} + \frac{\mathbf{D} + \mathbf{L}}{m} + \mathbf{g}$$

1.5. Richiami di meccanica del volo spaziale

L'effettiva variazione di velocità è la velocità caratteristica meno 3 termini. Un termine è legato alle perdite per disallineamento, un termine è legato alle perdite per resistenza ed un termine legato alle perdite gravitazionali. Idealmente, il propulsore può fornire un certo ΔV , ma quello reale è in genere più piccolo per le perdite.

Le perdite per disallineamento

$$\int_{t_i}^{t_f} \frac{T}{m} (1 - \cos \alpha) dt$$

spariscono quando $\alpha = 0$. Tuttavia, in certi casi introdurre perdite per disallineamento può ridurre in misura maggiore altre perdite come quelle per gravità. Altre volte, si introducono queste perdite perché lo scopo della manovra non è variare il modulo della velocità. Ad esempio, per cambiare l'inclinazione del piano orbitale lo sforzo propulsivo non serve a cambiare il modulo della velocità ma la sua direzione. Non considerando le perdite di resistenza e gravità, la velocità finale sarà in modulo uguale a quella iniziale, quindi tutto il ΔV va in perdite in quanto si spinge a 90° rispetto al piano orbitale ($\alpha = 90^\circ$). Il ΔV ideale, ovvero la velocità caratteristica, è una misura dello sforzo propulsivo richiesto per qualunque tipo di manovra:

$$\Delta V = \int_{t_i}^{t_f} \frac{T}{m} dt = V_f - V_i + \int_{t_i}^{t_f} \frac{T}{m} (1 - \cos \alpha) dt + \int_{t_i}^{t_f} \frac{D}{m} dt + \int_{t_i}^{t_f} g \sin \varphi dt$$

Se non ci fossero le perdite sarebbe:

$$\Delta V = \int_{t_i}^{t_f} \frac{T}{m} dt = V_f - V_i$$

In qualsiasi manovra tuttavia il termine

$$V_f - V_i + \int_{t_i}^{t_f} \frac{T}{m} (1 - \cos \alpha) dt + \int_{t_i}^{t_f} \frac{D}{m} dt + \int_{t_i}^{t_f} g \sin \varphi dt$$

rappresenta la differenza di velocità che sarebbe realizzabile in assenza di perdite.

Le perdite aerodinamiche

$$\int_{t_i}^{t_f} \frac{D}{m} dt$$

dipendono dalla densità, dalla velocità e dalla forma e dimensione del satellite:

$$D = \frac{1}{2} \rho V_{rel}^2 S C_d$$

Nella messa in orbita di un satellite è più conveniente prima salire di quota con velocità più basse possibili dove la densità è alta e poi accelerare fino alla velocità finale più marcatamente

1.6. Prestazioni dei razzi

Si immagini la messa in orbita di un satellite con salita verticale ($\varphi = 90^\circ$) fino alla quota prestabilita. Il razzo parte da fermo con ΔV assegnato. Assegnare il ΔV equivale ad assegnare quanta spinta e per quanto tempo può agire, ovvero è assegnata la quantità di propellente:

$$m_p = m_0 \left(1 - e^{-\frac{\Delta V}{c}} \right) = \dot{m}_p \Delta t = \frac{T}{c} \Delta t$$

Se la spinta è uguale al peso, l'accelerazione netta è nulla. Tutto lo sforzo propulsivo viene buttato in perdite per gravità. Se la spinta aumenta, il razzo sale fino alla quota finale mettendoci un certo tempo. Se la spinta è molto grande si riesce ad accelerare in maniera consistente e le perdite per gravità sono piccole. Se si hanno grandi livelli di spinta si avranno maggiori accelerazioni, maggiori velocità medie e minori tempi di volo. Nel caso della propulsione elettrica si hanno quindi tante perdite per gravità. Pertanto, per una stessa missione, i ΔV della propulsione elettrica sono maggiori a causa delle perdite per gravità durante la propulsione.

Bisogna notare che le perdite gravitazionali non intervengono sull'energia dello spacecraft, in quanto il campo gravitazionale è conservativo. Per andare tra due punti, la variazione di energia potenziale gravitazionale è la stessa indipendentemente dal fatto che le perdite siano grandi o piccole. Per il trasferimento tra i due punti il sistema propulsivo aggiunge energia al sistema spacecraft e le perdite gravitazionali contano su come quest'energia viene aggiunta, con perdite sul propellente più o meno pronunciate.

1.6 Prestazioni dei razzi

Gli argomenti trattati in questa sezione non sono tipici delle missioni con propulsione elettrica, ma sono di fondamentale importanza per la propulsione chimica. Quando si ha una grande quantità di propellente, come tipicamente accade in missioni in cui si usa la propulsione chimica, si necessita di serbatoi molto grandi. I serbatoi hanno un peso rilevante e parte dello sforzo propulsivo va ad accelerare non solo il payload ma anche il serbatoio. Verso la fine della missione il serbatoio è vuoto, pertanto si utilizza sforzo propulsivo per accelerare una massa inutile. La soluzione di questo problema è suddividere il razzo in più stadi, ciascuno dei quali ospita un serbatoio e un motore, che vengono separati nel momento in cui non sono più utili.

1.6.1 Razzo monostadio

Per analizzare il problema si scompone la massa iniziale nelle sue componenti. Per la propulsione chimica le masse rilevanti sono il payload m_u , la massa di propellente m_p e la massa strutturale m_s , ovvero la massa di tutte quelle strutture che compongono il razzo (gran parte di m_s sono i serbatoi):

$$m_0 = m_u + m_s + m_p$$

La massa finale è quindi:

$$m_f = m_0 - m_p = m_u + m_s$$

1.6. Prestazioni dei razzi

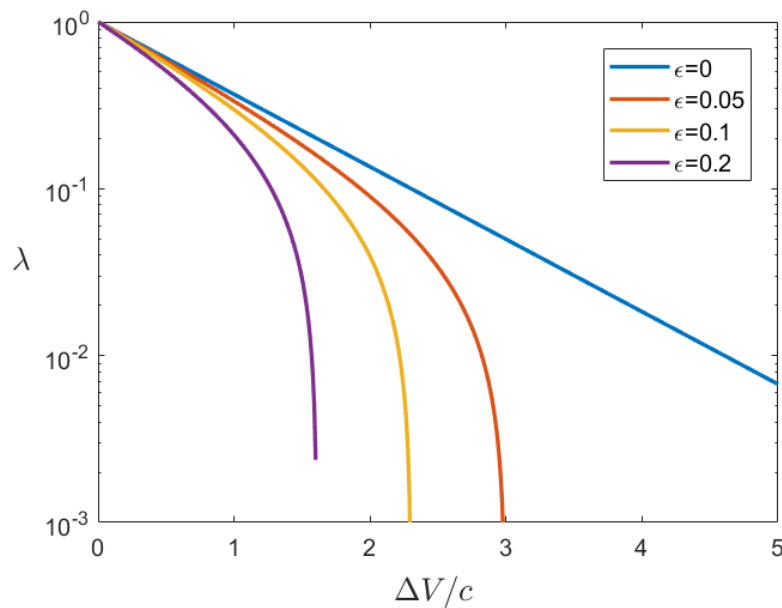


Figura 1.6: Relazione tra payload fraction e velocità caratteristica

$$\frac{m_f}{m_0} = \frac{m_u}{m_0} + \frac{m_s}{m_0} \frac{m_s + m_p}{m_s + m_p}$$

$$\frac{m_f}{m_0} = \lambda + \epsilon \frac{m_s + m_p}{m_0}$$

$$\frac{m_f}{m_0} = \lambda + \epsilon \frac{m_0 - m_u}{m_0}$$

$$\frac{m_f}{m_0} = \lambda + \epsilon (1 - \lambda) = \epsilon + \lambda (1 - \epsilon)$$

Pertanto si ha:

$$\Delta V = -c \ln [\lambda + \epsilon (1 - \lambda)]$$

Invertendo:

$$\lambda = \frac{e^{-\frac{\Delta V}{c}} - \epsilon}{1 - \epsilon}$$

Si è giunti quindi ad un'espressione che lega il ΔV alla payload fraction. Questa relazione dipende dalla combinazione di propellente e dal rapporto strutturale. In fig. 1.6 viene visualizzata graficamente la relazione. Se $\epsilon = 0$ tra il logaritmo della payload fraction e $\Delta V/c$ sussiste una relazione lineare:

$$\frac{\Delta V}{c} = -\ln \lambda$$

Questo caso rappresenterebbe la situazione in cui non si ha serbatoio ma solo carico utile e propellente. Quanto più è piccola la payload fraction tanto più il ΔV cresce. Il ΔV va ad infinito

1.6. Prestazioni dei razzi

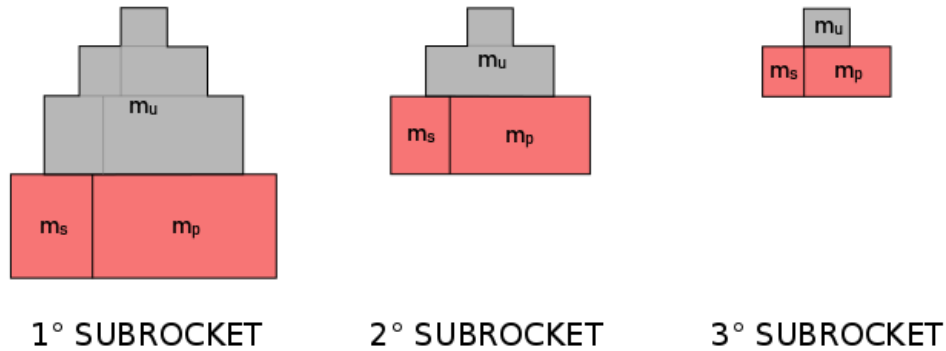


Figura 1.7: Suddivisione in stadi

In cui λ_j è la payload fraction per il subrocket j e ϵ_j il suo rapporto strutturale. Il ΔV totale è la somma dei singoli ΔV di ciascuno stadio:

$$\Delta V_{\text{tot}} = - \sum_{j=1}^N c_j \ln [\lambda_j + \epsilon_j (1 - \lambda_j)]$$

In questa trattazione i valori di c e ϵ di ciascuno stadio sono assegnati e non costituiscono un parametro del problema. La payload fraction totale è il rapporto tra payload dell'ultimo stadio e la massa iniziale del primo (i.e. la massa complessiva del razzo). Se un razzo ha N stadi:

$$\lambda_{\text{tot}} = \frac{(m_u)_N}{(m_0)_1} = \frac{(m_u)_N}{(m_0)_N} \frac{(m_0)_N}{(m_0)_{N-1}} \frac{(m_0)_{N-1}}{(m_0)_{N-2}} \dots \frac{(m_0)_2}{(m_0)_1}$$

Dal momento che la massa utile di uno stadio è la massa iniziale di quello successivo, genericamente si ha:

$$(m_0)_j = (m_u)_{j-1}$$

Pertanto:

$$\lambda_{\text{tot}} = \frac{(m_u)_N}{(m_0)_1} = \frac{(m_u)_N}{(m_0)_N} \frac{(m_u)_{N-1}}{(m_0)_{N-1}} \frac{(m_u)_{N-2}}{(m_0)_{N-2}} \dots \frac{(m_u)_1}{(m_0)_1} = \prod_{j=1}^N \lambda_j$$

Oppure, dal momento che il logaritmo della produttoria è la sommatoria dei logaritmi:

$$\ln \lambda_{\text{tot}} = \ln \prod_{j=1}^N \lambda_j = \sum_{j=1}^N \ln \lambda_j$$

A questo punto si può formulare il problema di ottimizzazione. Se si suppone di conoscere la massa iniziale e la massa utile, fissato quindi λ_{tot} , la differenza tra i due si può suddividere tra i

1.6. Prestazioni dei razzi

$$\lambda_j = \frac{\epsilon_j v}{(1 - \epsilon_j)(c_j - v)}$$

Il sistema viene risolto prendendo un valore di tentativo per v , calcolando tramite la formula soprascritta il valore di λ per ogni stadio e verificando se

$$\ln \lambda_{\text{tot}} = \sum_{j=1}^N \ln \lambda_j$$

Se il vincolo non è soddisfatto si prova con un nuovo v . Il procedimento è iterativo finché non si giunge alla soluzione. Nel caso generale i valori di c_j e ϵ_j possono avere un qualunque valore. Se c aumenta o ϵ diminuisce, ovvero se lo stadio è più efficiente in termini propulsivi o strutturali, il valore di λ diminuisce, i.e. lo stadio diventa più grande e tende ad accelerare di più. Per esempio, in un razzo a due stadi dove uno è molto più efficiente dell'altro, la soluzione ottimale vedrà lo stadio più efficiente molto più grande, con una payload fraction più piccola e ΔV più grande. In questa trattazione ci si limita a studiare il caso di quando c_j e ϵ_j sono gli stessi per ogni stadio. In questo caso il valore di λ_j per ogni stadio è lo stesso:

$$\lambda_j = \frac{\epsilon v}{(1 - \epsilon)(c - v)}$$

La soluzione ottimale è semplicemente:

$$\lambda_j^N = \lambda_{\text{tot}} \Rightarrow \lambda_j = \lambda_{\text{tot}}^{1/N}$$

Ciascuno degli stadi darà lo stesso ΔV :

$$\Delta V = -c \ln \left[\epsilon + \lambda_{\text{tot}}^{1/N} (1 - \epsilon) \right]$$

Il ΔV_{tot} massimo ottenuto dalla risoluzione del problema di ottimizzazione è:

$$\Delta V_{\text{tot}} = -cN \ln \left[\epsilon + \lambda_{\text{tot}}^{1/N} (1 - \epsilon) \right]$$

Se invece viene assegnato il ΔV_{tot} , il λ_{tot} massimo è:

$$\lambda_{\text{tot}} = \left(\frac{e^{-\frac{\Delta V_{\text{tot}}}{Nc}} - \epsilon}{1 - \epsilon} \right)^N$$

1.6. Prestazioni dei razzi

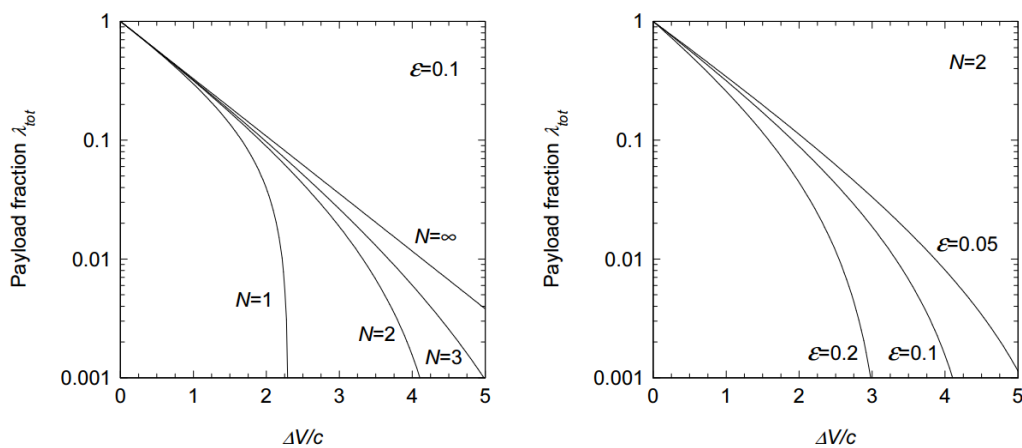


Figura 1.8: Ottimizzazione del razzo multistadio

2.1. Lancio

Il ΔV è dato da:

$$\Delta V = \int_{t_i}^{t_f} \frac{T}{m} dt = V_f - V_i + \int_{t_i}^{t_f} \frac{T}{m} (1 - \cos \alpha) dt + \int_{t_i}^{t_f} \frac{D}{m} dt + \int_{t_i}^{t_f} g \sin \varphi dt$$

Le perdite per gravità e le perdite per disallineamento per la messa in orbita sono solitamente dell'ordine di $0.6 \div 0.8$ km/s, le perdite aerodinamica sono dell'ordine di $0.6 \div 0.4$ km/s. Pertanto si ha:

$$\Delta V \approx 9 \div 10 \text{ km/s}$$

Lo studio della manovra di lancio è molto complicato. Innanzitutto, durante la salita la spinta agisce in modo più o meno continuo; vi sono dei momenti in cui il motore è spento, ma gran parte della traiettoria è propulsa. Per uno studio accurato in ogni istante bisognerebbe analizzare la spinta in direzione e modulo ed integrare le equazioni del moto. Questo rende lo studio del lancio più complicato da analizzare di traiettorie che possono essere modellizzate come una serie di impulsi. Infatti, se la spinta è grande e dura poco in genere si può modellizzare la manovra come un impulso. Se invece la spinta è continua questo non può essere fatto. Inoltre, durante il lancio l'atmosfera gioca un ruolo fondamentale non solo nelle equazioni del moto ma anche per i vincoli che essa impone nel tipo di traiettoria che si può seguire. Ad esempio, la pressione dinamica a cui può essere soggetto il razzo è limitata. Il flusso termico, legato alla velocità relativa tra lanciatore e l'atmosfera, è anch'esso limitato sia in termini di massimo valore di picco sia in termini di calore complessivamente ceduto. In aggiunta, la traiettoria va controllata e il razzo deve essere in vista con una o più stazioni di telerilevamento a terra. Una manovra di lancio può essere scomposta nelle seguenti fasi:

- (0-1) Ascesa verticale** Serve ad allontanare il razzo dalla rampa di lancio ed è relativamente breve (qualche decina di metri).
- (1-2) Fase di kick** In questa fase avviene una rotazione della velocità del razzo. La rotazione può essere assunta come istantanea anche se in genere ha una durata di qualche secondo.
- (2-3) Zero-lift gravity turn** Il razzo continua a salire sotto l'azione della spinta finché viene raggiunta una velocità alta abbastanza da permettere di continuare la salita fino all'orbita di parcheggio.
- (3-4) Coasting** Il razzo sale senza spinta. In questa zona il razzo ha raggiunto già quote molto elevate.
- (4-5) Inserimento in orbita** Vengono accesi i motori e si raggiunge la velocità finale che permette di inserire in orbita.

La suddivisione in stadi non ricalca obbligatoriamente la suddivisione in queste fasi. La fase di coasting ha una convenienza in termini di carico utile; questa si può spiegare studiando le perdite per gravità. Se non ci fossero le forze aerodinamiche, converrebbe accelerare il più possibile a quote basse e salire di quota con velocità elevate, in modo da diminuire le perdite

2.2. Trasferte tra orbite circolari e complanari

2.2 Trasferte tra orbite circolari e complanari

Si considerino due orbite circolari e complanari. La più piccola ha raggio r_1 mentre la più grande ha raggio r_2 . Se si considerano manovre impulsive, ovvero variazioni istantanee di velocità, dopo un impulso lo spacecraft si trova su una nuova orbita. Il punto in cui è stato effettuato l'impulso è comune sia all'orbita su cui lo spacecraft si trovava sia alla nuova orbita. Partendo da raggio r_1 , dopo un impulso la nuova orbita ripasserà dal raggio r_1 . Se si vuole mettere lo spacecraft sull'orbita circolare di raggio r_2 sarà necessaria un'altra manovra, dal momento che l'orbita dopo la prima manovra passerà dal punto di raggio r_1 ¹. L'orbita sul quale si mette lo spacecraft per trasferirlo tra le due orbite r_1 e r_2 è chiamata orbita di trasferimento. Risulta evidente come quest'orbita debba avere un punto in comune con quella di partenza e un punto in comune con quella d'arrivo, ovvero l'orbita di trasferimento deve intersecare entrambe. Questa condizione si traduce in:

- il perigeo r_p dell'orbita di trasferimento deve essere minore o uguale a r_1
- l'apogeo r_a dell'orbita di trasferimento deve essere maggiore o uguale a r_2

Quando scritto sopra è vero per orbite ellittiche. Se l'orbita di trasferimento fosse una parabola o un'iperbole le condizioni sarebbero $r_p \leq 1$ e $e \geq 1$. Si ricorda che:

$$p = a(1 - e^2)$$

$$r_p = a(1 - e) = \frac{p}{(1 + e)}$$

$$r_a = a(1 + e) = \frac{p}{(1 - e)}$$

Le condizioni pertanto sono:

$$\frac{p}{(1 + e)} \leq r_1 \Rightarrow e \geq \frac{p}{r_1} - 1$$

$$\frac{p}{(1 - e)} \geq r_2 \Rightarrow e \geq 1 - \frac{p}{r_2} = 1 - \frac{p}{r_1} \frac{r_1}{r_2}$$

Fissando il rapporto r_2/r_1 si possono rappresentare le condizioni su un grafico. In fig. 2.1 viene riportato il caso in cui $r_2/r_1 = 3$. Le condizioni sono soddisfatte nella feasible region, pertanto sono possibili tutte le orbite di trasferimento i cui semilati retti e eccentricità sono nella feasible region, in quanto soddisfano le disequazioni. Il punto di minima eccentricità della feasible region è associato ad un'orbita di trasferimento che appartiene sia alla retta $r_p = r_1$ sia alla retta $r_a = r_2$. Quest'orbita definisce la trasferta di Hohmann.

¹Se invece orbita di partenza e di arrivo hanno un punto in comune può bastare una sola manovra.

2.2. Trasferte tra orbite circolari e complanari

L'energia di un'orbita, costante in ogni suo punto, è anche data da:

$$\mathcal{E} = \frac{V^2}{2} - \frac{\mu}{r}$$

Pertanto, se per un punto passano 2 orbite la velocità in quel punto sarà maggiore per l'orbita ad energia maggiore. Di conseguenza, nel punto di partenza la velocità dell'orbita di trasferimento V_{H1} è maggiore della velocità V_{c1} ; per effettuare la manovra, nel punto di partenza si dovrà dare un impulso che aumenti la velocità del satellite fino ad avere:

$$V_{H1} = \sqrt{2 \left(\mathcal{E}_{TO} + \frac{\mu}{r_1} \right)}$$

Dal momento che l'energia dell'orbita di trasferimento per la trasferta di Hohmann è data da

$$\mathcal{E}_{TO} = -\frac{\mu}{r_1 + r_2}$$

si ha²:

$$V_{H1} = \sqrt{2\mu \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1 + r_2} \right)}$$

La differenza di velocità che il motore deve fornire è:

$$\Delta V_1 = V_{H1} - V_{c1} = \sqrt{2\mu \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1 + r_2} \right)} - \sqrt{\frac{\mu}{r_1}}$$

Dal momento che il semiasse dell'orbita di arrivo è maggiore del semiasse dell'orbita di trasferimento, l'energia della prima è maggiore e nel punto di arrivo la velocità $V_{H2} < V_{c2}$. Nel punto di arrivo si dovrà dare un impulso che aumenti la velocità del satellite da V_{H2} a V_{c2} . La velocità prima dell'impulso è:

$$V_{H2} = \sqrt{2 \left(\mathcal{E}_{TO} + \frac{\mu}{r_2} \right)} = \sqrt{2\mu \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1 + r_2} \right)}$$

²In generale, la velocità in un punto i di un'orbita con energia \mathcal{E} è $V_i = \sqrt{2 \left(\mathcal{E} + \frac{\mu}{r_i} \right)}$. Pertanto, per un'orbita ellittica con perigeo r_α e apogeo r_β , o viceversa, la velocità nei punti r_α o r_β è data da:

$$V_{H\alpha} = \sqrt{2\mu \left(\frac{1}{r_\alpha} - \frac{1}{r_\alpha + r_\beta} \right)}$$

$$V_{H\beta} = \sqrt{2\mu \left(\frac{1}{r_\beta} - \frac{1}{r_\alpha + r_\beta} \right)}$$

2.2. Trasferte tra orbite circolari e complanari

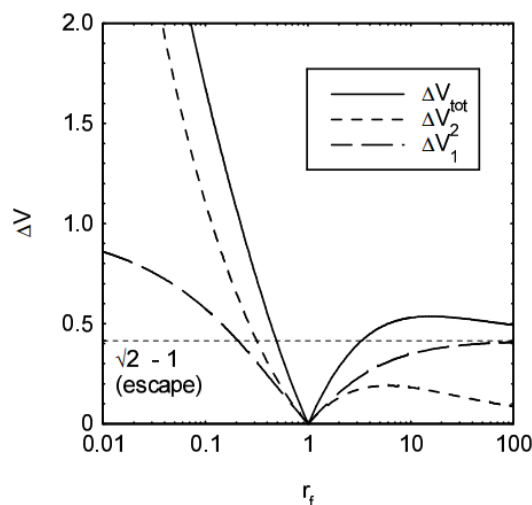


Figura 2.2: ΔV della trasferta di Hohmann in funzione del raggio dell'orbita di arrivo. I risultati sono normalizzati con $r_{ref} = r_1$ e $V_{ref} = V_{c1}$.

Destinazione	r [km]	ΔV_1 [km/s]	ΔV_2 [km/s]	ΔV_{tot} [km/s]
GEO	42164	2.448	1.475	3.923
Luna	384400	3.126	0.831	3.957
Escape	∞	3.219	-	3.219

Tabella 2.1: Trasferte geocentriche tra orbite complanari e circolari. Orbita di partenza con $r_1 = 6600$ km.

ad V_{c1} ($\Delta V_1/V_{c1} \rightarrow 1$) quando $r_2 \rightarrow 0$. Questo significa che il primo impulso diminuisce la velocità da V_{c1} a 0 e il satellite precipita sul corpo principale con un'ellisse con semi-asse minore pari a 0 come orbita di trasferimento. Se non si annullasse la velocità l'orbita di trasferimento sarebbe un'ellisse che non passa da $r_2 = 0$. La velocità circolare per $r_2 \rightarrow 0$ tende ad infinito, quindi il ΔV_2 tende ad infinito. Dal grafico risulta evidente che le manovre che diminuiscono l'energia sono molto più costose delle manovre che la aumentano³. Nel caso di moto nel sistema solare raggiungere Mercurio con una manovra di Hohmann è più costoso di raggiungere un qualunque altro pianeta e anche di evadere dal sistema solare. In tab.2.1 vengono riportati i ΔV per trasferte geocentriche da un'orbita circolare di $r = 6600$ km a orbite circolari e complanari. Si vede come raggiungere un'orbita geostazionaria o la Luna sia molto simile dal punto di vista propulsivo. Evadere dalla sfera d'influenza della Terra richiede meno ΔV di

³Se si hanno tre orbite circolari con raggi r_A, r_B e r_C tali per cui $r_C > r_B > r_A$ e $r_C/r_B = r_B/r_A$, andare da B a C ha lo stesso ΔV_{BC} di andare da C a B, andare da B ad A ha lo stesso ΔV_{AB} di andare da A a B, ma $\Delta V_{AB} > \Delta V_{BC}$. A parità di rapporto di raggi tra orbita iniziale e finale, spostarsi tra orbite più piccole costa di più che spostarsi tra orbite più grandi.

2.2. Trasferte tra orbite circolari e complanari

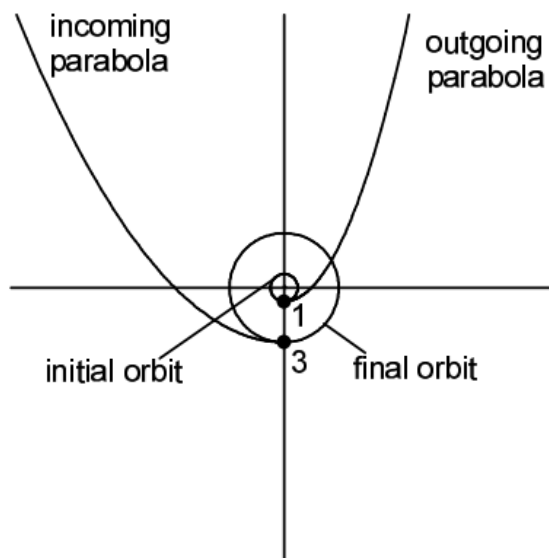


Figura 2.3: Trasferta biparabolica

velocità rispetto al Sole pari a V_{H1} in modo da mettersi sull'orbita di trasferimento che arriva con velocità V_{H2} al raggio del pianeta di arrivo. La velocità rispetto alla Terra al momento dell'uscita dalla sfera d'influenza, ovvero la velocità di eccesso iperbolico, è pari alla velocità rispetto al Sole meno quella di rivoluzione del pianeta attorno al Sole:

$$V_{\infty 1} = V_{H1} - V_{C1}$$

ovvero la velocità di eccesso iperbolico deve essere tale che nel sistema di riferimento Sole sia V_{H1} . Il ragionamento è analogo per il pianeta di arrivo:

$$V_{\infty 2} = V_{C2} - V_{H2}$$

ΔV_1 , dato in orbita attorno alla Terra, sarà tale da che quando lo spacecraft sta uscendo dalla sfera d'influenza abbia velocità $V_{\infty 1}$ rispetto alla Terra e V_{H1} rispetto al Sole. In tabella vengono quindi riportati $V_{\infty 1}$ e $V_{\infty 2}$. Essi non sono i ΔV degli impulsi, ma lo sarebbero se questi non venissero dati nella sfera d'influenza del pianeta. Logicamente, essi danno comunque una misura di quanto sono grandi i ΔV effettivi.

Il pianeta esterno più difficile da raggiungere è Urano, mentre quello più difficile in assoluto è Mercurio. Escludendo Venere e Marte, raggiungere qualunque pianeta è più costoso di evadere dal sistema solare.

2.2.2 Trasferta biparabolica

Dal momento che le manovre di fuga sono meno costose di trasferite di Hohmann per un ampio spettro di rapporti di raggi delle orbite, le manovre a tre impulsi possono risultare vantaggiose. L'idea della trasferta parabolica (fig. 2.3) è quella di mettere lo spacecraft su una traiettoria

2.3. Escape

r_1 :

$$\Delta V_1 = V_{H_{113}} - V_{c1} = \sqrt{2\mu \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1 + r_3} \right)} - \sqrt{\frac{\mu}{r_1}}$$

Il secondo ΔV è pari alla differenza tra V_{H3} per la trasferta da r_3 a r_2 e V_{H3} per la trasferta da r_1 a r_3 :

$$\Delta V_2 = V_{H_{332}} - V_{H_{313}} = \sqrt{2\mu \left(\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_3 + r_2} \right)} - \sqrt{2\mu \left(\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_1 + r_3} \right)}$$

Il terzo ΔV in modulo è pari alla differenza tra V_{H2} per la trasferta da r_3 a r_2 e la velocità circolare al raggio r_2 :

$$\Delta V_3 = V_{H_{232}} - V_{c1} = \sqrt{2\mu \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1 + r_3} \right)} - \sqrt{\frac{\mu}{r_2}}$$

Da un punto di vista energetico la trasferta di Hohmann aumenta 2 volte l'energia, mentre la trasferta biellittica al primo impulso aumenta l'energia oltre a quella associata all'orbita di arrivo, la aumenta ulteriormente al secondo impulso e poi la diminuisce fino a quella dell'orbita finale nel terzo impulso. Da un punto di vista energetico il percorso per andare dall'energia dell'orbita di partenza a quella dell'orbita di arrivo non è ottimale. Tuttavia, il percorso può essere migliore in termini di differenze di velocità, che è il prezzo da pagare della propulsione. Il primo impulso, seppur aumenti troppo l'energia, avviene con poche perdite per gravità. Infatti, il primo ellisse interseca l'orbita finale e nel tratto dal primo impulso fino all'intersezione il satellite viene frenato dalla gravità terrestre per meno tempo rispetto al tempo della trasferta di Hohmann. Seppur continui la sua salita e venga frenato ulteriormente, le perdite di velocità subite vengono restituite durante la discesa al perigeo quando l'energia potenziale gravitazionale viene trasformata in energia cinetica. Le perdite di velocità del primo ellisse vengono parzialmente compensate dai guadagni di velocità del secondo ellisse e in alcuni casi il ΔV totale può essere minore di quello di Hohmann.

2.3 Escape

Per evadere da un corpo si deve raggiungere una distanza infinita con una velocità non nulla. L'orbita è un'iperbole con energia

$$\mathcal{E} = \frac{V^2}{2} - \frac{\mu}{r} = \frac{V_\infty^2}{2}$$

Fissata la velocità di eccesso iperbolico che si vuole che lo spacecraft abbia, si può calcolare la velocità dello spacecraft sull'orbita iperbolica in un generico punto di raggio r :

$$V = \sqrt{V_\infty^2 + \frac{2\mu}{r}}$$

2.3. Escape

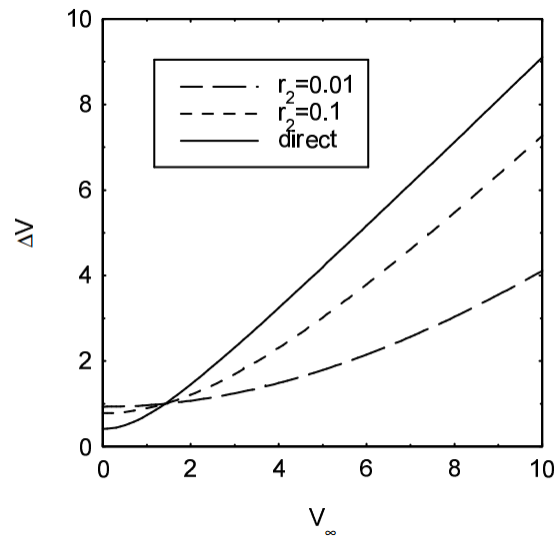


Figura 2.6: Confronto tra manovra di escape diretta e manovra di Hobert

Dopo il primo impulso lo spacecraft dovrà avere velocità pari a:

$$V_1 = \sqrt{2 \left(\frac{\mu}{r_1} + \varepsilon \right)} = \sqrt{2V_{c1}^2 - \frac{2\mu}{r_1 + r_2}}$$

Prima del secondo impulso lo spacecraft ha velocità:

$$V_2 = \sqrt{2 \left(\frac{\mu}{r_2} + \varepsilon \right)} = \sqrt{2V_{c2}^2 - \frac{2\mu}{r_1 + r_2}}$$

Dopo il secondo impulso dovrà avere velocità pari a:

$$V_{i2} = \sqrt{V_\infty^2 + \frac{2\mu}{r_2}} = \sqrt{V_\infty^2 + 2V_{c2}^2}$$

Pertanto:

$$\Delta V = V_{c1} - \sqrt{2V_{c1}^2 - \frac{2\mu}{r_1 + r_2}} + \sqrt{V_\infty^2 + 2V_{c2}^2} - \sqrt{2V_{c2}^2 - \frac{2\mu}{r_1 + r_2}}$$

In fig. 2.6 viene mostrato il ΔV necessario per la manovra di escape diretta e per la manovra di Hobert al variare dell'eccesso iperbolico di velocità. Se $V_\infty > \sqrt{2}V_{c1}$ la manovra di Hobert è migliore di quella diretta. Inoltre, più ci si avvicina al corpo principale e più è conveniente. In luce di questo, per evadere dal sistema solare con $V_\infty > \sqrt{2}V_{cterra}$ è più conveniente avvicinarsi al Sole e poi effettuare la manovra di escape. La spiegazione di questo fenomeno è da

2.4. Cambio di piano

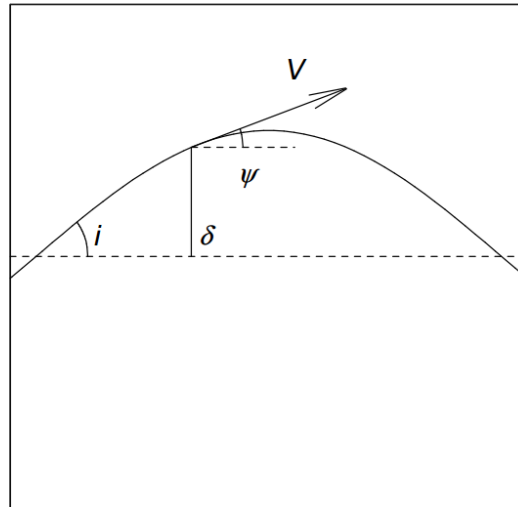


Figura 2.8: Confronto tra manovra di escape iperbolica e parabolica

basse perdite gravitazionali portate da un più grande impulso ai raggi bassi rispetto a uno più contenuto ai raggi bassi seguito da un altro all'infinito. Inoltre, per $V_{\infty}/V_{c1} > 0.5$ la manovra iperbolica ha ΔV sempre minore di V_{∞} .

2.4 Cambio di piano

In un sistema di riferimento geocentrico equatoriale, l'angolo che sussiste tra la direzione del parallelo e la proiezione del vettore velocità di un satellite sul piano dell'orizzonte è chiamato angolo di heading ψ . La relazione che sussiste tra angolo di inclinazione i , la latitudine δ e l'heading ψ è:

$$\cos i = \cos \delta \cos \psi$$

Il modulo dell'angolo ψ assume il valore di i ai nodi e diventa nullo al valore massimo di $|\delta|$. L'angolo che viene cambiato in una manovra di cambio piano è ψ , che si traduce in un cambio di inclinazione in base alla latitudine. Infatti:

$$\sin i di = \cos \delta \sin \psi d\psi$$

La manovra è più efficiente ai nodi, quando $\delta = 0$. Infatti, quando $\cos \delta = 1$ si ha:

$$\cos i = \cos \psi \Rightarrow i = \psi$$

$$di = \frac{\sin \psi}{\sin i} d\psi = d\psi$$

La variazione di ψ ai nodi è uguale alla variazione di i . Il costo della manovra è generalmente:

$$\Delta V = 2V \sin \frac{\Delta\psi}{2}$$

2.5. Trasferte interplanetarie

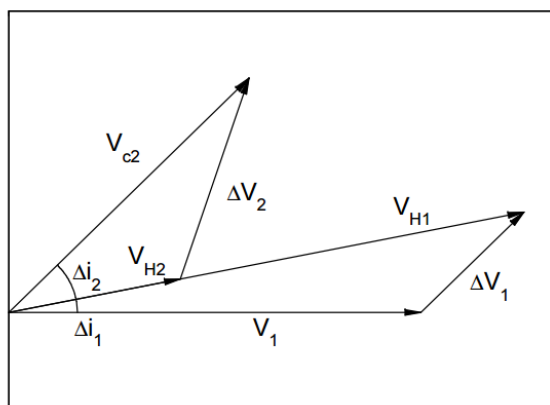


Figura 2.10: Trasferte di Hohmann con cambio di piano

La trasferta di Hohmann avviene pertanto su un piano intermedio. La suddivisione ottima dei due Δi dipende dal rapporto tra i raggi delle orbite di arrivo e partenza. In generale, il secondo Δi è maggiore del primo.

2.5 Trasferte interplanetarie

Una traiettoria interplanetaria è caratterizzata da diverse fasi. Supponendo di partire da un'orbita bassa, si effettua una manovra di evasione mettendo lo spacecraft su una traiettoria iperbolica. Sufficientemente lontano dalla Terra, esso è praticamente soggetto solo all'attrazione del Sole. Tuttavia, vi è una fase di transizione in cui lo spacecraft è sottoposto contemporaneamente all'attrazione sia della Terra che del Sole. Analogamente, avvicinandosi al pianeta di destinazione vi è una fase nella quale l'attrazione gravitazionale del pianeta diventa sempre più importante. In ambito di trasferte interplanetarie può essere usata l'approssimazione *patched conics*, ossia "coniche raccordate". L'approssimazione consiste nel considerare lo spacecraft come soggetto alla sola azione gravitazionale di un pianeta quando è dentro la sua sfera d'influenza e come soggetto alla sola azione del Sole quando ne è fuori (ed entra nella sfera d'influenza del Sole)⁴. Dal momento che i pianeti si muovono con una certa velocità attorno al Sole, il problema dei due corpi nella sfera d'influenza di un pianeta è studiato in un sistema di riferimento che si muove rispetto al Sole. Al momento del passaggio tra dentro e fuori dalla sfera d'influenza di un pianeta le velocità viste dai due sistemi di riferimento sono diverse, e pertanto anche le coniche. Da qui il termine *patched*.

Le fasi di una missione interplanetaria consistono quindi in una fase di partenza nella sfera d'influenza di un pianeta, una fase eliocentrica di trasferta e un'ultima fase di arrivo e cattura nella sfera d'influenza di un altro pianeta. Le sfere d'influenza di pianeti come Terra e Marte

⁴In questo modo il problema degli n corpi si scompone in problemi dei 2 corpi, risolvibili analiticamente.

2.5. Trasferte interplanetarie

La $V_{\infty 1}$ deve essere parallela a V_{H1} , dal momento che V_{H1} e V_{c1} sono parallele. Il punto dell'impulso deve essere tale per cui $V_{\infty 1}$ abbia direzione corretta. La manovra di cattura è analoga, con un ΔV a frenare. Le traiettorie interplanetarie possono essere quindi trattate con il concetto di trasferta di Hohmann e di manovra di escape. Conoscendo i raggi delle traiettorie dei pianeti si conoscono V_H e $V_{c\text{pianeta}}$, da cui si ricava V_{∞} . A seconda delle orbite di parcheggio, quindi a seconda dei V_c , si ricavano i ΔV . Essi possono essere in modulo più o meno grandi delle V_{∞} come già studiato in fig. 2.7, a seconda della velocità dell'orbita di parcheggio. Inoltre, più l'orbita di parcheggio è piccola, più la sua velocità è alta e più il ΔV diminuisce. Se l'orbita di parcheggio fosse ellittica, il minimo del ΔV si può ottenere al periastro.

Un altro fattore fondamentale da considerare per le trasferte interplanetarie è il rendezvous con il pianeta di arrivo. Lo spacecraft deve essere lanciato quindi al momento giusto per far sì che questo accada. L'angolo di fase tra i vettori posizione dei pianeti di partenza e arrivo è indicato con ψ (fig. 2.11). Se si vuole effettuare una trasferta di Hohmann, dal momento che lo spacecraft descrive un angolo di 180° lungo la sua traiettoria, l'angolo ψ alla partenza deve essere tale per cui:

$$\pi = \psi + \omega_2 (t_2 - t_1) = \psi + \omega_2 \tau_H = \psi + \omega_2 \frac{T_H}{2}$$

In cui con ω_2 è indicata la velocità angolare del pianeta di arrivo attorno al Sole:

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{\mu_{\odot}}{r_2^3}}$$

Con t_1 e t_2 vengono indicati gli istanti iniziale e finale, con τ_H viene indicato il tempo della trasferta di Hohmann e con T_H il suo periodo orbitale:

$$T_H = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu_{\odot}}} = 2\pi \sqrt{\frac{(r_1 + r_2)^3}{\mu_{\odot}}} \Rightarrow \tau_H = \pi \sqrt{\frac{(r_1 + r_2)^3}{\mu_{\odot}}}$$

L'angolo ψ deve essere infatti tale per cui durante il tempo della trasferta, in cui lo spacecraft si muove di 180° rispetto al punto di partenza, il pianeta di arrivo descriva un angolo che lo porti a 180° rispetto al punto di partenza dello spacecraft. Se il pianeta di arrivo è esterno, la sua velocità angolare orbitale è minore di quella media dell'orbita di Hohmann (il semiasse maggiore è più grande). Pertanto, al momento della partenza il pianeta di arrivo deve essere davanti a quello di partenza.

Se si vuole partire con un angolo di fase diverso, la manovra non può essere una trasferta di Hohmann e di conseguenza il ΔV sarà sicuramente più grande. Tuttavia, dato il costo e data la complicatezza delle missioni spaziali si cerca sempre di effettuare la manovra più conveniente dal punto di vista propulsivo. Se si perde la finestra di lancio si deve aspettare un periodo sinodico τ_s , ovvero il tempo che intercorre tra due valori uguali di angolo di fase tra i pianeti. Considerando due pianeti, indicando con 1 il pianeta più interno e con 2 il pianeta più esterno, durante il tempo sinodico il pianeta 1 dovrà superare il pianeta 2 e portarsi ad un angolo ψ dietro di esso. L'angolo che deve percorrere il pianeta 1 durante il periodo sinodico dovrà quindi essere pari all'angolo percorso dal pianeta 2 più un giro:

$$\omega_1 \tau_s = \omega_2 \tau_s + 2\pi$$

2.6. Manovre con propulsione elettrica

L'angolo percorso dallo spacecraft è la somma dell'angolo percorso durante la prima trasferta, ovvero 180° , dell'angolo percorso durante il tempo di attesa, ovvero $\omega_2 t_W$ e dell'angolo percorso durante la seconda trasferta:

$$\text{angolo}_{s/c} = \pi + \omega_2 t_W + \pi$$

L'angolo percorso dal pianeta di partenza è dato dall'angolo percorso durante la prima trasferta di Hohmann, da quello percorso durante il tempo di attesa e da quello percorso durante la seconda trasferta:

$$\text{angolo}_1 = \omega_1 (\tau_H + t_W + \tau_H)$$

Per cui:

$$2\pi + \omega_2 t_W = \omega_1 (2\tau_H + t_W) + 2k\pi$$

Il numero intero k viene quindi scelto con il minimo valore che consente di avere t_W positivo. La dipendenza di t_W dai raggi orbitali dei pianeti non è immediata e non si possono fare le stesse valutazioni fatte per il periodo sinodico. Per trasferte di Hohmann tra Terra e Marte il tempo di attesa è di circa 2 anni e le trasferte durano 6 mesi circa ciascuna. Per ridurre i tempi di attesa, anche pensando a missioni umane, è auspicabile accettare maggior costo in termini propulsivi.

2.6 Manovre con propulsione elettrica

La propulsione elettrica consente di avere accelerazioni molto piccole. I tempi di spinta necessari ad ottenere i ΔV sono molto lunghi. Non è quindi ammissibile considerare le manovre come impulsive ed esse sono bensì a spinta continua. Trattare le trasferte diventa più complicato rispetto alla propulsione chimica e quest'analisi si limiterà a trasferte tra orbite circolari.

2.6.1 Approssimazione di Edelbaum

L'approssimazione di Edelbaum viene usata per trattare trasferte a spinta piccola. Essa costituisce uno strumento utile per la valutazione dei ΔV per le manovre con propulsione elettrica. L'approssimazione assume che le orbite siano quasi-circolari e che le variazioni di inclinazione tra le orbite siano piccole. In realtà, il metodo può essere esteso a grandi variazioni di inclinazione a patto che tra un'orbita e la successiva l'inclinazione cambi poco. Sotto queste ipotesi si ha che il raggio, il semiasse e il semilatus rectum possono essere confusi l'uno con l'altro:

$$r \approx a \approx p$$

La velocità è circolare:

$$v^2 \approx \frac{\mu}{r}$$

L'eccentricità è nulla:

$$e \approx 0$$

2.6. Manovre con propulsione elettrica

complicata e la si vedrà in modo sommario. L'impostazione che viene data è la seguente. Si introducono due angoli: un angolo α tra la proiezione della spinta nel piano orbitale e la velocità e un angolo β tra il vettore spinta e il piano orbitale. Le componenti di spinta nel piano orbitale e nella direzione perpendicolare ad esso sono quindi $T \cos \beta$ e $T \sin \beta$. Le accelerazioni lungo la direzione tangenziale, radiale e normale al piano dell'orbita sono:

$$a_T = A \cos \alpha \cos \beta$$

$$a_R = A \sin \alpha \cos \beta$$

$$a_W = A \sin \beta$$

Dove con A è indicato il rapporto tra spinta e massa. Il metodo valuta, a seconda degli angoli di spinta, la variazione di a , e ed i . Infatti, l'approssimazione di Edelbaum trascura le equazioni che descrivono la variazione di Ω e ω , che vengono assunte come costanti. Integrando le equazioni

$$V \frac{\dot{a}}{a} = 2a_T$$

$$V \dot{e} = 2 \cos v a_T + \sin v a_R$$

$$V \dot{i} = \cos(\omega + v) a_W$$

su una rivoluzione completa si ottengono le variazioni dei parametri:

$$\Delta a = \frac{2aA}{V} \int_0^{2\pi} \cos \alpha \cos \beta dv$$

$$\Delta e = \frac{A}{V} \int_0^{2\pi} (2 \cos v \cos \alpha + \sin v \sin \alpha) \cos \beta dv$$

$$\Delta i = \frac{A}{V} \int_0^{2\pi} \cos(\omega + v) \sin \beta dv$$

Il problema di Edelbaum consiste nel determinare α e β tali per cui si massimizza la variazione di uno dei tre parametri durante una rivoluzione. Del problema di ottimizzazione verranno qui visti solo i risultati. Intuitivamente, dal momento che nell'equazione della derivata di a compare l'accelerazione tangenziale, se si vuole massimizzare il cambiamento di semiasse si dovrà massimizzare la componente di spinta tangenziale in modo da usare la spinta sempre parallelamente alla velocità:

$$\max \Delta a \Rightarrow \alpha = 0, \beta = 0 \Rightarrow \begin{cases} a_T = A \\ a_R = 0 \\ a_W = 0 \\ \Delta e = 0 \\ \Delta i = 0 \end{cases} \quad \Delta a > 0$$

2.6. Manovre con propulsione elettrica

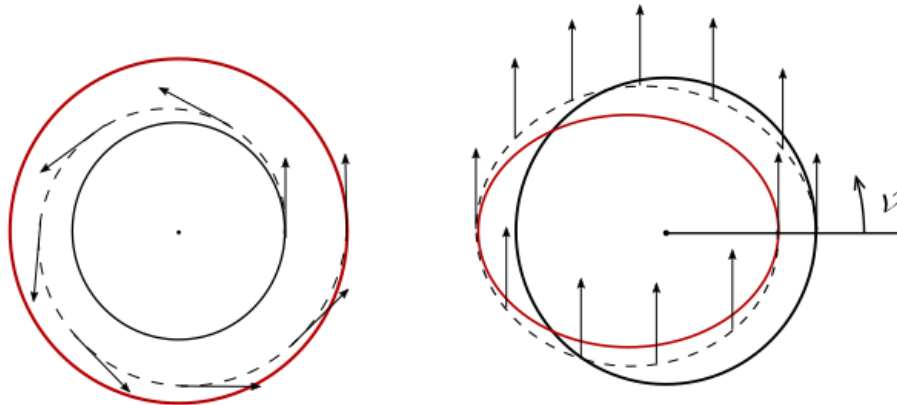


Figura 2.12: Schema di manovre per la variazione di semiasse maggiore e di eccentricità

2.6.2 Manovra di Edelbaum

Le manovre richiedono variazioni di parametri maggiori di quelli che la propulsione elettrica può fornire in una sola rivoluzione. Pertanto, è necessario combinare la variazione data da una rivoluzione su più rivoluzioni fino ad ottenere il cambiamento richiesto di parametri orbitali. La manovra di Edelbaum si prepone di ottenere grandi variazioni di semiasse e inclinazione senza cambiare l'eccentricità (l'orbita rimana circolare). Dal momento che l'orbita rimane circolare, non è possibile definire la posizione del periastro e di conseguenza anche l'angolo di anomalia vera. Si introduce l'angolo "argomento della latitudine al tempo t ":

$$\vartheta = \omega + \nu$$

Esso indica l'angolo descritto ad uno specifico istante dal satellite nel piano orbitale, misurato a partire dal nodo ascendente. Nel momento in cui inizia la manovra l'orbita è a bassa inclinazione, quindi non è possibile neanche definire Ω e la posizione angolare del satellite rispetto all'asse inerziale \hat{I} viene misurata con un angolo che può essere visto come la somma $\Omega + \omega + \nu$. All'istante in cui inizia la manovra, la posizione in cui è il satellite diventa il nodo ascendente della nuova orbita. Pertanto, il valore dell'angolo $\Omega + \omega + \nu$ diventa Ω della nuova orbita e dal nodo ascendente viene misurato ϑ .

Risolvendo l'equazione

$$\tan \beta = k \cos (\omega + \nu) = k \cos (\vartheta)$$

si ottiene l'angolo β e le componenti

$$a_T = A \cos \beta$$

$$a_W = A \sin \beta$$

2.6. Manovre con propulsione elettrica

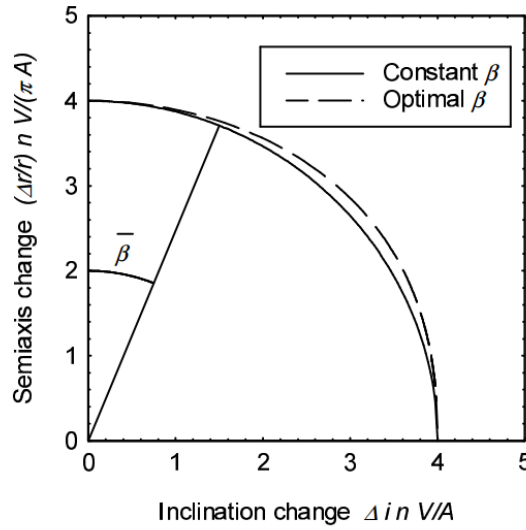


Figura 2.13: Variazione di semiasse normalizzata e variazione di inclinazione normalizzata

Poiché sia la velocità angolare media n che la velocità V dipendono da a , le variazioni dei parametri dipendono da a , dall'accelerazione e dal $\bar{\beta}$ adottato. Confrontando la legge ottimale con la legge approssimata (fig. 2.13) la differenza di variazione ottenuta dei parametri è molto piccola. Si può quindi pensare di rinunciare ad un piccolo miglioramento in termini di variazione dei parametri per avere una soluzione in forma chiusa. Si possono ora estendere gli effetti su una rivoluzione a più rivoluzioni. Si prende la variazione di a e la si divide per il tempo impiegato a compiere una rivoluzione, approssimando così la derivata di a rispetto al tempo. Allo stesso modo, si divide la variazione di i per il tempo impiegato a compiere una rivoluzione, approssimando la derivata di inclinazione rispetto al tempo:

$$\frac{\Delta a}{\Delta t} = \frac{2Aa \cos \bar{\beta}}{V} \approx \dot{a}$$

$$\frac{\Delta i}{\Delta t} = \frac{2A \sin \bar{\beta}}{\pi V} \approx \dot{i}$$

$$V = \sqrt{\frac{\mu}{a}} \Rightarrow \dot{V} = \sqrt{\mu} \frac{d}{dt} \left(a^{-\frac{1}{2}} \right) = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \dot{a} = -\frac{n \dot{a}}{2}$$

Anziché usare il tempo come variabile indipendente, viene usata la velocità. Dal momento che semiasse e velocità sono legati, la variazione di uno comporta la variazione dell'altro. Dividendo la derivata dell'inclinazione per la derivata della velocità si ottiene:

$$\frac{di}{dV} = \frac{-2 \tan \bar{\beta}}{\pi V}$$

2.6. Manovre con propulsione elettrica

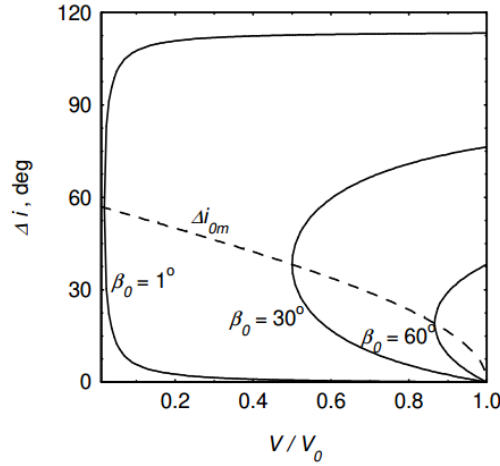


Figura 2.14: Manovre ottimali per cambiamento di inclinazione e semiasse

Integrando le espressioni per $d\Delta V$ e per di si ha:

$$\Delta V = V_0 \cos \bar{\beta}_0 - \sqrt{V_1^2 - V_0^2 \sin^2 \bar{\beta}_0} = V_0 \cos \bar{\beta}_0 - V_1 \cos \bar{\beta}_1$$

$$\Delta i = \frac{2}{\pi} \left(\arcsin \frac{V_0 \sin \bar{\beta}_0}{V_1} - \bar{\beta}_0 \right) = \frac{2}{\pi} (\bar{\beta}_1 - \bar{\beta}_0)$$

Le equazioni vengono integrate da un raggio r_0 (uguale ad a_0 , in quanto le orbite sono circolari), scegliendo un certo $\bar{\beta}_0$, fino ad un raggio r_1 la cui velocità è V_1 . Dato $\bar{\beta}_0$, si considera ad esempio un problema in cui si vuole aumentare il raggio. Partendo da un'orbita con velocità circolare V_0 , ci si vuole spostare su un'orbita con $r_1 > r_0$ e $V_1 < V_0$. Spingendo inizialmente con $\bar{\beta}_0$, si dovrà aumentarne il valore di rivoluzione in rivoluzione, in accordo con $V \sin \bar{\beta} = V_0 \sin \bar{\beta}_0$. Si consideri il ramo con $\bar{\beta}_0 = 60^\circ$ di fig. 2.14. Partendo con $V/V_0 = 1$ si va verso velocità più piccole. Man mano che V diminuisce si devono adottare $\bar{\beta}$ sempre più grandi. Se la manovra termina su un'orbita per cui $V/V_0 = 0.9$, si sarà ottenuta una variazione di inclinazione di 7.5° . Se la manovra continua, si arriva in un punto tale per cui per soddisfare la legge $V \sin \bar{\beta} = V_0 \sin \bar{\beta}_0$ si ha $\bar{\beta} = 90^\circ$. A questo punto il raggio non può più essere ulteriormente aumentato e la velocità non può più essere ulteriormente ridotta al fine di continuare a seguire la legge ottimale. Pertanto, dato il raggio iniziale e il $\bar{\beta}_0$ scelto, si ha un certo raggio massimo a cui si può arrivare con la legge ottimale. L'inclinazione corrispondente a questo raggio è:

$$\Delta i = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \bar{\beta}_0 \right) = 1 - \frac{2}{\pi} \bar{\beta}_0$$

Minore è il $\bar{\beta}_0$ scelto e maggiori sono le variazioni di raggio e inclinazione che si possono ottenere con la legge ottimale. Se $\bar{\beta}_0$ tende a 0, la legge ottimale consiste nell'accelerare lo spacecraft nel piano di partenza fino a raggio infinito, dove V tende a 0, e poi cambiare il piano

2.6. Manovre con propulsione elettrica

cambio di piano a costo zero all'infinito:

$$\Delta V = \sqrt{V_0^2 + V_1^2 - 2V_0V_1 \cos \frac{\pi}{2}} = \sqrt{V_0^2 + V_1^2 + 2V_0V_1} = V_0 + V_1$$

Nel caso in cui $\Delta i = 0$:

$$\Delta V = \sqrt{V_0^2 + V_1^2 - 2V_0V_1 \cos \frac{\pi}{2}} = \sqrt{V_0^2 + V_1^2 - 2V_0V_1} = |V_0 - V_1|$$

L'espressione del ΔV per la sola variazione di raggio dell'orbita è semplicemente la differenza tra le due velocità circolari. Nel caso di escape, si ha $V_1 = 0$ e $\Delta V = V_0$. In fig. 2.15 sono riportati graficamente i valori di ΔV necessari alle manovre al variare di orbita di arrivo e variazione di inclinazione. Se si aumenta il raggio dell'orbita la velocità finale è più piccola di quella iniziale e si hanno delle perdite per gravità pari al doppio del ΔV . La durata della missione si può invece ricavare dalla massa di propellente necessaria alla manovra:

$$m_p = m_0 - m_f = m_0 \left(1 - e^{-\frac{\Delta V}{c}} \right)$$

Da cui:

$$\Delta t = \frac{m_p}{\dot{m}_p} = \frac{m_0 \left(1 - e^{-\frac{\Delta V}{c}} \right)}{T/c}$$

3.1. Campo elettrico

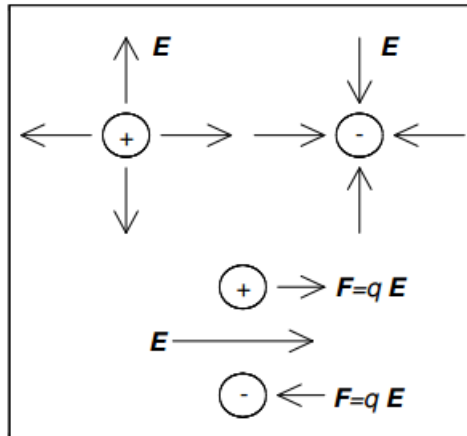


Figura 3.1: Campo elettrico e forze agenti sulle cariche

forza è attrattiva, con verso opposto a \mathbf{r} . La forza che la carica q subisce, dipende da q stessa e da dove essa si trova. Si può quindi introdurre la nozione di campo elettrico, vedendo lo spazio che circonda la carica Q come perturbato da questa. Si assegna ad ogni punto dello spazio un valore del vettore campo elettrico \mathbf{E} , pari a:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

Il campo è entrante nella carica se Q è negativa e uscente da essa se è positiva. Si interpreta la presenza della forza elettrostatica come la generazione da parte della carica Q di un campo elettrico, che perturba lo spazio in modo tale che una carica q subisce una forza pari a $q\mathbf{E}$. Se la carica q è positiva, essa subisce una forza concorde al verso del campo elettrico, se è negativa subisce una forza nel verso opposto. La struttura del campo elettrico è descritta da un'equazione lineare. Vale il principio di sovrapposizione degli effetti: se due cariche generano due campi elettrici \mathbf{E}_1 e \mathbf{E}_2 , in ciascun punto dello spazio il campo elettrico risultante è la somma dei due. Dal momento che il campo elettrico è un campo centrale, esso è conservativo.

Questa formulazione integrale del campo elettrico ha un suo risvolto dal punto di vista differenziale. Se si considera un volume infinitesimo caratterizzato da una carica per unità di volume, si può scrivere il campo elettrico infinitesimo generato dalla carica infinitesima, dimostrando che la formulazione porta a definire la divergenza del campo elettrico come il rapporto tra la carica volumetrica e la costante dielettrica:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_z) = \frac{dq/dV}{\epsilon_0}$$

Dove \mathbf{u}_x , \mathbf{u}_y e \mathbf{u}_z sono i versori che formano la base canonica dello spazio euclideo tridimensionale.

Le espressioni scritte fino ad ora valgono nel vuoto. Esse devono essere modificate se il campo elettrico è generato in presenza di un dielettrico, ovvero se la carica elettrica è immersa in

3.2. Potenziale e energia del campo elettrico

Attraverso il teorema di Gauss si può scrivere:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{E} dV$$

Da cui:

$$\Phi(E) = \int_V \nabla \cdot \mathbf{E} dV = \int_V \frac{dq/dV}{\epsilon_0} dV = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Il flusso di campo elettrico attraverso una superficie chiusa è semplicemente pari alla carica netta contenuta all'interno della superficie diviso ϵ_0 , o ϵ in presenza di un dielettrico. Questa relazione è particolarmente utile quando si conoscono delle grandezze geometriche del campo elettrico in analisi. Ad esempio, se il campo elettrico presenta una simmetria sferica (quando le cariche sono disposte secondo una simmetria sferica), scegliendo come superficie S una sfera l'integrale diventa:

$$\Phi(E) = \oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \oint_S E(r) \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} dS = E(r) \oint_S dS = E(r) 4\pi r^2$$

Da cui:

$$E(r) 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Se si conosce la carica netta q della distribuzione di carica sferica, si può immediatamente calcolare il campo elettrico ad una distanza r dalla posizione del centro di simmetria.

3.2 Potenziale e energia del campo elettrico

Si è visto che una carica q immersa in un campo elettrico \mathbf{E} subisce una forza $q\mathbf{E}$. Se q si muove nel campo elettrico, la forza elettrostatica compie lavoro. Il lavoro compiuto dalla forza elettrica non dipende dal percorso seguito, ma solo da posizione iniziale e finale. Il campo elettrico è quindi un campo conservativo (o più precisamente il campo elettrostatico). Questa caratteristica è comune a tutti i campi centrali, ovvero campi radiali il cui modulo dipende solo dalla distanza dalla sorgente del campo. In termini differenziali, applicando il teorema di Stokes, questo si traduce in:

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

Si precisa che quanto detto vale in condizioni stazionarie, ovvero quando il campo elettrico non varia nel tempo. Se il campo è conservativo si può associare al campo un potenziale. Il potenziale elettrostatico è definito come l'opposto del lavoro compiuto per unità di carica:

$$dV = -\frac{dW}{q} = -\frac{\mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}}{q} = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

La differenza di potenziale tra due punti A e B è:

$$\Delta V = V_B - V_A = -\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

3.3. Corrente elettrica

potenziale elettrostatica \mathcal{E}_E . Se ad un certo punto la sfera inizia a scaricarsi e le cariche vanno all'infinito, queste ultime recuperano l'energia che si è spesa per accumularle. Il condensatore, componente elettrico caratterizzato da una certa capacità, è quindi in grado di immagazzinare energia. Alcuni propulsori (PPT) sfruttano i condensatori per accumulare l'energia necessaria ad accelerare il propellente.

3.3 Corrente elettrica

In presenza di un campo elettrico una carica libera di muoversi accelera sotto l'effetto del campo. Le cariche in movimento costituiscono la corrente elettrica. La densità di corrente è:

$$\mathbf{j} = nq\mathbf{v}$$

Essa è il prodotto del numero di cariche per unità di volume n , della carica q di una singola particella e della velocità \mathbf{v} media delle particelle. Se si considera un'area A attraverso cui le cariche stanno passando, la densità di corrente è la quantità di carica per unità di area e per unità di tempo. Risulta evidente come \mathbf{j} sia concorde con la velocità se la carica è positiva, mentre sia opposta alla velocità se la carica è negativa. L'intensità di corrente elettrica è la carica complessiva che attraversa una certa area A per unità di tempo:

$$J = \int_A \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dA$$

Dove \mathbf{n} è il versore normale all'area. Se \mathbf{j} è uniforme e se il versore normale ha la sua stessa direzione si può scrivere:

$$J = jA$$

$$j = \frac{J}{A}$$

3.4 Campo magnetico

Si immagini che due cariche positive q_1 e q_2 siano in moto come in fig. 3.2. Il campo magnetico generato da una singola carica in moto è:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\mathbf{v} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

Dove μ_0 è la permeabilità magnetica nel vuoto. In particolare, la carica q_1 genera nel punto dove si trova la carica q_2 il campo magnetico:

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_1\mathbf{v}_1 \times \mathbf{r}_2}{r^3}$$

Dove con \mathbf{r}_2 viene indicato il vettore che va da q_1 a q_2 . A sua volta, la carica q_2 genera nel punto dove si trova la carica q_1 il campo magnetico:

$$\mathbf{B}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_2\mathbf{v}_2 \times \mathbf{r}_1}{r^3}$$

3.5. Circuiti

Se un'intensità di corrente J sta fluendo dentro un filo conduttore, il campo magnetico generato da un elemento $d\mathbf{l}$ del filo è:

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 J}{4\pi} \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

Se il filo è immerso in un altro campo magnetico, la forza che subisce l'elemento è:

$$d\mathbf{F} = J d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

Due fili attraversati da correnti parallele si attraggono, mentre due vili attraversati da correnti opposte si respingono. In presenza di un mezzo tra le due correnti, il campo magnetico, e di conseguenza la forza risentita da ciascun filo, risultano modificati. Diversamente dal campo elettrico, la forza magnetica aumenta in presenza di un mezzo. Infatti, considerando il modello semplificato di atomo con nucleo ed elettroni attorno ad esso, agli elettroni corrisponde una corrente; in presenza di un campo magnetico questi subiscono una forza magnetica. L'effetto netto è quello di orientare gli atomi in modo che il campo magnetico che a sua volta è creato dalla corrente portata dagli elettroni va a sommarsi al campo magnetico esterno. Pertanto, in analogia con il campo elettrico dove si era introdotto il vettore spostamento elettrico \mathbf{D} , si introduce il vettore induzione magnetica \mathbf{H} :

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}_0}{\mu_0}$$

Dove \mathbf{B}_0 è il campo magnetico che si avrebbe nel vuoto. In presenza di un mezzo:

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

Risulta che:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}$$

Si può interpretare \mathbf{H} come il campo generato dalla corrente, e dal momento che nella realtà il campo viene modificato dall'effetto degli elettroni, il campo magnetico \mathbf{B} è legato ad \mathbf{H} con un tensore μ . I fluidi che verranno trattati sono isotropi, quindi μ è uno scalare. Inoltre, sarà quasi sempre possibile confondere μ con μ_0 .

3.5 Circuiti

Si immagini di avere un filo conduttore attraverso cui fluisce una corrente J . In ogni punto si può vedere J come jA ; se l'area del conduttore è costante si ha J costante. Ci si chiede in che modo si può mantenere una corrente stazionaria nel conduttore. In primo luogo si deve considerare che sono gli elettroni a muoversi, pertanto J avrà verso opposto alla velocità degli elettroni. In modo equivalente, si può considerare che siano le cariche positive a muoversi in direzione opposta, generando la stessa J . Ad ogni modo, le particelle in movimento subiscono una resistenza al loro moto da parte delle particelle ferme, le quali assorbono la loro energia attraverso urti. Per vincere questa resistenza si deve applicare un campo elettrico nel conduttore che generi una forza. Questo viene riassunto dalla legge di Ohm:

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$$

3.5. Circuiti

Quando l'autoflusso del circuito aumenta la differenza di potenziale è maggiore. Pertanto, se si vuole far crescere la corrente si deve applicare una differenza di potenziale più grande, ovvero far crescere il campo magnetico. Per creare una corrente bisogna spendere un'energia pari a:

$$\mathcal{E}_B = \frac{1}{2} L J^2$$

L'equazione

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

viene modificata in

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}$$

Allo stesso modo, si può vedere come

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$$

venga modificata in

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \epsilon_0 \mu_0 \dot{\mathbf{E}}$$

Si riassumono quindi le equazioni di Maxwell:

Forma generale	Plasmi per la propulsione
$\nabla \cdot \mathbf{D} = q_{\text{vol}}$	$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{q_{\text{vol}}}{\epsilon}$
$\nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}$	$\nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}$
$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$
$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \dot{\mathbf{D}}$	$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{j} + \epsilon \mu \dot{\mathbf{E}}$

L'equazione

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \dot{\mathbf{D}}$$

evidenzia che quando un corpo si carica o si scarica nasce un campo magnetico, mentre

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}$$

evidenzia che quando nasce un campo magnetico si crea un campo elettrico. Il campo elettrico e quello magnetico sono intrinsecamente legati, e la presenza di uno o l'altro dipende dal sistema di riferimento da cui li si misura.

Per la propulsione, i plasmi isotropi che vengono usati rendono possibile la scrittura delle equazioni come sulla colonna di destra nella tabella, con ϵ e μ per i quali vale l'assunzione:

$$\epsilon = \epsilon_0$$

$$\mu = \mu_0$$

3.7. Conducibilità

La parte dell'equazione di derivata prima nel tempo del campo elettrico è legata allo smorzamento dell'onda. Il campo elettrico non sarà più nella forma $E = E_0 e^{i(\omega t \pm kx)}$ con $\omega t \pm kx$ numero reale, in quanto k diventa un numero complesso la cui parte immaginaria determina lo smorzamento (in quanto è moltiplicata per i). Lo smorzamento dipende dal rapporto tra la pulsazione dell'onda ω e la frequenza di plasma ω_p :

$$\omega_p = \sqrt{\frac{nq^2}{\epsilon_0 m}}$$

La frequenza di plasma dipende dal numero di particelle per unità di volume n , dalla carica delle particelle q , dalla loro massa m e dalla costante dielettrica. La grandezza ω_p è la frequenza con la quale gli elettroni tendono ad oscillare. Si ipotizzi un caso unidimensionale con elettroni disposti ad intervalli regolari. Il sistema è in equilibrio, in quanto ogni elettrone vede in una direzione tanti elettroni quanti ce ne sono nell'altra direzione. Ipotizzando di perturbare la posizione di un elettrone, esso sarà più vicino all'elettrone in direzione della perturbazione rispetto a quello nell'altra direzione. La forza repulsiva dell'elettrone più vicino è più grande della forza repulsiva dell'elettrone più lontano. Di conseguenza, l'elettrone tende a muoversi nella direzione dell'elettrone più lontano. Arrivato nella posizione originaria, la velocità è non nulla e l'elettrone si avvicina a quello che era prima più lontano. Risulta evidente come l'oscillazione di un elettrone provochi l'oscillazione anche di quelli vicini. Il campo di elettroni inizia quindi a vibrare con frequenza pari ω_p .

Se la frequenza di plasma è molto piccola rispetto alla pulsazione dell'onda non c'è assorbimento. Questo perché ω è la frequenza con la quale il campo elettrico cambia direzione; se ω è molto più grande di ω_p gli elettroni non fanno in tempo ad acquisire velocità in una direzione che il campo elettrico ha già cambiato verso. In questo caso non si ha quindi corrente e non si ha assorbimento dell'onda elettromagnetica. Quando invece ω_p è maggiore di ω , ovvero gli elettroni si muovono più in fretta di quanto il campo elettrico cambi direzione, gli elettroni fanno in tempo a muoversi e l'onda elettromagnetica genera una corrente di plasma. Questa corrente causa delle collisioni e dissipazioni di energia, smorzando l'onda elettromagnetica man mano che attraversa il gas. Nel caso in cui il gas è neutro la frequenza di plasma è nulla ed il gas diventa trasparente all'onda elettromagnetica, come per esempio accade per l'aria. Tuttavia, all'interno dei plasmi oggetto di studio si hanno delle ω_p dell'ordine del GHz. Pertanto, si vedrà come le onde elettromagnetiche, ed in particolare le microonde (che hanno la stessa frequenza), tendano ad essere assorbite.

3.7 Conducibilità

In generale, la relazione tra corrente e campo elettrico è data dalla legge di Ohm

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$$

Finora, si è trattato il caso in assenza di campo magnetico in cui corrente e campo elettrico sono paralleli:

$$\mathbf{j} = \sigma_0 \mathbf{E}$$

3.8. Ionizzazione

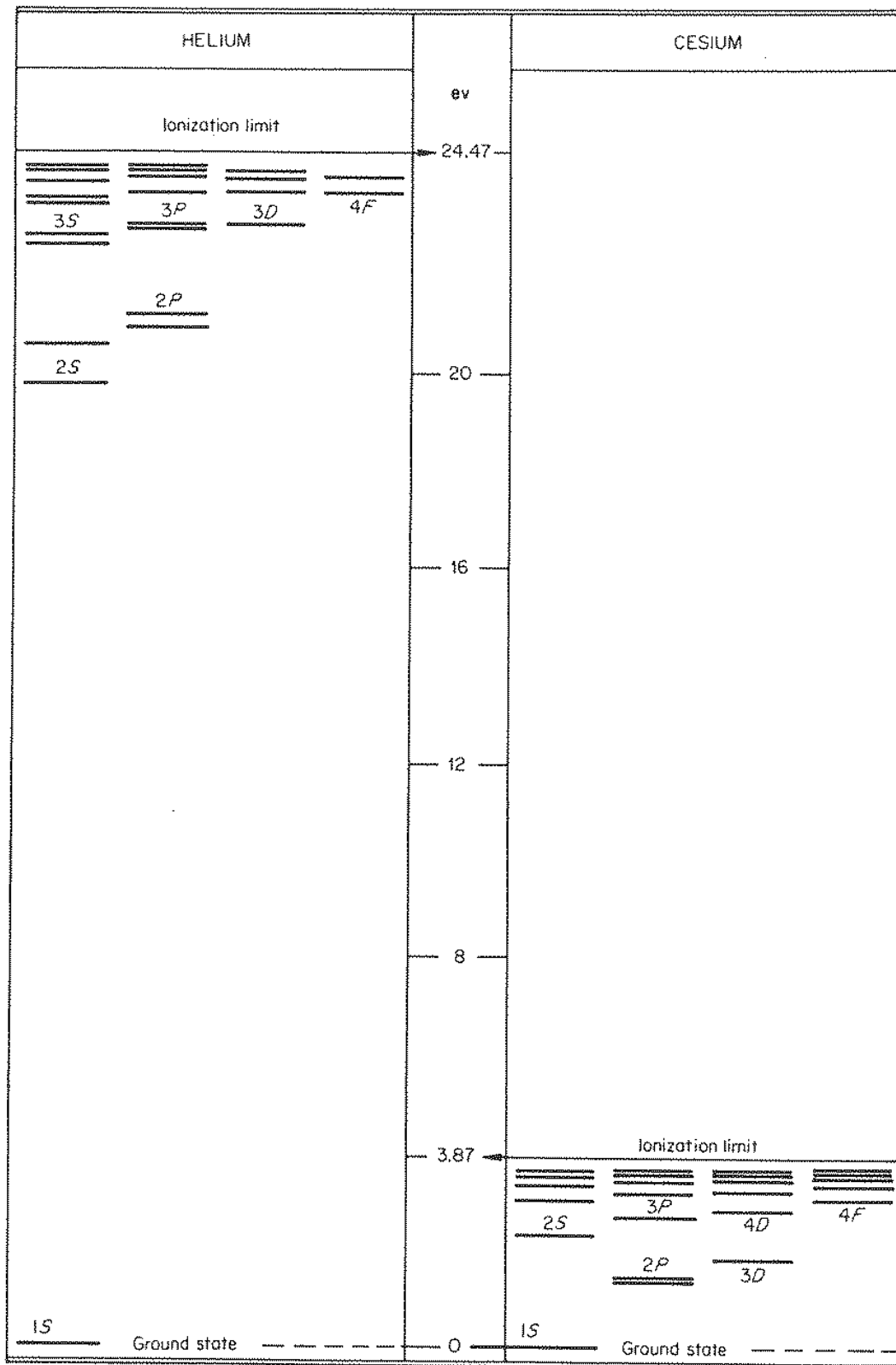


Figura 3.3: Diagrammi semplificati di livelli di energia elettronica di elio e cesio

3.8. Ionizzazione

Dove n_+ , n_e e n_A sono le densità di ioni, elettroni ed atomi, rispettivamente. Con la meccanica statistica si vede che questo rapporto di densità in equilibrio è dato dal corrispondente rapporto delle somme degli stati energetici accessibili, appropriatamente pesati dai livelli di energia degeneri¹ e dai fattori di Boltzmann nell'energie relative di quegli stati. Il tutto si traduce nei rapporti delle funzioni di partizione F_+ , F_e e F_A :

$$K_i = \frac{n_+ n_e}{n_A} = \frac{F_+ F_e}{F_A}$$

La funzione di partizione è legata al concetto di probabilità. Per comprendere questa nozione bisogna tenere a mente che si stanno trattando un numero elevato di particelle (dell'ordine che può andare oltre a 10^{26} al metro cubo). Queste particelle sono in continuo movimento e in continua collisione l'una con l'altra. Pertanto, prendendo una singola particella, essa può subire continui cambiamenti di velocità sulla base delle collisioni. Dato l'elevato numero di particelle la trattazione matematica del fenomeno non può che essere di natura statistica. Ci si chiede allora qual è la probabilità che un elettrone si trovi ad avere un certo livello di energia. Quello che ne risulta è che una possibile distribuzione di energia tra le varie particelle è estremamente più probabile di tutte le altre. La valutazione di questa probabilità può essere fatta analiticamente.

Ad esempio, si immagini di avere 4 particelle e che a queste possano essere date 8 unità di energia complessive. Una prima distribuzione potrebbe consistere in tutte e 4 le particelle con 2 unità di energia ognuna. Questa distribuzione si può avere solo in un modo, ovvero soltanto quando tutte le particelle sono al secondo livello. Una distribuzione in cui ogni particella ha un livello di energia diverso da quello di tutte le altre (come 4,3,1,0 o 5,2,1,0), è estremamente più probabile. In particolare, dato che ci sono 4 particelle, si hanno $4! = 24$ modi diversi con cui una specifica distribuzione di questo tipo può presentarsi. Se il numero delle particelle viene portato agli ordini di grandezza citati prima, la differenza di probabilità tra queste due situazioni (livelli tutti uguali o livelli tutti diversi) diventa così grande che si è praticamente certi che quella a livelli tutti diversi sarà quella che effettivamente si verificherà.

Questo concetto si può esprimere tramite le funzioni di partizione, che rappresentano una misura del numero di modi in cui una certa quantità di energia si può distribuire tra le varie particelle. La probabilità P che una particella abbia un certo livello di energia \mathcal{E}_j è:

$$P(\mathcal{E}_j) = \frac{e^{-\frac{\mathcal{E}_j}{kT}}}{\sum_j e^{-\frac{\mathcal{E}_j}{kT}}}$$

dove k è la costante di Boltzmann (1.38×10^{-23} J/K) e $e^{\frac{\mathcal{E}_j}{kT}}$ è il fattore di Boltzmann. Più livelli energetici j ci sono e maggiori saranno i modi con cui l'energia può essere distribuita. Dal momento che la temperatura di un gas è una misura dell'energia media delle sue particelle, si ha che la probabilità di avere un certo livello energetico j è funzione della temperatura. Inoltre, va osservato che più è alta l'energia di una particella, ovvero più è alta la sua temperatura, e meno energia si può distribuire tra tutte le altre. Pertanto, si ha anche che la probabilità che

¹Due o più stati diversi di un sistema quantomeccanico sono degeneri se misurati danno lo stesso valore di energia

3.8. Ionizzazione

L'energia assoluta al ground state dello ione $\bar{\mathcal{E}}_0^+$ deve differire da quella dell'atomo \mathcal{E}_0 dell'energia necessaria per fare uno ione ground state da un atomo ground state, i.e. dell'energia di prima ionizzazione \mathcal{E}_i :

$$\bar{\mathcal{E}}_0^+ = \mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_i = \mathcal{E}_i$$

All'energia ground state dell'atomo è assegnato il valore zero. Si possono quindi riscrivere tutti i livelli di energia dello ione relativamente al suo ground state:

$$\mathcal{E}_j^+ = \bar{\mathcal{E}}_j^+ - \bar{\mathcal{E}}_0^+ = \bar{\mathcal{E}}_j^+ - \mathcal{E}_i$$

Si può quindi scrivere:

$$\bar{\mathcal{E}}_j^+ = \mathcal{E}_j^+ + \mathcal{E}_i$$

La funzione di partizione per l'elettrone contiene solo la funzione traslazionale (l'elettrone non ha altri gradi di libertà) e un fattore 2 per la degenerazione dello spin, il suo unico grado di libertà interno:

$$F_e = 2f_e^t = \frac{2(2\pi mkT)^{3/2}}{h^3}$$

Pertanto, con l'approssimazione $M_A = M_+$ la costante di equilibrio è:

$$K_i = \frac{n_+ n_e}{n_A} = \frac{2(2\pi mkT)^{3/2}}{h^3} \frac{\sum_j g_j^+ e^{-\frac{\mathcal{E}_j^+}{kT}}}{\sum_j g_j e^{-\frac{\mathcal{E}_j}{kT}}} e^{-\frac{\mathcal{E}_i}{kT}}$$

Una forma alternativa di questa relazione viene dalla definizione del **grado di ionizzazione** α , che esprime quante delle particelle ionizzabili sono effettivamente ioni:

$$\alpha = \frac{n_+}{n_A + n_+} = \frac{n_+}{n_0}$$

dove n_0 è il numero totale di atomi disponibile per la ionizzazione; dall'assunzione di neutralità della carica complessiva,

$$n_e = n_+$$

e dall'assunzione di equazione di stato per un gas perfetto,

$$p = (n_e + n_+ + n_A) kT = (1 + \alpha) n_0 kT$$

Sostituendo nella relazione di K_i si ha l'**equazione di Saha**:

$$\frac{\alpha^2}{1 - \alpha^2} = \frac{2(2\pi m)^{3/2} (kT)^{5/2}}{ph^3} \left(\frac{f_+^i}{f_A^i} \right) e^{-\frac{\mathcal{E}_i}{kT}}$$

Il grado di ionizzazione tende a 0 se $T \rightarrow 0$, e ha come asintoto 1 se $T \rightarrow \infty$ e dipende dalla pressione (fig. 3.4). A parità di temperatura, il grado di ionizzazione diminuisce se la pressione aumenta. Dal grafico si vede che nell'argon al di sotto dei 10000 K non si ha pressoché alcuna