NUMERO: **2513A** ANNO: 2021

A P P U N T I

STUDENTE: Forestieri Andrea

MATERIA: Endoreattori esercitazioni - Prof. Pastrone

ESERCITAZIONI

Corso Di Endoreattori

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55/B - Torino / Pagina 3 di 112

Esercitazione 1

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55/B - Torino / Pagina 5 di 112

la massa di propellente diminuisce a favore, ad esempio, della massa utile. Questo si può vedere più chiaramente da

$$\frac{m_p}{m_0} = \frac{m_0 - m_d}{m_0} = 1 - \frac{m_d}{m_0} = 1 - e^{-\frac{\Delta v}{c}}$$

che evidenzia come un aumento di c, comportando un aumento di $e^{-\frac{\Delta v}{c}}$, provoca una diminuzione di m_p/m_0.
La massa dei serbatoi è legata al volume del propellente per mezzo di una certa k_t

$$m_s = k_t V_p = k_t \frac{m_p}{\rho_p}$$

$$\frac{m_s}{m_0} = \frac{k_t}{\rho_p}\frac{m_p}{m_0}$$

La densità del propellente è esprimibile come

$$\rho_p = \frac{m_{fuel} + m_{ox}}{V_{fuel} + V_{ox}} = \frac{m_{fuel} + m_{ox}}{\frac{m_{fuel}}{\rho_{fuel}} + \frac{m_{ox}}{\rho_{ox}}} = \frac{1 + \frac{m_{ox}}{m_{fuel}}}{\frac{1}{\rho_{fuel}} + \frac{1}{\rho_{ox}}\frac{m_{ox}}{m_{fuel}}} = \frac{1 + r_m}{\frac{1}{\rho_{fuel}} + \frac{r_m}{\rho_{ox}}}$$

definendo il rapporto di miscela

$$r_m = \frac{m_{ox}}{m_{fuel}}$$

Per quanto riguarda la massa del motore, usualmente si esprimono le prestazioni attraverso dei coefficienti spinta/peso

$$\frac{F_{vac}}{m_e g_0} = \frac{\text{spinta nel vuoto}}{\text{peso motore a sea level}}$$

$$\frac{F_{SL}}{m_0 g_0} = \frac{\text{spinta a sea level}}{\text{peso iniziale a sea level}}$$

Un altro parametro caratteristico è il rapporto F_{vac}/F_{SL}. Si può esprimere m_e usando i coefficienti spinta/peso:

$$m_e = \frac{F_{vac}}{(F_{vac}/m_e g_0)}\frac{1}{g_0} = \frac{(F_{vac}/F_{SL})}{(F_{vac}/m_e g_0)}\frac{F_{SL}}{g_0} = \frac{(F_{vac}/F_{SL})}{(F_{vac}/m_e g_0)}\left(\frac{F_{SL}}{g_0 m_0}\right) m_0$$

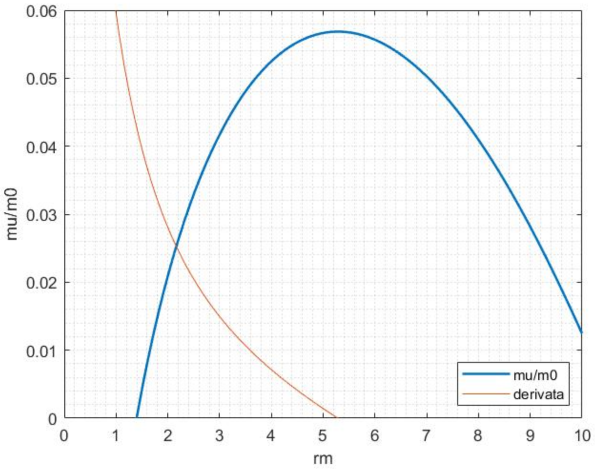
da cui

$$\frac{m_e}{m_0} = \frac{(F_{SL}/m_0 g_0)}{(F_{vac}/m_e g_0)}\left(\frac{F_{vac}}{F_{SL}}\right)$$

Mettendo tutto insieme

$$\frac{m_u}{m_0} = 1 - \frac{m_p}{m_0} - \frac{m_s}{m_0} - \frac{m_e}{m_0}$$

$$\frac{m_u}{m_0} = 1 - \frac{m_p}{m_0} - \frac{k_t}{\rho_p}\frac{m_p}{m_0} - \frac{m_e}{m_0} = 1 - \left(\frac{k_t}{\rho_p} + 1\right)\frac{m_p}{m_0} - \frac{m_e}{m_0}$$

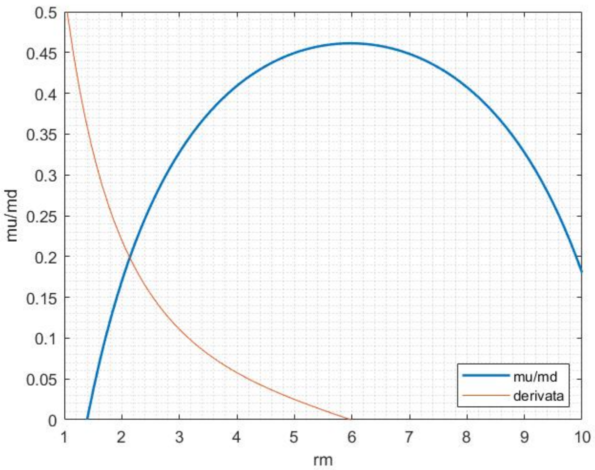


Si può quindi individuare il massimo per $r_m \simeq 5$. Per un'analisi più accurata si è risolta l'equazione trascendente

$$\frac{d\,(m_u/m_0)}{dr_m} = \frac{\partial\,(m_u/m_0)}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial r_m} = 0$$

risolvendola numericamente con *Matlab*. Il risultato è che la funzione ha un massimo per $r_m = 5.29$. Si può anche diagrammare la relazione che lega m_u/m_d al rapporto di miscela, essendo

$$\frac{m_u}{m_d} = \frac{m_u}{m_0}\frac{m_0}{m_d} = \frac{m_u}{m_0}e^{\frac{\Delta v}{c(r_m)}}$$



Si può quindi individuare il massimo per $r_m \simeq 6$. Anche l'equazione

$$\frac{d\,(m_u/m_d)}{dr_m} = 0$$

2 Suddivisione in stadi per Two Stage To Orbit (TSTO)

Assegnato il volume totale dell'endoreattore, si vuole studiare la ripartizione dei volumi dei due stadi per massimizzare Δv (cioè mettere in orbita alla quota più alta possibile). Il primo stadio è costituito da:

- volume del propellente V_1 e densità ρ_1
- velocità di scarico c_1
- massa scaricata Δm

Il secondo stadio è costituito da:

- volume del propellente V_2 e densità ρ_2
- velocità di scarico c_2
- massa serbatoio m_{s2}
- massa motore m_{e2}
- massa utile m_u

Si suppone di avere $V_{tot} = V_1 + V_2$, quindi si ragiona a costo fissato, rappresentato dalla *dry mass*, perché il propellente è relativamente economico. Il salto di velocità è ripartito tra stadio 1 e 2

$$\Delta v = \Delta v_1 + \Delta v_2 = c_1 \ln\left(\frac{m_{01}}{m_{f1}}\right) + c_2 \ln\left(\frac{m_{02}}{m_{f2}}\right)$$

I fattori costanti durante il lancio si possono raggruppare in un'unica variabile

$$H = m_u + m_{s2} + m_{e2} + \Delta m + \rho_2 V_{tot}$$

La masse iniziali e finali dell'endoreattore a ogni stadio si possono quindi scrivere come segue:

$$m_{01} = H + \rho_1 V_1 - \rho_2 V_1 \implies m_{01} = H + V_1 \left(\rho_1 - \rho_2\right)$$

$$m_{f1} = m_{01} - \rho_1 V_1 \implies m_{f1} = H - \rho_2 V_1$$

$$m_{02} = m_{f1} - \Delta m \implies m_{02} = H - \rho_2 V_1 - \Delta m$$

$$m_{f2} = m_u + m_s + m_e$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55/B - Torino / Pagina 11 di 112

diventa

$$c_1 \frac{\rho_1 H}{\left[H + V_1^* \left(\rho_1 - \rho_2\right)\right]\left(H - \rho_2 V_1^*\right)} + c_2 \frac{-\rho_2}{H - \rho_2 V_1^*} = 0$$

$$\frac{\rho_1 c_1 H}{H + V_1^* \left(\rho_1 - \rho_2\right)} - \rho_2 c_2 = 0$$

da cui

$$V_1^* = \left(\frac{\rho_1 c_1}{\rho_2 c_2} - 1\right)\left(\frac{H}{\rho_1 - \rho_2}\right)$$

Quindi se $\rho_1 c_1 > \rho_2 c_2$ la radice è positiva. Altrimenti è negativa.
Si studia quando questa soluzione è un massimo per Δv al variare dei parametri caratteristici.
La derivata seconda è

$$\frac{d^2(\Delta v)}{dV_1^2} = \frac{-\left(\rho_1 - \rho_2\right)\rho_1 c_1 H}{\left[H + V_1^* \left(\rho_1 - \rho_2\right)\right]^2}$$

Quindi la radice è un massimo se la derivata seconda è negativa, cioè se $\rho_1 > \rho_2$. Riassumendo

	$\rho_1 > \rho_2$	$\rho_1 < \rho_2$
$\rho_1 c_1 > \rho_2 c_2$	1 - Radice positiva, è un massimo	2 - Radice positiva, è un minimo
$\rho_1 c_1 < \rho_2 c_2$	3 - Radice negativa, è un massimo	4 - Radice negativa, è un minimo

1. Per $\rho_1 > \rho_2$ e $\rho_1 c_1 > \rho_2 c_2$, la funzione Δv ha massimo per un certo volume del primo stadio. Con due stadi conviene quindi scegliere propellenti con densità maggiori al primo stadio.

2. Per $\rho_1 < \rho_2$ e $\rho_1 c_1 > \rho_2 c_2$, la funzione Δv ha minimo per un certo volume del primo stadio, e per volumi maggiori o minori aumenta in valore.

3. Per $\rho_1 > \rho_2$ e $\rho_1 c_1 < \rho_2 c_2$, la funzione Δv ha massimo per un volume di primo stadio negativo. Quindi, partendo da volumi di primo stadio nulli, la funzione Δv è decrescente all'aumentare di V_1. Questo significa che il salto di velocità è massimo se il volume di primo stadio è nullo. Quindi converrebbe avere solo il secondo stadio.

4. Per $\rho_1 < \rho_2$ e $\rho_1 c_1 < \rho_2 c_2$, la funzione Δv ha minimo per un volume di primo stadio negativo. Quindi, partendo da volumi di primo stadio nulli, la funzione Δv è crescente all'aumentare di V_1. Questo significa che il salto di velocità è massimo se il volume di primo stadio è massimo. Quindi converrebbe avere solo il primo stadio.

$$\dot{m}_{tot} = 3\frac{F_{SSME,SL}}{g_0\,(I_s)_{SSME,SL}} + 2\frac{F_{SRB,SL}}{g_0\,(I_s)_{SRB,SL}} = 11020\frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

La densità del propellente è

$$\rho_1 = \frac{\left(m_p\right)_{stadio1}}{\left(V_p\right)_{stadio1}} = 1183\,{}^{kg}/_{\text{m}^3}$$

dove

$$\left(m_p\right)_{stadio1} = 2m_{p,SRB} + 3\left(m_{p,ET}\right)_{stadio1} = 2m_{p,SRB} + 3\frac{F_{SSME,SL}}{g_0\,(I_s)_{SSME,SL}}\,t_{b,SRB} = 1177\,\text{Mg}$$

$$\left(V_p\right)_{stadio1} = 2\frac{m_{p,SRB}}{\rho_{SRB}} + 3\frac{\left(m_{p,ET}\right)_{stadio1}}{\rho_{ET}} = 2\frac{m_{p,SRB}}{\rho_{SRB}} + 3\frac{\frac{F_{SSME,SL}}{g_0(I_s)_{SSME,SL}}\,t_{b,SRB}}{\rho_{ET}} = 995\,\text{m}^3$$

Per calcolare la massa del propellente utilizzato dai 3 SSME durante il primo stadio si è moltiplicata la portata dei 3 SSME a *sea level* per il tempo $t_{b,SRB}$ del primo stadio. La massa sarà quindi un'approssimazione di quella reale dato che la portata cambia durante la salita. La massa usata dai SRB è semplicemente la massa totale di propellente dei SRB. L'espressione di H è:

$$H = m_u + m_{s2} + m_{e2} + \Delta m + \rho_2 V_{tot}$$

In questo caso, il fattore $(m_u + m_{s2} + m_{e2})$ è costituito dalla massa dello Space Shuttle (che comprende massa utile e motori) e dalla massa dell'*external tank*

$$m_u + m_{s2} + m_{e2} = m_{SS} + m_{ET}$$

Questa è anche uguale alla massa totale al decollo a meno del peso totale dei SRB e del peso del propellente totale nell'*external tank*

$$m_{SS} + m_{et} = m_{tot,SS} - 2m_{tot,SRB} - m_{p,ET} = 139\,\text{Mg}$$

La massa scaricata è la massa a secco dei SRB

$$\Delta m = 2m_{SRB,empty} = 2\left(m_{tot,SRB} - m_{p,SRB}\right) = 176\,\text{Mg}$$

Il volume totale è

$$V_{tot} = 2V_{p,SRB} + V_{p,ET} = 2\frac{m_{p,SRB}}{\rho_{SRB}} + \frac{m_{p,ET}}{\rho_{ET}} = 2526\,\text{m}^3$$

Il valore di H pertanto è

$$H = 1219\,\text{Mg}$$

I coefficienti dell'equazione sono

$$a = 2.95191 \cdot 10^5$$

$$b = -1.40664 \cdot 10^9$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55/B - Torino / Pagina 15 di 112

Esercitazione 2

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55/B - Torino / Pagina 17 di 112

	Simbolo	Unità di misura	Motore A-1	Motore A-2	Motore A-3
Motore			(SEA LEVEL)	(VACUUM)	(VACUUM)
spinta	F_0	kN	3340	670	-
tempo di funzionamento	t_b	s	165	250	-
impulso specifico	I_{s0}	s	262	426	-
ossidante			LOX	LOX	NTO
portata	m_{o0}	kg/s	892	131	-
densità	ρ_o	kg/m^3	1143	1143	1447
combustibile			RP-1	LH2	MMH
portata	m_{f0}	kg/s	405	26	-
densità	ρ_f	kg/m^3	808	71	879
rapporto di miscela	r_{m0}		2.2	5	-
Camera di spinta			tubolare	tubolare	
raffreddamento			rigenerativo	rigenerativo	ablat./irrag.
spinta	F	kN	3327	665	11
impulso specifico	I_s	s			
pressione uscita iniettori	p_i	bar	75.5	60.3	15
pressione totale ugello	p_c	bar	68.9	55.2	10
portata ossidante	m_o	kg/s			
portata combustibile	m_f	kg/s			
rapporto di miscela	r_m		2.35	5.2	1.647
densità media	ρ	kg/m^3	1017	333	1163
Impulso spec. per densità	I_ρ	kg s/m^3			
velocità caratteristica reale	c^*	m/s			
fattore di correzione c^*	η^*	%	97.5	97.5	98.1
coefficiente di spinta	C_F				
fattore di correzione C_F	η_F	%	98	101	100
rapporto di contrazione	ε_c		1.6	1.6	3.4
rapporto di espansione	ε			40	35
pressione uscita ugello	p_e	bar	0.522		
area di gola	A_t	cm^2			
Lunghezza caratteristica	L^*	m	1.14	0.66	0.81
forma ugello			campana 80%	campana 75%	campana 70%

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55/B - Torino / Pagina 19 di 112

$$\frac{p_c A_t}{\sqrt{\frac{R}{M} T_c}} \Gamma = \frac{p_c A_e}{\sqrt{\frac{R}{M} T_c}} \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma - 1} \left[\left(\frac{p_e}{p_c}\right)^{\frac{2}{\gamma}} - \left(\frac{p_e}{p_c}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} \right]}$$

$$\varepsilon = \frac{A_e}{A_t} = \frac{\Gamma}{\sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \left[\left(\frac{p_e}{p_c}\right)^{\frac{2}{\gamma}} - \left(\frac{p_e}{p_c}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} \right]}} = 14$$

Per i motori A-2 e A-3 è invece incognito p_e/p_c. Rappresentando questo rapporto con x

$$\varepsilon = \frac{\Gamma}{\sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \left(x^{\frac{2}{\gamma}} - x^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} \right)}} = 14$$

$$x^{\frac{2}{\gamma}} - x^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} = \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \left(\frac{\Gamma}{\varepsilon}\right)^2$$

L'equazione può essere risolta iterativamente

$$x^{\frac{2}{\gamma}} \left(1 - x^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right) = \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \left(\frac{\Gamma}{\varepsilon}\right)^2$$

$$x = \left[\frac{\frac{\gamma-1}{2\gamma} \left(\frac{\Gamma}{\varepsilon}\right)^2}{1 - x^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} \right]^{\frac{\gamma}{2}}$$

Partendo da $x = 0$, l'incremento assoluto della soluzione dopo 3 iterazioni è minore di 10^{-4}.
I valori di x sono:

$$x_2 = \frac{p_{e,2}}{p_{c,2}} = 0.0020$$

$$x_3 = \frac{p_{e,3}}{p_{c,3}} = 0.0021$$

da cui

$$p_{e,2} = 0.0020 p_{c,2} = 0.111 \, \text{bar}$$

$$p_{e,3} = 0.0021 p_{c,3} = 0.021 \, \text{bar}$$

Si può ora calcolare il coefficiente di spinta per i tre motori

$$C_{F,1} = \eta_{F,1} C_{F_{id},1} = 1.5313$$

$$C_{F,2} = \eta_{F,2} C_{F_{id},2} = 1.8925$$

$$C_{F,3} = \eta_{F,3} C_{F_{id},3} = 1.8343$$

Poiché

$$c = C_F c^*$$

si possono calcolare le velocità di scarico:

$$c_1 = C_{F,1} c_1^* = 2636 \, \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Si può calcolare la densità dei propellenti

$$\rho_p = \frac{m_{fuel} + m_{ox}}{V_{fuel} + V_{ox}} = \frac{m_{fuel} + m_{ox}}{\frac{m_{fuel}}{\rho_{fuel}} + \frac{m_{ox}}{\rho_{ox}}} = \frac{1 + \frac{m_{ox}}{m_{fuel}}}{\frac{1}{\rho_{fuel}} + \frac{1}{\rho_{ox}}\frac{m_{ox}}{m_{fuel}}} = \frac{1 + r_m}{\frac{1}{\rho_{fuel}} + \frac{r_m}{\rho_{ox}}}$$

Sostituendo i valori:

$$\rho_1 = 1017\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$$

$$\rho_2 = 333\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$$

$$\rho_3 = 1163\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$$

Gli impulsi specifici per densità sono:

$$I_{\rho,1} = 273255\,\frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}}{\mathrm{m}^3}$$

$$I_{\rho,1} = 146918\,\frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}}{\mathrm{m}^3}$$

$$I_{\rho,1} = 368767\,\frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}}{\mathrm{m}^3}$$

Le aree di gola si possono ottenere attraverso la relazione del coefficiente di spinta:

$$A_t = \frac{F}{p_c C_F}$$

sostituendo i valori si ottiene

$$A_{t,1} = 3153\,\mathrm{cm}^3$$

$$A_{t,2} = 637\,\mathrm{cm}^3$$

$$A_{t,3} = 60\,\mathrm{cm}^3$$

Si può ora completare la tabella.

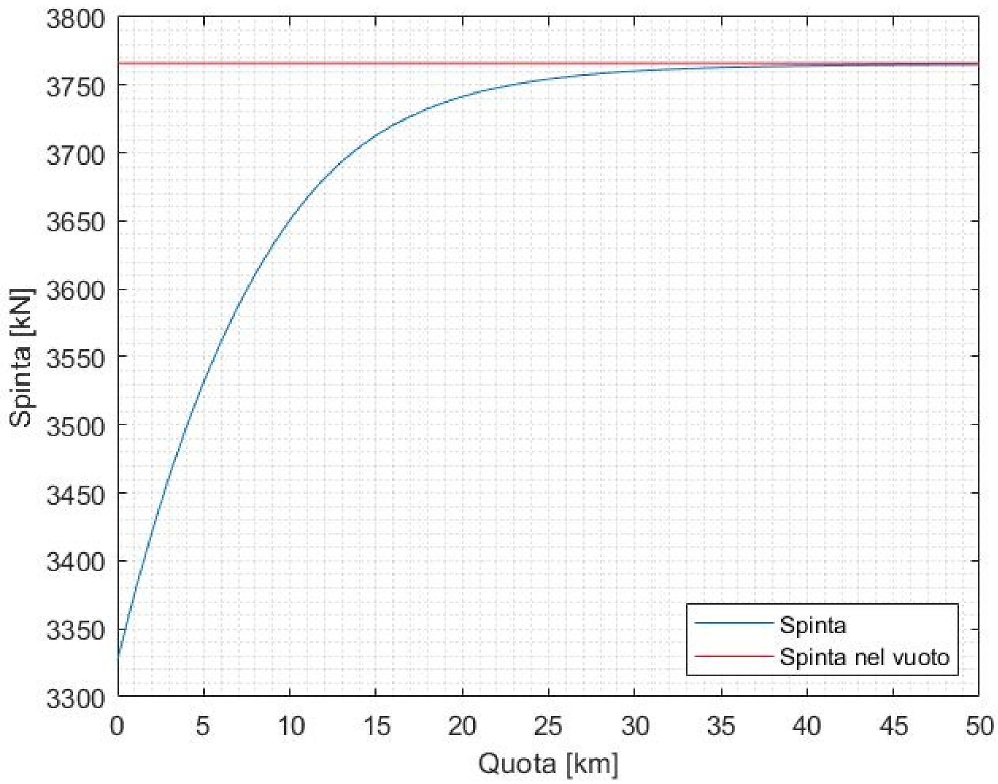
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55/B - Torino / Pagina 23 di 112

1976 US Standard Atmosphere

Alt. (km)	T/To	P/Po	D/Do	Temp. (K)	Pressure	Density
0	1.00000	1	1	288.15	101.33	1.225
1	0.97745	0.88701	0.907477	281.65	89.88069	1.11166
2	0.95490	0.784618	0.821677	275.15	79.50535	1.006554
3	0.93236	0.692042	0.742248	268.66	70.1246	0.909254
4	0.90983	0.608541	0.668854	262.17	61.66346	0.819347
5	0.88730	0.533415	0.601166	255.68	54.0509	0.736428
6	0.86478	0.466001	0.538866	249.19	47.21991	0.660111
7	0.84227	0.405677	0.481647	242.70	41.10722	0.590018
8	0.81976	0.351853	0.429212	236.22	35.65328	0.525785
9	0.79727	0.303978	0.381275	229.73	30.8021	0.467062
10	0.77478	0.261532	0.337558	223.25	26.50108	0.413509
11	0.75229	0.22403	0.297796	216.77	22.70095	0.3648
12	0.75187	0.191456	0.254642	216.65	19.40027	0.311936
13	0.75187	0.163627	0.217628	216.65	16.58031	0.266594
14	0.75187	0.139849	0.186003	216.65	14.17095	0.227854
15	0.75187	0.119533	0.158982	216.65	12.11229	0.194753
16	0.75187	0.102173	0.135893	216.65	10.35322	0.166469
17	0.75187	0.087339	0.116163	216.65	8.850047	0.1423
18	0.75187	0.074662	0.099302	216.65	7.565491	0.121645
19	0.75187	0.063828	0.084893	216.65	6.467703	0.103994
20	0.75187	0.054569	0.072578	216.65	5.529479	0.088908
21	0.75510	0.04667	0.061807	217.58	4.729078	0.075713
22	0.75854	0.039945	0.05266	218.57	4.047606	0.064508
23	0.76199	0.034214	0.044902	219.57	3.466954	0.055004
24	0.76543	0.029328	0.038316	220.56	2.971816	0.046937
25	0.76888	0.025158	0.032721	221.55	2.549275	0.040083
26	0.77232	0.021597	0.027964	222.54	2.188419	0.034256
27	0.77576	0.018553	0.023916	223.54	1.880007	0.029297
28	0.77920	0.01595	0.02047	224.53	1.61622	0.025075
29	0.78264	0.013722	0.017533	225.52	1.390436	0.021478
30	0.78608	0.011813	0.015028	226.51	1.197043	0.018409
31	0.78952	0.010177	0.012891	227.50	1.031268	0.015791
32	0.79296	0.008774	0.011065	228.49	0.889067	0.013555
33	0.80157	0.007572	0.009447	230.97	0.767311	0.011572
34	0.81119	0.006547	0.008071	233.74	0.663412	0.009887
35	0.82080	0.005671	0.006908	236.51	0.574593	0.008463
36	0.83041	0.00492	0.005924	239.28	0.49852	0.007257
37	0.84002	0.004276	0.00509	242.05	0.433245	0.006235
38	0.84962	0.003722	0.004381	244.82	0.377135	0.005366
39	0.85922	0.003245	0.003777	247.59	0.328817	0.004626
40	0.86882	0.002834	0.003262	250.35	0.287139	0.003995
41	0.87842	0.002478	0.002821	253.12	0.251128	0.003456
42	0.88801	0.002171	0.002445	255.88	0.219963	0.002995
43	0.89760	0.001904	0.002121	258.64	0.192947	0.002599
44	0.90718	0.001673	0.001844	261.40	0.169492	0.002259
45	0.91677	0.001471	0.001605	264.17	0.149097	0.001966
46	0.92635	0.001296	0.001399	266.93	0.131337	0.001714
47	0.93592	0.001143	0.001222	269.69	0.115847	0.001496
48	0.93927	0.001009	0.001075	270.65	0.102292	0.001317
49	0.93927	0.000891	0.000949	270.65	0.090333	0.001163
50	0.93927	0.000787	0.000838	270.65	0.079776	0.001027

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55/B - Torino / Pagina 25 di 112

Sostituendo i valori dalla tabella dell'atmosfera standard e calcolando la spinta per ciascuno di essi, si può tracciare l'andamento con la quota:



In particolare la spinta a livello del mare è

$$F_{SL} = 3327\text{kN}$$

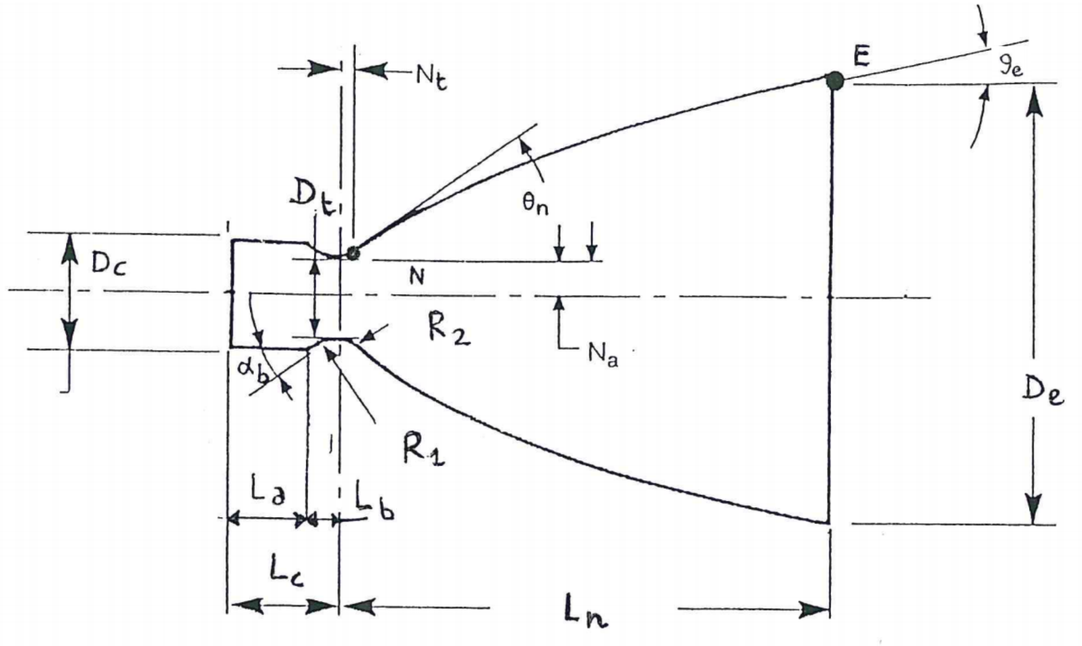
mentre la spinta nel vuoto ($p_0 = 0$) è

$$F_{vac} = 3765\text{kN}$$

Esercitazione 3

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55/B - Torino / Pagina 29 di 112

Si richiede di valutare le grandezze indicate in figura, ponendo $R_1 = 1.5R_t$ e $R_2 = 0.382R_t$.



Convergente

Il diametro di gola è:

$$D_t = \sqrt{\frac{4A_t}{\pi}}$$

Di conseguenza, il raggio di raccordo è:

$$R_1 = 1.5\frac{D_t}{2}$$

L'area della camera di combustione è data da:

$$A_c = \varepsilon_c A_t$$

Da cui si ricava il diametro di camera:

$$D_c = \sqrt{\frac{4A_c}{\pi}}$$

Il volume della camera è dato dalla relazione della lunghezza caratteristica:

$$V_c = A_t L^*$$

La lunghezza totale della camera è data da:

$$L_c = L_a + L_b$$

Sostituendo i valori dei tre motori si ottiene:

Motore	**A-1**	**A-2**	**A-3**
D_t [m]	0.634	0.285	0.087
R_1 $[m]$	0.475	0.213	0.066
A_c $[\text{cm}^2]$	5044.80	1017.60	204.00
D_c [m]	0.801	0.360	0.161
V_c $[\text{m}^3]$	0.359	0.042	0.005
D_x [m]	0.691	0.310	0.126
L_x [m]	0.152	0.068	0.018
L_b [m]	0.314	0.141	0.064
L_a [m]	0.459	0.299	0.199
L_c [m]	0.774	0.440	0.263

Divergente

Il raggio di raccordo è dato in funzione di quello di gola:

$$R_2 = 0.382 R_t$$

L'area di uscita è data da:

$$A_e = \varepsilon A_t$$

da cui si ricava il diametro di uscita:

$$D_e = \sqrt{\frac{4 A_e}{\pi}}$$

Il parametro L_f è definito come

$$L_f = \frac{\text{lunghezza del divergente}}{\text{lunghezza del divergente di un ugello conico di 15° di semiapertura con stesso } \varepsilon}$$

Si procede quindi a calcolare la lunghezza di un ugello conico avente stesso rapporto di espansione e angolo di semi-apertura di 15°.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55/B - Torino / Pagina 33 di 112

La lunghezza di raccordo è:

$$N_t = R_2 \sin(\theta_n)$$

Il raggio dell'area nel punto in cui l'arco di cerchio si raccorda alla parte a campana è dato da:

$$N_a = R_t + R_2 (1 - \cos(\theta_n))$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55/B - Torino / Pagina 35 di 112

Il punto M è individuato da:

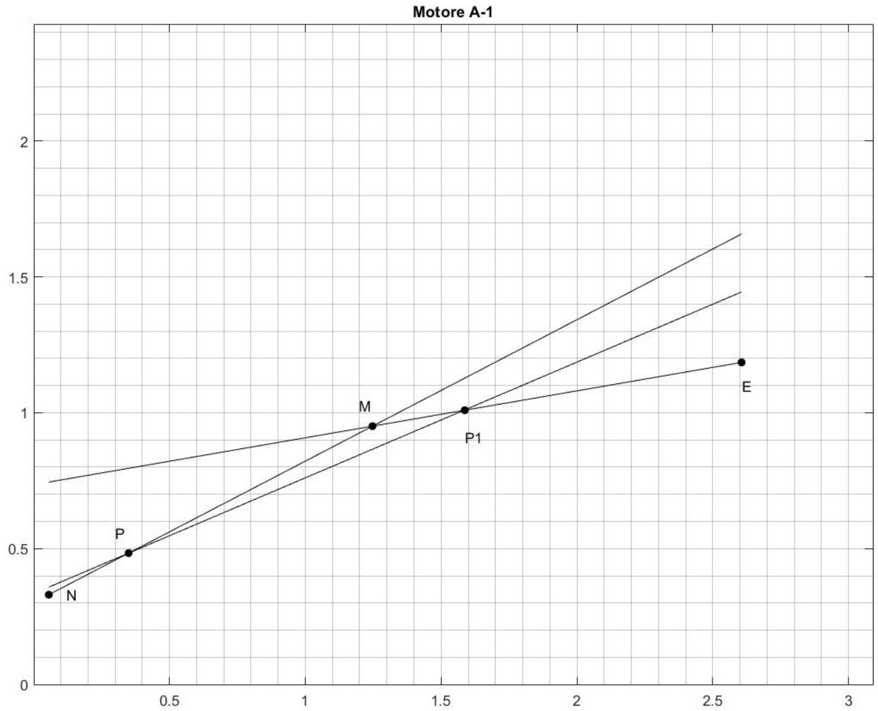
$$y_M = y_N + (x_M - x_N)\tan(\theta_n) = y_E + (x_M - x_E)\tan(\theta_e)$$

Da cui si ricava:

$$x_M = \frac{y_E - \tan(\theta_e) - y_N + \tan(\theta_n)}{\tan(\theta_n) - \tan(\theta_e)}$$

$$y_M = y_N + \left(\frac{y_E - \tan(\theta_e) - y_N + \tan(\theta_n)}{\tan(\theta_n) - \tan(\theta_e)} - x_N\right)\tan(\theta_n)$$

Si può costruire quindi un fascio di rette che intersecano dei punti P, sulla retta NM, e punti P', sulla retta ME. Il punto P' è distante da M rispetto al segmento ME proporzionalmente a quanto il punto P è distante da N rispetto al segmento NM.



Le coordinate di P e P' sono date da:

$$x_P = x_N + \alpha\,(x_M - x_N)$$

$$y_P = y_N + \alpha\left(y_M - y_N\right)$$

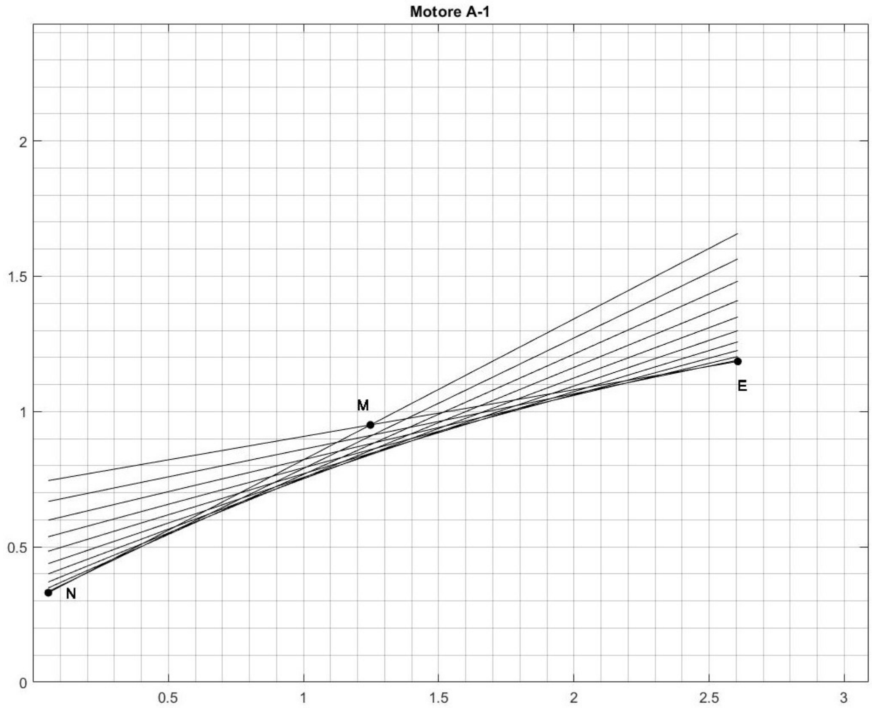
$$x_{P'} = x_M + \alpha\,(x_E - x_M)$$

$$y_{P'} = y_M + \alpha\left(y_E - y_M\right)$$

dove α è un parametro variabile tra 0 e 1. La retta che passa da P e da P' ha equazione

$$y - y_P = (x - x_P)\tan(\theta)$$

Si può pertanto rappresentare il fascio al variare di θ. Si prende come esempio i valori del motore A-1:



Per rappresentare l'equazione della parabola occorre ora esprimere, in funzione di θ, la coordinata x del punto in cui la retta con in inclinazione $\tan(\theta)$ è tangente alla parabola. In altre parole, prendendo la generica retta del fascio, ci si chiede a che ascissa essa è tangente alla parabola. Questa ascissa è funzione di θ, quindi di che retta sto considerando. Una volta trovata questa relazione si prendono θ decrescenti da θ_n a θ_e ad ognuno dei quali corrisponde una x e una y. Unendo questi punti si rappresenta la parabola nel piano cartesiano. L'equazione della retta generica

$$y - y_N = (x - x_N)\tan(\theta) + \alpha D_N$$

si può scrivere come

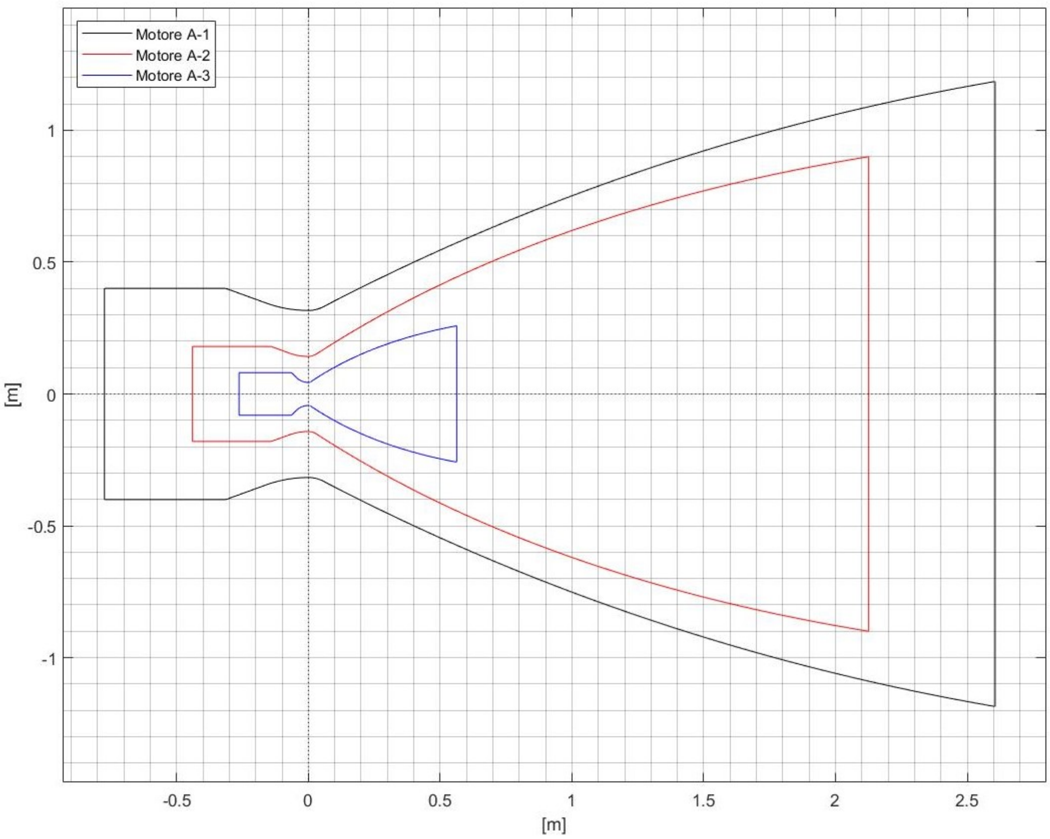
$$F(\theta) = 0$$

con

$$F(\theta) = y - y_N - (x - x_N)\tan(\theta) - \alpha D_N$$

$F(\theta)$ si deve annullare per ogni θ, in particolare quindi anche la sua derivata totale rispetto θ deve essere identicamente nulla:

$$\frac{dF}{d\theta} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{d\theta} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{d\theta} + \frac{\partial F}{\partial \theta} = 0$$



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55/B - Torino / Pagina 41 di 112

Esercitazione 4

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55/B - Torino / Pagina 43 di 112

Sono noti i seguenti dati:

	Simbolo	**Unità di misura**	**A-1**	**A-2**	**A-3**
Camera di spinta			tubolare	tubolare	
Raffreddamento			rigenerativo	rigenerativo	ablat./irrag.
Temperatura totale ugello	T_c	K	3590	3360	3250
Massa molare	$\mathscr{M}$	$^{kg}/_{\mathrm{kmol}}$	22.5	12	21
Rapporto calori specifici	γ		1.22	1.21	1.24
Pressione totale ugello	p_c	bar	68.9	55.2	10
Diametro gola	D_t	cm	63.4	28.5	8.7
Raggio medio raccordo gola	R_{medio}	cm	29.8	13.4	4.2
Rapporto di espansione	ε		14	40	35
Rapporto di contrazione	ε_c		1.6	1.6	3.4
Fattore di correzione di c^*	η^*		97.5	97.5	98.1
Velocità caratteristica reale	c^*	$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$	1721	2287	1696
$\boldsymbol{T_{wg}/T_c}$	τ		0.8	0.25	0.5

dove $\overline{h}$ è il coefficiente di scambio termico convettivo, D è il diametro e k è il coefficiente di scambio termico conduttivo. Il Nusselt può essere correlato al numero di Reynolds e al numero di Prandtl da una relazione sperimentale:

$$Nu = 0.026\,(Re_D)^{0.8}\,(P_r)^{0.4}$$

Si può quindi calcolare il coefficiente di scambio termico in funzione di Re, Pr, k e D. Il numero di Prandtl è:

$$Pr = \frac{\mu c_p}{k}$$

Il numero di Reynolds è:

$$Re_D = \frac{\rho w D}{\mu}$$

Facendo riferimento alla sezione di gola,

$$Re_D = \frac{\rho w_t D_t}{\mu} = \frac{\dot{m}}{A_t}\frac{D_t}{\mu} = \frac{p_c}{c^*}\frac{D_t}{\mu}$$

Invertendo la relazione

$$\frac{\overline{h} D_t}{k} = 0.026\,(Re_D)^{0.8}\,(P_r)^{0.4}$$

si trova:

$$\overline{h} = \frac{k}{D_t} 0.026\,(Re_D)^{0.8}\,(P_r)^{0.4}$$

$$\overline{h} = \frac{k}{D_t} 0.026 \left(\frac{p_c}{c^*}\frac{D_t}{\mu}\right)^{0.8} (P_r)^{0.4}$$

Si esprime il coefficiente di scambio termico conduttivo in funzione del numero di Prandt. Quest'ultimo lo si potrà approssimare con la *formula di Eucken*.

$$\overline{h} = \frac{\frac{\mu c_p}{Pr}}{D_t} 0.026 \left(\frac{p_c}{c^*}\frac{D_t}{\mu}\right)^{0.8} (P_r)^{0.4}$$

Si ottiene infine:

$$\overline{h} = \frac{0.026}{D_t^{0.2}}\frac{\mu^{0.2} c_p}{Pr^{0.6}}\left(\frac{p_c}{c^*}\right)^{0.8}$$

dove la viscosità deve essere valutata alla temperatura di camera T_c. Questa formula andrebbe bene con un tratto cilindrico. In realtà che si valuti la gola o un'altra sezione il tratto non è cilindrico ma segue una certa curvatura, per cui occorre correggere questa espressione con un termine che ne tenga conto.

$$\overline{h} = \frac{0.026}{D_t^{0.2}}\left[\frac{\mu^{0.2} c_p}{Pr^{0.6}}\right]_{T_c}\left(\frac{p_c}{c^*}\right)^{0.8}\left(\frac{D_t}{R_{medio}}\right)^{0.1}$$

Il calore specifico a pressione costante è:

$$c_p = \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{R}{\mathscr{M}}$$