NUMERO: **2509A** ANNO: 2021

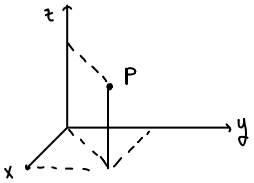
A P P U N T I

STUDENTE: Vallosio Stefania

MATERIA: Fisica II - Prof. Barbero

3 esercizi, >15 punti → teoria 3 domande

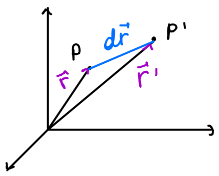
CAMPO: funzioni $\overbrace{\text{nello}}^{\text{del punto}}$ spazio : CAMPO VETTORIALE $(\vec{G})$ e SCALARE (v)



CAMPO SCALARE (v): funzione scalare di $P \equiv (x, y, z)$

$V = v(x,y,z)$

- $dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz$ → quando si passa da un punto ad uno vicino



$P' \equiv (x + dx, y + dy, z + dz)$

$d\vec{r} = (dx, dy, dz)$

$\vec{A} = A_x \vec{u}_x + A_y \vec{u}_y + A_z \vec{u}_z$

$d\vec{r} = dx\, \vec{u}_x + dy\, \vec{u}_y + dz\, \vec{u}_z$

$\vec{A} \cdot \vec{B} = (A_x \vec{u}_x + A_y \vec{u}_y + A_z \vec{u}_z) \cdot (B_x \vec{u}_x + B_y \vec{u}_y + B_z \vec{u}_z) = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$

$\vec{u}_x \cdot \vec{u}_x = 1 \qquad \vec{u}_x \cdot \vec{u}_y = 0$

- $\vec{\nabla} V = \left(\vec{u}_x \frac{\partial V}{\partial x} + \vec{u}_y \frac{\partial V}{\partial y} + \vec{u}_z \frac{\partial V}{\partial z} \right)$ → **GRADIENTE di V**

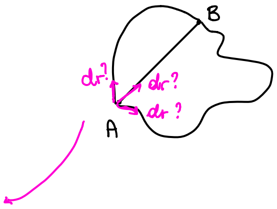
$\Downarrow$

$dV = (\vec{\nabla} V) \cdot d\vec{r}$

GRADIENTE: vettore, le cui componenti sono le derivate parziali rispetto ad ogni componente

$(\vec{\nabla} V)_x = \frac{\partial V}{\partial x}$

$V(B) - V(A) = \int_A^B dV = \int_A^B (\vec{\nabla} V) \cdot d\vec{r}$ → TEOREMA del GRADIENTE



La variazione del percorso non è importante, è sempre uguale

Ad ogni funzione scalare si può calcolare il gradiente, e lo si può associare ad un campo vettoriale.

CAMPO VETTORIALE: $\vec{G} = G(x,y,z)$

DIVERGENZA: $\vec{\nabla} \cdot \vec{G} = \operatorname{div} \vec{G} = \frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial G_y}{\partial y} + \frac{\partial G_z}{\partial z}$, quantità scalare

ES:

$\vec{u} = f \cdot \vec{G}$, quanto vale la divergenza ?

$u_x = f \cdot G_x$ $\quad u_y = f \cdot G_y$ $\quad u_z = f \cdot G_z$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \frac{\partial}{\partial x} u_x + \frac{\partial}{\partial y} u_y + \frac{\partial}{\partial z} u_z = \frac{\partial}{\partial x}(f G_x) + \frac{\partial}{\partial y}(f G_y) + \frac{\partial}{\partial z}(f G_z) =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x} G_x + f \frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} G_y + f \frac{\partial G_y}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} G_z + f \frac{\partial G_z}{\partial z} =$$

$$= f \left(\underbrace{\frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial G_y}{\partial y} + \frac{\partial G_z}{\partial z}}_{\vec{\nabla} \cdot \vec{G}} \right) = \vec{\nabla} f \cdot \vec{G}$$

$\vec{\nabla} f = \vec{u}_x \frac{\partial f}{\partial x} + \vec{u}_y \frac{\partial f}{\partial y} + \vec{u}_z \frac{\partial f}{\partial z}$

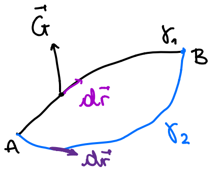
$\vec{G} = \vec{u}_x G_x +$

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot (f \vec{G}) = f \vec{\nabla} \cdot \vec{G} + \vec{\nabla} f \cdot \vec{G}} \qquad \vec{B} = f \vec{G}$$

PER I MATERIALI DIAMAGNETICI

$\vec{\nabla} \times (f \vec{G})$ ← PER I MATERIALI FERROMAGNETICI

INTEGRALE di LINEA: $I^{(\gamma_1)}_{A,B} = \int_A^B \vec{G} \cdot d\vec{r} \neq I^{(\gamma_2)}_{A,B} = \int_A^B \vec{G}\, d\vec{r}$

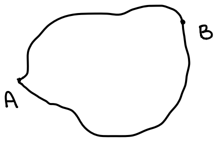


Dipende dal PERCORSO!!!

CIRCUITAZIONE: integrale su una linea chiusa : $\oint_\gamma \vec{G}\, d\vec{r} = \int_A^B \vec{G}\, d\vec{r} + \int_B^A \vec{G}\, d\vec{r} =$

$d\vec{r}^{\,(\gamma_2)}_{AB} = - d\vec{r}^{\,(\gamma_2)}_{BA}$

$$= \int_A^B \vec{G}\, d\vec{r} - \int_A^B \vec{G}\, d\vec{r} = I^{(\gamma_1)}_{AB} - I^{(\gamma_2)}_{AB}$$

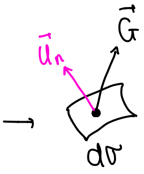


Quando l' INTEGRALE di LINEA NON dipende dal percorso → la CIRCUITAZIONE e' = 0

$d\phi_{d\sigma}(\vec G)$ = FLUSSO di $\vec G$ attraverso $d\sigma$

$d\phi(\vec G) = \vec G \cdot \vec u_n \, d\sigma$

$\phi_\Sigma(\vec G) = \iint_\Sigma \vec G \, \vec u_n \, d\sigma$ → somma di tutte →



Se la SUPERFICIE e' CHIUSA il FLUSSO si calcola prendendo la NORMALE POSITIVA VERSO L'ESTERNO!

⇓

Quindi il FLUSSO SARA':

$$\phi_\Sigma(\vec G) = \oint\!\!\oint_\Sigma \vec G \, \vec u_n \, d\Sigma$$

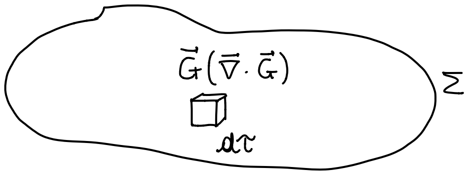
TEOREMA di GAUSS o DELLA DIVERGENZA:

$$\oint\!\!\oint_\Sigma \vec G \, \vec u_n \, d\Sigma = \iiint_{\tau(\Sigma)} \overset{\text{divergenza di } G}{(\vec\nabla \cdot \vec G)} \, d\tau$$

Σ e' CHIUSA e LIMITA IL VOLUME τ.

Dato un volume τ limitato da Σ

Data una sup. chiusa qualunque



$\vec G$ deve essere di classe C_1

Condizioni:

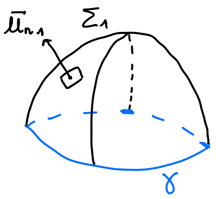
- Se il vettore $\vec G$ e' $\overbrace{\text{SOLENOIDALE}}^{div\, G\, =\, 0}$ in tutti i punti del volume τ allora

$\vec\nabla \cdot \vec G = 0 \quad \forall P \in \tau(\Sigma)$ Allora: $\oint\!\!\oint \vec G \cdot \vec u_n \, d\Sigma = 0$

Per ogni CAMPO SOLENOIDALE, all'interno di una certa superficie CHIUSA, il FLUSSO di una sup. CHIUSA e' NULLO.

Se la SUPERFICIE **NON e' CHIUSA**, NON si puo' USARE GAUSS, MA vale:

Se $\vec G$ e' SOLENOIDALE, il FLUSSO attraverso una superficie dipende solo dal BORDO di $\Sigma_i(\gamma)$, e NON DALLA SUPERFICIE.

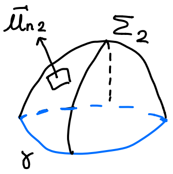


$$\phi_{\Sigma_1}(\vec G) = \iint_{\Sigma_1(\gamma)} \vec G \cdot \vec u_{n1} \, d\Sigma_1$$

Se $\vec\nabla \vec G = 0$

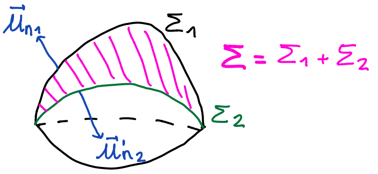
⇓

$$\phi_{\Sigma_1(\gamma)}(\vec G) = \phi_{\Sigma_2(\gamma)}(\vec G)$$



$$\phi_{\Sigma_2}(\vec G) = \iint_{\Sigma_2(\gamma)} \vec G \cdot \vec u_{n2} \, d\Sigma_2$$

Consideriamo il CASO in cui $\vec{G}$ e' SOLENOIDALE:



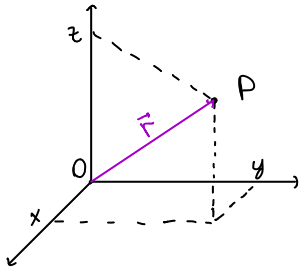
IPOTESI: $\vec{G}$ e' un VETTORE SOLENOIDALE $(\vec{\nabla}\cdot\vec{G})=0$

Σ e' CHIUSA. Quindi:

$$\oiint_{\Sigma} \vec{G}\,\vec{u}_n\,d\Sigma = \iint_{\Sigma_1} \vec{G}\cdot\vec{u}_{n1}\,d\Sigma_1 + \iint_{\Sigma_2} \vec{G}\,\overset{=-\vec{u}_{n2}}{\boxed{\vec{u}'_{n2}}}\,d\Sigma_2 = \iint_{\Sigma_1} \vec{G}\cdot\vec{u}_{n1}\,d\Sigma_1 - \iint \vec{G}\cdot\vec{u}_{n2}\,d\Sigma_2 = 0$$

Quando le superfici Σ_1 e Σ_2 HANNO lo stesso BORDO, il FLUSSO di $\vec{G}$ dipende dal BORDO e NON dalla superficie stessa. SOLO se $\vec{G}$ e' SOLENOIDALE. !!

PROBLEMA:



$$\vec{r} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$$

$$|r| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

Definito ovunque ma NON nell'origine

$$\vec{G} = \frac{\vec{r}}{r^3} : \quad G_x = \frac{x}{r^3}, \quad G_y = \frac{y}{r^3}, \quad G_z = \frac{z}{r^3}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) = \frac{1 \cdot 2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{r}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$$

$$\frac{\partial G_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^3}\right) = \frac{1}{r^3} + x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r^3}\right) = \frac{1}{r^3} - 3\frac{x}{r^4}\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{r^3} - 3\frac{x}{r^4}\cdot\frac{x}{r}$$

$$\frac{\partial G_x}{\partial x} = \frac{1}{r^3} - 3\frac{x^2}{r^5}, \quad \frac{\partial G_y}{\partial y} = \frac{1}{r^3} - 3\frac{y^2}{r^5}, \quad \frac{\partial G_z}{\partial z} = \frac{1}{r^3} - 3\frac{z^2}{r^5}$$

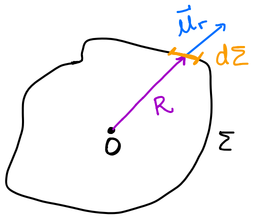
$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{G}} = \frac{3}{r^3} - 3\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{r^5}\right) = \frac{3}{r^3} - 3\frac{r^2}{r^5} = 0$$

vettore FONDAMENTALE per l'elettrostatica

Quindi $\vec{G} = \frac{\vec{r}}{r^3}$ e' un vettore SOLENOIDALE in tutti i punti in cui e' DEFINITO

Percio' ovunque tranne nell'origine.

- Det. il FLUSSO di $\vec{G}$ attraverso una sup. SFERICA centrata nell'origine.



$$\vec{r} = R\vec{u}_r, \quad \vec{u}_n = \vec{u}_r, \quad G = \frac{\vec{r}}{R^3}$$

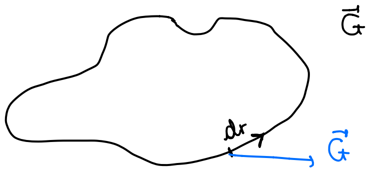
AREA di una sfera

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{G}) = \oiint_{\Sigma} \frac{R\vec{u}_r}{R^3}\cdot\vec{u}_r\cdot d\Sigma = \frac{1}{R^2}\oiint \underbrace{1\cdot d\Sigma}_{4\pi R^2} = \frac{1}{R^2}\cdot 4\pi R^2 = 4\pi$$

NON si applica GAUSS perche' la div $\vec{G}$ NON e' definita

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{G} = 0 \quad \forall P \neq r = 0}$$

TEOREMA di STOKES:

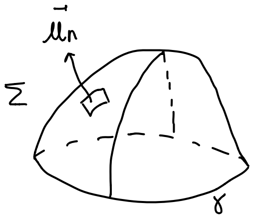


la CIRCUITAZIONE di un VETTORE $\vec G$ su un percorso CHIUSO:

Γ
$\|$
$I_\gamma = \oint_\gamma \vec G \cdot d\vec r$ è un integrale di LINEA e si può scrivere come un integrale di SUPERFICIE:

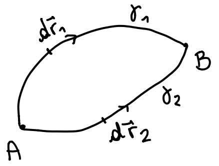
$$\oint_\gamma \vec G\cdot d\vec r = \iint_{\Sigma(\gamma)} \overbrace{(\vec\nabla\times\vec G)}^{\text{rot}\,\vec G}\cdot \vec u_n \cdot d\Sigma$$

↑ percorso chiuso ↑ sup. limitata da γ



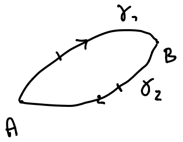
Se $\boxed{\vec R = \vec\nabla\times\vec G \Rightarrow \vec\nabla\cdot\vec R = 0}$

Se un vettore ha divergenza nulla allora il FLUSSO ha lo stesso risultato se il BORDO è in COMUNE



$$I^{(\gamma_1)}_{A\to B} = \int_{\gamma_1}^{B} \vec G \cdot d\vec r_1$$

$$I^{(\gamma_2)}_{A\to B} = \int_{\gamma_2}^{B} \vec G \cdot d\vec r_2$$



$$I_{\gamma_1+\gamma_2} = I^{(\gamma_1)}_{A\to B} - I^{(\gamma_2)}_{A\to B}$$

Se $I_{\gamma_1+\gamma_2} = 0$
$\Downarrow$
$I^{(\gamma_1)}_{A\to B} = I^{(\gamma_2)}_{A\to B}$

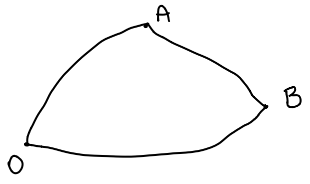
3/10/2019

Ipotizziamo che la CIRCUITAZIONE è nulla ⇒ ROTORE NULLO ⇒ $\oint_\gamma \vec G \cdot d\vec r = 0$

CAMPI CONSERVATIVI: $(\vec\nabla\times\vec G = 0)$ l'integrale di linea dipende dal punto di partenza e di ARRIVO e non da quelli intermedi

$I_{A\to B}$ NON DIPENDE da γ quindi: $I_{A\to B} = f(A,B) = \int_A^B \vec G \cdot d\vec r$

Prendiamo 3 punti arbitrari: IPOTESI: Campo conservativo



$$I_{OA} = f(O,A)$$

$$I_{AB} = f(A,B)$$

$$I_{OB} = \int_O^B \vec G \cdot d\vec r = \int_O^A \vec G \cdot d\vec r + \int_A^B \vec G \cdot d\vec r = I_{OA} + I_{AB}$$

$I_{OB} = f(O,A) + f(A,B)$
$I_{OB} = f(O,B)$
} DEVONO ESSERE UGUALI!

$$f(O,B) = f(O,A) + f(A,B)$$

↗ questa deve VALERE per ogni O

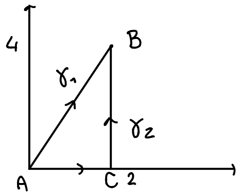
$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial G_x}{\partial y} &= -\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}\\ \frac{\partial G_y}{\partial x} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial G_x}{\partial y} = \frac{\partial G_y}{\partial x}} \Longrightarrow (\vec{\nabla} \times \vec{G})_z = \frac{\partial G_x}{\partial y} - \frac{\partial G_y}{\partial x} = 0$$

Condizioni di CONSERVATIVITA'

CONSERVATIVO ⟹ IRROTAZIONALE

ES: Dato il campo vettoriale PIANO $\vec{G} = 2xy\,\vec{u}_x + x^2\,\vec{u}_y$ 01/10/20

det. $I_{A\to B}$ lungo γ_1 o γ_2



$G_x = 2xy \qquad G_y = x^2$

$$\frac{\partial G_x}{\partial y} = 2x \qquad \frac{\partial G_y}{\partial x} = 2x \Rightarrow \boxed{\text{rot}\,\vec{G} = 0}$$

⇓

CONSERVATIVO

⇓

l'integrale NON dipende dal percorso!

$A = (0,0) \qquad B = (2,4)$

$$I^{(\gamma)}_{A\to B} = \int_A^B \vec{G}\cdot d\vec{r} = \int_A^B (G_x\,dx + G_y\,dy)_\gamma$$

$\gamma_1 : \; y = 2x$

$$I^{(\gamma_1)}_{A\to B} = \int_A^B (G_x dx + G_y dy)_{y=2x} = \int_{(0,0)}^{(2,4)} (2xy\,dx + x^2\,dy)_{y=2x} = \int_0^2 2x\,2x\,dx + x^2\cdot d(2x)$$

$$= \int_0^2 4x^2 dx + 2x^2 dx = \int_0^2 6x^2 dx = 2\left[x^3\right]_0^2 = 16$$

$$I^{(\gamma_2)}_{A\to B} = \int_A^B \vec{G}\,d\vec{r} = \int_A^C \vec{G}\,d\vec{r} + \int_C^B \vec{G}\,d\vec{r} = \int_{(0,0)}^{(2,0)} (\cancel{2xy\,dx + x^2\,dy})_{y=0} \overset{=0}{} + \int_{(2,0)}^{(2,4)} (2xy\,dx + x^2\,dy)_{x=2}$$

$$= \int_0^4 \left[x^2\right]^2 dy = 4\int_0^4 dy = 16$$

Calcolare il potenziale:

$$\int_A^B \vec{G}\cdot d\vec{r} = U(A) - U(B) \Rightarrow \text{se } \vec{G} \text{ e' CONSERVATIVO}$$

$$\downarrow$$

$$\vec{G} = -\vec{\nabla} U$$

$$\begin{cases} G_x = -\dfrac{\partial u}{\partial x} \\ G_y = -\dfrac{\partial u}{\partial y} \end{cases}$$

SOLO SE $\vec{G}$ e' CONSERVATIVO

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = -2xy \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -x^2 \end{cases}$$

$$\frac{df(x)}{dx} = g(x) \Rightarrow f(x) = \int g(x)\,dx + K$$

$\vec{G} = f(r)\,\vec{r} \qquad G_x = x\,f(r) \qquad G_y = y\,f(r) \qquad G_z = z\,f(r)$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{G} = \frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial G_y}{\partial y} + \frac{\partial G_z}{\partial z}$$

$$\frac{\partial G_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x\,f(r)\right) = f(r) + x\,\frac{\partial f}{\partial x} = f(r) + x\cdot\frac{df}{dr}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} = f(r) + \frac{x^2}{r}\frac{df}{dr}$$

$$\frac{\partial G_y}{\partial y} = f(r) + \frac{y^2}{r}\frac{df}{dr} \qquad \frac{\partial G_z}{\partial z} = f(r) + \frac{z^2}{r}\frac{df}{dr}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{G} = 3\,f(r) + r\,\frac{df}{dr} \neq 0$$ SEMPRE!

Quando $\vec{\nabla}\cdot\vec{G} = 0$? Cioe' quando $\vec{G}$ e' SOLENOIDALE?

$$3\,f(r) + r\,\frac{df}{dr} = 0$$

$$\frac{df}{dr} = -\frac{3}{r}\,f$$

$$\int\frac{df}{f} = -3\int\frac{dr}{r} \Rightarrow \log f = -3\log r + A \Rightarrow f = \frac{\alpha}{r^3} \Longrightarrow \boxed{\vec{G} = \alpha\,\frac{\vec{r}}{r^3}}$$

ESPRESSIONI DEL GRADIENTE IN SISTEMI NON CARTESIANI:

V , $\boxed{dV = \vec{\nabla} V \cdot d\vec{r}}$

$\vec{u}_x\, dx + \vec{u}_y\, dy + \vec{u}_z\, dz$

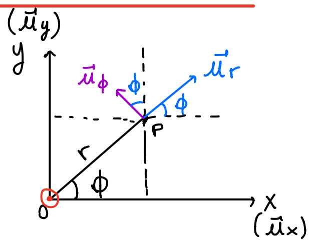
$V = V(x, y, z)$ $\qquad \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz = \vec{\nabla} V \cdot d\vec{r}$

$$\boxed{\vec{\nabla} V = \vec{u}_x \frac{\partial V}{\partial x} + \vec{u}_y \frac{\partial V}{\partial y} + \vec{u}_z \frac{\partial V}{\partial z} \rightarrow \text{gradiente in COORD. CARTESIANE}}$$

SIST. DI RIFERIMENTO POLARE:

$$\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r \operatorname{sen}\phi \end{cases}$$

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$



$d\vec{r} = dx\, \vec{u}_x + dy\, \vec{u}_y = d(r\cos\phi)\vec{u}_x + d(r\operatorname{sen}\phi)\vec{u}_y = 0$

$= (\underline{\underline{dr}} \cos\phi - \underline{\underline{r}} \operatorname{sen}\phi\, d\phi)\vec{u}_x + (\underline{\underline{dr}} \operatorname{sen}\phi + \underline{\underline{r}} \cos\phi\, d\phi)\vec{u}_y$

trasversi $\qquad$ radiali

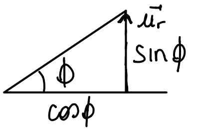
SPOSTAMENTO IN COORD. POLARI

$= (\vec{u}_x \cos\phi + \vec{u}_y \operatorname{sen}\phi)\, dr + r(-\vec{u}_x \operatorname{sen}\phi + \vec{u}_y \cos\phi)\, d\phi = dr\, \vec{u}_r + r\, d\phi\, \vec{u}_\phi$

versore RADIALE

$$\begin{cases} \vec{u}_r = \cos\phi\, \vec{u}_x + \sin\phi\, \vec{u}_y \\ \vec{u}_\phi = -\sin\phi\, \vec{u}_x + \cos\phi\, \vec{u}_y \end{cases}$$

VERSORE TRASVERSO



$\vec{u}_r \perp \vec{u}_\phi \qquad \vec{u}_r \cdot \vec{u}_\phi = 0$

$|\vec{u}_r| = 1 \qquad |\vec{u}_\phi| = 1$

$dV = (\vec{\nabla} \cdot V)\, d\vec{r}$

$\vec{A} = \overbrace{A_x \vec{u}_x + A_y \vec{u}_y}^{\text{CARTESIANE}} \qquad \vec{A} = \overbrace{A_r \vec{u}_r + A_\phi \vec{u}_\phi}^{\text{POLARI}}$

$dV = \vec{G} \cdot d\vec{r} = (G_r \vec{u}_r + G_\phi \vec{u}_\phi)(dr\, \vec{u}_r + r\, d\phi\, \vec{u}_\phi)$

$dV = G_r\, dr + G_\phi\, r\, d\phi$

$dV(r, \phi) = \frac{\partial V}{\partial r} dr + \frac{\partial V}{\partial \phi} d\phi$

$\frac{\partial V}{\partial r} dr + \frac{\partial r}{\partial \phi} d\phi = G_r\, dr + G_\phi\, r\, d\phi$ $\qquad$ Devono essere uguali

$G_r = \frac{\partial V}{\partial r} \qquad r G_\phi = \frac{\partial V}{\partial \phi} \rightarrow G_\phi = \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \phi}$

$$\boxed{\vec{\nabla} V = G_r \vec{u}_r + G_\phi \vec{u}_\phi = \vec{u}_r \frac{\partial V}{\partial r} + \vec{u}_\phi \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \phi}}$$

GRADIENTE IN COORD. POLARI PIANE

$$\frac{\partial V}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial V}{\partial \phi} d\phi + \frac{\partial V}{\partial z} dz = G_\rho d\rho + G_\phi \rho \, d\phi + G_z dz$$

$$G_\rho = \frac{\partial V}{\partial \rho} \quad ; \quad G_\phi \rho = \frac{\partial V}{\partial \phi} \quad ; \quad G_z = \frac{\partial V}{\partial z}$$

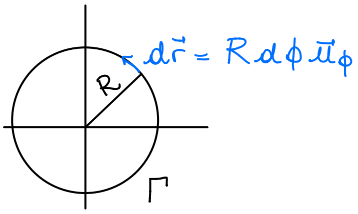
$$G_\rho = \frac{\partial V}{\partial \rho} \qquad G_\phi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \phi} \qquad G_z = \frac{\partial V}{\partial z}$$

$$\boxed{\vec{\nabla} V = \vec{u}_\rho \frac{\partial V}{\partial \rho} + \frac{\vec{u}_\phi}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \phi} + \vec{u}_z \frac{\partial V}{\partial z}}$$

GRADIENTE IN COORD. CILINDRICHE

$$= (\phi_2 - \phi_1) - (\phi_2 - \phi_1) = 0$$

$\Downarrow$ $d\vec{r}\,\vec{u}_r$ è $= 0$ perchè sono sempre nello stesso punto! Non ho spostamenti.



$$\oint_\Gamma \frac{\vec{u}_\phi}{\cancel{R}} \cdot \cancel{R}\,d\phi\,\vec{u}_\phi = \oint_\Gamma d\phi = 2\pi$$

$\Downarrow$

NON HA UN DOMINIO SEMPLICEMENTE CONNESSO

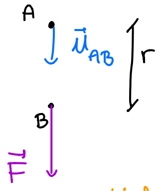
ELETTRICI:

Può essere ATTRATTIVA o REPULSIVA

F. GRAVITAZIONALE solo attrattiva

COULOMB: $\vec{F}_{AB} = \frac{H}{r^2}\vec{u}_{AB}$, $\vec{u}$ è la congiungente tra le due cariche

↑ perchè BA è uguale ma opposto.



H deve avere le proprietà sia di A che di B:

LEGGE DI COULOMB

$$\vec{F}_{12} = \underset{\downarrow\,=1}{k}\,\frac{q_1 q_2}{r^2}\,\vec{u}_{12}$$

chi fa la forza

chi la subisce

F_{12} è una FORZA CENTRALE!

$$\vec{F} = \frac{q^2}{L^2} \qquad q = \sqrt{F \cdot L^2} = \left[\sqrt{\frac{g\,cm^3}{s^2}}\right]$$

$[F] = dyne = g\frac{cm}{s^2}$ $\qquad L = cm$

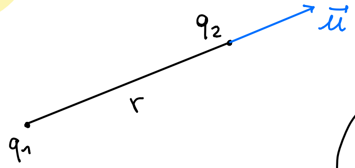
Si fa il prodotto tra le due proprietà perchè DEVONO ESSERE SODDISFATTE ENTRAMBE!

k viene DEFINITO da: $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$, $\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}$ = COSTANTE DIELETTRICA DEL VUOTO o PERMETTIVITÀ nel vuoto

QUINDI $k \approx 9 \times 10^9 \left[\frac{N \cdot m^2}{C^2}\right]$

carica $[q] = C$ $\qquad [k] = \frac{N\,m^2}{C^2}$

$$\vec{F}_{12} = k\,\frac{q_1 q_2}{r^2}\,\vec{u}_{12}$$



$e = 1,6 \times 10^{-19}\,C$: protone

$e^- = -1,6 \times 10^{-19}\,C$: elettrone

Se q_A e q_B sono entrambe positive o negative si ha una CARICA REPULSIVA. e LA FORZA avrà lo stesso verso e direzione del versore $\vec{u}_r$

Le CARICHE le immaginiamo PUNTIFORMI.

$$E_x(x,y,z) = \sum_{i=1}^{N} k\, q_i \frac{x-x_i'}{r_i^3} \quad , \quad E_y(x,y,z) = \sum_{i=1}^{N} k\, q_i \frac{y-y_i'}{r_i^3}$$

$$E_z(x,y,z) = \sum_{i=1}^{N} k\, q_1 \frac{z-z_i'}{r_i^3}$$

$$r_i = \sqrt{(x-x_i')^2 + (y-y_i')^2 + (z-z_i')^2}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow \text{SOLENOIDALE}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0 \Rightarrow \text{IRROTAZIONALE}$$

$$\boxed{\vec{E}(\vec{R}) = \sum_{i=1}^{N} k\, q_1 \cdot \frac{\vec{R}-\vec{R}_i}{r_1^3}} \longrightarrow \text{CAMPO ELETTROSTATICO}$$

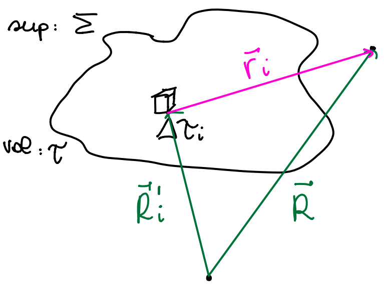
Dato un insieme di cariche, crea un campo ELETTRICO, il cui modulo DECRESCE con la distanza del PUNTO POTENZIANTE come $\frac{1}{r^2}$, r: distanza tra il punto considerato e il punto dove c'e' la particella

Se abbiamo una CARICA che genera il CAMPO e l'altra che subisce:

$$\vec{F} = k \frac{q_0 q}{r^2} \vec{u} \qquad \vec{F} = q_0 \left(k \frac{q}{r^2} \vec{u}\right) \qquad \vec{E} = k \frac{q}{r^2} \vec{u} \qquad \vec{E} = k q \frac{\vec{r}}{r^3}$$

Il campo creato da Una carica sola e' RADIALE, diretto tra la congiungente tra la carica che crea il campo e la carica di PROVA. → $\vec{E}$ e' SOLENOIDALE e IRROTAZ.

CAMPO ELETTROSTATICO: creato da CARICHE ELETTRICHE FERME!!



E' un CORPO CONTINUO : un PALLONE ⇒ ρ

$\Delta q_i = \rho(i)\,\Delta\tau_i$

$$\vec E(\vec R) = \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{N} k\,\Delta q_i \frac{\vec r_i}{r_i^3}\right)$$

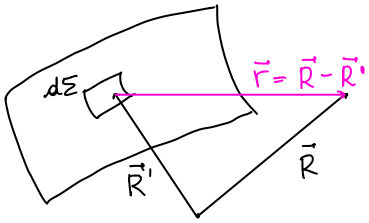
$$\vec E(\vec R) = \int_{CORPO} k\,dq\,\frac{\vec r}{r^3}$$ oppure: $$\vec E(\vec R) = \int_{CORPO} k\,dq\,\frac{\vec u}{r^2}$$

Se il corpo e' caratterizzato da una DENSITA' VOLUMICA:

$$dq = \rho\,d\tau \quad\rightarrow\quad \vec E(\vec R) = \iiint_{\tau} k\,\rho(\vec R')\,d\tau\,\frac{\vec r}{r^3} = \frac{\vec R-\vec R'}{|\vec R-\vec R'|^3}$$

SE IL CORPO NON
E' OMOGENEO
dipende dal corpo

SUPERFICIE:



$$\vec E(\vec R) = \iint_{\Sigma} k\,\sigma(\vec R')\,d\Sigma\,\frac{\vec R-\vec R'}{|\vec R-\vec R'|^3}$$

PER I CORPI OMOGENEI la DENSITA' e' COSTANTE, si puo' togliere dall'integrale

Quando la particella entra nel campo si muove di MRU

$$\begin{cases} v_x(0) = v_0 \\ v_y(0) = 0 \end{cases}$$

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \Sigma\vec{F} = q\vec{E} \qquad \vec{r} = x\,\vec{u}_x + y\,\vec{u}_y \Rightarrow \vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{u}_x + \frac{dy}{dt}\vec{u}_y$$

$$m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\vec{u}_x + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{u}_y\right) = q\vec{E}\,\vec{u}_y$$

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} = 0 \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2} = qE \end{cases}$$

Determinano la traiettoria)

$$\begin{cases} m\dfrac{dv_x}{dt} = 0 \rightarrow \dfrac{dv_x}{dt} = 0 \ (\text{UNIFORME}) \\ m\dfrac{dv_y}{dt} = qE \rightarrow \dfrac{dv_y}{dt} = \dfrac{q}{m}E\ (\text{U. ACCELER}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_x = \text{cost} = v_0 \\ \displaystyle\int_0^{v(t)} dv_y = \int_0^t \frac{q}{m}E\,dt \end{cases} \qquad v_y(t) - \cancel{v_y(0)} = \frac{q}{m}E\cdot t \quad \Rightarrow \quad v_y(t) = \frac{q}{m}Et$$

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \qquad dx = v_0\,dt$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{q}{m}E\cdot t \qquad dy = \frac{q}{m}E\cdot t\,dt$$

$$x(t) = \overset{=0}{\cancel{x(0)}} + v_0\cdot t$$

$$y(t) = \overset{=0}{\cancel{y(0)}} + \frac{1}{2}\frac{q}{m}Et^2$$

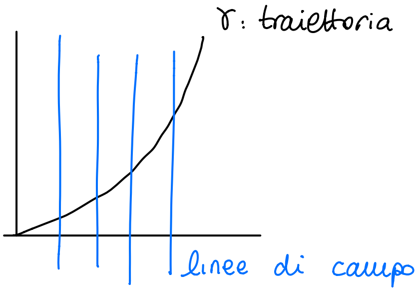
$$\begin{cases} x(t) = v_0\cdot t \\ y(t) = \dfrac{1}{2}\dfrac{q}{m}Et^2 \end{cases}$$

Eq. PARAMETRICHE della traiettoria

DA PARAMETRICHE a eq. CARTESIANE:

$$\begin{cases} t = \dfrac{x}{v_0} \\ y = \dfrac{1}{2}\dfrac{q}{m}E\cdot t^2 \end{cases} \longrightarrow y = \frac{1}{2}\frac{q}{m}E\cdot\frac{x^2}{v_0^2}$$

$$y = \frac{qE}{2mv_0^2}x^2$$ → eq. di una parabola



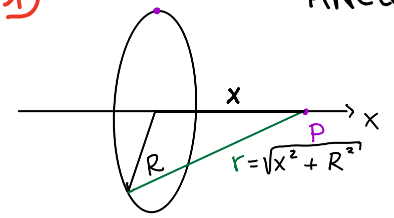
$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

$$E_x(x,y) = kq\left\{\frac{x-a}{[(x-a)^2+y^2]^{3/2}} + \frac{x+a}{[(x+a)^2+y^2]^{3/2}}\right\}$$

$$E_y(x,y) = kqy\left\{\frac{1}{[(x+a)^2+y^2]^{3/2}} + \frac{1}{[(x-a)^2+y^2]^{3/2}}\right\}$$

Per risolvere le linee di CAMPO, una volta, si prendevano delle particelle isolanti, di un materiale molto leggero, con una forma allungata e le mettevano dove c'era il campo, queste si orientavano lungo le linee di CAMPO.

1) ANELLO = FILO Q = CARICA ANELLO



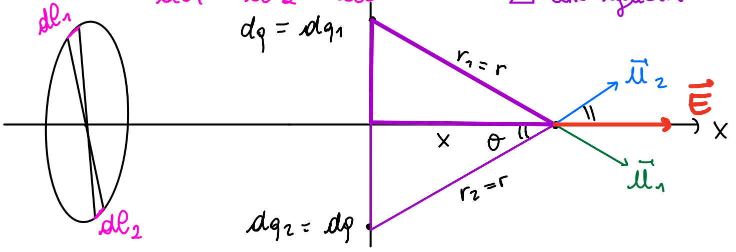
$\boxed{\text{Ip : Q e' UNIFORM. DISTRIBUITA}}$

$\lambda = \frac{Q}{2\pi R}$ $\quad Q = 2\pi R\lambda$

↑ DENSITA' LINEARE di CARICA

$dl_1 = dl_2 = dl$

△ sono uguali!



$r\cos\theta = x$ $\quad \cos\theta = \frac{x}{r}$

$r_1 = r_2 = r$ perche' sono le generatrici di un cono

CALCOLO DEL CAMPO SULL'ASSE

la CARICA in dl_1 e': $dq_1 = dl_1 \cdot \lambda = \lambda \cdot dl$

$$dq_2 = dl_2 \cdot \lambda = \lambda \cdot dl$$

$$dq_1 = dq_2 = dq$$

$$d\vec{E}_1 = k\,dq_1\frac{\vec{u}_1}{r_1^2} = k\,dq\frac{\vec{u}_1}{r^2}$$

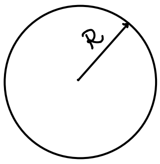
$\frac{R}{2} = r\,\text{sen}\theta$

$$d\vec{E}_2 = k\,dq_2\frac{\vec{u}_2}{r_2^2} = k\,dq\frac{\vec{u}_2}{r^2}$$

$$d\vec{E} = d\vec{E}_1 + d\vec{E}_2 = k\frac{dq}{r^2}(\vec{u}_1+\vec{u}_2) = k\frac{\lambda dl}{r^2}(\vec{u}_1+\vec{u}_2) \quad \uparrow$$

(PRINCIPIO di SOVRAPPOS.)

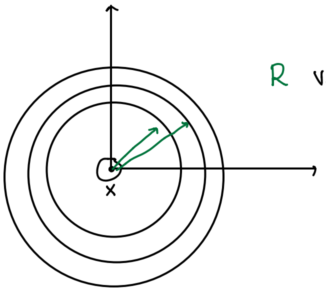
2) Consideriamo un DISCO UNIFORMEMENTE CARICO:



Q = carica disco

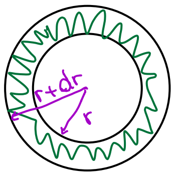
R = Raggio

$\sigma = \frac{Q}{\pi R^2}$: DENSITA' SUPERFICIALE di CARICA costante su tutto il disco



R va da 0 a R

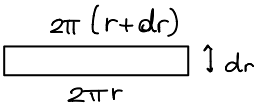
Consideriamo un SINGOLO ANELLO del DISCO:



$dq = \sigma\, 2\pi r\, dr$

σ = DENSITA' SUPERFICIALE di CARICA

$$d\vec{E} = k\, dq \frac{x}{(x^2+r^2)^{3/2}} \vec{u}_x$$



$$d\vec{E} = k\, \sigma 2\pi r\, dr \frac{x}{(x^2+r^2)^{3/2}} \vec{u}_x$$

Per trovare il CAMPO TOTALE del disco devo sommare tutti

$$\vec{E} = \int_0^R k\, \sigma\, 2\pi r\, dr \frac{x}{(x^2+r^2)^{3/2}} \vec{u}_x = 2\pi k \sigma x \vec{u}_x \int_0^R \frac{r\, dr}{(x^2+r^2)^{3/2}}$$

$$'' \int_0^R \frac{r\, dr}{(x^2+r^2)^{3/2}} = \frac{1}{|x|} - \frac{1}{\sqrt{x^2+r^2}} ''$$

$$\boxed{\vec{E}(x,0,0) = 2\pi k \sigma x \left\{ \frac{1}{|x|} - \frac{1}{\sqrt{x^2+r^2}} \right\} \vec{u}_x}$$

→ Il CAMPO e' una FUNZIONE DISPARI

$$\vec{E} = \pm\, 2\pi k \sigma \left(1 - \frac{|x|}{\sqrt{x^2+R^2}} \right) \vec{u}_x :$$

Se $x > 0$

$$\vec{E}(x>0) = 2\pi k \sigma x \left\{ \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x^2+r^2}} \right\} \vec{u}_x$$

Se $x < 0$

$$\vec{E}(x<0) = -\, 2\pi k \sigma x \left\{ \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x^2+r^2}} \right\} \vec{u}_x$$

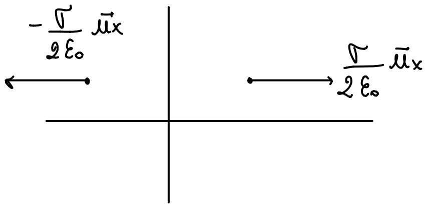
Se il DISCO STA SUL PIANO $(R \to \infty)$:

$$\vec{E} = \pm 2\pi k \sigma \vec{u}_x = \pm \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{u}_x$$

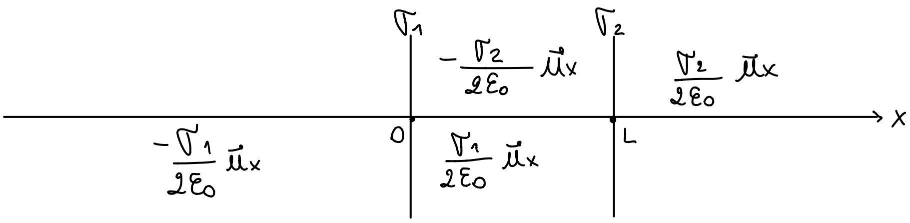
Se il piano e' INFINITO:

→ il campo e' COSTANTE per ogni traslazione e rotazione e NON dipende dalla distanza dal centro

Il campo NON dipende dalla posizione X



Se ho due PIANI PARALLELI: e DENSITA' di CARICA UNIFORME



$x << R$

se $x<0$ $\begin{cases} \vec{E}_1 = -\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}\vec{u}_x \\ \vec{E}_2 = -\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}\vec{u}_x \end{cases} \Rightarrow \vec{E}(x<0) = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = -\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2\varepsilon_0}\vec{u}_x$

se $0<x<L$ $\begin{cases} \vec{E}_1 = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}\vec{u}_x \\ \vec{E}_2 = -\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}\vec{u}_x \end{cases} \Rightarrow \vec{E}(0<x<L) = \frac{\sigma_1-\sigma_2}{2\varepsilon_0}\vec{u}_x$

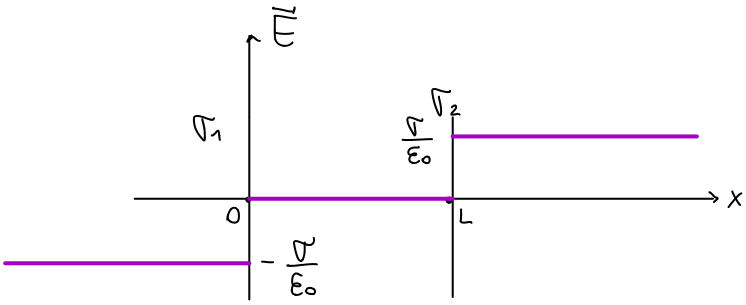
se $x>L$ $\begin{cases} \vec{E}_1 = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}\vec{u}_x \\ \vec{E}_2 = \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}\vec{u}_x \end{cases}$ $\vec{E}(x>L) = \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2\varepsilon_0}\vec{u}_x$

Se $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$

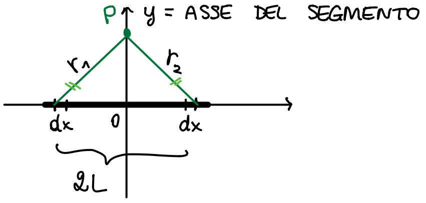
$$\vec{E}(x<0) = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u}_x$$

$$\vec{E}(0<x<L) = 0$$

$$\vec{E}(x>L) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u}_x$$



ES. 1.16 : "Un filo sottile isolante di $2L$ $/\!/ x$, ha una carica q UNIFORME con densita' λ su tutta $2L$. Dimostrare che il campo elettrostatico in P, distante y da O e' dato da $\vec{E}(0,y) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 y}\,\text{sen}\,\vartheta_1\,\vec{u}_y$, con $\text{sen}\,\vartheta_1 = \frac{\ell}{\sqrt{\ell^2+y^2}}$

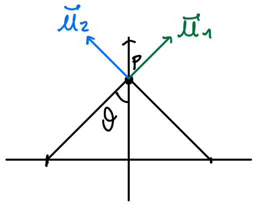


$$\lambda = \frac{Q}{2L}$$

$$dq_1 = \lambda\,dx_1 = \lambda\,dx = dq$$

$$dq_2 = \lambda\,dx_2 = \lambda\,dx = dq$$

$$r = r_1 = r_2 = \sqrt{y^2+x^2}$$



$$\vec{u}_1 = \sin\theta\,\vec{u}_x + \cos\theta\,\vec{u}_y$$

$$\vec{u}_2 = -\sin\theta\,\vec{u}_x + \cos\theta\,\vec{u}_y$$

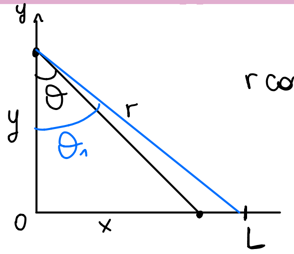
$$d\vec{E}_1 = k\,\frac{dq_1}{r_1^2}\,\vec{u}_1 = k\,\frac{dq}{r^2}\,\vec{u}_1$$

$$d\vec{E}_2 = k\,\frac{dq_2}{r_2^2}\,\vec{u}_2 = k\,\frac{dq}{r^2}\,\vec{u}_2$$

USIAMO IL PRINCIPIO di SOVRAPPOSIZIONE:

$$d\vec{E} = d\vec{E}_1 + d\vec{E}_2 = k\,\frac{dq}{r^2}\,2\cos\theta\,\vec{u}_y$$

$$\boxed{d\vec{E} = 2\,k\,\frac{dq}{r^2}\,\cos\theta\,\vec{u}_y} \xrightarrow[dq\,=\,\lambda\,dx]{} d\vec{E} = 2\,k\,\frac{\lambda\,dx}{r^2}\,\cos\theta\,\vec{u}_y$$



$$r\cos\theta = y \;\longrightarrow\; r = \frac{y}{\cos\theta}$$

$$x = y\,\text{tg}\,\theta \;\longrightarrow\; dx = d(y\,\text{tg}\,\theta) = y\,d(\text{tg}\,\theta) = y\,\frac{d\theta}{\cos^2\theta}$$

$$d\vec{E} = 2\,k\,\lambda\,\frac{\cancel{\cos^2\theta}}{y^{\cancel{2}}}\cdot\cancel{y}\,\frac{d\theta}{\cancel{\cos^2\theta}}\,\cos\theta\,\vec{u}_y = 2\,k\,\lambda\,\frac{1}{y}\,\cos\theta\,d\theta\,\vec{u}_y$$

$$\vec{E} = \int_0^{\theta_1} 2\,k\,\lambda\,\frac{1}{y}\,\cos\theta\,d\theta\,\vec{u}_y = \frac{2\,k\,\lambda\,\vec{u}_y}{y}\int_0^{\theta_1}\cos\theta\,d\theta = \frac{2\,k\,\lambda}{y}\,\text{sen}\,\vartheta_1\,\vec{u}_y = \frac{2\,k\,\lambda}{y}\,\frac{L}{\sqrt{L^2+y^2}}\,\vec{u}_y$$

$$y\cdot\text{tg}\,\vartheta_1 = L \;\rightarrow\; \text{tg}\,\vartheta_1 = \frac{L}{y} \qquad \text{sen}\,\vartheta_1 = \frac{\text{tg}\,\vartheta_1}{\sqrt{1+\text{tg}^2\vartheta_1}} = \frac{\frac{L}{y}}{\sqrt{1+\left(\frac{L}{y}\right)^2}} = \frac{L}{\sqrt{L^2+y^2}}$$

• se $\boxed{y \gg 2L}$:

$$\vec{E}(y \gg 2L) = 2\,k\,\frac{\lambda}{y}\cdot\frac{L}{y\sqrt{1+\underbrace{\left(\frac{L}{y}\right)}_{\to 0}^2}}\,\vec{u}_y \approx 2\,k\,\frac{\lambda}{y^2}\,L\,\vec{u}_y = k\,\frac{Q}{y^2}\,\vec{u}_y$$

↑ ⇒ la barra e' come se fosse puntiforme

se $\boxed{L \to \infty}$: $\vec{E} = 2k\,\frac{\lambda}{y}\,\vec{u}_y$

• se $\boxed{y \ll L}$:

$$\vec{E} = 2\,k\,\frac{\lambda}{y}\,\frac{L}{\sqrt{y^2+L^2}}\,\vec{u}_y = 2\,k\,\frac{\lambda}{y}\,\frac{L}{L}\,\vec{u}_y = 2\,k\,\frac{\lambda}{y}\,\vec{u}_y$$

→ se abbiamo un punto molto vicino al FILO, IL campo va come $\frac{1}{y}$

v che ho nell' origine

t^* in $x(t^*) = 0$

$x(t^*) = A\cos(\omega_0 t^*) = 0$ $\qquad \omega_0 t^* = \frac{\pi}{2}$ $\qquad t^* = \frac{\pi}{2\omega_0}$

$$v(t) = -\omega_0 \underset{\overset{\uparrow}{x_0}}{A} \sin(\omega_0 t + \underset{\overset{\uparrow}{0}}{\phi})$$

$$v(t^*) = -\omega_0 x_0 \sin(\omega_0 t^*) = -\omega_0 x_0$$

Caso in cui x e R NON SONO PIU' TRASCURABILI:

$$V(x) = k\frac{Q}{\sqrt{x^2+R^2}}$$

$U = q_0 V \quad \rightarrow \quad U(x) = -|q_0|\, k \frac{Q}{\sqrt{x^2+R^2}}$ ← en. potenziale della particella

MOTO DELLA PARTICELLA:

$E_{TOT} = \frac{1}{2}mv^2 - |q_0|\, k\frac{Q}{\sqrt{x^2+R^2}} = \text{costante!}$

$x(0) = x_0$
$v(0) = 0$

$$E_{TOT}(0) = \frac{1}{2}mv(0)^2 - |q_0|\, k\frac{Q}{\sqrt{x_0^2+R^2}} = -q_0\, k\frac{Q}{\sqrt{x_0^2+R^2}}$$

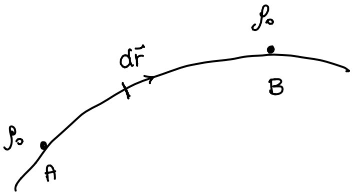
$$E_{TOT}(x=0) = \frac{1}{2}mv^{*2} - |q_0|\, k\frac{Q}{R} \overset{!!}{=} -|q_0|\, k\frac{Q}{\sqrt{x_0^2+R^2}}$$

$\boxed{\frac{1}{2}mv^{*2} = k\frac{|q_0|Q}{R}\left(1-\frac{R}{\sqrt{x_0^2+R^2}}\right)}$ → da qui trovo la v^* che ho quando passa nell' origine

---

Def. il lavoro di una carica elettrica che viene spostata da A a B

$\int_A^B \vec{E}\, d\vec{r} = V(A) - V(B)$ $\qquad F = q_0 \vec{E}$



$$W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = q_0\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{r} = q_0\left[V(A) - V(B)\right]$$

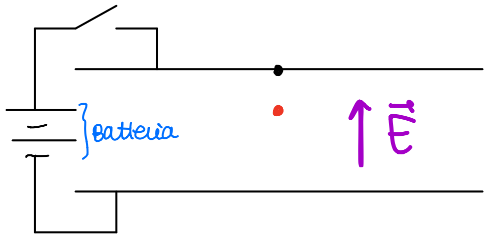
$\boxed{U = q_0 \cdot V}$ EN. POTENZIALE

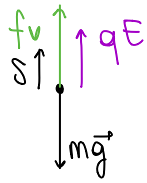
tutte le volte che una carica si muove in un campo ELETTRICO

e' un moto in cui c'e' una ENERGIA POTENZIALE

Se si muove in presenza di forze conservative:

$$E_{TOT} = \underset{\text{en. cinetica}}{E_k} + \underset{\text{en. potenziale}}{U} = \text{COSTANTE}$$





$$\frac{4}{3}\pi r^3 \rho \frac{dv}{dt} = \underbrace{\frac{4}{3}\pi r^3(\rho-\rho_A)g - 6\pi\eta r v - qE}_{\text{mettendo questo } = 0 \text{ trovava una nuova } v_l}$$

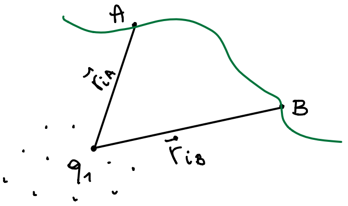
le cariche erano multiple di una quantita' pari a quella dell'elettrone

$$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \underset{C}{A \cdot s}$$

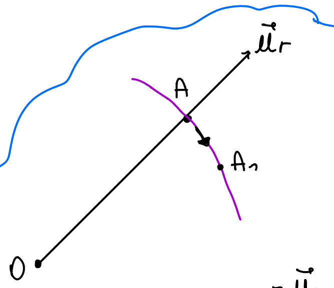
Appartiene a γ

creato da cariche puntiformi

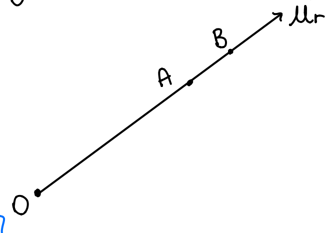
$$\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_A^B \left(\sum_{i=1}^N \vec{E}_i\right)\cdot d\vec{r} = \int_A^B \sum_{i=1}^N \left(\vec{E}_i\cdot d\vec{r}\right) = \sum_{i=1}^N \int_A^B \vec{E}_i\cdot d\vec{r} = \sum_{i=1}^N \left(k\frac{q_i}{r_{iA}} - k\frac{q_i}{r_{iB}}\right)$$



$$\boxed{V = \sum_{i=1}^N k\frac{q_i}{r_i}}$$ → Il potenziale è formato dalla somma delle singole cariche

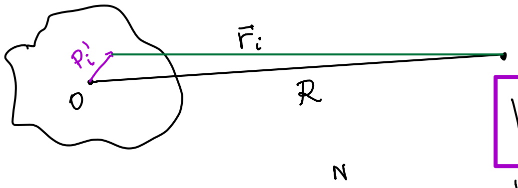


$\vec{E}\cdot d\vec{r} = 0$ perche' $\vec{E}\perp d\vec{r}$, quando da $A \to A_1$ che sta sulla stessa sfera



$\vec{E}\cdot d\vec{r} = E\cdot dr$ perche' $\vec{E}\parallel d\vec{r}$, B sta sullo stessa direzione di A.

Quando le particelle occupano una reg. limitata dello spazio, Allora:

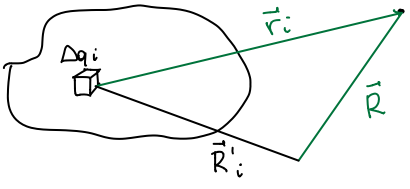


se $\boxed{R >> \text{corpo}}$ $r_i \approx R$

$$\boxed{V(\vec{R}) = k\frac{1}{R}\sum_{i=1}^N q_i}$$

$Q = \sum_{i=1}^N q_i$ $\quad V(\vec{R}) \approx k\frac{Q}{R}$

L' estensione al caso continuo della formula precedente e':



$$V(\vec{R}) = \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^N k\frac{\Delta q_i}{r_i}$$

$$\boxed{V(\vec{R}) = \int_{\text{CORPO}} k\frac{dq}{r}}$$ ← generalizzazione di $V = \sum_i k\frac{q_i}{r_i}$

Se un campo e' conservativo allora deriva da un POTENZIALE

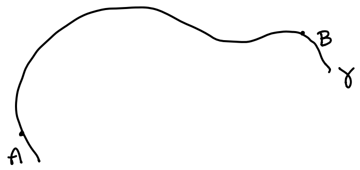
$\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}V \qquad \int_A^B \vec{E}\,d\vec{r} = V(A) - v(B)$

Se la densità di carica è minore UGUALE di una certa quantità, la formula del potenziale vale sia dentro che fuori il corpo.

$$\lim_{\varepsilon \to 0} V(P)_{\text{DENTRO}} = 2\pi k \lim_{\varepsilon \to 0} \rho_m \varepsilon^2$$

Una particella si muove in presenza di una carica ELETTRICA FERMA

$$\vec{F} = \underbrace{q}_{\text{carica di PROVA}} \boxed{\vec{E}} \text{ — CAMPO CREATO dalla DISTRIBUZIONE}$$



$$W_{(\gamma)\,A\to B} = \int_A^B \vec{F}\, d\vec{r} = \int_A^B q\vec{E}\, d\vec{r} = q\int_A^B \vec{E}\, d\vec{r} = \boxed{q\left[V(A) - V(B)\right]}$$

$$U = qV$$

$$\boxed{W_{A\to B} = U(A) - U(B)}$$

POTENZIALE del GRADIENTE: (NON FATTO)

$\vec{E} = 2k\lambda \frac{1}{r} \vec{u}_r$ $\qquad k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda}{r} \vec{u}_r}$$

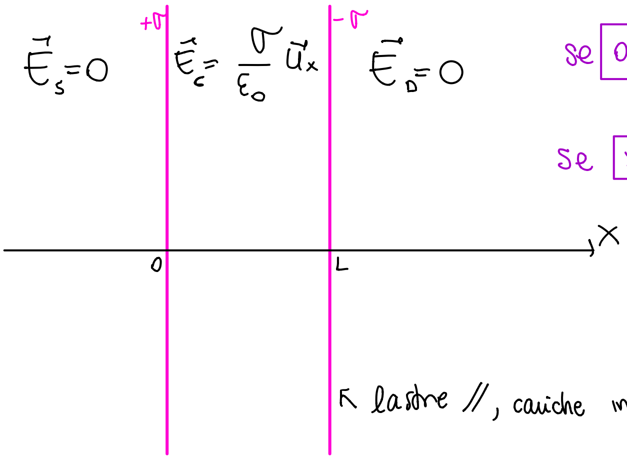
$\frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda}{r} \vec{u}_r = -\vec{u}_r \frac{\partial V}{\partial r} - \vec{u}_\phi \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \phi} - \vec{u}_z \frac{\partial V}{\partial z}$ (deve valere questa uguaglianza):

$\frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda}{r} = -\frac{\partial V}{\partial r}$ $\qquad 0 = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \phi}$ $\qquad 0 = -\frac{\partial V}{\partial z}$

$\Rightarrow$ V dipende solo da r $\quad V = v(r)$

$\frac{dV}{dr} = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r} \Rightarrow dV = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r}$

integriamo $\Rightarrow$ $\boxed{V(r) = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \ln \frac{r}{r_0}}$!!!!



se $\boxed{0<x<L}$ $\quad \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{u}_x = -\frac{\partial V_c}{\partial x}\vec{u}_x - \frac{\partial V_c}{\partial y}\vec{u}_y - \frac{\partial V_c}{\partial z}\vec{u}_z$

se $\boxed{x<0}$ $\quad 0 = -\frac{\partial V_s}{\partial x}\vec{u}_x - \frac{\partial V_s}{\partial y}\vec{u}_y - \frac{\partial V_s}{\partial z}\vec{u}_z$

se $\boxed{x>0}$ $\quad 0 = -\frac{\partial V_D}{\partial x}\vec{u}_x - \frac{\partial V_D}{\partial y}\vec{u}_y - \frac{\partial V_D}{\partial z}\vec{u}_z$

Dobbiamo avere 3 campi da calcolare

Il campo è sempre il gradiente del campo.

$\vec{E}_c = -\vec{\nabla} V_c$ $\qquad V_c = V(0<x<L)$

$\vec{E}_s = -\vec{\nabla} V_s$ $\qquad V_s = V(x<0)$

$\vec{E}_D = -\vec{\nabla}_D$ $\qquad V_D = V(x>L)$

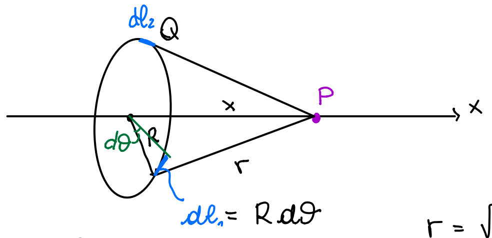
$V_s = V_c$ se $x=0$

$V_s = V_D$ se $x=0$

V_D è COSTANTE $= S$

V_s è COSTANTE $= C$

ES: Det. il POTENZIALE CREATO sull' asse da un anello uniformem. carico



Per calcolarlo si usa il PRINCIPIO di SOVRAPP.

$$r = \sqrt{R^2+x^2}$$

$$\lambda = \frac{Q}{2\pi R}$$

$$dq = \lambda \, dl$$

$$dV = k\,\frac{dq}{r}$$

$$V(x) = \int_{\text{CORPO}} k\,\frac{dq}{r} = k\,\frac{1}{r}\int_{\text{CORPO}} dq = k\,\frac{Q}{r} = k\,\frac{Q}{\sqrt{x^2+R^2}}$$

consideriamo P molto lontano : $x >> R$

$$V(x>>R) = k\,\frac{Q}{x}$$ ← FUNZIONE PARI!

" $\sqrt{1+\varepsilon} \approx 1 + \frac{1}{2}\varepsilon$ "

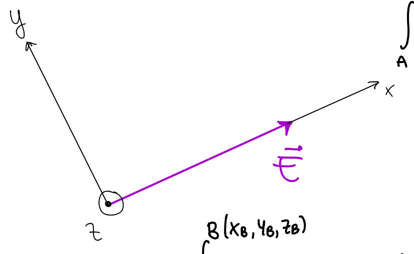
P vicino : $V(x<<R) = k\,\dfrac{Q}{R\sqrt{1+\left(\frac{x}{R}\right)^2}} = k\,\dfrac{Q}{R}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{R}\right)^2}} = k\,\dfrac{Q}{R}\,\dfrac{1}{1+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{R}\right)^2}$

" $\frac{1}{1+\varepsilon} \approx 1-\varepsilon$ " $= k\,\dfrac{Q}{R}\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{R}\right)^2\right]$

$$V(x<<R) = k\,\frac{Q}{R}$$

ES: Campo UNIFORME, QUAL e' il POTENZIALE?

Non varia nello spazio



$$\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{r} = V(A) - V(B)$$

$$\int_A^B (E_0\,\vec{u}_x)(dx\,\vec{u}_x + dy\,\vec{u}_y + dz\,\vec{u}_z) = V(A) - V(B)$$

$$\int_{A(x_A,y_A,z_A)}^{B(x_B,y_B,z_B)} E_0\,dx = V(A) - V(B) \implies E_0(x_B - x_A) = V(A) - V(B)$$

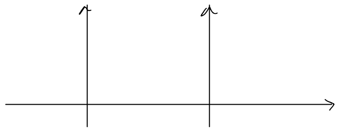
$V(A) = -E_0\,x_A$ $\quad$ $V(B) = -E_0\,x_B$

$$\boxed{V(x) = -E_0\,x + H}$$ POTENZIALE di un CAMPO UNIFORME

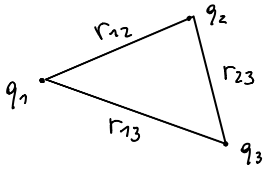
$V(0) = V_1 = -E_0\cdot 0 + H = H$

$V(L) = V_2 = -E_0\cdot L + H$

$\rightarrow V_1 - V_2 = E_0\,L$



$$W_3 = k\frac{q_1q_3}{r_{13}} + k\frac{q_1q_2}{r_{23}}$$



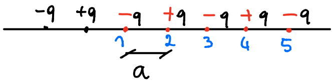
$$W_{TOT} = \overset{=0}{W_1} + W_2 + W_3 = \boxed{k\frac{q_1q_2}{r_{12}} + k\frac{q_1q_3}{r_{13}} + k\frac{q_1q_2}{r_{23}}} = U = \text{en. POTENZIALE}$$

Rapp. l'en. POTENZIALE che hanno LE CARICHE alla FINE.

Caso di n cariche q_i:

$$W = \frac{1}{2}\sum_{ij} k\frac{q_iq_j}{r_{ij}} \qquad \text{con } i \neq j$$

ES: Cristallo di SALE (NaCl)



$$U_1 = 2\cdot\left\{k\frac{(-q)q}{a} + k\frac{(-q)(-q)}{2a} + k\frac{(-q)q}{3a} + \dots\right\}$$

perché ci sono anche quelli a sx di q_1

$$= -2k\frac{q^2}{a}\left\{+1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots\right\} = -2k\frac{q^2}{a}\cdot\alpha$$

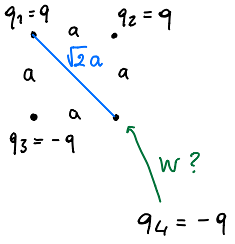
Se vogliamo spostare una carica e portarla all'infinito dobbiamo svolgere un lavoro: $W = -q V(A) - \overset{=0}{\cancel{V(B)}}$ perché $B = \infty$

IL sistema e' stabile quindi per spezzarlo devo applicare un lavoro.

Se la somma e' positiva, bisogna fare qualcosa per distruggerlo.

Se la somma e' negativa, il sistema si distrugge.

ES:



Calcolare l'en. potenziale di q_4

W = lavoro dall'esterno per portare q_4 = En. POTENZIALE di q_4 nel campo delle altre

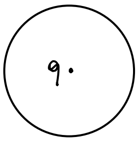
$$W_4 = k\frac{q_3q_4}{r_{34}} + k\frac{q_2q_4}{r_{24}} + k\frac{q_1q_4}{r_{14}} = k\frac{(-q)(-q)}{a} + k\frac{q(-q)}{a} + k\frac{q(-q)}{\sqrt{2}\,a} =$$

$$= \cancel{k\frac{q^2}{a}} - \cancel{k\frac{q^2}{a}} - k\frac{q^2}{\sqrt{2}\,a} = \underbrace{-k\frac{q^2}{\sqrt{2}\,a}}$$

IL sistema sta lì, dobbiamo fare qualcosa per distruggerlo

SUP. EQUIPOTENZIALE : In ogni suo punto il potenziale del CAMPO ELETTRICO ha un valore assegnato.

La sup. EQUIP. e' definita da : $V(x,y,t) = V_0$ COSTANTE

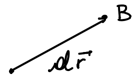


$V = k\frac{q}{r}$ $\quad V = V_0 \quad k\frac{q}{r} = V_0 \quad r = k\frac{q}{V_0}$

Le sup. EQUIPOTENZIALI hanno una PROPRIETA:

Se $\vec{E}$ e' CONSERVATIVO : $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$

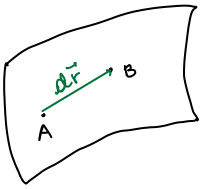
$\vec{E}\,d\vec{r} = -dV$ se



i punti sono molto vicini

$\Rightarrow \vec{E}\cdot d\vec{r} = V(A) - V(B)$

DUE SUPERFICI EQUIPOTENZIALI NON si POSSONO MAI INCONTRARE



SUP. EQUIPOT. $V = V_0$

$A \in \Sigma$

$B \in \Sigma$ ed e' infinitamente vicino ad A

$d\vec{r} = \overline{AB}\cdot\vec{u}_T$: $\vec{u}_T$ = versore tg a Σ in A

Il prodotto tra due vettori da 0 solo se i due sono $\perp$

sono molto vicini

$\vec{E}(A)\cdot d\vec{r} = V(A) - V(B) = 0$ $\quad \boxed{\vec{E}(A)\cdot(\underbrace{\overline{AB}}_{=\ell}\cdot\vec{u}_T) = 0}$ $\quad \ell\left[\vec{E}(A)\cdot\vec{u}_T\right] = 0$

Il vettore campo ELETTRICO e' $\perp$ a $\vec{u}_T$ e quindi anche alla sup. Σ EQUIPOTENZIALE

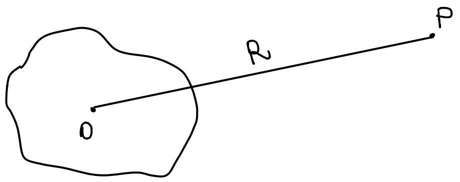
e questo VALE SEMPRE $(\forall A \in \Sigma,\ \vec{E} \perp \Sigma)$

$dV = d\vec{r}\cdot\vec{\nabla}V$ $\quad$ se V = equipotenziale :

$dV = d\vec{r}\cdot(-\vec{E}) \rightarrow dV = \boxed{-\vec{E}\cdot d\vec{r} = V(\vec{r}+d\vec{r}) - V(\vec{r})}$

DIPOLO ELETTRICO:

$\vec{E} = k \frac{q}{r^2} \vec{u}_r$ $\qquad V = k \frac{q}{r}$ $\qquad q = \sum q_i$

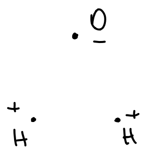


$q = \int_{CORPO} q(\vec{r})\, d\vec{r}$

"Ij corpi se sono localmente scarichi, ma globalmente carico abbiamo un sistema " BOH

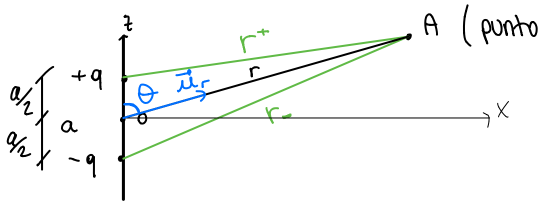
H-F : NEUTRO, ha una distribuzione di carica NULLA!

H_2O :

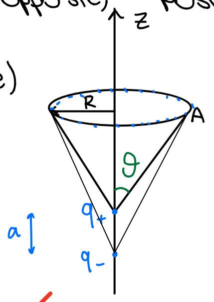


→ NEUTRO

DIPOLO: Un SISTEMA FATTO da 2 CARICHE (opposte), POSTE ad una certa distanza
⇒ IL sistema e' NEUTRO



A (punto di osservazione)



Tutti i punti sul cono, hanno lo stesso potenziale.

Quanto vale il potenziale elettrico in A?

$V(A) = k\frac{q}{r_+} - k\frac{q}{r_-}$

$$\boxed{V(A) = kq \frac{r_- - r_+}{r_+ r_-}}$$

Si ha una simmetria CILINDRICA

$V(r, \theta) = k\frac{q}{r+} - k\frac{q}{r-}$

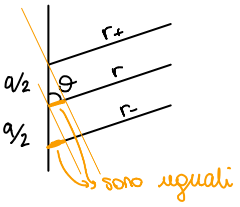
quindi

IL POTENZIALE NON DIpende dall' angolo φ, ma dipende da ρ e z

Se $\boxed{r \gg a}$ **APPROSSIMAZIONE di DIPOLO**: siamo in punti tali che r sia molto più grande di a

Allora r_+ e r_- diventano praticamente // :

$r \gg a$



CARNOT:

$r_+ = r - \frac{a}{2}\cos\theta$

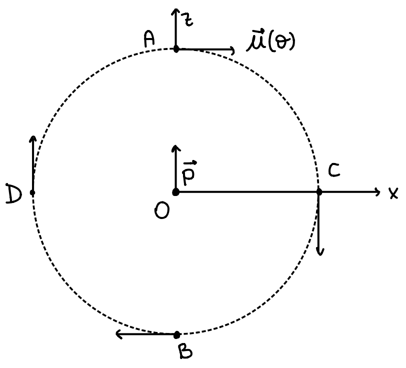
$r_- = r + \frac{a}{2}\cos\theta$

$r_- - r_+ = a\cos\theta$

$r_+ \cdot r_- = r^2 - \left(\frac{a}{2}\cos\theta\right)^2$

$$V(r,\theta) = kq\left\{\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right\} = kq\,\frac{r_- - r_+}{r_+ r_-} = kq\,\frac{a\cos\theta}{r^2 - \left(\frac{a}{2}\cos\theta\right)^2} = kq\,\frac{a\cos\theta}{r^2} = k\,\frac{p\cos\theta}{r^2}$$

Ricavata nel caso in cui l' asse z, passa per la congiungente delle 2 cariche



CIRCONFERENZA di RAGGIO r:

$$\begin{cases} \vec{u}_r(A) = \vec{u}_z \\ \vec{u}_\theta(A) = \vec{u}_x \end{cases} \rightarrow \theta = 0$$

$$\vec{E}(A) = k\frac{p}{r^3}\,2\,\vec{u}_z = 2k\frac{\vec{p}}{r^3}$$

$$\begin{cases} \vec{u}_r(B) = -\vec{u}_z \\ \vec{u}_\theta(B) = -\vec{u}_x \end{cases} \rightarrow \theta = \pi$$

$$\vec{E}(B) = k\frac{p}{r^3}\left(2(-1)(-\vec{u}_z)\right) = 2k\frac{\vec{p}}{r^3}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(A) = \vec{E}(B) = 2k\frac{\vec{p}}{r^3}$$

$$\vec{E} = k\frac{p}{r^3}\left(2\cos\theta\,\vec{u}_r + \sin\theta\,\vec{u}_\theta\right)$$

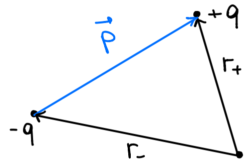
COSA SUCCEDE in C?

$$\begin{cases} \vec{u}_r(C) = \vec{u}_x \\ \vec{u}_\theta(C) = -\vec{u}_z \end{cases} \rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow \vec{E}(C) = k\frac{q}{r^3}\left(-1\,\vec{u}_z\right) = -k\frac{\vec{p}}{r^3} \rightarrow$$

Nel piano Equatoriale come A, il campo e' **ANTIPARALLELO** al momento di DIPOLO

Conseguenza: $\vec{E}(A) = \vec{E}(B) \neq \vec{E}(C) = \vec{E}(D)$

DIPOLO IN UN CAMPO ESTERNO:



Quale FORZA si ESERCITA? Qual e' l'en. POTENZIALE?

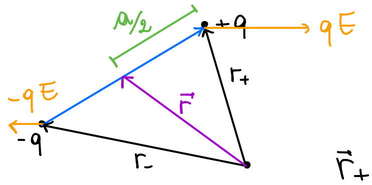
Qual e' il MOMENTO MECCANICO?

$\vec{E}$: campo in cui e' immerso il DIPOLO   V: potenziale

EN. POTENZIALE: Se il campo $\vec{E}$ NON E' UNIFORME:

$$U = q\cdot V \Longrightarrow U = qV(\vec{r}_+) - qV(\vec{r}_-)$$ ← PER IL PRINCIPIO di SOVRAPPOSIZIONE

$$U = q\{V(\vec{r}_+) - V(\vec{r}_-)\}$$



$$\vec{r}_+ = \vec{r} + \frac{\vec{a}}{2} \qquad \vec{r}_- = \vec{r} - \frac{\vec{a}}{2} \qquad \vec{r} = (x,y,z) \qquad \vec{a} = (a_x,a_y,a_z)$$

$$\vec{r}_+ = \left(x + \frac{a_x}{2},\ y + \frac{a_y}{2},\ z + \frac{a_z}{2}\right)$$

$$\vec{r}_- = \left(x - \frac{a_x}{2},\ y - \frac{a_y}{2},\ z - \frac{a_z}{2}\right)$$

Quanto vale la FORZA sulla CARICA POSITIVA e su quella NEGATIVA?

$\vec F_+ = q\vec E(\vec r_+)$

$\vec F_- = -q\vec E(\vec r_-)$ $\Rightarrow \boxed{\vec F = q\left[\vec E(\vec r_+) - \vec E(\vec r_-)\right]}$

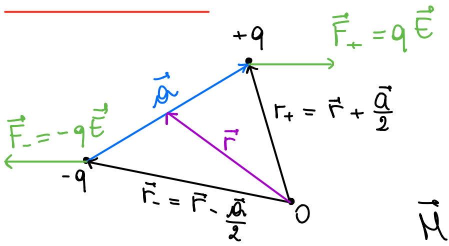
SE $\vec E$ e' UNIFORME $\Rightarrow \vec E(\vec r_+) = \vec E(\vec r_-) = E_0 \Rightarrow \boxed{\vec F = qE_0 = 0}$

come tra due superfici cariche UNIFORMEMENTE

SE IL CAMPO e' COSTANTE, la FORZA e' NULLA

Un DIPOLO in un campo UNIFORME **NON** e' SOTTOPOSTO a NESSUNA FORZA

ESEMPIO: $\vec E$ UNIFORME



CALCOLO DEL MOMENTO:

$$\vec M_O = \vec r_+ \times \vec F_+ + \vec r_- \times \vec F_- = \vec r_+ \times \{q\vec E\} + \vec r_- \times \{-q\vec E\}$$

$$\vec M_O = q(\vec r_+ - \vec r_-) \times \vec E$$

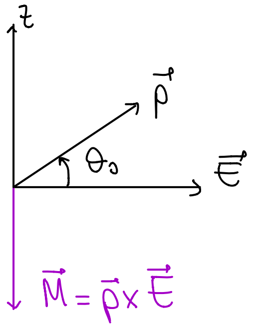
↓ ma

$\vec r_+ - \vec r_- = \vec a$

⇓

$$\boxed{\vec M_O = q\vec a \times \vec E = \vec p \times \vec E}$$

$\vec p$ = momento di DIPOLO



$M\frac{dv_{cm}}{dt} = \vec F$ ma $\vec E$ = UNIFORME $\Rightarrow$ v_{cm} = costante

$\boxed{-pE\sin\theta = I\frac{d^2\theta}{dt^2}}$ In $\vec E$ uniforme

↓

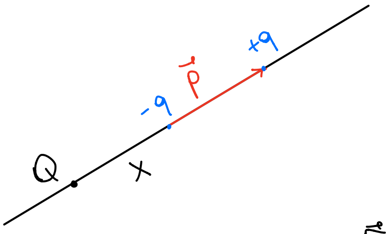
$$\left.\begin{array}{l}\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{pE}{I}\sin\theta = 0 \\ \sin\theta \sim \theta\end{array}\right\} \frac{d^2\theta}{dt^2} + \underbrace{\left(\frac{pE}{I}\right)}_{\omega_n^2}\theta = 0$$

(OSCILLATORE ARMONICO)

se θ molto piccolo

ESERCIZIO:

$\vec{F}_p$ = carica su DIPOLO ; $\vec{F}_Q$ = DIPOLO su CARICA



$$\vec{E}_Q = k\frac{Q}{x^2}\vec{u}_x$$

$$U_p = -\vec{p}\,\vec{E}_Q = -p\vec{u}_x\, k\frac{Q}{x^2}\vec{u}_x = -kp\frac{Q}{x^2}$$

$$\vec{F}_p = -\vec{\nabla}U_p = \underbrace{-\vec{\nabla}}_{\vec{u}_x \frac{d}{dx}}\left(-k\frac{pQ}{x^2}\right) = kpQ\frac{d}{dx}\left(x^{-2}\right)\vec{u}_x$$

$$\vec{F}_p = -2k\frac{pQ}{x^3}\vec{u}_x$$

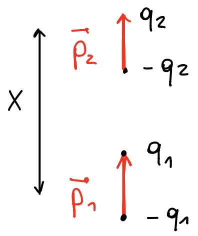
FORZA ATTRATTIVA perche' -q e Q sono piu' vicine

AZIONE - REAZIONE

$$\vec{E}_p = 2k\frac{\vec{p}}{x^3} = 2k\frac{p}{x^3}\vec{u}_x$$

$$\vec{F}_Q = Q\vec{E}_p = 2k\frac{pQ}{x^3}\vec{u}_x$$

INTERAZIONE di UN DIPOLO - DIPOLO:



$$\vec{E}_1 = 2k\frac{\vec{p}_1}{x^3} \qquad U_2 = -\vec{p}_2\vec{E}_1$$

$$U_{21} = -\vec{p}_2\left(2k\frac{\vec{p}_1}{x^3}\right) = -2k\frac{\vec{p}_2\vec{p}_1}{x^3}$$

crea il campo

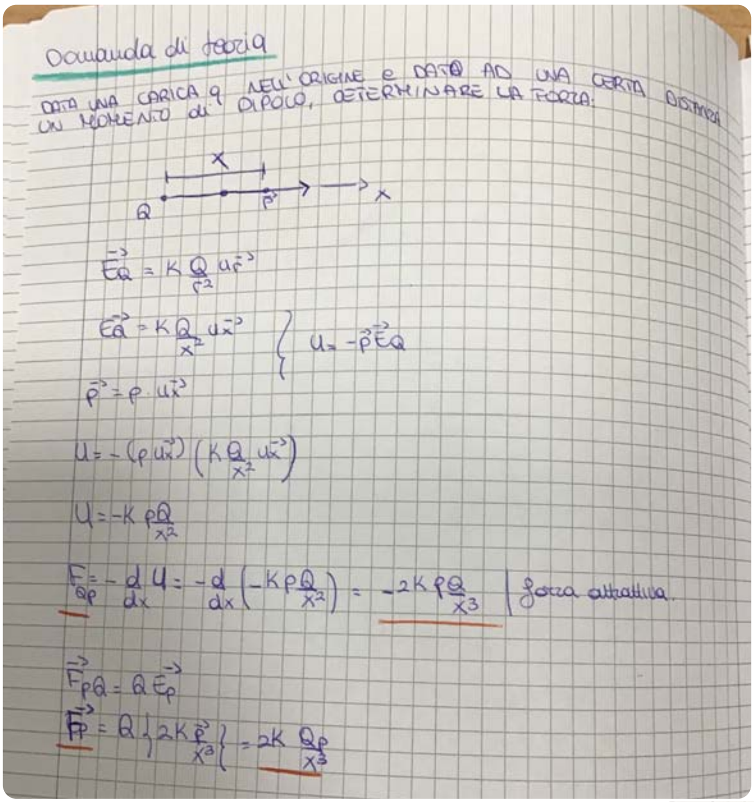
$$\vec{F}_2 = -\vec{\nabla}U_{21} \longrightarrow \vec{F}_2 = -\vec{u}_x\frac{d}{dx}\left(-2k\frac{p_2p_1}{x^3}\right)$$

$$F_2 = \vec{u}_x 2k\, p_1p_2\frac{d}{dx}\left(x^{-3}\right) = -6\vec{u}_x k\frac{p_1p_2}{x^4}$$

2 CARICHE PUNTIFORMI: $F = k\frac{q_1q_2}{x^2}$

1 CARICA - DIPOLO: $F = k\frac{qp}{x^3}$

2 DIPOLI: $F = -6k\frac{p_1p_2}{x^4}$



Domanda di teoria

DATA UNA CARICA q NELL'ORIGINE e DATO AD UNA CERTA DISTANZA UN MOMENTO di DIPOLO, DETERMINARE LA FORZA:

$\vec{E_Q} = K\frac{Q}{r^2}\vec{u_r}$

$\vec{E_Q} = K\frac{Q}{x^2}\vec{u_x}$ } $U = -\vec{p}\vec{E_Q}$

$\vec{p} = p\cdot\vec{u_x}$

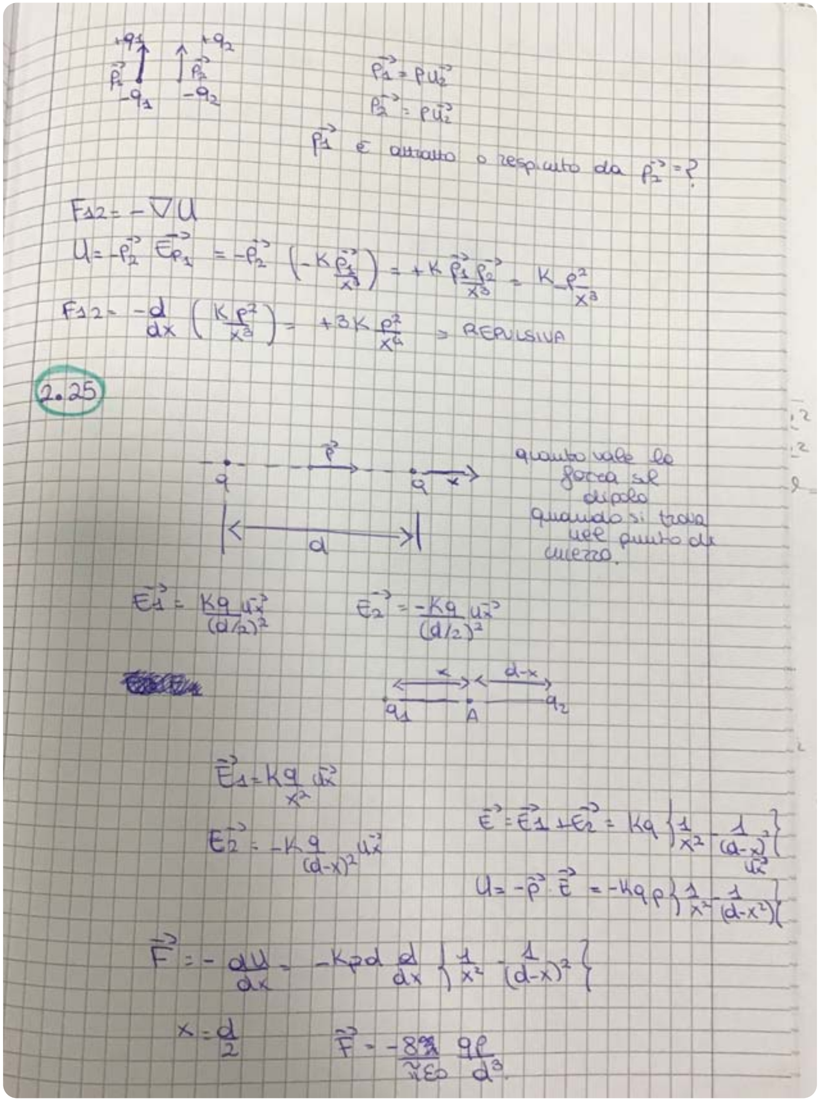
$U = -(p\vec{u_x})\left(K\frac{Q}{x^2}\vec{u_x}\right)$

$U = -K\frac{pQ}{x^2}$

$F_{Qp} = -\frac{d}{dx}U = -\frac{d}{dx}\left(-Kp\frac{Q}{x^2}\right) = -2Kp\frac{Q}{x^3}$ | forza attrattiva.

$\vec{F}_{pQ} = Q\vec{E_p}$

$\vec{F_p} = Q\left\{2K\frac{\vec{p}}{x^3}\right\} = 2K\frac{Qp}{x^3}$



$\vec{p_1} = p\vec{u_z}$

$\vec{p_2} = p\vec{u_z}$

$\vec{p_1}$ è attratto o respinto da $\vec{p_2}$ = ?

$F_{12} = -\nabla U$

$U = -\vec{p_2}\vec{E_{p_1}} = -\vec{p_2}\left(-K\frac{\vec{p_1}}{x^3}\right) = +K\frac{\vec{p_1}\vec{p_2}}{x^3} = K\frac{p^2}{x^3}$

$F_{12} = -\frac{d}{dx}\left(K\frac{p^2}{x^3}\right) = +3K\frac{p^2}{x^4}$ ⇒ REPULSIVA

2.25

quanto vale la forza sul dipolo quando si trova nel punto di mezzo.

$\vec{E_1} = \frac{Kq}{(d/2)^2}\vec{u_x}$ $\vec{E_2} = \frac{-Kq}{(d/2)^2}\vec{u_x}$

[illegible]

$\vec{E_1} = K\frac{q}{x^2}\vec{u_x}$

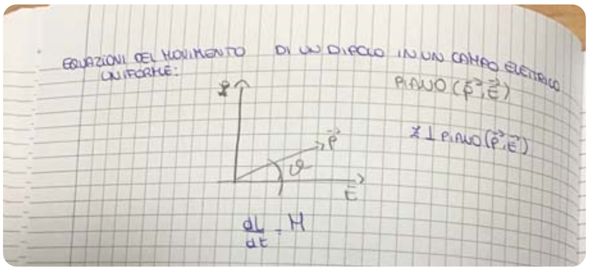
$\vec{E_2} = -K\frac{q}{(d-x)^2}\vec{u_x}$

$\vec{E} = \vec{E_1} + \vec{E_2} = Kq\left\{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(d-x)^2}\right\}\vec{u_x}$

$U = -\vec{p}\cdot\vec{E} = -Kqp\left\{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(d-x^2)}\right\}$

$\vec{F} = -\frac{dU}{dx} = -Kpd\frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(d-x)^2}\right\}$

$x = \frac{d}{2}$ $\vec{F} = -\frac{8}{\pi\varepsilon_0}\frac{qp}{d^3}$

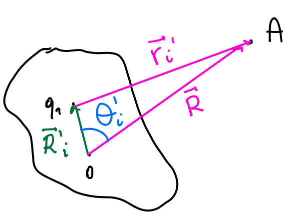


EQUAZIONI DEL MOVIMENTO DI UN DIPOLO IN UN CAMPO ELETTRICO UNIFORME:

PIANO ($\vec{p}$, $\vec{E}$)

z ⊥ PIANO ($\vec{p}$, $\vec{E}$)

$\frac{dL}{dt} = M$



Sistema di n cariche q_i individuate da $\vec{R}'_i$

$\boxed{R >> \text{dimensioni del corpo}} \Rightarrow \frac{R'_i}{R} \ll 1$

Calcolare il potenziale in A:

$$V(\vec R)=\sum_{i=1}^{N} k\,\frac{q_i}{r_i}$$

$\vec R'_i+\vec r=\vec R$ $\qquad \vec r_i$ = punto in cui ci interessa il campo = $\vec R-\vec R'_i$

$$\vec r_i\cdot\vec r_i=(\vec R-\vec R'_i)(\vec R-\vec R'_i) \Rightarrow \vec r_i^{\,2}=R^2-\vec R\cdot\vec R'_i-\vec R'_i\vec R+\vec R_i'^{\,2}$$

$$\vec r_i^{\,2}=\vec R^2-2\vec R\vec R'_i+\vec R_i'^{\,2} \Rightarrow \vec r_i=\sqrt{\vec R^2-2\vec R\vec R'_i+\vec R_i'^{\,2}}$$

$$V(\vec R)=k\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{\sqrt{\vec R^2-2\vec R\vec R'_i+\vec R_i'^{\,2}}}$$

$\vec R\cdot\vec R_i'=RR_i'\cos\theta_i'$

$$V(\vec R)=k\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{R}\frac{q_i}{\sqrt{1-2\frac{\vec R\cdot\vec R_i'}{R^2}+\left(\frac{R_i'}{R}\right)^2}}$$

$1-2\frac{RR_i'\cos\theta_i'}{R^2}+\left(\frac{R_i'}{R}\right)^2=1-2\frac{R_i'}{R}\cos\theta_i'+\left(\frac{R_i'}{R}\right)^2 \approx$ AL PRIMO ORDINE IN $\frac{R_i'}{R}$

$\cong 1-2\frac{\vec R\cdot\vec R_i'}{R^2}$ + termini del secondo ordine in $\frac{R_i'}{R}$

dove $\varepsilon=2\frac{\vec R\vec R_i'}{R^2}\ll 1$

$\Downarrow$

$$V(\vec R)=k\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{R}\frac{q_i}{\sqrt{1-2\cdot\frac{\vec R\cdot\vec R_i'}{R^2}}}=k\frac{1}{R}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{\sqrt{1-\varepsilon}}\simeq\frac{k}{R}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{1-\frac{1}{2}\varepsilon}\approx$$

$$\approx\underbrace{\frac{k}{R}\sum_{i=1}^{N}q_i\left(1+\frac{1}{2}\varepsilon\right)}_{\text{SVILUPPI MULTIPOLARI}}=\frac{k}{R}\sum_{i=1}^{N}q_i\left(1+\frac{\vec R\vec R_i'}{\vec R^2}\right)=\frac{k}{R}\sum_{i=1}^{N}q_i+\frac{k}{R^3}\vec R\cdot\sum_{i=1}^{N}q_i\cdot\vec R_i'+\dots$$

momento di DIPOLO

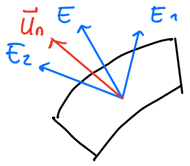
$Q=\sum_{i=1}^{N}q_i \qquad \vec P=\sum_{i=1}^{N}q_i\cdot\vec R_i'$

$$V(\vec R)=k\frac{Q}{R}+k\frac{\vec R\cdot\vec P}{R^3}+\dots$$

$$\vec u_R=\frac{\vec R}{R}\Rightarrow V(\vec R)=\underbrace{k\frac{Q}{R}}_{\text{POTENZIALE di MONOPOLO}}+\underbrace{k\frac{\vec P\cdot\vec u_R}{R^2}}_{\text{POTENZIALE di DIPOLO}}$$

$\frac{1}{R^3}$ = POTENZIALE DU QUADRUPOLO

Se un corpo ha una carica molto distante, allora tratto il corpo come una carica puntiforme.



$\vec{E} = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i$

$$\phi_\Sigma \vec{E} = \oint_\Sigma \vec{E}\cdot\vec{u}_n\, d\Sigma = \oint_\Sigma \left(\sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i\right)\cdot \overbrace{\vec{u}_n\, d\Sigma}^{\text{Non dipendono dall'indice } i} = \oint_\Sigma \sum_{i=1}^{N} \left(\vec{E}_i\cdot\vec{u}_n\, d\Sigma\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \underbrace{\oint_\Sigma \vec{E}_i\cdot\vec{u}_n\, d\Sigma}_{\text{Flusso: } \phi_\Sigma(\vec{E}_i)} = \sum_{i=1}^{N} \phi_\Sigma(\vec{E}_i)$$

ma: $\phi_\Sigma(\vec{E}) = \begin{cases} 4\pi k q & \text{se } \Sigma \in q \Rightarrow \frac{q}{\varepsilon_0} \\ 0 & \text{se } \Sigma \notin q \Rightarrow 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \phi_\Sigma(\vec{E}) = \frac{Q(\Sigma)}{\varepsilon_0}$: Σ cariche contenute in Σ ⇒ **LEGGE di GAUSS**

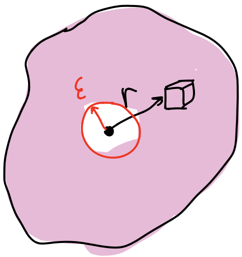
PRIMA LEGGE di MAXWELL:

$\rho_M = \rho_{MAX}$

$\vec{E} = k\int_{\text{CORPO}} \frac{dq}{r^2}\vec{u}$: vale anche nei punti interni al corpo se e solo se $\rho < \rho_M$

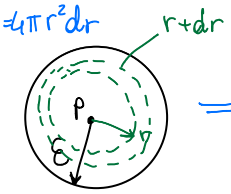
$dq = \rho\, d\tau$ $\quad$ $dq = \sigma\, d\Sigma$ $\quad$ $dq = \lambda\, dl$

se $r \to 0 \Rightarrow \vec{E} = \infty$



$$\vec{E} = k\int_\tau \frac{\rho\vec{u}}{r^2}\, d\tau = k\int_{\tau_F} \underbrace{\rho\frac{\vec{u}}{r^2}\, d\tau}_{\text{che viene da FUORI } (\vec{E}_F)} + k\int_{\tau_D} \underbrace{\rho\frac{\vec{u}}{r^2}\, d\tau}_{\text{che viene dalla sfera } \varepsilon\ (\vec{E}_D)}$$

$d\tau = 4\pi r^2 dr$



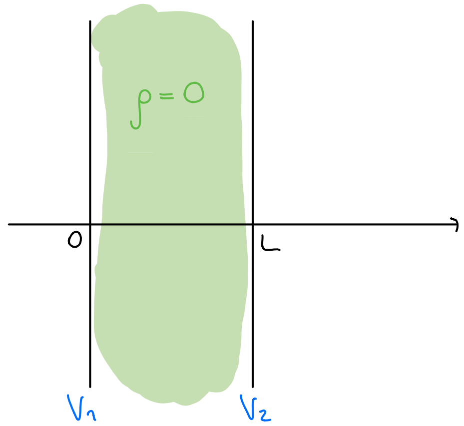
$$\Longrightarrow \vec{E}_D = k\int_{\tau_D} \rho\frac{\vec{u}}{r^2}\, d\tau$$

$$|\vec{E}_D| = \left|k\int_{\tau_D} \rho\frac{\vec{u}}{r^2}\, d\tau\right| \le k\int_{\tau_D}\left|\rho\frac{\vec{u}}{r^2}\, d\tau\right| \le k\int_{\tau_D}\frac{\rho}{r^2}\, d\tau \le$$

$$\le k\rho_M\int_{\tau_D}\frac{d\tau}{r^2} = k\rho_M\int_0^\varepsilon \frac{4\pi \cancel{r^2}\, dr}{\cancel{r^2}} = 4\pi k\rho_M\varepsilon$$

$\lim_{\varepsilon\to 0} \vec{E}_D = 0 \longrightarrow \vec{E} = \vec{E}_F + \vec{E}_D \Rightarrow \boxed{\vec{E}(P) = k\int_\tau \frac{\rho}{r^2}\vec{u}_r\, d\tau}$

PROBLEMA: Quanto vale il potenziale all'interno delle 2 piastre?



$$\nabla^2 V = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho = 0 \quad \text{nei punti interni}$$

$$\Downarrow \; V = V(x)$$

$$\frac{d^2V}{dx^2} = 0 \Rightarrow \frac{dV}{dx} = \text{cost} = H$$

$$V(x) = H \cdot x + K$$

Dobbiamo mettere le C.C.

$$\begin{cases} V(x=0) = V_1 \\ V(x=L) = V_2 \end{cases} \quad \begin{cases} V_1 = H \cdot 0 + K \\ V_2 = H \cdot L + K \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} K = V_1 \\ V_2 = HL + V_1 \end{matrix} \Rightarrow H = \frac{V_2 - K}{L} = \frac{V_2 - V_1}{L}$$

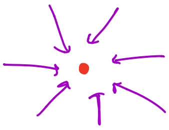
$$\Rightarrow \boxed{V(x) = \frac{V_2 - V_1}{L} x + V_1}$$

PROP. FONDAMENTALE:

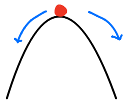
In un CAMPO ELETTROSTATICO in una REGIONE in cui NON ci sono CARICHE, NON ci SONO PUNTI di EQUILIBRIO OPPURE

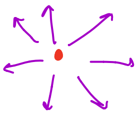
creato da un n° di cariche puntiformi

EQUILIBRIO STABILE se la particella STA FERMA

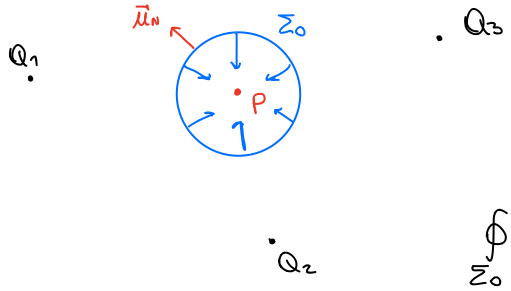


EQUILIBRIO INSTABILE





P e' un PUNTO di EQ. STABILE?



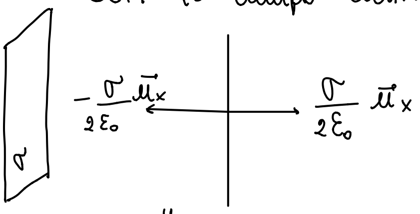
$\vec{F}$: FORZA DOVUTA al campo su q_0

$$\oint_{\Sigma_0} \vec{F} \cdot \vec{u}_N \, d\Sigma < 0$$

$$\oint_{\Sigma_0} q_0 \cdot \vec{E} \cdot \vec{u}_N \, d\Sigma = q_0 \, \Phi_{\Sigma_0}(\vec{E}) = q_0 \frac{Q(\Sigma_0)}{\varepsilon_0} = 0$$

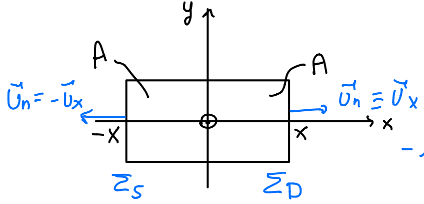
ES:

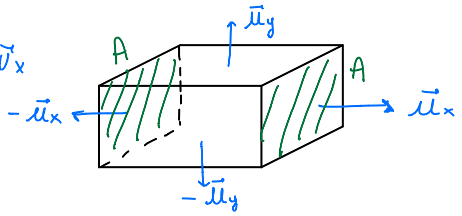
Det. il campo elettrico caratterizzato da una superficie piana.



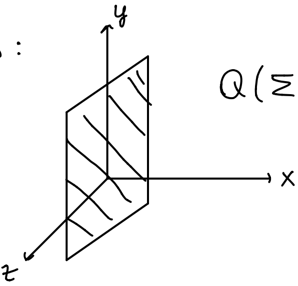
$\vec{E} = E(x)\,\vec{u}_x$

$E(x) = -E(-x)$ il campo **deve** essere DISPARI





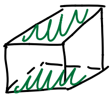
Applichiamo GAUSS :



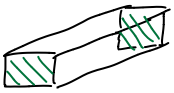
$Q(\Sigma) = \sigma A$

$$\phi_{\Sigma}(\vec{E}) = \oint\!\!\oint_{\Sigma} \vec{E}\,\vec{u}_n\,d\Sigma = \iint_{\Sigma_D} \vec{E}(x)\,\vec{u}_n(x)\,d\Sigma + \iint_{\Sigma_S} \vec{E}(-x)\,\vec{u}_n(-x)\,d\Sigma = \circledast$$

Il flusso del campo nella superficie y e' uguale a 0



Anche



il flusso e' 0

$$\circledast = \iint_{\Sigma_D} E(x)\underbrace{\vec{u}_x \cdot \vec{u}_x}_{=1}\,d\Sigma + \iint_{\Sigma_S} E(-x)\underbrace{\vec{u}_x \cdot (-\vec{u}_x)}_{=-1}\,d\Sigma =$$

$$= E(x)\iint_{\Sigma_D} d\Sigma - E(-x)\iint_{\Sigma_S} d\Sigma = \left[E(x) - E(-x)\right]A = 2E(x)A$$

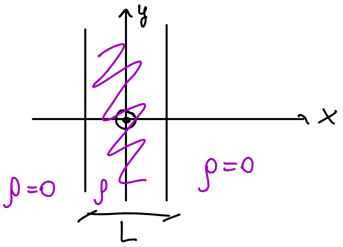
$Q(\Sigma) = \sigma A$

$\phi_{\Sigma}(\vec{E}) = 2E(x)A$

$$2E(x)\cancel{A} = \frac{\sigma\cancel{A}}{\varepsilon_0}$$

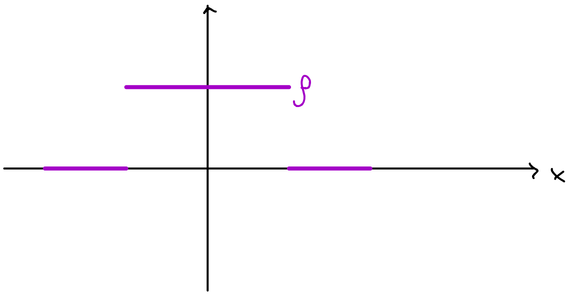
$$E(x) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

LASTRA CON L'EQ. DI POISSON:



$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(x)}$$

$\vec{E} = E(x)$, $\vec{E}$ deve essere DISPARI



$$\frac{dE}{dx} = \frac{\rho(x)}{\varepsilon_0}$$

Il CAMPO ELETTRICO **DEVE ESSERE CONTINUO** SULLA SUPERFICIE che separa le due regioni

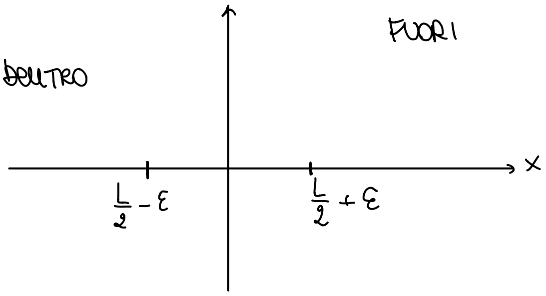
$$\int_{\frac{L}{2}-\varepsilon}^{\frac{L}{2}+\varepsilon} dE = \int_{\frac{L}{2}-\varepsilon}^{\frac{L}{2}+\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(x)\,dx \nearrow = \int_{\frac{L}{2}-\varepsilon}^{L/2+\varepsilon} \rho(x)dx = \underset{\uparrow}{\frac{1}{2\varepsilon}} \int_{\frac{L}{2}-\varepsilon}^{L/2+\varepsilon} \rho(x)dx \cdot 2\varepsilon$$

TH. MEDIA INTEGRALE

⇓

VALORE MEDIO

↑



$$E\left(\frac{L}{2}+\varepsilon\right) - E\left(\frac{L}{2}-\varepsilon\right) = \frac{1}{\varepsilon_0}\langle\rho\rangle\, 2\varepsilon$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} E\left(\frac{L}{2}+\varepsilon\right) - E\left(\frac{L}{2}-\varepsilon\right) = \lim_{\varepsilon\to 0} \underbrace{\frac{1}{\varepsilon_0}\langle\rho\rangle\, 2\varepsilon}_{=0} \Rightarrow E\left(\frac{L}{2}^{+}\right) - E\left(\frac{L}{2}^{-}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{E\left(\frac{L}{2}^{-}\right) = E\left(\frac{L}{2}^{+}\right)}$$

Tutte le volte che ρ = DENSITA' VOLUMICA FINITA, il campo ELETTRICO cambia con CONTINUITA' ALLA SUP. di SEPARAZIONE.

$$\begin{cases} \dfrac{dE_{int}}{dx} = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\rho_{int} \nearrow = \rho \\ \dfrac{dE_{ext}}{dx} = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\rho_{ext} \searrow = 0 \end{cases} \qquad E_{int}\left(x=\frac{L}{2}\right) = E_{ext}\left(x=\frac{L}{2}\right)$$

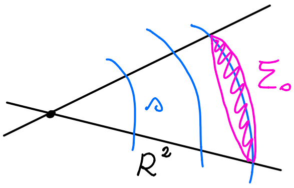
$$\frac{dE_{int}}{dx} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho \Rightarrow E_{int} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho x + \textcircled{H}$$

deve essere uguale a zero perché $\vec{E}$ è DISPARI

$$\frac{dE_{ext}}{dx} = 0 \Rightarrow E_{ext} = K$$

$$E_{int}\left(\frac{L}{2}\right) = E_{ext}\left(\frac{L}{2}\right) \Rightarrow \frac{\rho L}{2\varepsilon_0} = K \Rightarrow \boxed{E = \begin{cases} \dfrac{\rho x}{\varepsilon_0} & |x| < \dfrac{L}{2} \\ \pm\dfrac{\rho L}{2\varepsilon_0} & |x| > \dfrac{L}{2} \end{cases}} \quad !$$

Legge di GAUSS da FISICA 1: ANGOLO SOLIDO:



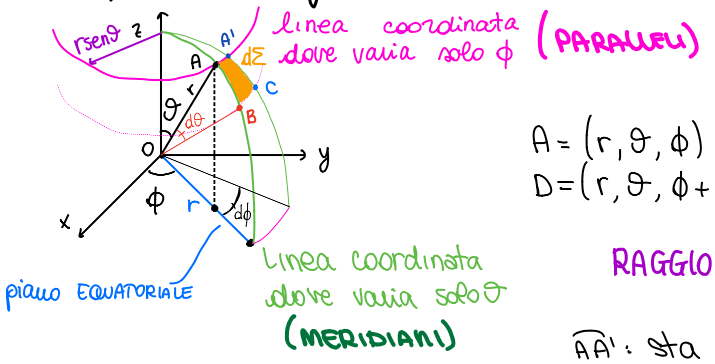
arco

$\theta = \frac{s}{R}$ = angolo piano ⇒ vale al max 2π

superficie sferica

$\Omega = \frac{\Sigma_0}{R^2}$ = angolo SOLIDO = vale al max 4π

- Si esprime l'angolo SOLIDO in COORDINATE SFERICHE:

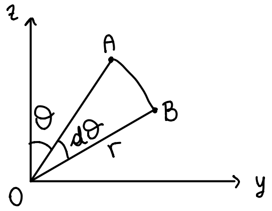


Linee COORDINATE, linea dove cambia solo 1 coordinata

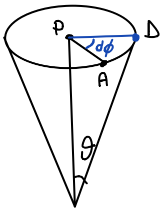
$A = (r, \theta, \phi)$; $B = (r, \theta + d\theta, \phi)$; $C = (r, \theta + d\theta, \phi + d\phi)$;
$D = (r, \theta, \phi + d\phi)$

RAGGIO DEL PARALLELO = $r\,\mathrm{sen}\theta$

$\overset{\frown}{AA'}$: sta su un PARALLELO
$\overset{\frown}{AB}$: sta su un MERIDIANO



$\overline{AB} = r\,d\theta$



PA = raggio di base del cono = $r\sin\theta$

$\overline{AD} = AP \cdot d\phi = r\sin\theta\,d\phi$

$d\Sigma = \overline{AD} \times \overline{AB} = r^2\,\mathrm{sen}\theta\,d\theta\,d\phi$

In coord. sferiche l'angolo solido e' rappresentato così:

$$d\Omega = \frac{\overline{AD} \times \overline{AB}}{r^2} = \frac{r^2\,\mathrm{sen}\theta\,d\theta\,d\phi}{r^2} = \sin\theta\,d\theta\,d\phi$$

$0 \leq \theta \leq \pi$ $\qquad$ $0 \leq \phi \leq 2\pi$

$$\Omega = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin\theta\,d\theta\,d\phi = \int_0^{2\pi} d\phi + \int_0^{\pi} \sin\theta\,d\theta = 2\pi\left\{-\left[\cos\theta\right]_0^{\pi}\right\} = 4\pi$$

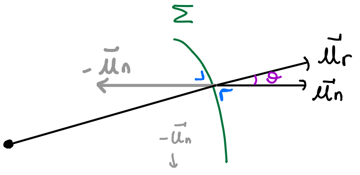
Calcoliamo il FLUSSO di un CAMPO attraverso una superficie

$\vec{E} = k\,q\,\frac{\vec{u}_r}{r^2}$ (se il campo ERA CREATO da una CARICA PUNTIFORME)

$$d\phi(\vec{E}) = \vec{E}\cdot\vec{u}_n\,d\Sigma = k\,q\,\frac{\vec{u}_r}{r^2}\cdot\vec{u}_n\,d\Sigma = k\,q\,\frac{\cos\theta\,d\Sigma}{r^2} = k\,q\,\frac{d\Sigma_0}{r^2} = k\,q\,d\Omega$$

$$d\Omega = \frac{\vec{u}_n\cdot\vec{u}_r\,d\Sigma}{r^2}$$

$\vec{u}_N \perp \Sigma$



$\vec{u}_r\,\vec{u}_n = -\cos\theta$

ES:

Se ho una SFERA UNIFORMEMENTE CARICA anziché un GUSCIO:

Si parla di densità volumica e non più di DENSITÀ SUPERFICIALE.

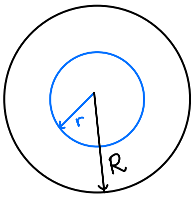
$$\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{sferica}}}{\phi_{\Sigma}}(\vec{E}) = 4\pi r^2 E(r)$$

r > R

$$E(r>R) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$$

r < R

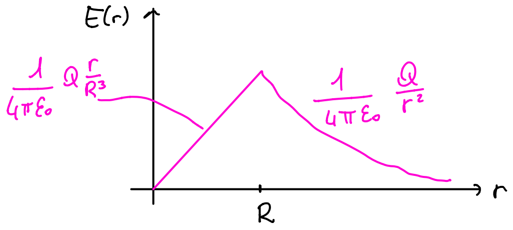


$$Q(\Sigma, r<R) = \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \rho = \cancel{\frac{4}{3}}\cancel{\pi} r^3 \cdot \frac{Q}{\cancel{\frac{4}{3}}\cancel{\pi} R^3} = Q\frac{r^3}{R^3}$$

Applichiamo GAUSS:

$$\phi_{\Sigma}(\vec{E}) = 4\pi r^2 E(r) = \frac{Q}{\varepsilon_0}\frac{r^3}{R^3}$$

$$\begin{cases} E(r<R) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{r}{R^3} = E_{int}(r) \\ E(r>R) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r^2} = E_{ext}(r) \end{cases}$$



$$E_{int}(r=R) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R}{r^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2}$$

$$E_{ext}(r=R) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2}$$

MATERIALI ISOLANTI: o DIELETRICI, dove non ci sono CARICHE libere che si possono muovere

MATERIALI CONDUTTORI: formato da un reticolo cristallino positivo con degli elettroni che si possono muovere liberamente, come Rame, Ferro e Argento

Densita' $\left[\frac{kg}{m^3}\right]$

$$n = N_A \frac{\rho}{A}$$

numero di massa

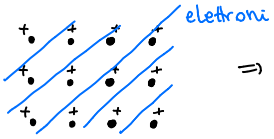
N_A: $6,022 \cdot 10^{23} \frac{g\,atomo}{g}$; $6,022 \cdot 10^{26} \frac{kg\,atomo}{kg}$

$\rho_{Cu} = 8,96 \cdot 10^3 \frac{kg}{m^3}$; $A_{Cu} = 63,55$

$\Downarrow$

$n = 5,86 \cdot 10^{28} \frac{atomi}{m^3}$

MODELLO a GAS di ELETTRONI PER un CONDUTTORE: (MARE di ELETTRONI o MODELLO di FERMI)



⇒ SISTEMA NEUTRO fino a quando non si applicano FORZE esterne gli elettroni si possono muovere a caso, ma NON possono uscire dal conduttore.

① In un CONDUTTORE in condizioni di EQUILIBRIO NON si ha FLUSSO netto di elettroni, inoltre IL $\underbrace{\text{CAMPO ELETTRICO MACROSCOPICO}}$ È NULLO! $\vec{E} = 0$

valor medio del campo elettrico, calcolato su una regione piccola.

$\vec{F} = -e \cdot \vec{E}$ (forza che si genera sull'elettrone)

si genera quindi una accelerazione : $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{e}{m}\vec{E}$

Se IL conduttore e' in EQUILIBRIO ELETTROSTATICO:

$\underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho}$ $\overset{\text{se } \vec{E} = 0}{\Rightarrow}$ $\rho = \varepsilon_0 (\vec{\nabla}\vec{E})$ ⇒ $\boxed{\rho = 0}$ in CONDIZIONI di EQUILIBRIO

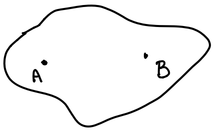
QUANTITA' MEDIE MACROSCOPICHE $(\rho, \vec{E})$

$\Downarrow$

ALL'INTERNO DEL CONDUTTORE NON ESISTE una DENSITA' di CARICA

LA CARICA va sulla SUPERFICIE

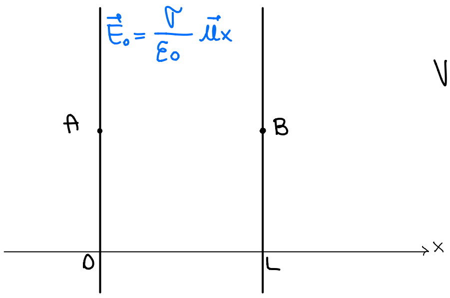
② Un conduttore in condizioni di EQ. ELETTROSTATICO e' EQUIPOTENZIALE:



$$V(A) - V(B) = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Se $\forall P \in$ CONDUTTORE $\vec{E}(P) = 0 \Rightarrow V(A) - V(B) = 0 \Rightarrow V(A) = V(B)$

- **PRIMA :**

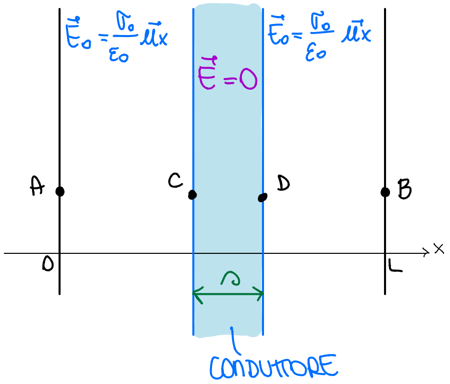


$$V(A)-V(B)=\int_A^B \vec{E}_0\cdot d\vec{r} = \int_A^B\left(\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\vec{u}_x\right)\left(\vec{u}_x\,dx+\vec{u}_y\,dy+\vec{u}_z\,dz\right)=$$

$$=\int_0^L \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\,dx = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\cdot L$$

$\Rightarrow V(A)-V(B)=\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\cdot L$ ← TENSIONE A VUOTO

- **DOPO :**



$$V(A)-V(B)=V(A)-V(C)+\underbrace{V(C)-V(D)}_{=0}+V(D)-V(B)=$$

perche' $\vec{E}=0$

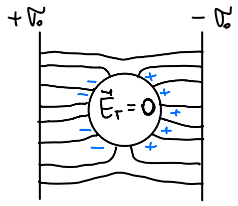
$$=V(A)-V(C)+V(D)-V(B)=\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\cdot\overline{AC}+\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\cdot\overline{DB}$$

$$\Rightarrow V(A)-V(B)=\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\cdot(L-s)$$

Quando abbiamo un sistema isolato ed introduciamo all' interno il CONDUTTORE, la differenza di potenziale CAMBIA.

IL CAMPO INVECE RIMANE uniforme dove non c' e' la lastra, questo pero' dipende dalla geometria del conduttore e dal fatto che e' NEUTRO ⇒ quando lo inseriamo dopo un po' avremo uno stato di equilibrio sulla sua superficie che vale $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

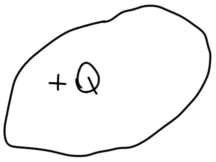
- **Se il CONDUTTORE non ha una FORMA regolare :**



⇒ questo conduttore SCARICO, MODIFICA IL campo ELETTRICO!

La sup. del conduttore e' SEMPRE EQUIPOTENZIALE ⇒ $\vec{E}\perp\Sigma$

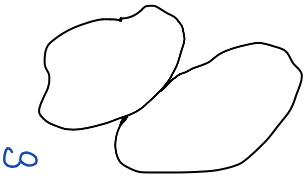
- **Se abbiamo un CONDUTTORE CARICO ed uno SCARICO :**



+

$\xrightarrow{\text{messi a contatto}}$

formano un CONDUTTORE UNICO



⇒ HANNO LO STESSO POTENZIALE

↓

La CARICA Q si distribuisce sui due

$$\Rightarrow \begin{cases} Q_1 = \dfrac{R_1}{R_1+R_2}\, q \\[2mm] Q_2 = \dfrac{R_2}{R_1+R_2}\, q \end{cases}$$

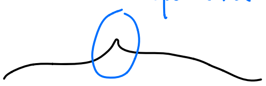
$$E_1 = k\,\frac{Q_1}{R_1^2} = \frac{k}{R_1^2}\,\frac{R_1}{R_1+R_2}\,q = k\,\frac{q}{R_1(R_1+R_2)}$$

$$E_2 = k\,\frac{Q_2}{R_2^2} = k\,\frac{q}{R_2(R_1+R_2)}$$

⇒ Questi sono i valori del campo quando raggiungiamo l'EQUILIBRIO

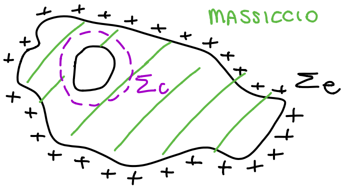
⇒ **IL CAMPO e' MAGGIORE sulla SFERA con il RAGGIO PIU' PICCOLO!**

$R_1 < R_2 \Rightarrow E_1 > E_2$ → **EFFETTO PUNTE!**



questa zona ha un campo maggiore perche' presenta un raggio di curvatura piccolo ⇒ le ASPERITA' SUPERFICIALI hanno campi piu' grandi

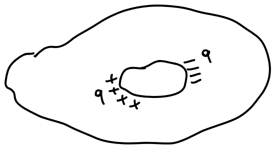
- **Se il CONDUTTORE ha un BUCO:** Viene lanciata una carica, dove si disporra' sulla superficie?



Σ_c: superficie del CONDUTTORE ⇒ $\forall P \in \Sigma_c \Rightarrow \vec{E} = 0$

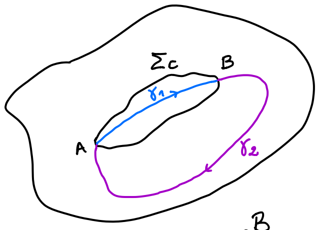
APPLICHIAMO GAUSS: $\oint_\Sigma \vec{E}\,\vec{u}_n\, d\Sigma = \dfrac{\boxed{Q(\Sigma)=0}}{\varepsilon_0} = 0$

⇒ Se $Q(\Sigma_c) = 0$ vuol dire che le cariche sono distribuite così:



→ MA QUESTO NON PUO' CAPITARE per questo motivo:

? $q_+ = q_- = 0$? e' POSSIBILE ? ?



$$\gamma = \overset{\overset{\text{nella cavita'}}{\nearrow}}{\gamma_1} + \gamma_2 \longrightarrow \text{nel conduttore}$$

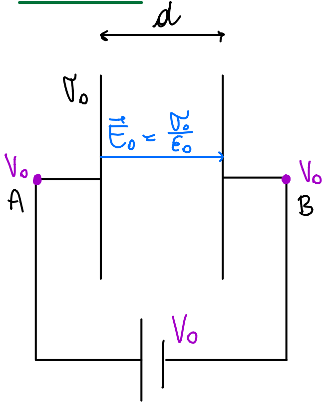
Ipotesi: γ_1 e' una linea di campo ELETTRICO nella CAVITA'

$$\oint_{\gamma=\gamma_1+\gamma_2} \vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_{A,\gamma_1}^{B} \vec{E}\, d\vec{r}_1 + \underbrace{\int_{B,\gamma_2}^{A} \vec{E}\, d\vec{r}_2}_{\substack{||| \\ 0 \text{ perche' } \forall P \in \gamma_2,\ \vec{E}=0}} = \boxed{\int_{A,\gamma_1}^{B} \vec{E}\, d\vec{r} > 0} \overset{\text{perche'}}{\longrightarrow} \forall P \in \gamma_1,\ \vec{E} \parallel d\vec{r}$$

ASSURDO perche' $\vec{E}$ e' CONSERVATIVO! $\Rightarrow \oint_\gamma \vec{E}\, d\vec{r} = 0$!

CONDENSATORE COLLEGATO ad un GENERATORE:

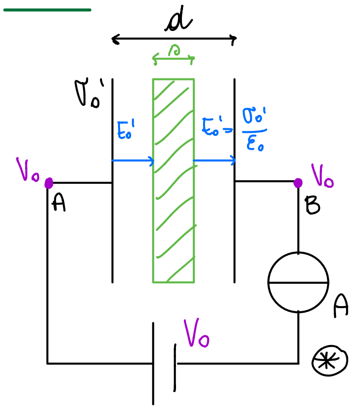
- **PRIMA:**



$\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \cdot d = V_0$ → TENSIONE A VUOTO

$$\sigma_0 = \varepsilon_0 \frac{V_0}{d}$$

DOPO: (con CONDUTTORE all' interno del CONDENSATORE)



σ_0' = DENSITA' di CARICA dopo l' introduzione del CONDUTTORE

$$V_0 = \frac{\sigma_0'}{\varepsilon_0} \cdot (d - s)$$

$$\sigma_0' = \varepsilon_0 \frac{V_0}{d-s} = \underbrace{\varepsilon_0 \frac{V_0}{d}} \frac{d}{d-s}$$

σ_0 prima di inserire il CONDUTTORE

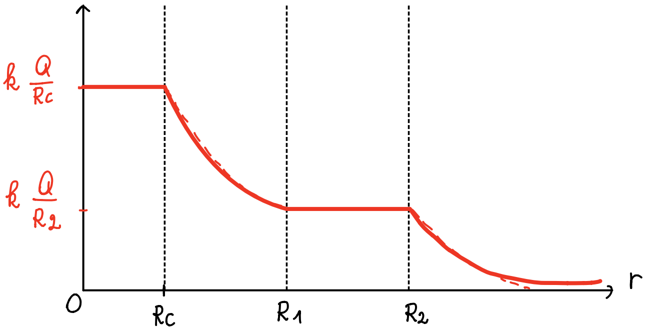
$$\Rightarrow \sigma_0' = \sigma_0 \cdot \frac{1}{1 - \frac{s}{d}}$$

$$Q = (\sigma_0' - \sigma_0)\Sigma = \sigma_0 \left(\frac{1}{1 - \frac{s}{d}} - 1 \right) \Sigma = \sigma_0 \, \Sigma \left(\frac{\frac{s}{d}}{1 - \frac{s}{d}} \right)$$

→ CARICA che il generatore deve mandare sul condensatore per fissare la DIFFERENZA di POTENZIALE a V_0

⊛ Avendo il conduttore all' interno, sull' armatura del condensatore si devono formare delle CARICHE, POSIZIONANDO l' AMPEROMETRO (A) troverò il valore della corrente che passa per FISSARE la differenza di potenziale su A e B.

- Quando si inserisce un CONDUTTORE all' interno di un CONDENSATORE ISOLATO, si osserva una diminuzione della differenza di POTENZIALE.
- Quando si inserisce un CONDUTTORE all' interno di un CONDENSATORE <u>NON</u> ISOLATO, il generatore manda delle cariche per fissare la differenza di POTENZIALE desiderata.



$$V = V_1 - V_2 = kQ\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \longrightarrow \frac{Q}{V} = \frac{1}{k}\frac{R_2 R_1}{R_2 - R_1} = 4\pi\varepsilon_0\frac{R_2 R_1}{R_2 - R_1}$$

$C = \frac{Q}{V}$ = **CAPACITA'**: rapporto tra la carica e la DIFFERENZA di POTENZIALE tra i capi dei due CONDUTTORI in REGIME di INDUZIONE COMPLETA.

$$[C] = \frac{C}{V} = \text{Farad}$$

$$\boxed{C = 4\pi\varepsilon_0\frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \quad \text{Capacita' per il CONDENSATORE SFERICO}}$$

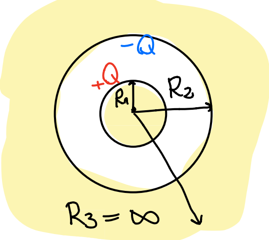
- Se $\boxed{R_2 \to \infty}$ $\Rightarrow C = 4\pi\varepsilon_0 R_1$
- Se $\boxed{R_1 \simeq R_2}$ $\Rightarrow C = 4\pi\varepsilon_0\frac{R^2}{h} = \varepsilon_0\frac{\Sigma}{h}$ ← costante $\quad \Sigma = 4\pi R^2$: sup. della sfera

Per CARICARE un CONDENSATORE si DEVE spendere dell'energia e questa si ritrova sottoforma di EN. POTENZIALE nel condensatore.

$$\boxed{U = \frac{1}{2}CV^2 \quad , \quad U = \frac{1}{2}QV \quad , \quad U = \frac{Q^2}{2C}}$$

SEMPRE PER OGNI CONDENSATORE

- CALCOLARE L'ENERGIA IMMAGAZZINATA IN UN CONDENSATORE SFERICO:

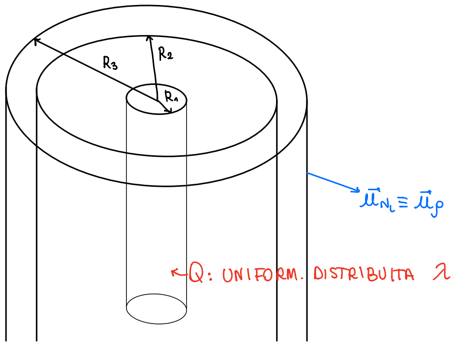


$$\vec{E}(r) = \begin{cases} 0 & \text{se } r < R_1 \\ k\frac{Q}{r^2}\hat{u}_r & \text{se } R_1 < r < R_2 \\ 0 & \text{se } r > R_2 \end{cases}$$

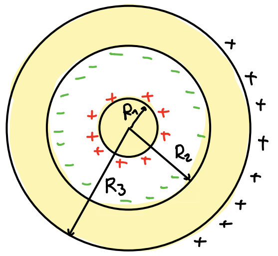
$$\boxed{u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2} = \text{DENSITA' di ENERGIA ELETTRICA}$$

$$\|$$

CONDENSATORE CILINDRICO:



VISTO DALL'ALTO

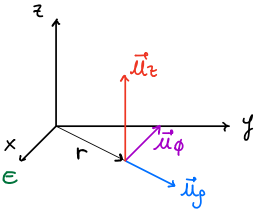


$\vec{E}(r < R_1) = 0$

$\vec{E}(R_1 < r < R_2) \neq 0$

$\vec{E}(R_2 < r < R_3) = 0$

$\vec{E}(r > R_3) \neq 0$



Abbiamo una simmetria cilindrica quindi useremo il sist. di riferimento cilindrico. HA $\vec{E} = E(r)\vec{u}_\rho$ perche' e' UNIFORME

$$\oint \vec{E}\cdot\vec{u}_N\, d\Sigma = \int_{A_S} \underset{\overset{\parallel}{0}}{\vec{E}\cdot\vec{u}_{N_S}}\, d\Sigma + \int_{A_i} \underset{\overset{\parallel}{0}}{\vec{E}\cdot\vec{u}_{N_i}}\, d\Sigma + \int_{\Sigma_\ell} \vec{E}\cdot\vec{u}_{N_L}\, d\Sigma = \int_{\Sigma_\ell} E(r)\,\vec{u}_\rho\,\vec{u}_\rho\, d\Sigma =$$

$$= \oint \vec{E}\cdot\vec{u}_N\, d\Sigma = E(r)\int_{\Sigma_L} d\Sigma = 2\pi r L\cdot E(r)$$

$$Q(\Sigma) = \lambda L$$

- Se $\boxed{R_1 < r < R_2}$: $2\pi r \cancel{L}\, E(r) = \frac{\lambda \cancel{L}}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E(r) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r}}$

Vogliamo calcolare il POTENZIALE tra l'elettrodo interno ed esterno:

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\vec{u}_\rho \longrightarrow V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\, d\vec{r} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

$V = V_1 - V_2$ → per trovare la CAPACITA' $= \frac{Q}{V}$ dobbiamo $\frac{L}{L}$ perche' dobbiamo ricondurci alla CARICA, dato che abbiamo λ.

$$V = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\log\frac{R_2}{R_1}\cdot\frac{L}{L} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L}\log\frac{R_2}{R_1}$$

$$\boxed{C = \frac{Q}{V} = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\log\frac{R_2}{R_1}}}$$ → CAPACITA' di un CONDENSATORE CILINDRICO

- Se $\boxed{R_2 = R_1 + d} \Rightarrow R_2 \simeq R_1$

$\log(1+\varepsilon) \simeq \varepsilon$

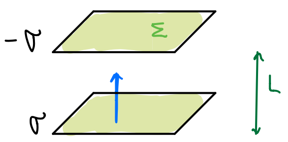
$$C = 2\pi\varepsilon_0 L\frac{1}{\log\frac{R_2}{R_1}} = 2\pi\varepsilon_0\frac{L}{\log\left(1+\frac{d}{R_1}\right)} \overset{\downarrow}{\simeq} 2\pi\varepsilon_0\frac{L}{\frac{d}{R_1}} = 2\pi\varepsilon_0 L\frac{R_1}{d}$$

$$\boxed{C = \varepsilon_0\frac{\Sigma_L}{d}} \qquad \Sigma_L = 2\pi L R_1$$

MA Qui ABBIAMO $\frac{1}{2}$ perché il potenziale e' CREATO dalla CARICA STESSA e NON dall'esterno)

$U = qV$ (quando prendiamo una carica e la mettiamo dove c'è un potenziale la carica prende un' energia potenziale qV) **POT. ESTERNO**

ENERGIA ELETTRICA di un CONDENSATORE PIANO:



$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u}$ (UNIFORME)

$U = \frac{1}{2} C V^2$ $\qquad C = \varepsilon_0 \frac{\Sigma}{L}$

"Σ molto grande in modo che siano TRASCURABILI gli EFFETTI di BORDO"

$$U = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{\Sigma}{L} V^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \Sigma L \left(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{campo}}}{\frac{V}{L}}\right)^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \underbrace{\Sigma L}_{\text{Volume}:\ \tau} E^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \tau$$

$$\begin{cases} m = \overset{\substack{\text{Densità uniforme di massa} \\ \uparrow}}{\rho}\, \tau \\ U = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \tau \end{cases} \rightarrow \boxed{U = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2}$$

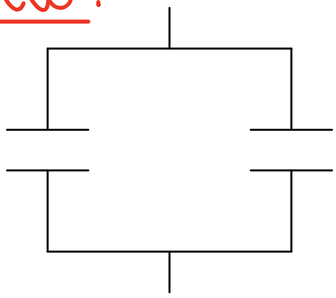
= DENSITA' di ENERGIA ELETTRICA

↓

QUESTA FORMULA VALE SEMPRE

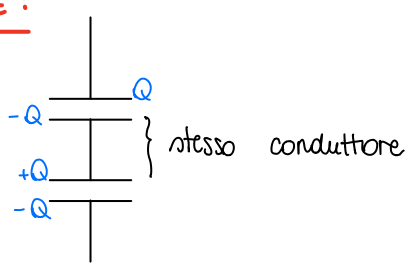
QUANDO ABBIAMO PIU' CONDENSATORI:

- PARALLELO:



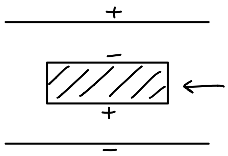
Devono avere la STESSA DIFFERENZA di POTENZIALE TRA gli ELETTRODI

- SERIE:



Hanno la stessa carica sulle armature DEGLI ELETTRODI

"



← CONDUTTORE all' interno di un CONDENSATORE "

$$\Rightarrow (C_1 + C_2)V = C_1 V_{10} + C_2 V_{20} \quad \Rightarrow \quad V = \frac{C_1 V_{10} + C_2 V_{20}}{C_1 + C_2}$$

$$Q_1 = C_1 \cdot V = \frac{C_1}{C_1 + C_2}\left(C_1 V_{10} + C_2 V_{20}\right)$$

$$Q_2 = C_2 \cdot V = \frac{C_2}{C_1 + C_2}\left(C_1 V_{10} + C_2 V_{20}\right)$$

$$\delta q_1 = Q_1 - Q_{10} \qquad \delta q_2 = Q_2 - Q_{20}$$

$\delta q_1 + \delta q_2 = 0$ (CONSERVAZIONE DELLA CARICA)

- Quanto vale l'energia iniziale? $U = \frac{1}{2} C V^2$

$$U_{10} = \frac{1}{2} C_1 V_{10}^2 \qquad U_{20} = \frac{1}{2} C_2 V_{20}^2 \qquad U_0 = U_{10} + U_{20} = \frac{1}{2}\left(C_1 V_{10}^2 + C_2 V_{20}^2\right)$$

- Quanto vale l'energia finale?

$$U_{1f} = \frac{1}{2} C_1 V^2 \qquad U_{2f} = \frac{1}{2} C_2 V^2 \qquad U_f = U_{1f} + U_{2f} = \frac{1}{2} V^2 (C_1 + C_2)$$

$$U_f - U_0 = \frac{1}{2}(C_1 + C_2)\left(\frac{C_1 V_{10} + C_2 V_{20}}{C_1 + C_2}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(C_1 V_{10}^2 + C_2 V_{20}^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{(C_1 V_{10} + C_2 V_{20})^2}{C_1 + C_2} - C_1 V_{10}^2 - C_2 V_{20}^2\right\} =$$

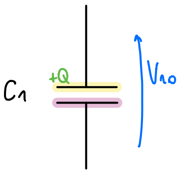
$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{\cancel{C_1^2 V_{10}^2} + \cancel{C_2^2 V_{20}^2} + 2 C_1 C_2 V_{10} V_{20} - \cancel{C_1^2 V_{10}^2} - C_2 C_1 V_{10}^2 - \cancel{C_2^2 V_{20}^2} - C_1 C_2 V_{20}^2}{C_1 + C_2}\right\} =$$

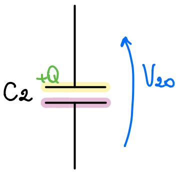
$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}\left(2 V_{10} V_{20} - V_{10}^2 - V_{20}^2\right)\right\}$$

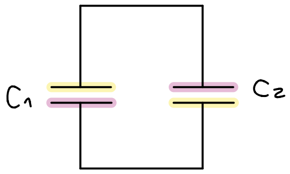
$$\boxed{\Delta U = -\frac{1}{2}\frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}(V_{10} - V_{20})^2}$$

ESERCIZIO ESAME:

Colleghiamo la + con la −



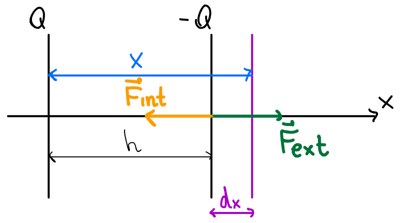




← Alla fine gli elettrodi sono in EQUILIBRIO e sono allo stesso potenziale ⇒ formano SEMPRE un SISTEMA IN PARALLELO

CALCOLO DELLA FORZA CON L'ENERGIA: (METODO DEI LAVORI VIRTUALI)

IL SISTEMA e' ISOLATO $\Rightarrow$ Q NON CAMBIA



Qual e' il LAVORO che DEVO fare per spostare l'elettrodo negativo di una quantita' dx?

Q non CAMBIA, MA V cambia se sposto l'elettrodo

$C = \varepsilon_0 \frac{\Sigma}{x}$ (perche' il condensatore e' PIANO)

$$dW_{ext} = dU$$

$$U = \frac{Q^2}{2C}$$

$$U = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0\Sigma}\cdot x$$

$$dU = d\left(\frac{Q^2}{2\varepsilon_0\Sigma}\cdot x\right) = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0\Sigma}dx$$

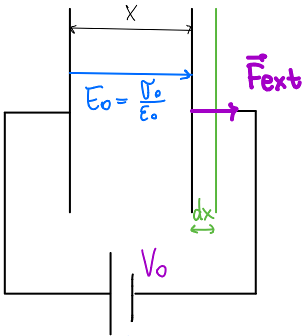
$$dW_{ext} = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0\Sigma}\cancel{dx} = F_{ext}\cdot\cancel{dx} \quad\Rightarrow\quad F_{ext} = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0\Sigma}$$

$$\vec F_{int} = -\vec F_{ext} = -\frac{Q^2}{2\varepsilon_0\Sigma}$$

$$\vec F_{int} = -\Sigma\frac{1}{2\varepsilon_0}\boxed{\frac{Q^2}{\Sigma^2}} \rightarrow \text{DENSITÀ di CARICA } \sigma = -\Sigma\frac{1}{2\varepsilon_0}\sigma^2 = -\Sigma\frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\right)^2 = -\Sigma\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

$$\boxed{\frac{\vec F}{\Sigma} = -\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2}$$

SISTEMA NON ISOLATO:



BATTERIA che FISSA la ΔV
GENERATORE

V_0 = Differenza di POTENZIALE FISSATA dal GENERATORE

Vogliamo spostare l'armatura di dx, ma V_0 rimane SEMPRE uguale perche' il generatore la FISSA

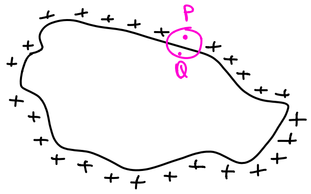
$\boxed{dW_{ext} = dU}$ ← Questo vale sempre!

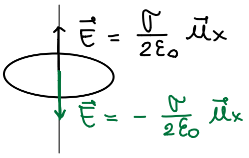
- La CARICA RIMANE COSTANTE? NO

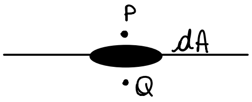
$Q = C\overbrace{V_0}^{\text{sempre costante}}$ $\qquad C = \varepsilon_0\frac{\Sigma}{x} = C(x)$ ← COND. PIANO

$Q(x) = C(x)V_0 \rightarrow$ se $x \rightarrow x + dx \Rightarrow Q(x) \rightarrow Q(x+dx) = Q(x) + dQ$

PRESSIONE ELETTROSTATICA:







LA FORZA ESERCITATA sull' AREOLA dA e' quella DOVUTA da tutto il resto del CONDUTTORE

$\vec{E}_{A-dA}$ = CAMPO che AGISCE su dA

$$\begin{cases} \vec{E}(P) = \vec{E}_{dA}(P) + \vec{E}_{A-dA}(P) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u}_N \\ \vec{E}(Q) = \vec{E}_{dA}(Q) + \vec{E}_{A-dA}(Q) = 0 \end{cases}$$

DAL TH. di COULOMB

PRINCIPIO di SOVRAPPOSIZIONE

chiedere se e' solo la zona che non contiene l'areola

$$\begin{cases} \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u}_N = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u}_N + \vec{E}_{A-dA}(P) \\ 0 = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u}_N + \vec{E}_{A-dA}(Q) \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} \vec{E}_{A-dA}(P) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u}_N \\ \hline \vec{E}_{A-dA}(Q) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u}_N \end{array}}$$

PASSANDO da DENTRO a FUORI su tutta la superficie del CONDUTTORE, IL CAMPO e' CONTINUO

$$\Delta\vec{F} = \Delta Q \cdot \vec{E}_{A-dA} = \sigma\Delta A \cdot \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u}_N$$ ← FORZA che FA AUMENTARE IL CORPO

$$\boxed{\frac{\Delta\vec{F}}{\Delta A} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\vec{u}_N = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \vec{u}_N}$$

PRESSIONE ELETTROSTATICO di UN CONDUTTORE

DIELETTRICI in PRESENZA di UN CAMPO ESTERNO: