NUMERO: **2507A** ANNO: 2021

A P P U N T I

STUDENTE: Palma Carlo

MATERIA: Statistica - Prof. Vicario

CALCOLO COMBINATORIO

PERMUTAZIONE: Dati n elementi, ogni gruppo formato da n elementi che differisce dagli altri solo per l'ordine

SENZA RIPETIZIONE: $P_n = n!$

CON RIPETIZIONE: $P_n^{(k,h)} = n! / k! \cdot h!$ dove k, h sono gli elementi che si ripetono

DISPOSIZIONE: Dati n elementi e un numero $k \leq n$, ogni gruppo che contiene k elementi che differisce dagli altri per l'ordine degli elementi o per gli elementi stessi

SENZA RIPETIZIONE: $D_{n,k} = n \cdot (n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = n! / (n-k)!$

CON RIPETIZIONE: $D'_{n,k} = n^k$

COMBINAZIONE: Dati n elementi e un numero $k \leq n$, ogni gruppo che contiene k elementi che differisce solo per gli elementi stessi da altri gruppi
Non conta né l'ordine né le posizione

SENZA RIPETIZIONE: $C_{n,k} = \dfrac{D_{n,k}}{P_k} = \dfrac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

CON RIPETIZIONE: $C'_{n,k} = C_{n+k-1,k} = \dfrac{(n+k-1)(n+k-2) \cdot \ldots \cdot (n+1) \cdot n}{k!}$

$$P[A_k] = \binom{n}{k} \frac{K^k (M-K)^{n-k}}{M^n} = \quad \text{con } M^n = M^k \cdot M^{n-k}$$

$$= \binom{n}{k} \left(\frac{K}{M}\right)^k \left(1 - \frac{K}{M}\right)^{n-k}$$

CON REIMMISSIONE (Distr. BINOMIALE)

$$P[A_k] = \frac{\binom{K}{k}\binom{M-K}{n-k}}{\binom{M}{n}}$$

M = n° totale elementi
K = n° totale difettosi
n = n° elementi totali del campione
k = n° elementi difettosi del campione

SENZA REIMMISSIONE (Distr. IPERGEOMETRICA)

Assiomi di Kolmogoroff (scuola russa!!)

$P[\cdot]: \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$

Una funzione di probabilità P è una funzione d'insieme che ha come dominio lo spazio degli eventi e come codominio l'intervallo $[0, 1]$ e che soddisfa i seguenti assiomi:

1. $P[E] \geq 0$
2. $P[S] = 1$
3. se $E_1, E_2, \dots, E_n$ sono eventi incompatibili (opp $E_1 E_2$ {oppure $E_1 \cap E_2$} $= \emptyset$) cioè $E_i E_j = \emptyset$ con $i \neq j \wedge i, j = 1, 2, 3, 4, \dots, n$ e se $E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \dots \cup E_n = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ allora

$$P\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right] = \sum_{i=1}^{\infty} P[E_i]$$

Conseguenze Assiomi di Kolmogoroff

A) $P[\bar{E}] = 1 - P[E]$

B) $P[E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \dots \cup E_n] = \sum_{i=1}^{\infty} P[E_i]$ con E_1, E_2, E_3 eventi incompatibili

C) $P[E \cup F] = P[E] + P[F] - P[E \cap F]$

D) Se $F \subseteq E$: $P[F] \leq P[E]$

Probabilità Condizionata

Si definisce probabilità condizionata dell'evento E dato l'evento F il rapporto

$$P[E/F] = \frac{P[EF]}{P[F]}$$

$$P[F/E] = \frac{P[EF]}{P[E]} \Rightarrow P[EF] = P[F/E]\,P[E]$$

Formula della Probabilità Totale

$$P[F] = \sum_{i=1}^{n} P[F/E_i]\,P[E_i]$$

per $i > 2$

$$P[F] = P[F/E]\,P[E] + P[F/\bar{E}]\,P[\bar{E}]$$

$$P[F] = P(FE) + P(F\bar{E})$$

per $i = 2$

VARIABILE CASUALE $X(s)$

Associa ad un esito un numero   Testa = 1 croce = 0

⚀ = 1 ⚁ = 2 ⚂ = 3 ⚃ = 4 ⚄ = 5 ⚅ = 6

È una funzione avente come dominio lo spazio dei campioni S e come codominio la retta reale, fissato che sia lo spazio di probabilità

Per VARIABILE CASUALE si intende una funzione che stabilisce una corrispondenza tra elementi dell'insieme considerato e numeri reali

Esempio 1.1: $X(s)$ = variabile casuale che conta le croci nel lancio di monete

$$X(s) = \begin{cases} 0 & \text{se } s = \text{testa} \\ 1 & \text{se } s = \text{croce} \end{cases}$$

N.B. Se il n° elementi del codominio è finito o comunque sia numerabile la variabile è DISCRETA

Se il n° elementi del codom. è infinito la var. è CONTINUA

Esempio 1.2: $X(i,j) = i+j$ $\forall\, i,j \in S$ avendo conteggiato la somma nel lancio di un dado

Esempio 1.3: $X(i,j)$ associa il massimo punteggio nel lancio di 2 dadi

$$X(i,j) = \max(i,j) \quad \forall\, i,j \in S$$

RICORDA: Si usano le MAIUSCOLE per indicare le variabili casuali! Con le minuscole si indicano i valori assunti dalle v.c.

FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE CUMULATIVA

Descrive la cumulata delle probabilità che un dato evento indicato sull'asse y si verifichi

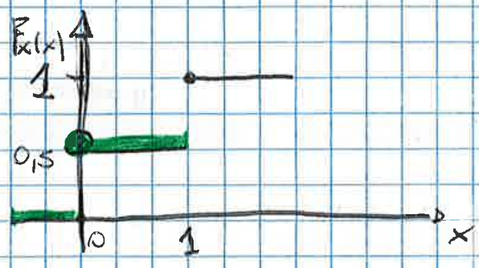
È la funzione che ha per dominio l'asse reale e per codominio l'intervallo $[0,1]$, così definita:

$$F_X(x) = P(X \le x) = P[s : X(s) \le x]$$

la probabilità dell'evento che tutti i punti campione s tali per cui le loro immagine mediante la variabile casuale X ($X(s)$) sia minore stretto di x

Esempio 2.1 $F_X(x)$ relativa all'esito del lancio di una moneta la cui variabile casuale X è definita nell'esempio 1.1

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1/2 & \text{se } 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{se } x \ge 1 \end{cases}$$



PROPRIETÀ DELLA FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE CUMULATIVA

La FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE CUMULATIVA vale sia per le variabili casuali continue sia per le variabili casuali discrete

1) $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ e $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$ → la cumulata in punti infiniti di $x_j < \infty$ è nulla; la cumulata in punti $x_j > \infty + \infty$ è sempre 1

2) dati $x_1, x_2 \,//\, x_1 < x_2 \rightarrow F_X(x_1) \le F_X(x_2)$ → la cumulata è una funzione monotona non decrescente

3) $\lim_{h \to 0^+} F_X(x+h) = F_X(x)$ → la cumulata è continua da destra

Teorema e Formule tra Funzione Discreta e Cumulata

$$F_x(x) = \sum_{j:\, x_j \le x} f_x(x_j)$$

la cumulata è la sommatoria di tutte le funzioni discrete nei diversi punti messe

$$f_x(x) = \begin{cases} F_x(x_j) - \lim_{h \to 0^+} F_x(x_j - h) & \text{se } x = x_j \\ 0 & \forall x \ne x_j \end{cases}$$

la funzione discreta V_j si ottiene sottraendo alla cumulata di quel punto messa la cumulata ottenuta nel punto messo precedente di un punto messe

$$P[a < X \le b] = \sum_{j:\, a < x_j \le b} f_x(x_j) \quad \text{con } a < b$$

la probabilità che la variabile casuale x sia compresa fra a e b è uguale alla sommatoria delle funzioni discrete tali per tutti cui x_j sia compreso fra a e b

$\Downarrow$

$$P[a < X \le b] = F_x(b) - F_x(a) \quad \text{con } a < b$$

la probabilità "di sopra" si può anche vedere come la differenza tra la cumulata di x_j in B e la cumulata di x_j in a

Funzione di Densità di Probabilità: Se X variabile casuale è Continua

$$F_x(x) = \int_{-\infty}^{x} f_x(u)\, du$$

dove f_x è la funzione di densità di probabilità se X è continua

$$\int_{-\infty}^{x} f_x(u)\, du$$

Si definisce funzione di densità di probabilità quella funzione, se esiste, tale per cui il suo integrale definito tra $-\infty$ e x ~~uguale~~ da la cumulata nel punto x

Proprietà $f_x(x) : R \to R^+$

1) $f_x(x) \ge 0 \quad \forall x \in R$

2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f_x(x)\, dx = 1$

Differenza tra Funzione di Densità Discreta e Continua

Mentre per la funzione discreta ogni punto sull'asse x aveva una probabilità diversa da 0 (zero), per la funzione di densità continua il punto esatto dell'asse x ~~non~~ ha probabilità nulla (è come se fosse la differenza tra l'area a sinistra del punto x e se stesso!)

Teoremi e Formule tra Funzione di Densità di Probabilità e Cumulata

$$P[a < X < b] = \int_a^b f_x(x)\, dx \; \left[= F_x(b) - F_x(a) \right]$$

RICORDA:

Ogni volta che troviamo l'integrale

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda x}\, dx = \frac{1}{\lambda} \underbrace{\int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x}\, dx}_{1} = \frac{1}{\lambda}$$

FORMULA PER CALCOLARE LA MEDIA CONOSCENDO LA CUMULATA

$$E[X] = \int_0^{\infty} (1 - F_x(x))\, dx - \int_{-\infty}^{0} F_x(x)\, dx$$ dove $F_x(x)$ è la cumulata

VARIANZA E DEVIAZIONE STANDARD (detta anche SCARTO QUADRATICO MEDIO)

Misurano la variazione o dispersione di X

VARIANZA: $Var[X]$ oppure σ_x^2

$$Var[X] = \sum_{x_j} (x_j - \mu_x)^2 f_x(x_j) \quad \text{se } X \text{ è discreta}$$

$$Var[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_x)^2 f_x(x)\, dx \quad \text{se } X \text{ è continua}$$

dove μ_x è la media

SCARTO QUADRATICO MEDIO oppure DEVIAZIONE STANDARD: $\sqrt{Var[X]}$ oppure σ_x

$$\sigma_x = \sqrt{Var[X]}$$

la DEVIAZIONE STANDARD è sempre positiva perché la VARIANZA è sempre positiva

$$Var[X] = \sum_{x_j} (x_j - \mu_x)^2 f_x(x_j)$$

~~Moltiplica~~ Si eleva al quadrato la differenza di un valore qualsiasi dalla media e moltiplica per la probabilità del valore qualsiasi; poi li somma tutti

N.B. La varianza corrisponde al momento di inerzia

lo scarto quadratico medio o deviazione standard corrisponde al raggio di inerzia.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55/B - Torino / Pagina 11 di 106

TEOREMA 1

$$var[a+bX] = b^2\, var[X]$$

N.B. le costanti che si moltiplicano per una variabile casuale "escono" dalla varianza, ma si elevano al quadrato

le costanti "senza" variabile casuale si annullano nel calcolo della varianza

TEOREMA 2

$$var[X] = E[X^2] - (E[X])^2$$

$$var[X] = E[(X - E(X))^2]$$

N.B. UTILISSIMA NEI CALCOLI

DISUGUAGLIANZA DI TCHEBYCHEFF

Sia X una variabile casuale e $g(X)$ una funzione non negativa

$$P[g(X) \geq K] \leq \frac{E[g(X)]}{K}$$ per ogni K positivo

COROLLARIO DELLA DISUGUAGLIANZA DI TCHEBYCHEFF

NOTO ANCHE COME DISUGUAGLIANZA DI BIENAYMÉ-TCHEBYCHEFF

Se X è una variabile casuale avente varianza finita si ha:

$$P[|X-\mu_x| \geq t\sigma_x] = P[(X-\mu_x)^2 \geq t^2\sigma_x^2] \leq \frac{1}{t^2}$$

oppure

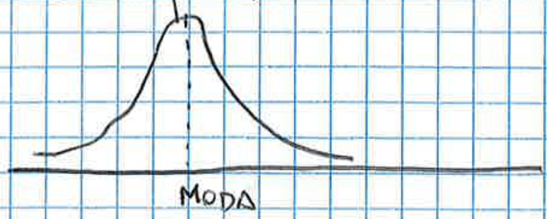
$$P[|X-\mu_x| < t\sigma_x] \geq 1 - \frac{1}{t^2}$$

La probabilità che la variabile casuale X si scosti dalla sua media μ_x per meno di t volte la sua deviazione standard non può essere inferiore a $\left(1 - \frac{1}{t^2}\right)$

In particolare, la probabilità che la variabile casuale X si scosti dalla sua media μ_x per un intervallo di semiampiezza pari a 2σ non può essere inferiore al 75% $\left(1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}\right)$

MODA

La MODA è quel valore sull'asse delle x a cui compete l'ordinata massima



ESCURSIONE o RANGE è la differenza fra valore massimo e il valore minimo

ESCURSIONE INTERQUARTILE: è la differenza $Q_3 - Q_1$ (quartile 3 - quartile 1) ovvero quel range che contiene il 50% dell'area ($Q_3 - Q_1 \to 75\% - 25\%$)

MOMENTO DI ORDINE n DI X

Data una funzione $g(X)$ tale che $g(X) = X^n$ il momento di ordine n di X indicato con μ_x' è la media di $[X^n]$

$$\mu_n' = E[X^n]$$

MOMENTO CENTRALE DI ORDINE n RISPETTO ALLA MEDIA μ_x

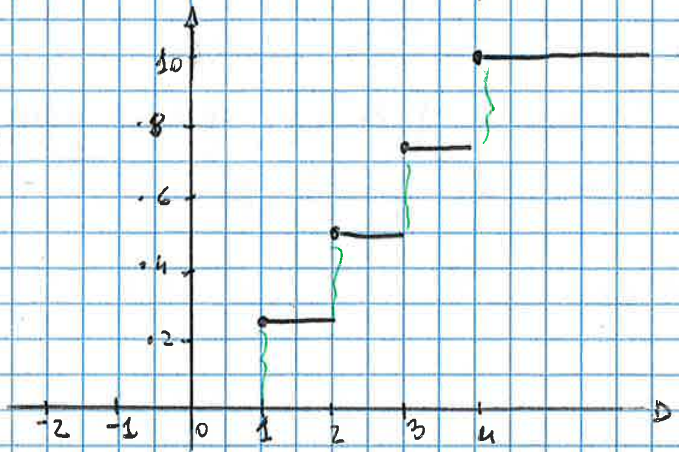
$$\mu_n = E[(X - \mu_x)^n]$$

TEORIA DELLA DISTRIBUZIONE UNIFORME DISCRETA

$$E[X] = \frac{N+1}{2} \qquad Var[X] = \frac{N^2-1}{12}$$

FUN CUMULATA DELLA DISTRIBUZIONE UNIFORME DISCRETA

$$F_x(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < 1 \\ j/N & \text{per } j \le x < j+1 \quad \text{con } j = 1, 2, \dots, N-1 \\ 1 & \text{per } x \ge N \end{cases}$$



RICORDA: L'ampiezza dei salti nella funzione cumulativa discreta rappresenta il valore della densità discreta (ovvero la probabilità!) nei punti masse.
In questo caso disegnato nel grafico ho una funzione di densità con 4 punti ognuno con la stessa probabilità visto che il salto è sempre uguale ovvero 1/4 = 0,25

DISTRIBUZIONE BINOMIALE : $f_X(x, n, p)$

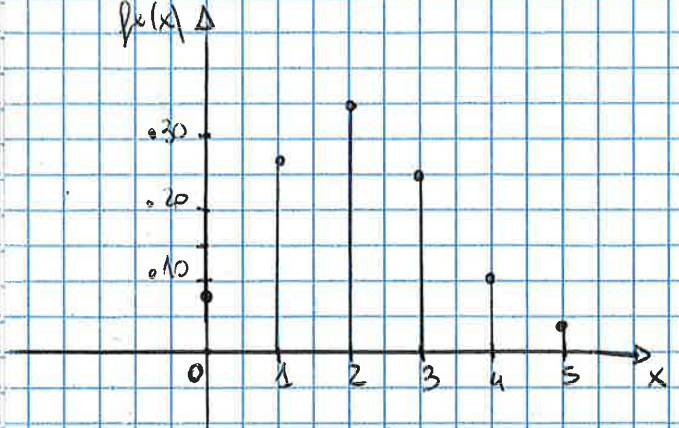
X = n° difettosi nel lotto
n = n° totale lotto
p = prob difettosità

$$f_X(x,n,p) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} & \text{con } x = 0, 1, 2, \dots, n \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

spesso $(1-p) = q$

con $n \in \mathbb{N}$, $0 < p < 1$ e $\binom{n}{x} = \frac{n!}{(n-x)!\,x!}$ (= COEFFICIENTE BINOMIALE)

Esempio: estrazioni con reimmissione, lancio ripetuto n volte di un dado



con $n = 5$ $p = 0,4$

Soddisfa le proprietà della funzione di densità discreta?

a) $f_X(x) \geq 0$ sì

b) $\sum_{x_j} f_X(x_j) = 1$?

$$\sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \left(= \text{formula potenza binomio} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a+b)^n \right.$$

$$(p + (1-p))^n = 1$$

TEOREMA DELLA DISTRIBUZIONE BINOMIALE

$$E[X] = np \qquad var[X] = np(1-p)$$

OSSERVAZIONE 1/2

1) La distribuzione di Bernoulli è un caso particolare di distribuzione binomiale. In particolare è il caso avente $n = 1$

2) ~~Rapp~~ La distribuzione binomiale rappresenta la ripetizione di n prove di Bernoulli indipendenti aventi come probabilità di successo (x) e come probabilità di insuccesso (n-x)

ENUNCIAZIONE DEL TEOREMA

$$\lim_{n \to \infty} P\left[\, | f_E - P[E] | < \varepsilon \,\right] = 1$$

In una serie di n prove, in ciascuna delle quali un evento ha probabilità p di verificarsi, la probabilità che la differenza tra la frequenza con cui l'evento si è manifestato e p sia, in valore assoluto, inferiore ad una quantità assegnata è inferiormente limitata e tende alla certezza con il crescere del numero n delle prove.

Questo è il TEOREMA DI BERNOULLI

N.B. Il teorema di Bernoulli <u>non dice</u> che la frequenza ha come limite la probabilità; dice invece che al crescere del n° delle prove la probabilità che lo scarto tra la frequenza e la probabilità si mantenga entro certi limiti tende all'unità.

Per esempio, nel lancio di un dado, se si considera l'evento "esce un n° pari", il teorema <u>non afferma</u> che la frequenza che esce un n° pari tende ad 1/2 all'aumentare delle giocate, ma <u>afferma</u> che la probabilità che la frequenza si mantenga nella striscia $\left(\frac{1}{2} - \varepsilon \,,\; \frac{1}{2} + \varepsilon\right)$ tende alla certezza al crescere del numero delle giocate, per qualsiasi valore assegnato a ε.

<u>In altre parole, il TEOREMA DI BERNOULLI afferma che al crescere delle giocate, la frequenza converge nella probabilità p.</u>

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55/B - Torino / Pagina 21 di 106

DISTRIBUZIONE DI POISSON

$$f_X(x;\lambda) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} & \text{per } x = 0, 1, 2, \dots, n, \dots \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$ n° infinito ma numerabile

con λ = parametro reale positivo

Soddisfa le proprietà della distribuzione discreta?

a) $f_X(x) \geq 0$ SI

b) $\sum_{x=0}^{\infty} f_X(x) = 1$ SI

TEOREMA DELLA DISTRIBUZIONE DI POISSON

$\mathbb{E}[X] = \lambda$ $\quad$ $var[X] = \lambda$

CUMULATA DELLA DISTRIBUZIONE DI POISSON

$$F_X(x,\lambda) = \sum_{K=0}^{x} f_X(K,\lambda)$$

APPROSSIMAZIONE DELLA DENSITÀ BINOMIALE MEDIANTE LA DENSITÀ DI POISSON

BINOMIALE : $f_X(x,n,p) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$

POISSON : $f_X(x,\lambda) = e^{-\lambda}\lambda^x$

Se n ~~cresce~~ tende all'infinito e p tende a zero ed $np = cost$, fissando $np = \lambda$, la distribuzione binomiale tende a quella di Poisson.

Possiamo affermare la stessa cosa avendo un numero n parecchio più grande del numero p

$$\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \cong e^{-\lambda}\lambda^x$$

se $n \to \infty$, $p \to 0$, $np = cost$, $\lambda = np$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55/B - Torino / Pagina 23 di 106

DISTRIBUZIONE DI POISSON TRONCATA IN ZERO

Spesso usiamo la distribuzione di Poisson quando è in atto un conteggio, ma di altrettanto spesso il conteggio parte da 1 e non da 0.
Allora potremmo considerare una distribuzione di Poisson senza considerare lo 0.

$$f_X(x,\lambda) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{(1-e^{-\lambda})\,x!} & \text{per } x = 1,2,3,\dots,n,\dots \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Sostanzialmente moltiplico la distribuzione di Poisson "classica" per un valore $K = \dfrac{1}{1-e^{-\lambda}}$ per fare in modo che la somma dei punti massa escludendo lo 0 dia per l'appunto 1

DISTRIBUZIONE DI POISSON CON VARIABILE CENSURATA

Altre volte può accadere che in un conteggio ci si ferma ad un valore K. Il "contatore" conta fino a K volte poi si ferma troncando per l'appunto tutte le prove che si sarebbero svolte dopo K (prove censurate).
Si fa pertanto ricorso ad una nuova distribuzione avente punti massa $x=0,1,2,\dots,K$
Nel punto $x=K$ si concentra tutta la massa avanzata ai punti massa $x=0,1,2,\dots,K-1$.
Pertanto la distribuzione sarà come la seguente:

$$f_X(x,\lambda) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} & \text{per } x=0,1,2,\dots,K-1 \\ 1-\displaystyle\sum_{x=0}^{K-1}\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} & \text{per } x=K \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

N.B. I processi di TRONCAMENTO IN ZERO e di CENSURA possono essere estesi in modo analogo ad altre distribuzioni discrete

DISTRIBUZIONE NORMALE o GAUSSIANA o DI LAPLACE o CURVA DEGLI ERRORI

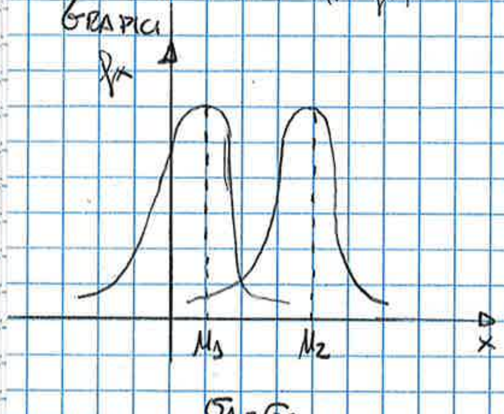
$$f_X(x,\mu,\sigma^2) = \varphi_{\mu,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\, e^{\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]}$$

(φ = fi)

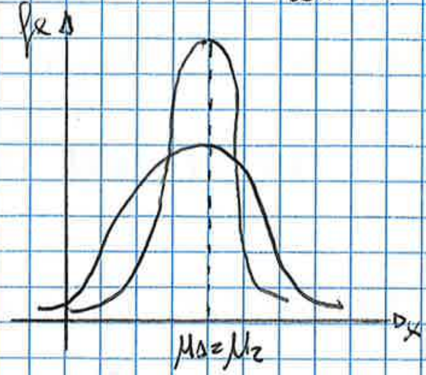
per $-\infty < x < +\infty$

con $-\infty < \mu < +\infty$, $\sigma > 0$

GRAPICI



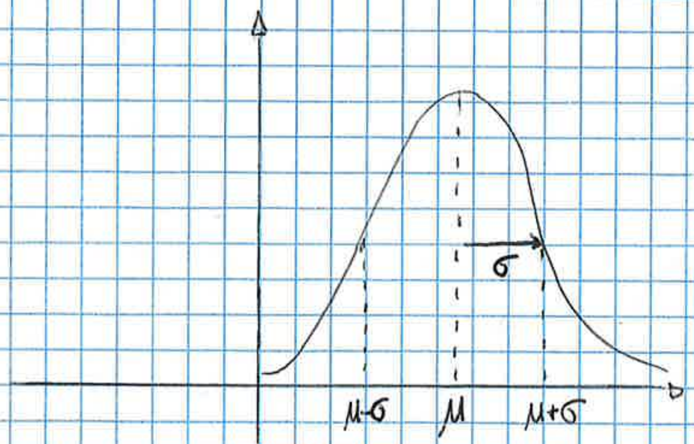
$\sigma_1 = \sigma_2$



$\sigma_1 \neq \sigma_2$

μ = sposta a destra o a sinistra la curva

σ = "schiaccia" o "allunga" la curva



- $x = \mu$ è la moda
- $x = \mu$ è la mediana
- due punti di flesso in $x = \mu - \sigma$ e $x = \mu + \sigma$

$\varphi_{\mu,\sigma}$ = probabilità

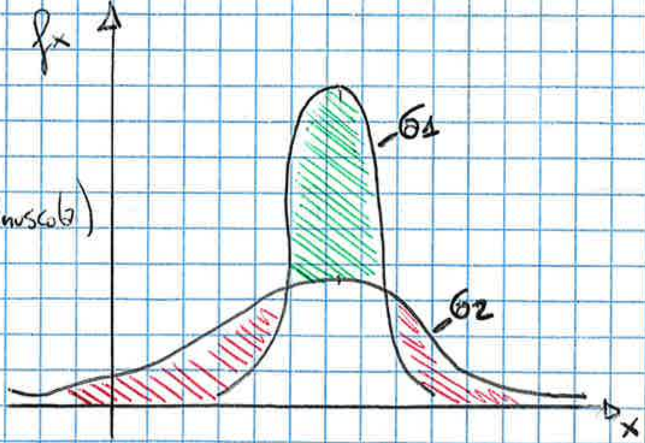
$\Phi_{\mu,\sigma^2}(x)$ = cumulata

OSSERVAZIONE 1:

Se $\sigma_1 < \sigma_2$

$\varphi_{\mu,\sigma_1^2}(\mu) > \varphi_{\mu,\sigma_2^2}(\mu)$ φ (fi minuscolo)

$\varphi_{\mu,\sigma_1^2}(x)$ è meno dispersa di $\varphi_{\mu,\sigma_2^2}(x)$ attorno al valore $x = \mu$



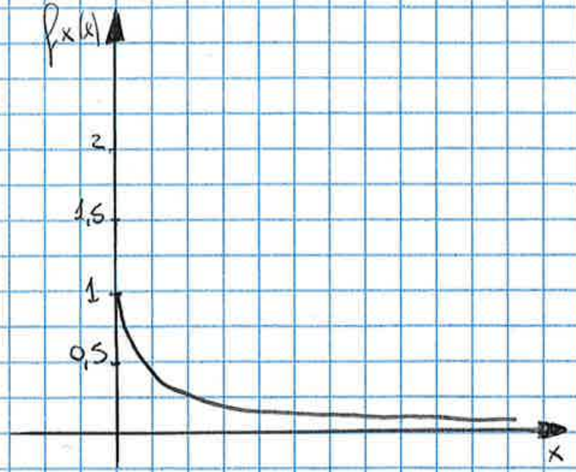
AREA VERDE = AREA ROSSA

TEOREMA DELLA DISTRIBUZIONE NORMALE

$E[X] = \mu$ $\qquad$ $var[X] = \sigma^2$

DISTRIBUZIONE ESPONENZIALE

$$f_X(x;\lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases} \qquad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}^+$$



TEOREMA DELLA DISTRIBUZIONE ESPONENZIALE

$$E[X] = \frac{1}{\lambda} \qquad var[X] = \frac{1}{\lambda^2}$$

TEOREMA DELLA VARIABILE SENZA MEMORIA

$$P[X > (s+t) / X > s] = P[X > t]$$

Supponiamo che questa distribuzione modellizzi la durata di un componente elettronico. Ora prendendo un esemplare più vecchio (comp. elettronica) di s unità temporali, quest'ultimo ha comunque una durata pari a t. In altre parole la durata non è alterata dal tempo di servizio.

RICORDA:

COMPONENTE CON USURA : DISTRIBUZIONE WEIBULL
(comp. meccanici, ...)

COMPONENTE SENZA USURA : DISTRIBUZIONE ESPONENZIALE
(comp. elettronici, ...)

La Trasformazione di Variabile Casuale $Y = g(X)$

Date X, $f_X(x)$, $Y = g(X)$

$f_Y(y) = ?$

Trasformazione di Variabile Casuale Discreta

$$f_Y(y) = \begin{cases} \sum_{x_j : g(x_j) = y_j} f_X(x_j) & , \quad y = y_j \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Sembra complicato, ma è molto più semplice di ciò che sembra. Facciamo un esempio

Esempio

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f_X(x)$	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8

$E[X] = 1/2$

$Y = X^2$

I punti massa di X erano: $\{-3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4\}$

trasformandoli

I punti massa di Y saranno: $\{9 ; 4 ; 1 ; 0 ; \underbrace{(1 , 4 , 9)}_{\text{già messi}} ; 16\}$

Y	0	1	4	9	16
$f_Y(y)$	1/8	2/8	2/8	2/8	1/8

$f_Y(0) = P[Y=0] = P[X^2=0] = P[X=0] = 1/8$

$f_Y(1) = P[Y=1] = P[X^2=1] = P[X=1] + P[X=-1] = \frac{1}{8} + 1/8 = 2/8$

Trasformazione di Variabile Casuale Continua

Data X (variabile casuale), la $Y = g(X)$ ha una funzione di probabilità $f_Y(y)$ pari a:

$$f_Y(y) = \left(\sum_i\right) \left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right| f_X\left(g^{-1}(y)\right)$$

$g^{-1}(y) = x$ $\quad g^{-1}$ inversa

sostituto in g^{-1}

derivata dell'inversa $|g^{-1}(y) = x| \cdot f_X(g^{-1})$

Sapendo che $y = g(x) \Rightarrow x = g^{-1}(y)$

Anche in questo caso sembra una formula molto complicata ma in realtà è più semplice di quel che sembra. Facciamo un esempio per capire.

Esempio

[0 Trovo $f_x(x)$]

1 Trovo D_x e D_y (dominio) e vedo se Y = biunivoca

2 Trovo l'inversa

3 Applico formula

Prima di tutto per definizione $F_Y(y) = F_X(g^{-1}(y))$

Sia X continua nell'intervallo $(-\pi/2 \, ; +\pi/2)$

Qual è la distribuzione di $Y = \tan(X)$?

$\rightarrow \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi \quad f_x(x) = 1/\pi$

$$f_x(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a < x < b \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

0 Trovo la funzione di probabilità ovvero

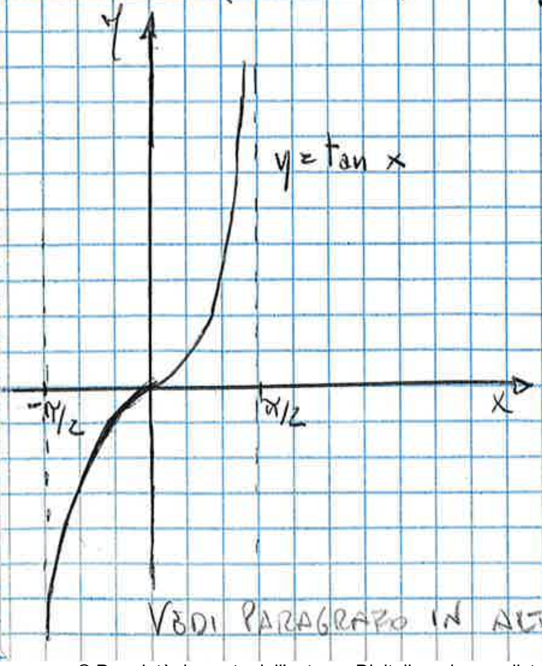
$$f_x(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & -\pi/2 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$\frac{1}{\text{distanza fra estremi}}$

Dominio $D_x = \left(-\frac{\pi}{2} \, ; \frac{\pi}{2}\right) \xrightarrow{y = \tan(x)}$ DATA!

Dominio $D_y = \, ? \Rightarrow D_y \, (-\infty \, ; +\infty)$

$\tan\left(-\frac{\pi}{2}\right) ; \tan\left(\frac{\pi}{2}\right)$



È biunivoca? Sì, ad ogni x corrisponde una sola y

Il dominio lo "leggo" sull'asse y $\Rightarrow D_y$

Calcolo g^{-1}: trovo l'inversa

$$y = \tan x \longrightarrow x = \underbrace{\operatorname{arctg} y}_{= g^{-1}(y)}$$

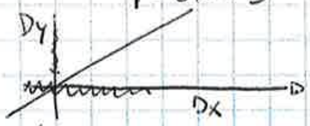
Derivo $g^{-1} = \frac{1}{1+y^2} = \frac{d\, g^{-1}(y)}{dy}$

VEDI PARAGRAFO IN ALTO DELLA PAGINA NON ATTACCATA

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55/B - Torino / Pagina 33 di 106

Esempio $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\quad Y = aX + b$ $\quad E[Y] = E[aX+b] = a\mu_X$

$var[Y] = var[aX] = a^2\sigma^2$ $\quad \sigma^2 = var[$



(1) $D_X (-\infty ; +\infty) \xrightarrow{y=ax+b} (-\infty ; +\infty)$

(2) $Y = aX + b$ $\quad x =$ applico inversa (algebricamente) ; $x = \frac{y-b}{a} = \frac{y}{a} + \frac{b}{a}$ dove $b/a = \dots$

(2b) $\frac{dx}{dy} = f'\left(\frac{y}{a} + \frac{b}{a}\right) = f'\left(\frac{y}{a}\right) + \underbrace{f'\left(\frac{b}{a}\right)}_{=0} = f'\left(\frac{y}{a}\right) = \frac{1}{a} f'(y) = \frac{1}{a}$, $\quad f'(y) = 1$

$d(\text{cost}) = 0$

$$f_Y(y) = \left|\frac{dx}{dy}\right| \cdot f_X(x \text{ trovato}) =$$

$$= \left|\frac{1}{a}\right| \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \cdot e^{-1/2\left(\frac{\frac{y-b}{a} - \mu}{\sigma}\right)^2}$$

RICORDA:

$Y = aX + b$ $\quad X = \frac{y-b}{a} \Rightarrow Z = \frac{X - \mu_X}{\sigma_X}$ con $b = \mu_X$ $\quad a = \sigma_X$

$X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$

Dunque Z è una NORMALE STANDARD : $\quad Z = \frac{X - \mu_X}{\sigma_X} = \frac{1}{\sigma_X} X + \left(-\frac{\mu_X}{\sigma_X}\right)$

$\Rightarrow E[Z] = 0 \quad var[Z] = 1$

RICORDA: Data una v.c. NORMALE X, un'altra v.c. che sia una trasformazione di X è ancora una v.c. NORMALE e il suo valore atteso e la varianza seguono le proprietà delle trasformazioni lineari

La STANDARDIZZAZIONE è un caso particolare di trasformazione lineare

* LEGGERE PRIMA QUESTA PAGINA POI LA SECONDA

ESEMPI DIETRO →

PAGINA NON ATTACCATA

TEOREMA DEL PROCESSO DI POISSON

La variabile casuale $N(t)$ che rispetta le 3 ipotesi precedenti e che si verifica in un intervallo t, ~~rispetto~~ segue una distribuzione di Poisson con parametro $\lambda = \alpha t$, cioè

$$f_X(x) = P[N(t) = x] = \frac{e^{-\alpha t}(\alpha t)^x}{x!} \quad \text{per } x = 0, 1, 2, \dots, n, \dots \qquad N(t) \sim \text{Poisson}(\alpha, t)$$

$\lambda = \alpha t$ = lunghezza intervallo

$\left.\begin{array}{l}\alpha = \text{frequenza} \\ t = \text{lunghezza intervallo}\end{array}\right\}$ λ = NON HA UNITÀ DI MISURA!!

Esempio 1: n° medio di chiamate in una ditta di media dimensioni è 60 ogni ora

1) Probabilità che non vi sia nessuna chiamata in 2 minuti

$\alpha = 60/h$ $\qquad P[N(2\text{ minuti}) = 0] = ?$

$= 60/60\text{ min} = 1/\text{min}$

$N(2\text{ min}) \sim \text{Poisson}(\alpha, t)$ $\qquad \alpha = 1/\text{min}$, $t = 2\text{ min}$

$$P[N(2) = 0] = \frac{e^{-2}\,2^x}{x!} = \frac{e^{-2} \cdot 2^0}{0!} = e^{-2}$$

2) Probabilità che arrivino più di 5 chiamate in 5 minuti

$\alpha = 60/h = 1/\text{min}$ $\qquad P[N(5\text{ minuti}) > 5] = \sum_{x=6}^{\infty} e^{-\alpha t}\frac{5^x}{x!} = 1 - \sum_{x=0}^{5} e^{-\alpha t}\frac{5^x}{x!}$

$\alpha t = 5$

$\lambda = \alpha t = \frac{1}{\text{min}} \cdot 5\text{ min} = 5$

Esempio 2: Una imperfezione ogni 100 mt $\qquad \alpha = 1/100\text{ mt}$

1: cavo 250 m nessuna imperfezione

$N(t) \sim \text{Poisson}(\overbrace{\alpha, t}^{2,5})$ $\qquad \alpha = \frac{1}{100\text{ mt}}$, $t = 250\text{ m}$ $\qquad \lambda = \frac{1}{100\text{ mt}} \cdot 250\text{ mt} = 2,5$

$$P[N(250) = 0] = \frac{e^{-2,5} \cdot 2,5^x}{x!} = e^{-2,5} = 0,082$$

2: cavo 250 m al più una $\qquad N(t) \sim \text{Poisson}(2,5)$

$$P[N(250) \le 1] = \sum_{x=0}^{1} \frac{e^{-\alpha t}\,\alpha t^x}{x!} = 0,082 + e^{-2,5} \cdot 2,5 = 0,287$$

RICORDA: N_1 = parametro $\lambda_1 t$ $\quad$ N_2 = parametro $\lambda_2 t$

Se due variabili che seguono la distr. di Poisson N_1 ed N_2 sono <u>indipendenti</u>, la loro somma $(N_1 + N_2)$ seguirà ancora la distribuzione di Poisson e avrà come parametro la somma dei due parametri λ_1 e λ_2

$$(N_1 + N_2) = (\lambda_1 + \lambda_2)\, t$$

$\boxed{3}$ PROBABILITÀ CONDIZIONATA CON I PROCESSI DI POISSON

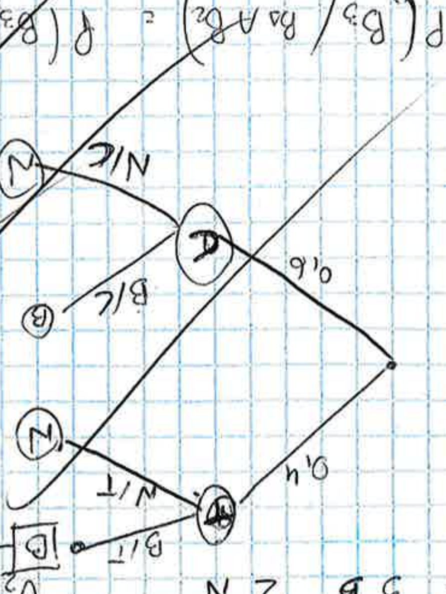
Date: N_1 ed N_2 tali che $N_1(x) + N_2(y) = N_{1\text{-}2}(z)$ ovvero $N_1 = x$ rip $\quad N_2 = y$ rip $\quad N_1 + N_2 = x + y = z$

$$P[N_1(60\text{ min}) = 40 \,/\, N_{1\text{-}2}(60\text{ min}) = 64] = \left\{ \text{se } z = 64 \text{ e } x = 40 \Rightarrow y = 24 \right\}$$

$$= \frac{P[N_1(60\text{ min}) = 40] \cap P[N_2(60\text{ min}) = 24]}{P[N_{1\text{-}2}(60\text{ min}) = 64]} =$$

$$= \frac{P[N_1(60\text{ min}) = 40] \cdot P[N_2(60\text{ min}) = 24]}{P[N_{1\text{-}2}(60\text{ min}) = 64]} = \text{trova } \lambda_1, \lambda_2 \text{ ed } (\lambda_1 + \lambda_2)$$

RICORDA: La probabilità che una v.c. di Poisson abbia un certo valore, condizionatamente che la sua somma con un'altra v.c. di Poisson indipendente abbia un certo valore (la somma!), diventa sempre una v.c. <u>BINOMIALE</u>!



$\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3 \ldots \bar{x}_k$ = medie di ogni strato

$\bar{\bar{x}}$ = MEDIA DEL CAMPIONE TOTALE $= \bar{x}_{TOT} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} \bar{x}_j \cdot n_j =$ | Media pesata delle medie di ogni singolo gruppo

$$= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}$$

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} x_{i,1}$$

$$s_1^2 = \sum_{i=1}^{n_1}\frac{1}{n_1}(x_{i1} - \bar{x}_1)^2$$

scarto medio dal valore medio = VARIABILITÀ DEL 1° GRUPPO

$$s_{tot} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}(x_{ij} - \bar{x}_{tot})^2 \left\{ \cancel{=} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} n_j s_j^2 \right\}$$

$\Downarrow$

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}(x_{ij} - \bar{x}_{tot})^2 = \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} n_j s_j^2}_{s_W^2} + \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} n_j (\bar{x}_j - x_{tot})^2}_{s_B^2}$$

VARIANZA WITHIN

Mi da una idea della variabilità di ciascun gruppo

VARIANZA BETWEEN:

Mi da una idea della variabilità tra le colonne

CAMPIONAMENTO CON IL METODO DELLE QUOTE: Divido sempre in gruppi e prendo per ogni gruppo una quota ben predefinita

CAMPIONAMENTO A GRAPPOLO: Divide sempre in strati ma sceglie a caso uno strato da cui estrarre

Se consideriamo $f_{XY}(x,y)$ quindi se vengono raccolte coppie di valori posso ricavare mediante apposite formule $f_X(x)$ ed $f_Y(y)$

Se i dati vengono raccolti "singolarmente" non sempre è possibile calcolare $f_{XY}(x,y)$

Solo se X e Y sono <u>indipendenti</u>:

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

Distribuzione Campionaria

È la distribuzione congiunta di $X_1, X_2, \ldots, X_n$ con $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ campione di dimensione n. Ma le $f_{X_1}(x_1) = f_{X_2}(x_2)$ ovvero la funz. probabilità deve essere la stessa per tutte le v.c. campionarie

$$f_{X_1, X_2, \ldots, X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_{X_1}(x_1)\, f_{X_2}(x_2) \cdot \ldots \cdot f_{X_n}(x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i)$$

Formule Utili del Valore Atteso

A) $$E[a_1 X_1 + a_2 X_2 + \ldots + a_n X_n] = a_1 E[X_1] + a_2 E[X_2] + \ldots + a_n E[X_n]$$

Il valore atteso di una combinazione lineare di n variabili casuali è uguale alla combinazione lineare dei singoli valori attesi

~~IN PARTICOLARE~~

$$E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = E[\bar{X}_n]$$

$\bar{X}_n$ = MEDIA CAMPIONARIA = media aritmetica delle variabili casuali che costituiscono un campione

B) $$E[\bar{X}_n] = \mu$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E[X_i] = \mu_{(i)} = \mu$$

μ = MEDIA della popolazione da cui viene estratto un campione

La media campionaria, cioè la media aritmetica delle variabili casuali costituenti un campione, è uguale alla media della popolazione da cui è estratto il campione

C) $$E[X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_n] = E[X_1] \cdot E[X_2] \cdot \ldots \cdot E[X_n]$$

NORMALIZZARE LA COVARIANZA

$$Cov\ MAX = \sigma_x \sigma_y$$

$$-1 \le \frac{cov[X, Y]}{\sigma_x \sigma_y} \le 1$$

covarianza max $= \sigma_x \sigma_y$

$$\frac{cov[X, Y]}{\sigma_x \sigma_y} = \text{COEFFICIENTE DI CORRELAZIONE} = \rho_{xy} \quad (\rho = ro)$$

Il COEFFICIENTE DI CORRELAZIONE misura l'intensità di una relazione lineare fra due variabili casuali (vedi "Test su ρ")

CASI PARTICOLARI DEL COEFF. DI CORRELAZIONE ρ_{xy}

a) $\rho_{xy} = 0 \implies cov[X, Y] = 0$

b) $|\rho_{xy}| = 1$  se tutti i punti sono in linea

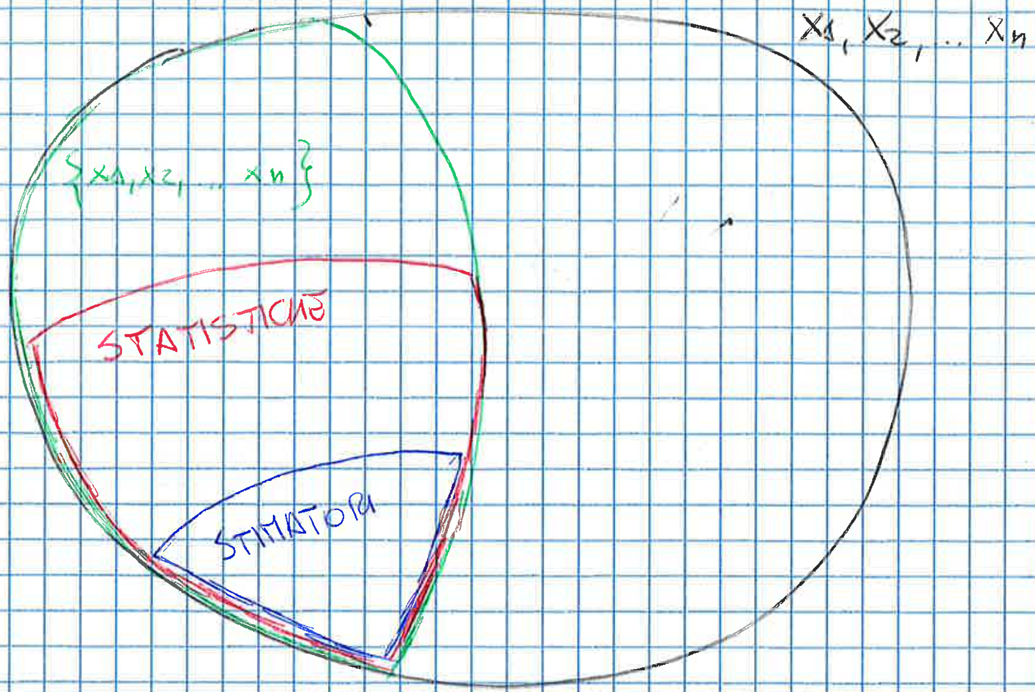
MATRICE DELLA COVARIANZA

	X_1	X_2	X_3 ...	X_n
X_1	$cov[X_1, X_1]$	$cov[X_1, X_2]$	$cov[X_1, X_3]$ ...	$cov[X_1, X_n]$
X_2	$cov[X_2, X_1]$	$cov[X_2, X_2]$	$cov[X_2, X_3]$ ...	$cov[X_2, X_n]$
X_3	$cov[X_3, X_1]$	$cov[X_3, X_2]$	$cov[X_3, X_3]$ ...	$cov[X_3, X_n]$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
X_n	$cov[X_n, X_1]$	$cov[X_n, X_2]$	$cov[X_n, X_3]$ ...	$cov[X_n, X_n]$

$$cov[X_1, X_1] = E[(X_1 - E(X_1))(X_1 - E(X_1))] = E[(X_1 - E(X_1))^2] = var\ X_1 = \sigma_1^2$$

OSSERVAZIONE 1: Sulla diagonale principale ci saranno i valori della varianza degli X_n

STATISTICHE E STIMATORI - INTRODUZIONE



$X_1, X_2, \dots, X_n$ VARIABILI CASUALI

$\{x_1, x_2, x_3, \dots x_n\}$ VARIABILI CASUALI CAMPIONARIE

STATISTICA: $g(X_1, X_2, \dots X_n)$ è una funzione di variabili casuali (quindi una funzione campionaria) che non contiene parametri incogniti

Esempi: $\overset{\text{MEDIA CAMPIONARIA}}{\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i}$ perché $g(x_1, x_2, \dots, x_n) \xrightarrow[\text{ed esiste}]{\text{esiste}} \frac{\sum x_i}{n}$

è UNA STATISTICA

$\bar{X}_n - \mu$ NON È STATISTICA perché contiene il parametro incognito ovvero μ

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55/B - Torino / Pagina 47 di 106

STIMATORI

STIMATORE: statistiche usate per stimare un parametro ϑ o qualche sua funzione

STIME DEL PARAMETRO ϑ: valori ottenuti mediante gli stimatori

Esempio: devo stimare μ

$$\overline{X}_n \to \frac{1}{n} \sum x_i = \overline{x_n} = \hat{\mu}$$

N.B. I valori ottenuti mediante gli stimatori sono indicati con $\wedge$

MEDIA CAMPIONARIA (STATISTICO)

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

METODI PER LA RICERCA DEGLI STIMATORI

METODO DEI MOMENTI

date $f(\cdot, \vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_k)$

$$\mu'_r = E[X^r] = \mu'_r(\cdot, \vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_k) \to \text{devo la } X = \text{v.c. al valore di } r$$

Esempi

RICORDA (vedi pag precedente) $M'_r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^r$

1) Dato $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ da $N(\mu, \sigma^2)$

Soluzione

$$\begin{cases} \mu'_1(\mu, \sigma^2) = M'_1 \\ \mu'_2(\mu, \sigma^2) = M'_2 \end{cases}$$

$\mu'_1 = E[X]$ sempre $\quad \mu'_2 = E[X^2] = var[X] + (E[X])^2 = \sigma^2 + \mu^2$

$$\begin{cases} \mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \\ \sigma^2 + \mu^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Theta_{MM} = \overline{X}_n \\ \sigma^2 = \frac{1}{n} \sum X_i^2 - (\overline{X}_n)^2 \end{cases}$$

($\Theta_{MM} = \Theta$: stimatore ; MM: metodo momenti)

METODO DELLA MASSIMA VEROSIMIGLIANZA (è il più diffuso!)

FUNZIONE DI VEROSIMIGLIANZA

Esempio: Urna con palle bianche/nere in rapporto 4/1; ma non sappiamo se (4 B e 1 N) oppure (1 B e 4 N)

$$P[\text{nera}] = \begin{cases} \frac{1}{5} & \text{se } 1 \text{ nera} \\ \frac{4}{5} & \text{se } (4 \text{ nere}) \, 1 \text{ bianca} \end{cases}$$

Suppongo di stimare p estraendo 4 palle con reimmissione

$X \sim$ binomiale $(4, p)$

Esito x	0	1	2	3	4
con $p = 1/5$	$(4/5)^4$	$4 \frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^3$	$6\left(\frac{1}{5}\right)^2\left(\frac{4}{5}\right)^2$	$4\left(\frac{1}{5}\right)^3 \cdot \frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}^4$
con $p = 4/5$	$\left(\frac{1}{5}\right)^4$	$4 \frac{4}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^3$	$6\left(\frac{4}{5}\right)^2\left(\frac{1}{5}\right)^2$	$4\left(\frac{4}{5}\right)^3\left(\frac{1}{5}\right)$	$\left(\frac{4}{5}\right)^4$

Spiegazione: Guardo colonna per colonna e per ogni colonna prendo la probabilità maggiore

FUNZIONE DI VEROSIMIGLIANZA: $L(\vartheta; x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = f(x_1; \vartheta) f(x_2, \vartheta) \dots f(x_n, \vartheta)$

~~Ecco~~

METODO DELLA MASSIMA VEROSIMIGLIANZA che di calcolare le probabilità p di realizzazione del campione e di prendere quella che massimizza la probabilità di realizzazione

Soluzione Esempio: Estraggo 4 palle con reimmissione per stimare p

$$p = \begin{cases} 1/5 & \text{se } x = 0;\ x = 1 \\ 4/5 & \text{se } x = 3 \quad x = 4 \\ ?? & \text{se } x = 2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Se ottengo 0 palle nere o 1 palla nera è più probabile che $P[\text{NERA}] = 1/5$ ovvero 1N e 4B

Se ottengo 3 o 4 palle nere è più probabile che $P[\text{NERA}] = 4/5$ ovvero 4N e 1B

METOD

FUN

Bser

S

Brito

con

con

F

M

del com

ESEMPIO 3: DISTRIBUZIONE NORMALE

Trovare due stimatori 1 per μ e 1 per σ

$$\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \longrightarrow N\!N(\mu, \sigma^2) \quad f_X(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$$L(\mu, \sigma, x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma}\right)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-1/2\left(\frac{x_2-\mu}{\sigma}\right)^2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_n-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sigma^n} e^{-\frac{1}{2}\sum\left(\frac{x_i-\mu}{\mu}\right)^2} = L(\mu, \sigma, x_1, x_2, \dots, x_n) \Rightarrow \ln e = 1$$

$$\ln e^{abc} = abc$$

$$\ln L(\mu, \sigma \dots, x_n) = \ln \frac{1}{2\pi^{\frac{n}{2}} \cdot \sigma^n} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2$$

– Devo fare le derivate rispetto a μ per trovare lo stimatore di μ

$$① \; dL(\mu, \sigma \dots x_n)/d\mu = \underbrace{0}_{\text{non c'è } \mu \Rightarrow \text{cost} \; d\text{cost}=0} - \frac{1}{\cancel{2}}\sum_{i=1}^{n} \cancel{2}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right) \cdot \frac{1}{\sigma} = 0 \quad (\neq 0)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i - n\mu = 0 \Rightarrow \boxed{\bar{X}_m = \frac{1}{n}\sum X_i}$$

$$② \; dL(\mu, \sigma^2, \dots x_n)/d\sigma = -\ln(2\pi)^{\frac{n}{2}} \cdot \sigma^n - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2 =$$

$$= \underbrace{-\ln(2\pi)^{\frac{n}{2}}}_{\text{cost} \to d(\text{cost})=0} - \ln(\sigma^2)^{\frac{n}{2}} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2 \quad \text{derivo } d(\sigma^2)$$

$$= \frac{n}{2}\frac{1}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 \cdot \frac{1}{(\sigma^2)^2} \cdot (-1) =$$

$$= \frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2}\sum\frac{(x_i-\mu)^2}{\sigma^4} = 0$$

$$\Downarrow \quad \boxed{\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}$$

DISTRIBUZIONE NORMALE: $N\!N(\mu, \sigma^2)$

STIMATORE DI μ: $\mu = X_m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

STIMATORE DI σ^2: $\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - X_m)^2$

TEOREMA LIMITE CENTRALE

Sia $f_X(x)$ una funzione di densità con media μ e varianza σ^2, la distribuzione della variabile casuale $\bar{X}_n$, media campionaria dei campioni di dimensioni n estratti dalla suddetta popolazione, tende ad una distribuzione normale con media μ e varianza σ^2/n al tendere di n ad infinito

La distribuzione della media campionaria tende ad una distribuzione normale al tendere della dimensione del campione all'infinito

$$f_{\bar{X}_n} \xrightarrow[n \to \infty]{} N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \qquad f_{\bar{X}_n} \xrightarrow[n \to \infty]{} N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

STANDARDIZZAZIONE DELLA MEDIA CAMPIONARIA

(se $n \to \infty$) Nella pratica $n > 50$

$$Z_n = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\bar{X}_n - E[\bar{X}_n]}{\sqrt{var[\bar{X}_n]}} \qquad \text{dove } \mu = E[\bar{X}_n]$$

$$\sigma/\sqrt{n} = \sigma_{\bar{X}_n} = \sqrt{var[\bar{X}_n]} \qquad *$$

VARIANZA CAMPIONARIA

$$\underbrace{\{X_1, X_2, \dots, X_n\}}_{\text{campione estratto da una popolazione}} \quad \text{con media } \mu \text{ e varianza } \sigma^2 \to N(\mu, \sigma^2)$$

STIMATORE PER σ^2

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X}_n)^2 \qquad n > 1$$

La VARIANZA CAMPIONARIA è lo stimatore della varianza della popolazione

TEOREMA

$$E[S_n^2] = \sigma^2$$

NON SERVE

$$var[S_n^2] = \frac{1}{n}\left(\mu_4 - \frac{n-3}{n-1}\sigma^4\right)$$

con μ_4 = momento di ordine 4

DISTRIBUZIONE F o DISTRIBUZIONE DI FISHER

Siano U e V due variabili casuali indipendenti con distribuzione χ^2 e rispettivamente m ed n gradi di libertà

$$F = \frac{U/m}{V/n}$$

Si dice di avere una distribuzione F con m ed n gradi di libertà

La distribuzione F è anche detta DISTRIBUZIONE DELLE RAPPORTO DI VARIANZE

N.B. $F_{m,n} \neq F_{n,m}$ $\qquad \frac{1}{f_{m,n,1-\alpha}} = f_{n,m,\alpha}$

SUGGERIMENTO PER L'USO DELLE TAVOLE

Sulle tavole si trovano solo pochi quantili α (0,95 / 0,98 / 0,99)

I quantili sono legati dalla seguente relazione

$$\frac{1}{f_{m,n,1-\alpha}} = f_{n,m,\alpha}$$

dove m ed n sono i gradi di libertà e α è il quantile

DISTRIBUZIONE t DI STUDENT (o DISTRIBUZIONE DEI PICCOLI CAMPIONI)

Data z variabile casuale normale standardizzata $\sim N(0,1)$

U variabile casuale che segue χ^2 con n g.d.l. $\sim \chi^2_n$ g.d.l. = gradi di libertà

z e U indipendenti

$$T = \frac{z}{\sqrt{U/n}}$$

Si dice di avere una distribuzione t di Student con n g.d.l.

SUGGERIMENTO PER L'USO DELLE TAVOLE

se $n > 30$; $t_{n,\alpha} \cong z_\alpha$ $\rightarrow$ Quantili di t (Student) approssimabili ai quantili di z (Normale Standard) con $n > 30$

PROPRIETÀ DI CONSISTENZA

Uno stimatore si dice ~~cons~~ CONSISTENTE IN MEDIA QUADRATICA se e solo se:

$$\lim_{n \to \infty} MSE_{T_n} = 0$$

Calcolo il limite del valore atteso dello stimatore, per n che tende ad infinito, quindi il suo MSE se è zero lo stimatore è consistente.

Uno stimatore si dice DEBOLMENTE CONSISTENTE o SEMPLICEMENTE CONSISTENTE se e solo se:

$$\lim_{n \to \infty} P\left[|T - \vartheta| < \varepsilon\right] = 1$$

dove T = stimatore
ϑ = parametro da stimare

N.B. CONSISTENZA IN MEDIA QUADRATICA $\xrightarrow{\text{implica}}$ CONSISTENZA SEMPLICE

OSSERVAZIONE Se T è uno stimatore corretto di ϑ, ϑ è uno stimatore corretto di T solo se ϑ è una funzione lineare

Es. $f_X(x) \sim \exp(\lambda)$ $\quad \bar{X}_n$ stim. $\frac{1}{\lambda}$ $\Big|$ ma $\frac{1}{\bar{X}_n}$ no stim. corretto di λ

STIME PER INTERVALLI

Sia $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ un campione casuale da $f(\cdot, \theta)$ e T_1 e T_2 statistiche tali che $T_1 < T_2$ e per le quali $P[T_1 < \theta < T_2] = 1-\alpha$, allora

a) (T_1, T_2) si chiama INTERVALLO DI FIDUCIA all' $(1-\alpha)\%$ per θ

b) T_1 e T_2 si chiamano LIMITE DI FIDUCIA INFERIORE E SUPERIORE per θ

c) $1-\alpha$ si chiama LIVELLO DI FIDUCIA

STIMA PER INTERVALLI DELLA MEDIA

1) CASO DELLA VARIANZA DELLA POPOLAZIONE NOTA oppure grandi campioni

Dato $\{X_1, X_2, \dots X_n\}$ campione da popolazione con distribuzione normale avente media μ (incognita) e varianza nota σ^2

$$\mathbb{P}\left[\overline{X}_n - z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu \leq \overline{X}_n + z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = 1-\alpha$$

Il valore del quantile devo trovarlo all'interno della tabella, non nella colonna z!

Dato $\hat{\mu} = \overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum X_i$ $\qquad Z = \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$

INTERVALLO DI FIDUCIA $(L_i, L_s) = \left(\overline{X}_n - z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{X}_n + z_{1-\alpha/2}\ \sigma/\sqrt{n}\right)$

quantile $\alpha/2$ sinistro nella distr. normale — quantile $\alpha/2$ destro nella distr. normale

N.B. È errato dire che la media μ cade nell'intervallo nell $(1-\alpha)\%$ dei casi!

È corretto dire che l'intervallo nel $(1-\alpha)\%$ dei casi contiene al suo interno la media μ (quando parlo di intervallo casuale!)

È corretto, però, una volta estratto il campione, quando l'intervallo numerico si realizza, dire che a questo intervallo realizzato, avendo seguito tutta la procedura, accordo un livello di fiducia pari a $(1-\alpha)\%$ di avere al suo interno la media.

ATTENZIONE! livello di fiducia $\neq$ probabilità

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55/B - Torino / Pagina 61 di 106

STIMA PER INTERVALLI DELLA DIFFERENZA TRA DUE MEDIE

Dato $\{X_{11}, X_{12}, X_{13}, \dots, X_{1n_1}\}$ campione casuale di dimensione n_1 con media μ_1 e varianza σ_1^2 distribuito normalmente

Dato anche $\{X_{21}, X_{22}, X_{23}, \dots, X_{2n_2}\}$ campione casuale di dimensione n_2 con media μ_2 e varianza σ_2^2 distribuito normalmente, indipendente dal campione precedente

allora:

a) $\overline{X_1} - \overline{X_2} = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} X_{1i} - \frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2} X_{2i}$

b) varianza ???

Possiamo distinguere 3 casi: 1) σ_1 e σ_2 NOTE ; 2) σ_1 e σ_2 NON NOTE MA POSSONO RITENERSI UGUALI

3) σ_1 e σ_2 NON NOTE E NON POSSONO RITENERSI UGUALI

1 CASO) σ_1 e σ_2 SONO NOTE

$$\overline{X_1}(n_1) \sim N\left(\mu_1, \frac{\sigma_1^2}{n_1}\right)$$

$$\overline{X_2}(n_2) \sim N\left(\mu_2, \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$$

+ indipendenza

$$\overline{X_1}(n_1) - \overline{X_2}(n_2) \sim N\left(\mu_{\overline{X_1}-\overline{X_2}}, \sigma^2_{\overline{X_1}-\overline{X_2}}\right)$$

$$E[\overline{X_1}(n_1) - \overline{X_2}(n_2)] = \mu_1 - \mu_2$$

$$\sigma_{\overline{X_1}(n_1) - \overline{X_2}(n_2)} = \sqrt{\sigma^2_{\overline{X_1}(n_1)} + \sigma^2_{\overline{X_2}(n_2)}} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} = \sigma_\Delta$$

ATTENZIONE

$\sigma_{X_1-X_2} \neq \sigma_{X_1} - \sigma_{X_2}$

$\sigma_{X_1+X_2} \neq \sigma_{X_1} + \sigma_{X_2}$

si usano i valori dei quadrati e poi si mettono sotto $\sqrt{\ }$

STIMA PER INTERVALLI DI UNA VARIABILE

OSSERVAZIONE: Se $n_1 >> n_2 \rightarrow \frac{1}{n_1} << \frac{1}{n_2}$

$$T = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\frac{S_1}{\sqrt{n_2}}}$$

$\Downarrow$ $n_1 + n_2 >> 30 \rightarrow$ T Student $\sim$ Z normale

$$\left((\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - t_{n_1+n_2-2,\, 1-\alpha/2} \cdot \frac{\sqrt{S_1^2}}{\sqrt{n_2}} \, , \; (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + t_{n_1+n_2-2,\, 1-\alpha/2} \cdot \frac{\sqrt{S_1^2}}{\sqrt{n_2}} \right)$$

$$\Downarrow$$

$$\left((\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sqrt{S_1^2}}{\sqrt{n_2}} \, , \; (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sqrt{S_1^2}}{\sqrt{n_2}} \right)$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55/B - Torino / Pagina 65 di 106

Stima per Intervalli di Due Varianze

1° campione — 2° campione

$$\Pi \; \{X_{11}, X_{12}, \dots, X_{1n_1}\} \quad e \quad \{X_{21}, X_{22}, \dots, X_{2n_2}\}$$

S_1^2 = stimatore varianza — S_2^2 = stimatore varianza

μ_1 = media 1 — μ_2 = media 2

σ_1^2 = dev. standard 1 — σ_2^2 = dev. standard 2

$$F = \frac{\frac{S_1^2}{\sigma_1^2} \cdot \frac{1}{\sigma_1^2} \cdot \frac{1}{n_1 - 1} \sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \overline{X}_1)^2}{\frac{S_2^2}{\sigma_2^2} \cdot \frac{1}{\sigma_2^2} \cdot \frac{1}{n_2-1} \cdot \sum_{i=1}^{n_2} (X_i - \overline{X}_2)^2} =$$

$\Downarrow$

$$F = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} \left(\frac{X_i - \overline{X}_1}{\sigma_1}\right) / (n_1 - 1)}{\sum_{i=1}^{n_2} \left(\frac{X_i - \overline{X}_2}{\sigma_2}\right) / (n_2 - 1)}$$

distribuzione F con $(n_1 - 1)$ ed $(n_2 - 1)$ g.d.l.

$\Downarrow$

$$\mathbb{P}\left[\frac{S_2^2}{S_1^2} f_{n_1-1, n_2-1, \alpha/2} < \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \le \frac{S_2^2}{S_1^2} f_{n_1-1, n_2-1, 1-\alpha/2} \right] = 1 - \alpha$$

Ricorda Per la Distribuzione di Fischer

$$\frac{1}{f_{m,n,1-\alpha}} = f_{n,m,\alpha}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55/B - Torino / Pagina 67 di 106