NUMERO: **2504A** ANNO: 2021

A P P U N T I

STUDENTE: Mulas Angelo

MATERIA: Aerodinamica - Prof. Di Cicca

AERODINAMICA CORSO I SEMESTRE III ANNO LAUREA TRIENNALE

settembre 2020 - gennaio 2021

pagine

1.1) FLUIDODINAMICA..

Branca della meccanica che studia la dinamica dei fluidi (assunti come mezzi continui, compressibili e non, viscosi e non)

Definizione: Materiale che si deforma illimitatamente (fluisce) sotto l'azione di forze esterne

- liquido o gas, sostanza unica o miscela
- studio con diversi approcci (euleriano, lagrangiano);

esso è costituito da un elevato numero di particelle fluide, ciascuna di volume quasi-puntiforme (sufficientemente grande da contenere un numero elevato di molecole per considerare valide le grandezze medie, abbastanza piccolo rispetto alla scala del fenomeno studiato)

ℓ: libero cammino medio (mean free path)

L: lunghezza caratteristica del fenomeno in esame

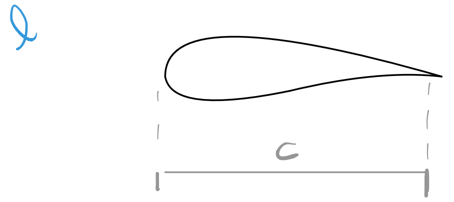
$Kn = \dfrac{\ell}{L}$ numero di Knudsen

Parametro di controllo $Kn \ll 1$ per accettabilità ipotesi del continuo (1°)

1.2) .. e AERODINAMICA

Fluidi aeriformi (principalmente relativa a flussi esterni) e il loro moto relativo attorno ad un corpo solido. Studio con il fine di determinare le forze e le coppie agenti sul corpo per effetto di tale moto

Esempio: flusso su profilo alare

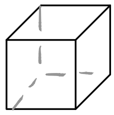


c : corda $= L \simeq 1\,m$

ℓ dell'aria standard $\simeq 10^{-8}\,m$

$Kn = 10^{-8} \ll 1 \Rightarrow$ OK continuità

* dimostrazione (per assurdo)



I) p. fluido tende a ruotare

II) p. fluido tende a spostarsi

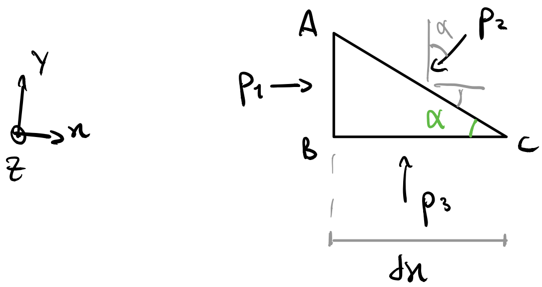
III) p. fluido si deforma

$\Downarrow$

fluido non più in quiete

Legge di Pascal: la pressione di un fluido è uguale in tutte le direzioni *

* dimostrazione: prisma retto a sezione triangolare profondo dz



Forza peso: $W = \rho \Omega g$

$$\Omega = \frac{1}{2} dx (dx \, tg\alpha) dz$$

equilibrio lungo assi $\Rightarrow$

$$x: \quad p_1 \, dx \, tg\alpha \, dz = p_2 \frac{dx}{\cos\alpha} dz \sin\alpha \iff p_1 = p_2$$

$$y: \quad p_3 \, dx \, dz = W + p_2 \frac{dx}{\cancel{\cos\alpha}} dz \cancel{\cos\alpha} \iff$$

$$\frac{W}{dx\,dz} = p_3 - p_2 \qquad \text{per } \Omega \to 0, \; W \to 0 \Rightarrow p_3 = p_2$$

oss III) l'orientamento del prisma e il valore dell'angolo alpha sono arbitrari

oss IV) p è un campo scalare (come T e ρ)

oss V) $\Omega \to \Omega_p \to 0$ giustifica l'assenza della forza peso per p. fluido

$$\tau = \boxed{\mu} \frac{U}{h} \quad (1.3) \quad [\text{udm } Kg/ms]$$

1° coeff. di trasporto

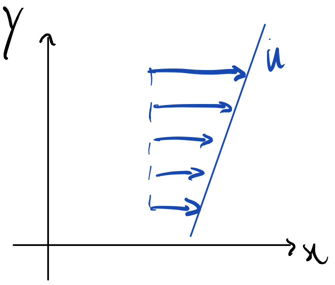
↳ coefficiente di viscosità (viscosità dinamica) : $\mu(T,p)$ $\left[\frac{Kg}{ms}\right]$

oss VIII) variazioni di μ dovute alla T molto più marcate rispetto alla p

gas : $\frac{\partial\mu}{\partial T} > 0$ liquidi : $\frac{\partial\mu}{\partial T} < 0$

gas e liquidi $\frac{\partial\mu}{\partial p} > 0$ (ma debolmente crescente : $\underbrace{\frac{\partial\mu}{\partial T} > \frac{\partial\mu}{\partial p}}_{\text{gas}}$ $\underbrace{-\frac{\partial\mu}{\partial T} > \frac{\partial\mu}{\partial p}}_{\text{liquidi}}$

caso II)



Legge di Newton

$$\boxed{\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}} \quad (1.4)$$

Fluidi Newtoniani : Legame lineare tra sforzi viscosi e gradienti di velocità

↳ analizzati nel corso

$$\boxed{\nu = \frac{\mu}{\rho}}$$ viscosità cinematica $[m^2/s]$ (1.5)

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 9 di 216

dello Stato Termodinamico di un Fluido ←

1.3.3) **Conducibilità termica** (Fluidi in quiete)

Fenomeno diffusivo legato ai moti molecolari ↦ gradienti di temperatura

(1.7) $$\boxed{q = -K\frac{\partial T}{\partial n}}$$ Legge di Fourier

isotropica: ↛ direzione

$\hat{q}$ Flusso termico conduttivo nella direzione $\vec{n}$

K coeff. di conducibilità termica ; $K(T,p)$ $\left[\frac{W}{mK}\right]$

gas : $\frac{\partial K}{\partial T} > 0$ liquidi : $\frac{\partial K}{\partial T} < 0$

gas e liquidi: $\frac{\partial K}{\partial p} > 0$ (debolmente crescente)

gas: $\frac{\partial K}{\partial T} > \frac{\partial K}{\partial p}$ e liquidi: $-\frac{\partial K}{\partial T} > \frac{\partial K}{\partial p}$

Numero di Prandtl Aria → $P_r \simeq 0{,}71$

(1.8) $$\boxed{P_r = \frac{\mu c_p}{K}} = \frac{\nu}{\alpha}$$

c_p: calore specifico a pressione costante

α: diffusività termica

1.3.4) **Comprimibilità (o compressibilità)** (Fluidi in quiete)

Δ Capacità di un fluido di variare di volume a seguito di una variazione di pressione e temperatura

data una massa di fluido Ω, si misura la compressibilità attraverso il parametro elasticità di volume o (Bulk Elasticity)

(1.9) $$\boxed{K = -\frac{\delta p}{\delta\Omega/\Omega}}$$ $[Pa]$

$$\sqrt{\ } \longrightarrow \sqrt{\frac{F_{inerzia}}{F_{gravità}}} \propto \sqrt{\frac{v^2/l}{g}} = \boxed{\frac{v}{\sqrt{gl}} = Fr} \quad (1.13)$$

Numero di Froude

- Forze di inerzia / Forze di pressione

$$\propto \frac{ma}{\Delta p\, S} = \frac{\rho L^3\, L/t^2}{\Delta p\, L^2} = \frac{\rho \frac{L^2}{t^2} L^2}{\Delta p\, L^2} = \frac{\rho v^2 l^2}{\Delta p\, l^2}$$

piccole perturbazioni $\longrightarrow$

$$\frac{F_{inerzia}}{F_{pressione}} = \frac{\rho v^2}{c^2 \Delta \rho} = \frac{v^2/c^2}{\Delta\rho/\rho} = \frac{M^2}{\Delta\rho/\rho}$$

$$c^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho}\Big|_{is} = \gamma \frac{p}{\rho} \simeq \frac{p}{\rho} \Rightarrow \rho \sim \frac{p}{c^2}$$

$$p = \rho R T$$

$$\boxed{M = \frac{v}{c}} \quad (1.14)$$

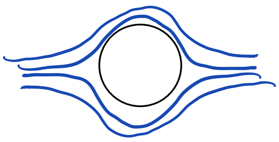
Numero di Mach

1.3.6) Influenza dei numeri di Reynolds e di Mach sul campo di moto di un fluido

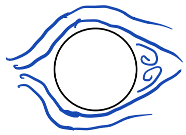
a) Influenza di Re

caso I: oggetto cilindro a sezione circolare (corpo tozzo)

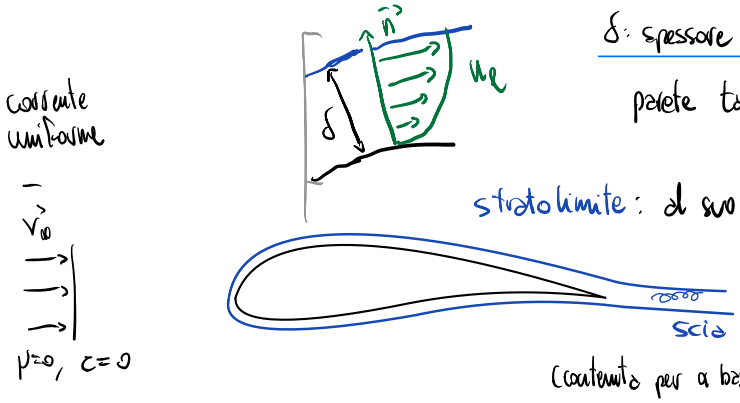
$Re_D < 4$ dominano gli effetti viscosi su quelli inerziali, nessuna perturbazione, simmetria monte-valle



$Re_D = 9.6$ formazione di zone di ricircolo (vortici) a valle del cilindro; tali vortici aumentano l'estensione fino a $Re_D \simeq 26$ in maniera stabile.



- non c'è scambio di calore (né tra filetti fluidi, né tra filetti fluidi e parete / superficie di contatto).



δ: spessore di strato limite : distanza dalla parete tale che $u_e = 0.99\, V_\infty$

strato limite: al suo interno i gradienti di velocità sono alti
⇓
sforzi viscosi non trascurabili

(contenuto per α bassi)

Prima si considera il profilo maggiorato dello spessore dello strato limite per studiare il campo di moto del fluido inviscido, la cui pressione è esercitata sullo strato limite. Da tali valori si può studiare il campo di moto al confine dello strato limite (distribuzione di velocità e di pressione) e iterare il procedimento fino alla convergenza. Nel boundary layer la variazione di pressione lungo lo spessore (in direzione normale) è trascurabile.

b) Influenza di M

Δ velocità del suono: velocità con cui propagano le piccole perturbazioni all'interno del fluido.

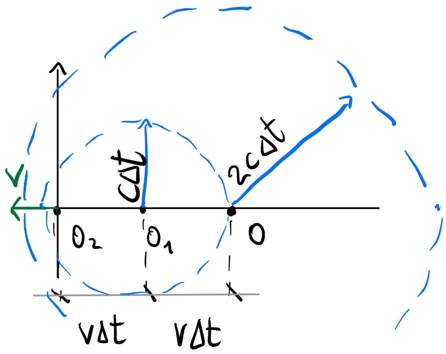
$$\boxed{c = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}} = \sqrt{\gamma R^* T} = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{is}}} \qquad (1.16)$$

con $R = 8{,}314 \ \frac{J}{mol\,K}$
e $R^* = R/M$ $\left[\frac{J}{kg\,K}\right]$

caso I: velivolo puntiforme a velocità $V < c$ $\left(M = \frac{V}{c} < 1\right)$

Fronte d'onda quando velivolo è in O_2

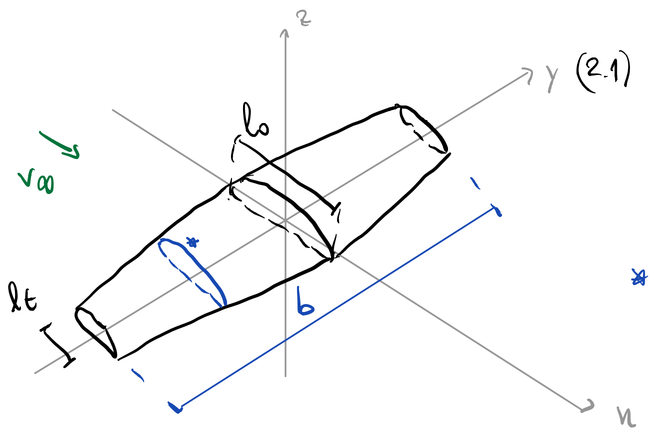
moto velivolo e punti discreti ogni Δt



regione subsonica
(immagine a $t = 2\Delta t$)

2) Ala e profili alari: Azioni aerodinamiche

2.1) Introduzione e Nomenclatura $\boxed{\text{Ala}}$

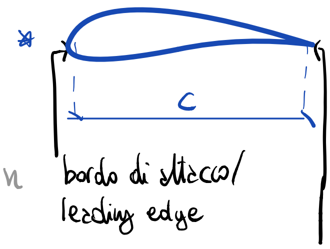


b: apertura alare [m] (wing span)

$$(2.1) \quad (A.R.=)\ \lambda = b^2/S$$

allungamento alare [\ ]
aspect ratio

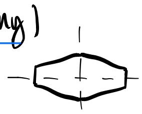
S: superficie in pianta dell'ala [m²]



profilo alare

: corda (congiunge le due estremità) [m]

- $\boxed{\text{ala rastremata}}$ (tapered wing)



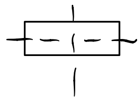
: la corda non è costante

(in particolare diminuisce con la distanza dalla mezzeria dell'ala verso l'esterno) $l_0 \to l_t$

taper ratio: $l_t / l_0 = t$ rapporto di rastremazione

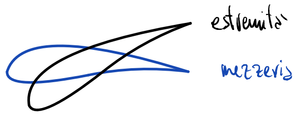
in alternativa: ala non rastremata $c = K$.

- (a pianta rettangolare) $\lambda = b^2/S = \frac{b^2}{b \cdot c} = \frac{b}{c}$



- $\boxed{\text{ala svergolata}}$ (twisted wing)

. svergolamento geometrico: profili tutti dello stesso tipo, ma non giacciono sullo stesso piano



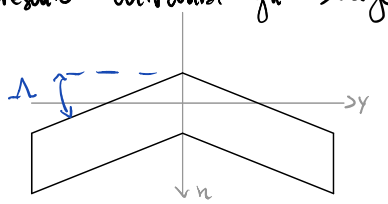
(es: Naca 44-12, ..) (α varia)

wash in (solito, ma possibile wash out: estremità)

. svergolamento aerodinamico: corde giacciono sullo stesso piano, ma il tipo di profilo cambia lungo l'apertura alare.

in molti casi, l'ala presenta entrambi gli svergolamenti

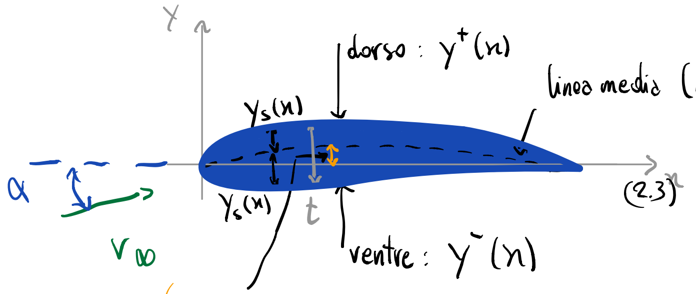
- ala a freccia



Λ: angolo di freccia
sweepback angle

2.2) Introduzione e Nomenclatura profilo alare

oss I) cambia il s.r.



(2.3) $$\boxed{Y_m(x) = \frac{y^+(x) + y^-(x)}{2}}$$

$\frac{\delta}{c}$ maximum camber δ inarcamento: maggiore distanza tra c e $Y_m(x)$

oss II) profilo simmetrico (privo di inarcamento) $\Rightarrow$ $y^-(x) = -y^+(x)$

$\Downarrow$

$c \equiv$ linea media

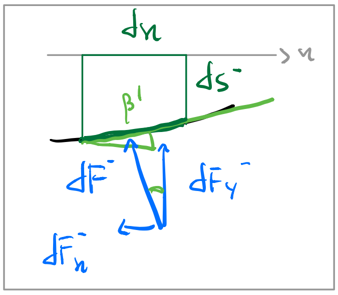
legge di distribuzione dello spessore : $$\boxed{Y_s(x) = \frac{y^+(x) - y^-(x)}{2}}$$ (2.4)

Spessore massimo : t

spessore relativo t/c

oss II) dalla 2ª hp. $\beta', \beta << 1 \Rightarrow \beta \simeq \beta'$

zoom 3



$$dF_x^- = -(p^- - p_\infty)\sin\beta' \, ds^- = -(p^- - p_\infty)\sin\beta \, ds^- \quad (2.8.1)$$

$$dF_y^- = +(p^- - p_\infty)\cos\beta' \, ds^- = +(p^- - p_\infty)\, dx \quad (2.8.2)$$

oss III) dalla 2ª hp: $|dF_x^\pm| << |dF_y^\pm| \Rightarrow |R_x| << |R_y| \quad (2.9)$

$\vec{R} \rightarrow R_x, R_y$: $R_x = \int_0^c dF_x^+ + \int_0^c dF_x^-$

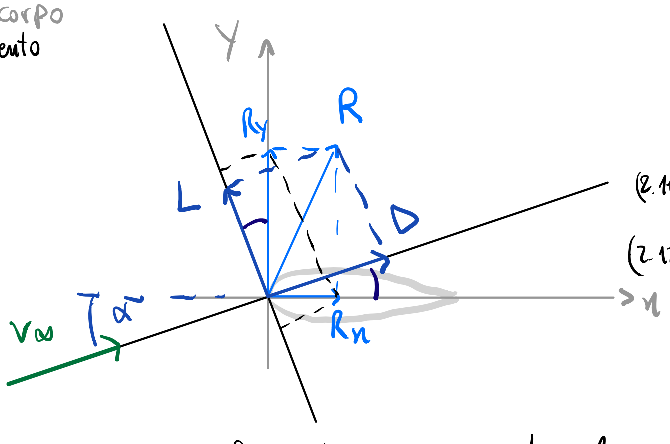
$$R_y = \int_0^c dF_y^+ + \int_0^c dF_y^- =$$

$$(2.10) \qquad = \int_0^c \left[(p^- - p_\infty) - (p^+ - p_\infty)\right] dx = \int_0^c (p^- - p^+)\, dx$$

Ala ad allungamento finito (→ .. Lez 9)

Componenti secondo gli assi vento (non in scala)

S.R. corpo
S.R. vento



D (drag): Resistenza

L (lift): Portanza

$$(2.11) \quad \boxed{L = R_y \cos\alpha - R_x \sin\alpha}$$

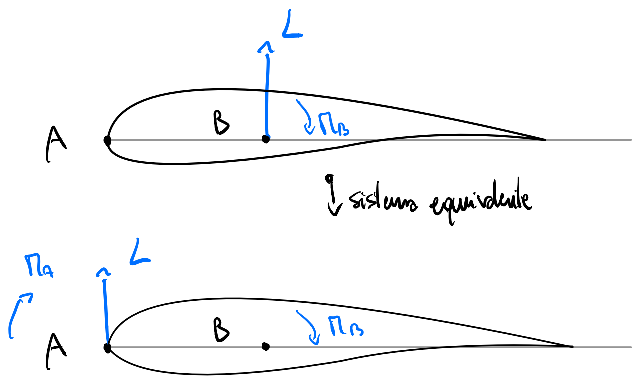
$$(2.12) \quad \boxed{D = R_x \cos\alpha + R_y \sin\alpha}$$

se $\alpha << 1$ rad $\Rightarrow \begin{cases} \sin\alpha \simeq \alpha \\ \cos\alpha \simeq 1 \end{cases} \rightarrow$

$$L = R_y - R_x \alpha \simeq R_y \quad (2.11.2)$$

$$D = R_x + R_y \alpha \simeq R_x \quad (2.12.2)$$

oss V)
- Poiché il momento risultante rispetto al C.P. è nullo, consideriamo un sistema di forze equivalente con la risultante sul punto A e il momento cercato come quello aggiuntivo
- * anche dF_y^+ è disegnata (come dF_y^-) verso l'alto perché quello è il verso tale per cui entrambi danno un contributo opposto a $d\Pi_A$; inoltre, $p^+ - p_\infty < 0$.



B: generico punto lungo la corda

Formula di trasposizione del momento

$$\Pi_B = \Pi_A + L\, x_B \qquad (2.15)$$

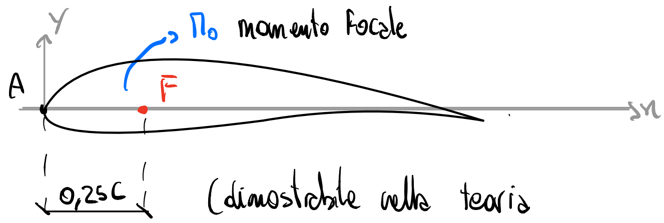
Per individuare il C.P. : $\Pi_B = 0 \iff \Pi_A + L\, x_{B^*} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x_{B^*} = x_{CP} = -\frac{\Pi_A}{L} > 0 \quad (2.16) \quad \Rightarrow \Pi_A < 0 \quad (\text{a picchiare})$$

oss VI) Al variare dell'assetto (di α)(e di V_∞) varia la posizione del C.P. che può essere esterno al profilo

Quindi si preferisce il Fuoco

$\boxed{\text{Fuoco}}$ di un profilo alare



(dimostrabile nella teoria delle piccole perturbazioni → ...)

F: punto lungo la corda tale per cui il momento è costante al variare dell'incidenza

$$\boxed{\frac{d\Pi_0}{d\alpha} = 0} \qquad (\leftarrow (2.2..))$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 23 di 216

$$\begin{cases} c = 1-d-e \\ a+2-d-2e-3+3d+3e-d-e=1 \\ b=2-d-2e \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 1-d-e \\ a+d=2 \Rightarrow a = 2-d \\ b = 2-d-2e \end{cases}$$

$$F \sim \ell^{2-d}\, v^{2-d-2e}\, \rho^{1-d-e}\, \mu^{d}\, p^{e}$$

$$F \sim \rho v^2 \ell^2 \left[\ell^{-1} v^{-1} \mu \rho^{-1}\right]^d \left[v^{-2}\rho^{-1} p\right]^e =$$

$$= \rho v^2 \ell^2 \Bigg[\underbrace{\frac{\mu}{\ell v \rho}}_{= 1/Re}\Bigg]^d \Bigg[\underbrace{\frac{p}{\rho v^2}}_{(1/M)^2}\Bigg]^e \Leftarrow c^2 = \gamma \frac{p}{\rho} \sim \frac{p}{\rho}$$

$$\boxed{F \sim \rho v^2 \ell^2\, Re^{-d}\, M^{-2e}}$$

$$[N] = \left[\frac{kg}{m^3}\frac{m^2}{s^2} m^2\right][-][-] \checkmark$$

Introduzione all'Aerodinamica di base: coefficienti adimensionali

coefficiente adimensionale della forza (riprendendo oss VIII)..)

$$\Delta \quad \boxed{C_F = \frac{F}{\frac{1}{2}\rho v^2 S}} = f(\alpha, Re, M) \quad (2.16)$$

Per Ala (ad allungamento finito)

oss X) • Pedici in maiuscolo
• S: superficie in pianta

coefficiente di Portanza

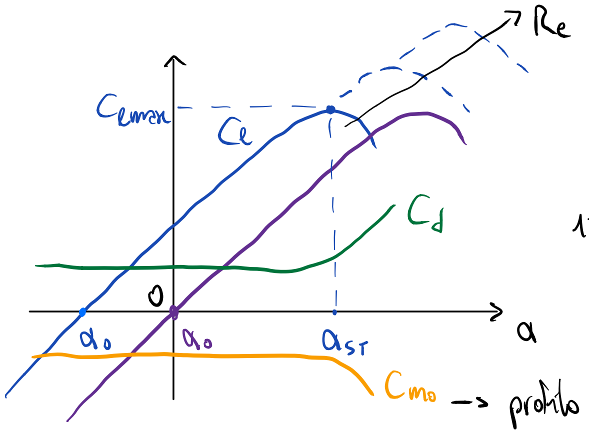
$$(2.17)\ \Delta \quad \boxed{C_L = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho v_\infty^2 S}} = f_L(\alpha, \beta, Re, M)$$

coefficiente di resistenza

$$(2.18)\ \Delta \quad \boxed{C_D = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho v_\infty^2 S}} = f_D(\alpha, \beta, Re, M)$$

Curva $C_l - \alpha$, $C_d - \alpha$ e $C_{m_0} - \alpha$

(da misurazioni in galleria del vento o simulazioni numeriche)



α_0: incidenza di portanza nulla

$\boxed{\text{profilo incurvato}}$ $\simeq -2°, -3°$

$\boxed{\text{profilo simmetrico}}$ $\Rightarrow \alpha_0 = 0$

12° ~ α_{ST}: incidenza di stallo

(più o meno marcata perdita di portanza)

C_{m_0} → profilo incurvato (altrimenti, $C_{m_0} = 0$)

Influenza del Re: Re ↑ ⇒ $C_l - \alpha$ si estende nel suo tratto lineare

$$\boxed{\left.\frac{\partial C_l}{\partial \alpha}\right|_{\text{tratto lineare}} = C_l'}$$

: coefficiente angolare di portanza del profilo

Nella teoria dei profili sottili, si dimostra: $\boxed{C_l' = 2\pi}$ (2.23)

oss x I): α in rad

↑ dalla teoria delle piccole perturbazioni applicata ai profili

(2.24) $C_l'(\alpha - \alpha_0) = \boxed{2\pi(\alpha - \alpha_0) = C_l}$ → è sufficiente conoscere α_0 per valutare il C_l

... per un'ala le cose si complicano (→...)

Così come per le forze, anche per la pressione esiste un parametro adimensionale

Coefficiente di pressione

(2.25) $$\boxed{C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2}}$$

pressione statica in un punto del profilo

pressione dinamica in condizioni asintotiche

Dati due profili in similitudine geometrica, a parità di $\boxed{Re, \Pi \text{ e } \alpha}$, il C_p è lo stesso in punti corrispondenti (anche se pressioni diverse)

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 27 di 216

3) Equazioni Fondamentali

Premesse: richiami sugli operatori matematici

operatore Nabla $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k} \right)$

- dato F scalare* → gradiente di F: $\nabla F = \frac{\partial F}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\hat{k}$ vettore

es: pressione $p \Rightarrow \nabla p = \frac{\partial p}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\hat{k}$

* se $\vec{F}$ è un vettore, $\nabla\vec{F}$ restituisce un tensore (→ ...)

- dato $\vec{q}$ vettore → divergenza di $\vec{q}$: $\nabla\cdot\vec{q} = \nabla\cdot(q_x\hat{i} + q_y\hat{j} + q_z\hat{k}) =$

attenzione

$= \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}$ scalare

(per tensore di un vettore → ...)

$\boxed{\nabla\cdot\vec{q} = 0 \Rightarrow \text{campo solenoidale}}$

→ volume costante

es: velocità $\vec{v} = (u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k}) \Rightarrow \nabla\cdot\vec{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$

La p.f. (particella fluida) si può deformare ma non può cambiare volume

- dato $\vec{q}$ vettore → rotore di $\vec{q}$: $\nabla\times\vec{q} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ q_x & q_y & q_z \end{vmatrix} =$

$= \left(\frac{\partial q_z}{\partial y} - \frac{\partial q_y}{\partial z} \right)\hat{i} - \left(\frac{\partial q_z}{\partial x} - \frac{\partial q_x}{\partial z} \right)\hat{j} + \left(\frac{\partial q_y}{\partial x} - \frac{\partial q_x}{\partial y} \right)\hat{k}$ vettore

$\boxed{\nabla\times\vec{q} = 0 \Rightarrow \text{campo irrotazionale:}}$ $\exists\ \Phi$ funzione potenziale scalare: $\nabla\Phi = \vec{q}$

dimostrazione $\nabla\times\vec{q} = \nabla\times(\nabla\Phi) = 0$

es: $\vec{v} = (u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k}) \rightarrow \nabla\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ u & v & w \end{vmatrix} =$

$$\vec{v}\,\vec{v} = \begin{bmatrix} uu & uv & uw \\ vu & vv & vw \\ wu & wv & ww \end{bmatrix} = \bar{\bar{A}}$$

$$\nabla \cdot \bar{\bar{A}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} uu & uv & uw \\ vu & vv & vw \\ wu & wv & ww \end{bmatrix} =$$

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}(uu) + \frac{\partial}{\partial y}(uv) + \frac{\partial}{\partial z}(uw) \right) \quad \left(\frac{\partial}{\partial x}(vu) + \frac{\partial}{\partial y}(vv) + \frac{\partial}{\partial z}(vw) \right) \quad \left(\frac{\partial}{\partial x}(wu) + \frac{\partial}{\partial y}(wv) + \frac{\partial}{\partial z}(ww) \right) \right]$$

$$\nabla \cdot \bar{\bar{A}} = \left(\frac{\partial}{\partial x}(uu) + \frac{\partial}{\partial y}(uv) + \frac{\partial}{\partial z}(uw) \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial}{\partial x}(vu) + \frac{\partial}{\partial y}(vv) + \frac{\partial}{\partial z}(vw) \right) \hat{j} +$$

$$+ \left(\frac{\partial}{\partial x}(wu) + \frac{\partial}{\partial y}(wv) + \frac{\partial}{\partial z}(ww) \right) \hat{k}$$

Δ $\bar{\bar{D}}$: tensore velocità di deformazione

$$\boxed{tr(\bar{\bar{D}})} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \boxed{\nabla \cdot \vec{v}} \quad (3.1)$$

velocità di dilatazione volumetrica

le altre componenti indicano invece la velocità di deformazione di taglio
(variazione di forma ma non di volume)

$\square \longrightarrow$ ▱

Δ $\bar{\bar{B}}$: tensore velocità di rotazione

! 3 componenti indipendenti $\Rightarrow$ nessuna perdita di informazione in $\boxed{\vec{b} = (\hat{\imath} \cdot \vec{b}, \hat{\jmath} \cdot \vec{b}, \hat{k} \cdot \vec{b})}$

$$\vec{b} = \left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right), \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right), \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)\hat{\imath} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)\hat{\jmath} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$\vec{w} = \nabla \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ u & v & w \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)\hat{\imath} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)\hat{\jmath} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\hat{k} = 2\vec{b}$$

$$(3.2) \quad \boxed{\vec{b} = \frac{\vec{w}}{2} = \vec{\Omega}} : \quad \Delta \text{ velocità di rotazione della p.f.}$$

I) traslazione (rigida) $\longmapsto \vec{v}$

II) rotazione (rigida) $\longmapsto \bar{\bar{B}}, \ \vec{b} = \frac{\vec{w}}{2} = \vec{\Omega} = \frac{\nabla \times \vec{v}}{2}$

III) dilatazione volumetrica $\longmapsto tr(\bar{\bar{D}}) = \nabla \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$

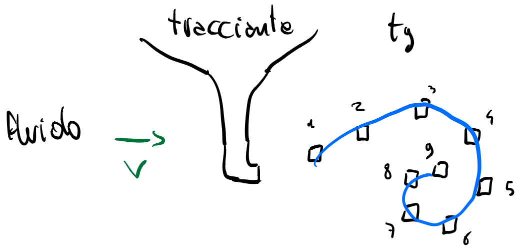
IV) deformazione (a taglio) $\longmapsto \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad i \neq j$

per illustrare ↴

c) **Streak lines** (o Linee di fumo)

Linea che unisce le posizioni (in un dato istante) di tutte le particelle rilasciate in un punto prefissato in istanti successivi.

es:

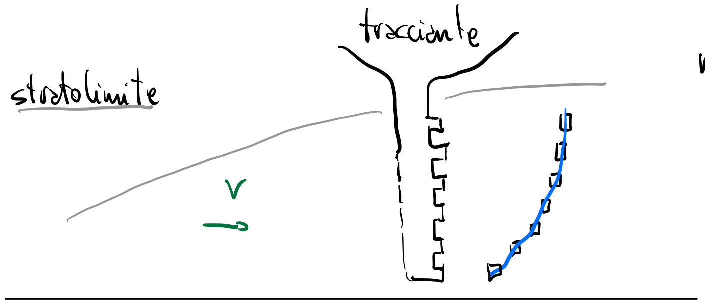


mostrano la **coerenza spaziale** delle strutture interne al fluido

d) **Timelines**

Linea che unisce le posizioni (in un dato istante) di tutte le particelle rilasciate da più punti nello stesso istante.

es: strato limite



mostrano la **coerenza temporale** delle strutture interne al fluido

oss II) In caso di flusso stazionario $\frac{\partial}{\partial t}=0$: pathline, streamline e streak line coincidono.

oss III) Prima spiegazione del concetto di coerenza (funzioni di correlazione $\rightarrow$ ...)
Dipendenza del vettore velocità di ogni punto appartenente a una struttura fluida (es: struttura vorticosa) da un criterio

es: $T \rightarrow \nabla T$ Legge di Fourier $\boxed{\vec{q} = -K\nabla T}$

equazione di bilancio dell'energia interna $\Rightarrow -\nabla\cdot\vec{q} = -\nabla\cdot[-K\nabla T] \Leftrightarrow$ per fluido a proprietà costanti

$$-\nabla\cdot\vec{q} = K\nabla^2 T \quad \text{con} \quad \nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

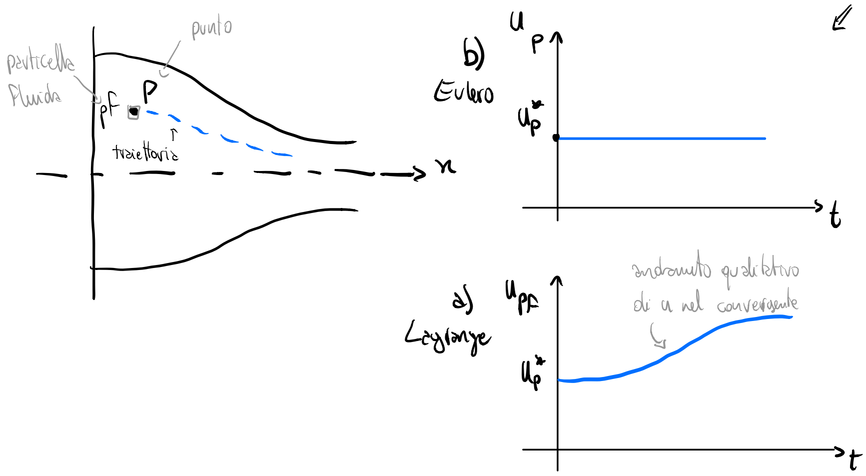
Laplaciano

Derivata locale o euleriana: $\boxed{\frac{\partial u}{\partial t}}$: valutazione dell'accelerazione a punto fisso (in una direzione)

Caso stazionario: $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

Spiegazione differenze tra a) e b) tramite esempio

Flusso all'interno di un condotto convergente; $\frac{\partial}{\partial t} = 0$.



Componente longitudinale della velocità delle particelle che passano nel punto P

Componente longitudinale della velocità della p.f. che all'istante $t=0$ si trovava in P

Derivata Lagrangiana = Derivata Euleriana + Termine convettivo

(→ AD Lez 3.1)

3.2) $\boxed{\text{Sforzi nel Fluido}}$

Fluido soggetto a

- Forze di campo (a raggio di azione lungo) (gravitazionali, elettrostatiche..) globali
  └ azioni esterne ┘
- Forze Interne o Superficiali (a raggio di azione corto) (pressioni,..)
  localmente a superficie σ alla quale le parti di fluido sono vicine
  └ legate alla natura molecolare ┘ direttamente proporzionali all'estensione di σ

3.2.1) $\boxed{\text{Sforzi normali e tangenziali}}$

(...←) agiscono su una superficie σ del fluido

In un S.R. (1, 2, 3), si definisce Π tensore degli sforzi

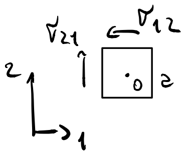
$$\Pi = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

simmetrico: $\boxed{\sigma_{ij} = \sigma_{ji}}$

$\Rightarrow$ solo 6 componenti

dimostrazione: equilibrio alla rotazione di un cubetto elementare

rapp. in piano di una sola faccia



$$0 \circlearrowleft \quad \sigma_{12} \frac{a}{2} - \sigma_{21} \frac{a}{2} = 0$$

Π rappresenta un [$\underline{\text{Campo tensoriale}}$ $\mapsto t$, spazio] $\Leftarrow$ $\boxed{\text{definito per ogni punto del dominio e istante per istante}}$

a) $\boxed{\text{Fluido in quiete}}$ (..←) : solo sforzi normali (1°))

$$\Pi = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix} \iff \Pi_{ij} = \delta_{ij}\,\sigma_{ij} \quad \text{(notazione)} \quad 3.5$$

δ_{ij} ↓ $\underline{\text{Delta di Kronecker}}$: $\begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

⇓

In questo caso Π rappresenta un $\underline{\text{campo scalare}}$

(3.9) $\boxed{\Pi = -p \,\bar{\bar{I}} + \bar{\bar{\tau}}}$ ← notazione tensore

$\boxed{\text{osservazioni valide per fessi di } dp \text{ non elevati}}$

(3.9.2) $\boxed{\pi_{ij} = -p\,\delta_{ij} + \tau_{ij}}$

tensore degli sforzi viscosi ($\Leftrightarrow \exists\, \nabla \vec{v} \neq 0$)

↑ gradienti di velocità

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix} + \boxed{\begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{bmatrix}}$$

simmetrico

⇓

$\bar{\bar{\tau}}$ simmetrico: $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ → solo 6 componenti

$$(3.10) \qquad \tau_{ii} = \sigma_{ii} + p = \sigma_{ii} - \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} \sigma_{ii} \qquad i = 1,2,3$$

$tr(\bar{\bar{\tau}}) = 0$; infatti:

$$\sum_{i=1}^{3} \sigma_{ii} = -p-p-p + \sum_{i=1}^{3} \tau_{ii} = -3\left(-\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}\sigma_{ii}\right) + \sum_{i=1}^{3}\tau_{ii} \Leftrightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{3} \sigma_{ii} = \sum_{i=1}^{3} \sigma_{ii} + \sum_{i=1}^{3} \tau_{ii} \Leftrightarrow \boxed{\sum_{i=1}^{3} \tau_{ii} = 0} \qquad (3.11)$$

per i termini non diagonali: $\boxed{\tau_{ij} = \sigma_{ij}}$ $\quad i \neq j$

3.2.2) $\boxed{\text{Relazione tra gli sforzi viscosi e le deformazioni}}$

hp 1: $\bar{\bar{\tau}}$ dipende solamente dalla distribuzione istantanea della velocità

moto fluido
- I) traslazione rigida ↦ $\vec{v}$
- II) rotazione rigida ↦ $\bar{\bar{B}}$ ($\vec{b} = \frac{\vec{w}}{2}$)
- III) dilatazione volumetrica ↦ $tr(\bar{\bar{D}}) = \nabla \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$
- IV) distorsione forma ↦ D_{ij} $\quad i \neq j$

$$\bar{\bar{\tau}} = 2\mu \bar{\bar{D}} + \left(\mu_{bulk} - \frac{2}{3}\mu\right) \nabla\cdot\vec{v}\, \delta_{ij} \qquad (3.12.4)$$

$$\tau_{ij} = 2\mu D_{ij} + \left(\mu_{bulk} - \frac{2}{3}\mu\right) D_{kk}\, \delta_{ij} \qquad (3.12.5)$$

Ipotesi di Stokes: (la pressione del fluido in movimento coincide con la p TD)

dp trascurabili $\Rightarrow \mu_{bulk} \to 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = -\frac{2}{3}\mu}$ (3.13.2)

$$\bar{\bar{\tau}} = 2\mu\bar{\bar{D}} - \frac{2}{3}\mu\,\nabla\cdot\vec{v}\,\bar{\bar{I}} \Leftrightarrow \boxed{\bar{\bar{\tau}} = 2\mu\left(\bar{\bar{D}} - \frac{1}{3}\nabla\cdot\vec{v}\,\bar{\bar{I}}\right)} \qquad (3.12.6)$$

Equazione costitutiva per i fluidi Newtoniani - Stokesiani

Per mostrare la validità dell'hp di Stokes: da (3.11) e da (3.12.3) con $i = j$:

$$\sum_{i=1}^{3} \tau_{ii} = \mu \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right) + \lambda \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \underbrace{\sum_{i=1}^{3}\delta_{ii}}_{3} =$$

$$= 2\mu \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + 3\lambda \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \Leftrightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{3}\tau_{ii} = (2\mu + 3\lambda)\sum_{k} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0 \to 2\mu + 3\lambda = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = -\frac{2}{3}\mu} \blacksquare$$

oss III) $\sum_{i=1}^{3} \tau_{ii} \neq \nabla\cdot\bar{\bar{\tau}} = \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{33}}{\partial z}$

2° contributo
- $\boxed{q_v}$ (sorgenti volumiche): distribuite all'interno di Ω
- $\boxed{\vec{q}_s}$ (sorgenti superficiali): distribuite sulla σ

$\int_\Omega q \, d\Omega = Q$

$Q \not\mapsto (x,y,z)$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\int_\Omega q \, d\Omega = -\int_\sigma \vec{f}_q \cdot \vec{n} \, d\sigma + \int_\Omega q_v \, d\Omega + \int_\sigma \vec{q}_s \cdot \vec{n} \, d\sigma} \quad (3.13)$$

Legge di conservazione in forma integrale per una quantità scalare

oss.] Valida anche se esistono discontinuità nel campo di moto per le quantità scalare.

Se i flussi e le sorgenti superficiali sono continui e differenziabili $\rightarrow$

$\exists \Omega$ fisso nello spazio $\rightarrow$ commutazione integrale/derivata; $\exists$ Teorema di Gauss $\Rightarrow$

$$\int_\Omega \frac{\partial q}{\partial t} d\Omega + \int_\Omega \nabla \cdot \vec{f}_q \, d\Omega = \int_\Omega q_v \, d\Omega + \int_\Omega \nabla \cdot \vec{q}_s \, d\Omega$$

invece ora $q(x,y,z,t)$

poiché Ω è arbitrario (oppure per $\Omega \rightarrow 0$) $\rightarrow$

$$\boxed{\frac{\partial q}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{f}_q = q_v + \nabla \cdot \vec{q}_s} \quad (3.14)$$

Legge di conservazione in forma differenziale per una quantità scalare

analogamente ..

3.4) Equazioni della Meccanica dei Fluidi

- la massa non si crea e non si distrugge : natura cinematica ~~no~~ forze applicate al Ω
- la variazione di quantità di moto è uguale alle forze applicate (generalizzazione legge di Newton)
- l'energia non si crea e non si distrugge (I principio TD)

3.4.1) Conservazione della massa

$q \rightarrow \rho$ $\quad$ $Q \rightarrow m$ $\quad$ hp1: assenza di sorgenti di massa volumiche e superficiali

$\vec{F}_q \rightarrow \rho\vec{v}$: flusso di m per unità di volume

(3.17) $$\boxed{\frac{d}{dt}\int_{\Omega} \rho \, d\Omega = -\int_{\sigma} \rho\vec{v}\cdot\vec{n}\, d\sigma}$$

oss I) $\vec{v}\cdot\vec{n}$ positivo $\Rightarrow$ portata uscente di fluido

Legge di conservazione in forma integrale della massa

oss I) 3.3.1) (← ...) $\Rightarrow \displaystyle\int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t}\, d\Omega = -\int_{\Omega} \nabla\cdot(\rho\vec{v})\, d\Omega \Rightarrow$

$\uparrow$ Ω arbitrario

(3.18) $$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\vec{v}) = 0}$$

Equazione di conservazione della massa in forma differenziale o Equazione di continuità

sviluppando $\quad \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v}\,\nabla\cdot\rho + \rho\,\nabla\cdot\vec{v} = 0 \quad$ con $\quad \dfrac{D\rho}{Dt} = \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla\rho$

↑ vedi richiamo operatore ∇

$$\boxed{\frac{D\rho}{Dt} = -\rho\,\nabla\cdot\vec{v}} \quad (3.19)$$

Equazione di continuità in forma Lagrangiana

$$\Rightarrow \quad \boxed{\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \bar{\bar{\tau}} + \rho \vec{F}} \qquad (3.23)$$

poiché (si dimostra) $\vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = \nabla\left(\frac{v^2}{2}\right) - \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) = \nabla\left(\frac{v^2}{2}\right) - \vec{v} \times \vec{w}$

$$\text{da } (3.22) \rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla\left(\frac{v^2}{2}\right) - \vec{v} \times \vec{w} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \bar{\bar{\tau}} + \vec{F}} \qquad (3.24)$$

3.4.3) Conservazione dell' energia

dato E energia totale per unità di massa, $E = e + \frac{v^2}{2}$ (energia interna + cinetica, per unità di massa)

$q \rightarrow \rho E$ energia totale per unità di volume

$\vec{F}_q = \rho E \vec{v}$

sorgenti superficiali: $\bar{\bar{\pi}} \cdot \vec{v}$ (Lavoro degli sforzi superficiali nell'unità di tempo) ; $-\vec{q}_s$ (flusso termico conduttivo o superficiale di calore)

sorgenti volumiche $\rho \vec{F} \cdot \vec{v}$ (Lavoro delle forze di campo nell'unità di tempo) ; $+q_v$ (generiche sorgenti di calore volumiche)

$$\boxed{\frac{d}{dt}\int_\Omega \rho E \, d\Omega = -\int_\sigma \rho E (\vec{v} \cdot \vec{n}) \, d\sigma + \int_\sigma (\bar{\bar{\pi}} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{n} \, d\sigma + \int_\Omega \rho \vec{F} \cdot \vec{v} \, d\Omega - \int_\sigma \vec{q}_s \cdot \vec{n} \, d\sigma + \int_\Omega q_v \, d\Omega} \qquad (3.25)$$

Legge di conservazione in forma integrale dell' energia totale

oss #) 3.3.1) (← ...) $\Rightarrow \int_\Omega \frac{\partial}{\partial t} \rho E \, d\Omega = -\int_\Omega \nabla \cdot (\rho E \vec{v}) \, d\Omega + \int_\Omega \nabla \cdot (\bar{\bar{\pi}} \cdot \vec{v}) \, d\Omega + \int_\Omega \rho \vec{F} \cdot \vec{v} \, d\Omega - \int_\Omega \nabla \cdot \vec{q}_s \, d\Omega + \int_\Omega q_v \, d\Omega$

$$\Omega \text{ arbitrario} \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial}{\partial t}(\rho E) + \nabla \cdot (\rho E \vec{v}) = \nabla \cdot (\bar{\bar{\pi}} \cdot \vec{v}) + \rho \vec{F} \cdot \vec{v} - \nabla \cdot \vec{q}_s + q_v} \qquad (3.26)$$

Equazione di bilancio dell' energia totale in forma differenziale

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 49 di 216

$$\rho \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{v^2}{2}\right) + \rho \vec{v} \cdot \left[\nabla\left(\frac{v^2}{2}\right) - \vec{v} \times \vec{\omega} \right] = -\nabla p \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \nabla \cdot \bar{\bar{\tau}} + \rho \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$$\rho \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{v^2}{2}\right) + \rho \vec{v} \cdot \nabla\left(\frac{v^2}{2}\right) - \rho \vec{v} \cdot \underbrace{(\vec{v} \times \vec{\omega})}_{\perp \Rightarrow \; = 0} = -\nabla p \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \nabla \cdot \bar{\bar{\tau}} + \rho \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$$\boxed{\rho \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{v^2}{2}\right) + \rho \vec{v} \cdot \nabla\left(\frac{v^2}{2}\right) = -\nabla p \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot (\nabla \cdot \bar{\bar{\tau}}) + \rho \vec{F} \cdot \vec{v}} \quad (3.29)$$

Equazione di bilancio dell' energia meccanica (o cinetica)

e, in forma lagrangiana: (3.30)
$$\boxed{\rho \frac{D}{Dt}\left(\frac{v^2}{2}\right) = -\nabla p \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot (\nabla \cdot \bar{\bar{\tau}}) + \rho \vec{F} \cdot \vec{v}}$$

lavori per unità di tempo: forze di pressione, sforzi viscosi, forze di campo

b) Equazione dell' energia interna

da (3.28)
$$\rho \frac{DE}{Dt} = \underbrace{-\nabla \cdot (p\vec{v})}_{-p \nabla \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \nabla p} + \underbrace{\nabla \cdot (\bar{\bar{\tau}} \cdot \vec{v})}_{\vec{v} \cdot (\nabla \cdot \bar{\bar{\tau}}) + (\bar{\bar{\tau}} \cdot \nabla) \cdot \vec{v}} + \rho \vec{F} \cdot \vec{v} - \nabla \cdot \vec{q} + q_v$$

e (3.30)
$$\rho \frac{D}{Dt}\left(\frac{v^2}{2}\right) = -\nabla p \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot (\nabla \cdot \bar{\bar{\tau}}) + \rho \vec{F} \cdot \vec{v}$$

poiché $E = e + \frac{v^2}{2}$ $\Rightarrow$ $e = E - \frac{v^2}{2}$ $\longrightarrow$ (3.28.2) − (3.30) =

$$\underbrace{\rho \frac{DE}{Dt} - \rho \frac{D}{Dt}\left(\frac{v^2}{2}\right)} = -p \nabla \cdot \vec{v} \underbrace{- \vec{v} \cdot \nabla p + \nabla p \cdot \vec{v}}_{0} + \underbrace{\vec{v} \cdot (\nabla \cdot \bar{\bar{\tau}}) - \vec{v} \cdot (\nabla \cdot \bar{\bar{\tau}})}_{0} + (\bar{\bar{\tau}} \cdot \nabla) \cdot \vec{v} - \nabla \cdot \vec{q} + q_v$$

$$\boxed{\rho \frac{De}{Dt} = -p \nabla \cdot \vec{v} + (\bar{\bar{\tau}} \cdot \nabla) \cdot \vec{v} - \nabla \cdot \vec{q} + q_v} \quad (3.31)$$

Equazioni di Navier-Stokes per ρ, $\rho\vec{v}$ ed E:

$\rightarrow$ (3.18)
$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\vec{v}) = 0}$$

(3.23.2) $\rightarrow$ (3.35)
$$\rho\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho\vec{v}\cdot\nabla\vec{v} = -\nabla p + \nabla\cdot\Big(\overbrace{2\mu\,\underbrace{\bar{\bar{D}}}}\, - \frac{2}{3}\mu\,\nabla\cdot\vec{v}\,\bar{\bar{I}}\Big) + \rho\vec{F}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\rho\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho\vec{v}\cdot\nabla\vec{v} = -\nabla p + \nabla\cdot\left[\mu\left(\nabla\vec{v} + \nabla\vec{v}^{T}\right) - \frac{2}{3}\mu\,\nabla\cdot\vec{v}\,\bar{\bar{I}}\right] + \rho\vec{F}}$$

(3.28.2) $\rightarrow$ (3.36)
$$\boxed{\rho\frac{\partial E}{\partial t} + \rho\vec{v}\cdot\nabla E = -\nabla\cdot(p\vec{v}) + \nabla\cdot\left\{\left[\mu\left(\nabla\vec{v}+\nabla\vec{v}^{T}\right) - \frac{2}{3}\mu\,\nabla\cdot\vec{v}\,\bar{\bar{I}}\right]\cdot\vec{v}\right\} + \rho\vec{F}\cdot\vec{v} + \nabla\cdot(k\nabla T) + q_v}$$

Notazione indiciale relativa a S.R. x_1, x_2, x_3 $\rightarrow$ $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)^T$.
Per generico $j/k/i = 1,2,3$ ai indica, in questo caso, una sommatoria; si ha:

(3.18.2)
$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i) = 0}$$

(3.35.2)
$$\boxed{\rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\mu\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\delta_{ij}\right] + \rho f_i}$$

(es: $i=1$: $\sum_j$ e $\sum_k$ $\Rightarrow$ bilancio qdm per direzione 1)

(3.36.2)
$$\boxed{\rho\left(\frac{\partial E}{\partial t} + u_i\frac{\partial E}{\partial x_i}\right) = -\frac{\partial}{\partial x_i}(p u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\left[\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\mu\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\delta_{ij}\right]u_i\right\} + \rho f_i u_i + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k\frac{\partial T}{\partial x_i}\right) + q_v}$$

Per alti Re, gli effetti di viscosità e conducibilità termica sono confinati a sottili regioni $\rightarrow$ fluido inviscido modello di Eulero

$$\rho\left[\frac{De}{Dt} + p\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{\rho}\right)\right] = \rho D - \nabla\cdot\vec{q} + q_v$$

da $\underset{\substack{\uparrow\\ \text{entropia specifica}}}{T\,ds} = de + p\,d\left(\frac{1}{\rho}\right) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{fluido in movimento}}}{\longrightarrow} T\frac{Ds}{Dt} = \frac{De}{Dt} + p\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{\rho}\right)$

$$\Rightarrow \boxed{\rho T\frac{Ds}{Dt} = \rho D - \nabla\cdot\vec{q} + q_v} \quad (3.43)$$

Equazione di trasporto dell'entropia

ossI) $\rho D \geq 0 \Leftarrow$ tiene conto di una trasformazione irreversibile

$-\nabla\cdot\vec{q} + q \gtrless 0 \Leftarrow$ tiene conto di una trasformazione che può essere reversibile

$$\frac{Ds}{Dt} = \frac{\partial s}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla s$$

• se fluido non viscoso e non conducibile $\Rightarrow \boxed{\frac{Ds}{Dt} = 0}$: trasformazione isentropica (3.44)

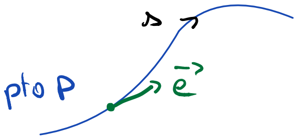
entropia della p. fluida costante al muoversi della p.f. lungo la sua traiettoria

• entropia costante in tutto il campo $\Rightarrow \boxed{\nabla s = 0}$ trasformazioni omoentropiche (3.45)

entalpia $h = e + p/\rho$

$$\Rightarrow dh = de + d(p/\rho) = de + p\,d\left(\frac{1}{\rho}\right) + \frac{1}{\rho}dp \underset{\substack{\uparrow\\ T\,ds = de + p\,d\left(\frac{1}{\rho}\right)}}{=} T\,ds + \frac{1}{\rho}dp$$

per passare ai gradienti attraverso le derivate direzionali:



linea all'interno del campo di moto; $\vec{e}$ versore tangente

$$\frac{dh}{ds} = \nabla h\cdot\vec{e} \Rightarrow dh = (\nabla h\cdot\vec{e})\,ds$$

$$\frac{dp}{ds} = \nabla p\cdot\vec{e} \Rightarrow dp = (\nabla p\cdot\vec{e})\,ds$$

$$\frac{ds}{ds} = \nabla s\cdot\vec{e} \Rightarrow ds = (\nabla s\cdot\vec{e})\,ds$$

dal Libro: Corrente potenziale di un fluido incompressibile

4.1) Conservazione della pressione totale in flusso stazionario e incomprimibile

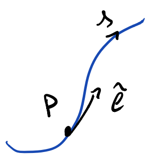
hp1: Flusso stazionario $\left(\frac{\partial}{\partial t}=0\right)_{1.1}$, incomprimibile $\left(d\rho=0\right)_{1.2}$, inviscido $\left(\tau=0\right)_{1.3}$

da cons. qdm (3.23.2): $\cancel{\frac{\partial \vec v}{\partial t}} + \vec v \cdot \nabla \vec v = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \cancel{\frac{1}{\rho}\nabla\cdot\bar{\bar{\tau}}} + \cancel{\vec f}$

con hp1.3: $\tau_{ij}=0 \quad \forall i,j$ e hp2: $\vec f = 0$ (ricordando $\vec v\cdot\nabla\vec v = \nabla\left(\frac{v^2}{2}\right) - \vec v\times\vec\omega$)

$$\Rightarrow \quad \boxed{\nabla\left(\frac{v^2}{2}\right) - \vec v\times\vec\omega = -\frac{1}{\rho}\nabla p} \qquad (4.1)$$

rispetto a versore tangente a linea di corrente



$$\nabla\left(\frac{v^2}{2}\right)\cdot\hat e - \underbrace{(\vec v\times\vec\omega)}_{\perp \vec v}\cdot\underbrace{\hat e}_{/\!/ \vec v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p\cdot\hat e \Rightarrow$$

$$\nabla\left(\frac{v^2}{2}\right)\cdot\hat e = -\frac{1}{\rho}\nabla p\cdot\hat e \qquad (4.2)$$

passaggio dei gradienti ai differenziali tramite le derivate direzionali $\longrightarrow$

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{v^2}{2}\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} = 0 \qquad (4.3)$$

sfruttando hp1.2: $\rho = \text{cost.}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\frac{\partial}{\partial s}\left(p + \frac{1}{2}\rho v^2\right) = 0}$ (4.4)

<u>Lungo una linea di corrente,</u> $\underbrace{p}_{\text{pressione statica}} + \underbrace{\frac{1}{2}\rho v^2}_{\text{pressione dinamica}} = \underbrace{p^0}_{\text{pressione totale o d'arresto}}$ è costante

⇓

in generale, $p + \frac{1}{2}\rho v^2$ cambia da ldc a ldc

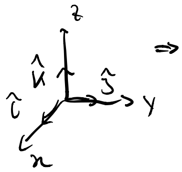
$$\begin{cases} \vec{v} = \nabla \Phi \\ \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla\left(\dfrac{v^2}{2}\right) = -\dfrac{1}{\rho}\nabla p + \vec{g} \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \Phi) + \nabla\left(\frac{v^2}{2}\right) = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \vec{g} \qquad (4.8)$$

Linearità

$$\nabla\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right) + \nabla\left(\frac{v^2}{2}\right) = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \vec{g} \rightarrow$$

$$\rightarrow \nabla\left(\frac{\partial}{\partial t}\Phi + \frac{v^2}{2}\right) + \frac{1}{\rho}\nabla p - \vec{g} = 0 \qquad \text{con } \nabla \times \vec{g} = 0 \Rightarrow \exists\, \mathcal{H} : \nabla \mathcal{H} = \vec{g}$$

Funzione potenziale di $\vec{g}$



$$\Rightarrow \mathcal{H} = -gz \qquad (4.9)$$

con ρ cost $\Rightarrow$ può entrare sotto il segno di gradiente

Teorema di Bernoulli per $\frac{\partial}{\partial t} \neq 0$, $d\rho = 0$, $\vec{\omega} = 0$

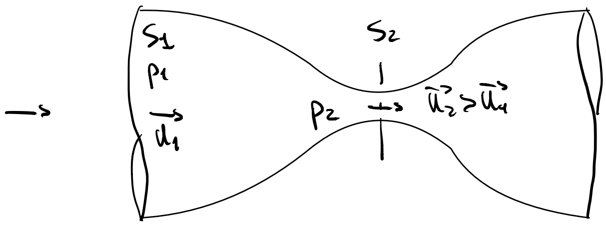
$$(4.10) \quad \boxed{\nabla\left(\frac{\partial}{\partial t}\Phi + \frac{v^2}{2} + \frac{1}{\rho}p + gz\right)} = 0 \Rightarrow (4.11) \quad \boxed{\rho\frac{\partial \Phi}{\partial t} + p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z = F(t)}$$

oss III) Costanza nello spazio ma non nel tempo finché non si fa l'ipotesi di stazionarietà

Teorema di Bernoulli per $\frac{\partial}{\partial t} = 0$, $d\rho = 0$, $\vec{\omega} = 0$

$$\text{se } \frac{\partial}{\partial t} = 0 \qquad \boxed{p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z = \text{cost.}} \quad (4.12) \quad \overset{4.4}{\Leftrightarrow} \quad p^{\circ} + y z = \text{cost.} \qquad (4.13)$$

es: tubo di Venturi



- $\partial/\partial t = 0$; $d\rho = 0$; $\vec{\omega} = 0$

$\Rightarrow \dot{V} = \text{cost}$ e $\dot{m} = \rho \dot{V} = \text{cost} \rightarrow$

$\rightarrow u_1 S_1 = u_2 S_2 \Rightarrow v_2 = u_1 \dfrac{S_1}{S_2}$

irrotazionalità $\underset{(4.12)}{\Rightarrow}$ $p_1 + \frac{1}{2}\rho_1 u_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho_2 u_2^2 = \text{cost}$ $\quad \underbrace{p\downarrow \Rightarrow u\uparrow, \ p\uparrow \Rightarrow u\downarrow}_{\text{Bernoulli II}}$

La (3.48) si può riscrivere:

sfruttando: $-\nabla\left(\frac{1}{\rho}\right) \times \nabla p = \frac{1}{\rho^2}\nabla\rho \times \nabla p$; se il flusso è barotropico (ovvero $\rho = f(p) \Leftrightarrow \rho$ dipende solo dalla pressione $\Rightarrow \nabla\rho \parallel \nabla p$), oppure se il flusso è incomprimibile: $\rho = \text{cost} \Rightarrow \nabla\rho = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = -\vec{\omega}(\nabla\cdot\vec{v}) + \vec{\omega}\cdot\nabla\vec{v} + \nabla\times\left(\frac{1}{\rho}\nabla\cdot\bar{\bar{\tau}}\right) + \nabla\times\vec{f}} \qquad (3.49)$$

Considerando la vorticità specifica: $\frac{\vec{\omega}}{\rho} \rightarrow \rho\frac{D}{Dt}\left(\frac{\vec{\omega}}{\rho}\right) = \rho\left[\frac{1}{\rho}\frac{D\vec{\omega}}{Dt} + \vec{\omega}\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{\rho}\right)\right]$

con $\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{\rho}\right) = -\frac{1}{\rho^2}\frac{D\rho}{Dt} \overset{(3.18)}{=} +\frac{1}{\rho^2}\rho\nabla\cdot\vec{v} \Rightarrow \frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{\rho}\right) = \frac{1}{\rho}\nabla\cdot\vec{v}$

$$\Rightarrow \rho\frac{D}{Dt}\left(\frac{\vec{\omega}}{\rho}\right) = \cancel{\rho}\left[\frac{1}{\cancel{\rho}}\frac{D\vec{\omega}}{Dt} + \frac{\vec{\omega}}{\rho}\nabla\cdot\vec{v}\right] = \frac{D\vec{\omega}}{Dt} + \vec{\omega}\,\nabla\cdot\vec{v} \qquad (3.50)$$

sostituendo in (3.48)

$$\boxed{\rho\frac{D}{Dt}\left(\frac{\vec{\omega}}{\rho}\right) = \vec{\omega}\cdot\nabla\vec{v} + \frac{1}{\rho^2}\nabla\rho\times\nabla p + \nabla\times\left(\frac{1}{\rho}\nabla\cdot\bar{\bar{\tau}}\right) + \nabla\times\vec{f}} \qquad (3.51)$$

La (3.51) regola l'evoluzione della $\vec{\omega}$, ovvero il moto con cui viene trasportata la $\vec{\omega}$ che attiene a una p.f. durante il moto lungo la sua (della p.f.) traiettoria

$\frac{1}{\rho^2}\nabla\rho\times\nabla p$: termine sorgente legato alla produzione di vorticità quando $\nabla p \neq 0$ e i gradienti di p e di ρ non risultano paralleli (flusso non barotropico) ruolo fondamentale in fluidodinamica ambientale

$\nabla\times\vec{f}$: termine sorgente legato alla produzione di vorticità per effetto di un campo di forze, quando tale campo non è irrotazionale

$$\Rightarrow \boxed{\frac{D}{Dt}\left(e+\frac{v^2}{2}+\frac{p}{\rho}\right)=\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial t}} \qquad (4.14)$$

$$h = e+\frac{p}{\rho} \Rightarrow (4.15)\ \boxed{\frac{D}{Dt}\left(h+\frac{v^2}{2}\right)=\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial t}} = \boxed{\frac{\partial}{\partial t}\left(h+\frac{v^2}{2}\right)+\vec{v}\cdot\nabla\left(h+\frac{v^2}{2}\right)=\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial t}} \ (4.16) \qquad h+\frac{v^2}{2}=H$$

se $\frac{\partial}{\partial t}=0$: stazionarietà : $\underbrace{v\,\hat{e}\cdot\nabla\left(h+\frac{v^2}{2}\right)=v\,\nabla\left(h+\frac{v^2}{2}\right)\hat{e}=v\,\frac{d}{ds}\left(h+\frac{v^2}{2}\right)}$

$$(4.17)\quad \vec{v}\cdot\nabla\left(h+\frac{v^2}{2}\right)=0 \qquad \text{con } \vec{v}=v\,\hat{e} \Rightarrow \frac{d}{ds}\left(h+\frac{v^2}{2}\right)=\nabla\left(h+\frac{v^2}{2}\right)\cdot\hat{e}$$

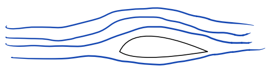
se $v\neq 0$

$\boxed{\frac{d}{ds}\left(h+\frac{v^2}{2}\right)=0}$ (4.17) $\Rightarrow$ H entalpia totale o d'arresto costante su una linea di corrente

se tutte le linee di corrente sono caratterizzate da p°, T° ben definite (ad esempio,

T_m°, P_m°

- quando provengono da condizioni di serbatoio)
- oppure, provengono da una zona di flusso uniforme con condizioni totali costanti (come per il profilo alare).



H è costante in tutto il campo

$$H = h+\frac{v^2}{2} \qquad H = c_p T^\circ \qquad h = c_p T$$

$$\Rightarrow c_p T^\circ = c_p T + \frac{v^2}{2} \Rightarrow T^\circ = T + \frac{v^2}{2c_p} \longrightarrow T^\circ = T + \frac{v^2 c^2}{c^2\, 2c_p} = T + \frac{c^2}{2c_p}M^2$$

$$\Rightarrow T^\circ = T + \frac{\gamma R T}{c_p}\frac{M^2}{2} = T\left(1+\frac{\cancel{\gamma R}}{\cancel{\gamma R}}\frac{\gamma-1}{2}M^2\right) \Rightarrow \boxed{T^\circ = T\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)} \qquad (4.18)$$

se $ds=0$

$$\frac{T^\circ}{T}=\left(\frac{p^\circ}{p}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \Rightarrow \frac{p^\circ}{p}=\left(\frac{T^\circ}{T}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \Rightarrow \boxed{p^\circ = p\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}} \qquad (4.19)$$

$$\frac{T^\circ}{T}=\left(\frac{\rho^\circ}{\rho}\right)^{\gamma-1} \Rightarrow \frac{\rho^\circ}{\rho}=\left(\frac{T^\circ}{T}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \Rightarrow \boxed{\rho^\circ = \rho\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}} \qquad (4.20)$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 63 di 216

$$\Rightarrow \quad \frac{D}{Dt}(\vec{w}\cdot\vec{n}\,d\sigma) = \left[\frac{D\vec{w}}{Dt} - \vec{v}\cdot\nabla\vec{w} - \nabla\times(\vec{v}\times\vec{w})\right]\cdot\vec{n}\,d\sigma$$

$$\text{con} \quad -\nabla\times(\vec{v}\times\vec{w}) = -\underbrace{(\nabla\cdot\vec{w})}_{=0}\vec{v} + \vec{v}\cdot\nabla\vec{w} - \vec{w}\cdot\nabla\vec{v} + \vec{w}\underbrace{(\nabla\cdot\vec{v})}_{\text{incomprimibilità} \Rightarrow\ =0}$$

$$\rightarrow \quad \frac{D}{Dt}(\vec{w}\cdot\vec{n}\,d\sigma) = \Big[\underbrace{\frac{D\vec{w}}{Dt} - \cancel{\vec{v}\cdot\nabla\vec{w}} + \cancel{\vec{v}\cdot\nabla\vec{w}} - \vec{w}\cdot\nabla\vec{v}}_{(4.24)\,=\,0}\Big]\cdot\vec{n}\,d\sigma \qquad \blacksquare$$

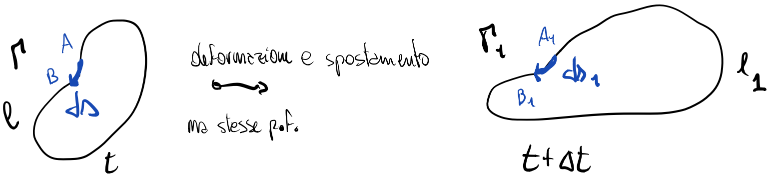
$$(4.25) \quad \boxed{\frac{D}{Dt}(\vec{w}\cdot\vec{n}\,d\sigma) = 0}$$

Teorema di Helmoltz

Domanda lecita: se flusso non viscoso (hp1), senza forze di campo (hp3), ma comprimibile (~~hp2~~)

∃ hp4: flusso barotropico (barotropicità e incomprimibilità annullano lo stesso termine della (3.48))

circuitazione Γ su linea materiale ℓ



$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Gamma_1-\Gamma}{\Delta t} \quad \text{con} \quad \Gamma_1 = \oint_{\ell_1}\vec{v}\cdot d\vec{s} \quad e \quad \Gamma = \oint_{\ell}\vec{v}\cdot d\vec{s} \quad \rightarrow$$

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left[\oint_{\ell_1}\vec{v}\cdot d\vec{s} - \oint_{\ell}\vec{v}\cdot d\vec{s}\right] \overset{\text{della }\Delta}{=} \frac{D}{Dt}\left(\oint_{\ell}\vec{v}\cdot d\vec{s}\right)$$

ℓ costituita sempre dalle stesse particelle fluide $\Rightarrow$ commutabilità $\oint$ e D/Dt.

$$\Rightarrow \frac{D}{Dt}\oint_{\ell}\vec{v}\cdot d\vec{s} = \oint_{\ell}\frac{D}{Dt}(\vec{v}\cdot d\vec{s}) = \oint_{\ell}\vec{v}\cdot\frac{D}{Dt}d\vec{s} + \oint_{\ell}\frac{D\vec{v}}{Dt}\cdot d\vec{s} = \frac{D\Gamma}{Dt}$$

$$\frac{D}{Dt}d\vec{s} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{d\vec{s}_1 - d\vec{s}}{\Delta t} \underset{\Uparrow}{=} \lim_{\Delta t\to 0}\frac{d\vec{v}\,\Delta t}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0} d\vec{v} = d\vec{v}$$

$$B_1 - A_1 - (B-A) = \vec{AB_1} \qquad \vec{AA_1} + d\vec{s}_1 = \vec{AB} + \vec{BB_1} \Leftarrow ⓐ$$

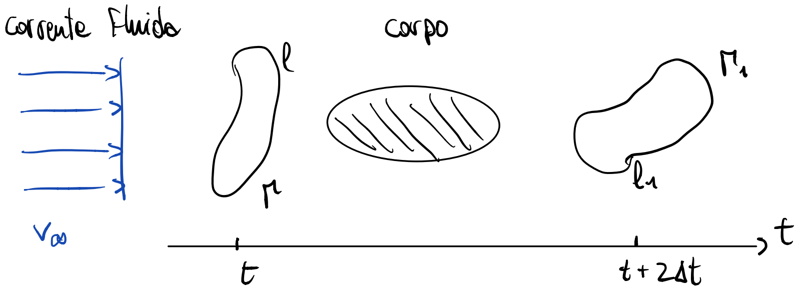
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 65 di 216

La circuitazione che attiene a una linea materiale nel caso di fluido incomprimibile (a) o barotropico (b) (e in assenza di $\vec{F}$) rimane costante.

oss I) c.p.: Considerando aree infinitesime $d\sigma$ racchiusa da ℓ.

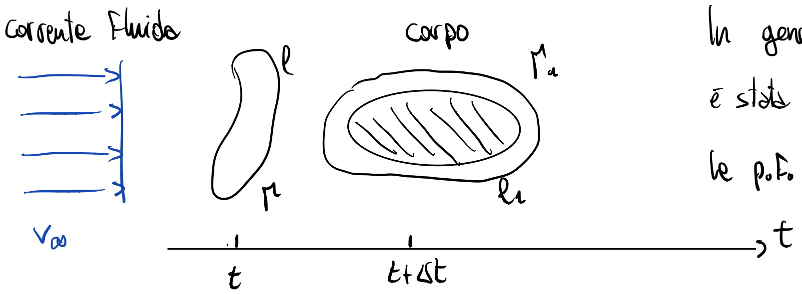
$$\Rightarrow d\Gamma = \vec{\omega}\cdot\vec{n}\, d\sigma \Rightarrow \frac{D}{Dt}(d\Gamma) = \underbrace{\frac{D}{Dt}(\vec{\omega}\cdot\vec{n}\, d\sigma) = 0}_{\text{Teorema di Helmoltz (4.25)}}$$

es:



Kelvin's Th $\Rightarrow$

$\Rightarrow \Gamma_1 = \Gamma$



In generale $\Gamma_1 \neq \Gamma$ perché ℓ è stata aperta e richiusa, quindi le p.f. posso essere diverse

($\hookrightarrow$ applicazione a profilo alare: la L (portanza) è legata proprio a $\frac{D\Gamma}{Dt}$)
ben avviato aerodinamicamente anche con $\alpha = 0$

Legenda

$\Rightarrow$ implica (che) / causa

$\circ\!\!\longrightarrow$ passaggio / trasformazione

$\mapsto$ dipende da

$\rightsquigarrow$ tramite / per mezzo di.

$\sim\!\!>$ ingresso/uscita

$/X$ per unità di X

K costante

Δ variazione

STD Sistema Termodinamico

! solo/soltanto

$\triangleq$ definizione

tutto torna!

gas ideale : c_p e c_v $\not\mapsto T$

(in aerodinamica, invece, ideale vuol dire non viscoso)

$-\!\otimes\!\!\rightarrow$ impedisce/blocca

$\propto$ legato a

$$\begin{cases} p + \frac{1}{2}\rho v^2 = p_\infty + \frac{1}{2}\rho v_\infty^2 \\ C_p = \dfrac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho v_\infty^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p - p_\infty = \frac{1}{2}\rho (v_\infty^2 - v^2) \\ C_p = \dfrac{\cancel{\frac{1}{2}}\cancel{\rho}(v_\infty^2 - v^2)}{\cancel{\frac{1}{2}}\cancel{\rho}\, v_\infty^2} = \boxed{1 - \dfrac{v^2}{v_\infty^2} = C_p} \end{cases} \quad (5.5)$$

Bernoulli.2

$\Updownarrow$ (3.37.5)

$\exists$ hp4: irrotazionalità $\boxed{\nabla \times \vec{v} = \vec{w} = 0}$ (5.3)

da (3.18.2) $\nabla \cdot \vec{v} = 0$

da (3.37.5) $p + \frac{1}{2}\rho v^2 =$ costante (su tutte le linee di corrente)

poiché il dominio è semplicemente connesso,

$$\nabla\times\vec{v} = 0 \Rightarrow \exists\, \Phi : \vec{v} = \nabla \Phi \quad : \quad \nabla\cdot\vec{v} = \nabla \cdot (\nabla \Phi) = \boxed{\nabla^2 \Phi = 0} \quad (5.4)$$

oss I) (5.4) valida anche senza hp3. Inoltre è lineare (←.. oss I) AD Lez4): vale il PSE $\Rightarrow$

scomposizione in casi semplificati del campo di velocità e somma dei risultati

$$\boxed{\Phi = \sum_{i=1}^{N} \Phi_i} \Rightarrow \boxed{\vec{v} = \sum_{i=1}^{N} \vec{v}_i} = \sum_{i=1}^{N} \nabla \Phi_i$$

(...) ← legato a...

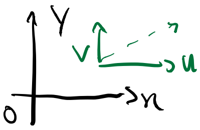
oss II) p e v^2 non lineare $\Rightarrow$ $p \neq \sum_{i=1}^{N} p_i$ (→... Sarà possibile nella Teoria delle piccole perturbazioni)

hp1 $\nexists$ hp2

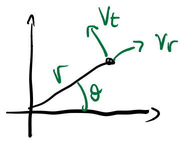
$\exists$ hp3 $\exists$ hp4

$$\begin{cases} \nabla\cdot\vec{v} = 0 \longrightarrow \\ \nabla\times\vec{v} = 0 \\ p + \frac{1}{2}\rho v^2 = cost \end{cases} \quad \begin{cases} \nabla^2 \Phi = 0 \\ C_p = 1 - \left(\dfrac{v}{v_\infty}\right)^2 \end{cases}$$

$\exists$ hp 5 $\boxed{\text{bidimensionalità}}$ (S.R. x-y)



(S.R. (r, θ))



(3.18.2) $\Rightarrow$ $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0$ (5.6)

(3.37.5) $\Rightarrow$ $p + \frac{1}{2}\rho\,(u^2 + v^2) = cost.$ (5.7)

(5.3) $\Rightarrow$ $\dfrac{\partial u}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0$ (5.8)

$$\vec{v} = \nabla\Phi = \begin{cases} \boxed{u = \dfrac{\partial \Phi}{\partial x}} \\ \boxed{v = \dfrac{\partial \Phi}{\partial y}} \end{cases} \quad (5.9.1,2)$$

$$\boxed{v_r = \dfrac{\partial \Phi}{\partial r}} \qquad \boxed{v_t = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \Phi}{\partial \theta}} \quad (5.10.1,2)$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 71 di 216

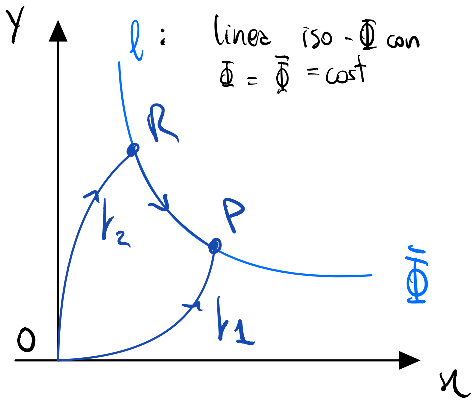
Dimostrazione:

la circuitazione di un campo conservativo è nulla.

$$\Gamma = \underbrace{\oint_{S-l}}_{\Delta \text{ di circuitazione}} (\vec{v}\cdot\hat{t})\,ds \underset{\text{Stokes' Th.}}{=} \int_\sigma \underbrace{(\nabla\times\vec{v})}_{\vec{\omega}=0}\cdot\vec{n}\,d\sigma = 0$$

$\vec{\omega} = 0 \Leftarrow$ irrotazionale (hp 3)

inoltre:

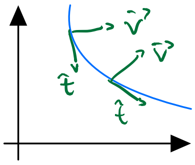


$$\begin{cases} \Phi_P = \bar{\Phi} = \int_{O,r_1}^{P} (\vec{v}\cdot\hat{t})\,ds \\ \Phi_P = \bar{\Phi} = \int_{O,r_2}^{R} (\vec{v}\cdot\hat{t})\,ds + \int_{R}^{P} (\vec{v}\cdot\hat{t})\,ds \end{cases} \Rightarrow$$

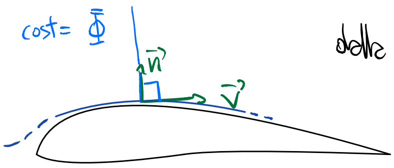
$$\Rightarrow \int_R^P (\vec{v}\cdot\hat{t})\,ds = 0 \Leftarrow \boxed{\vec{v}\cdot\hat{t} = 0} \quad (5.13)$$

$$\Downarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v} \perp \hat{t} \text{ lungo linea iso-}\Phi}$$



es: su profilo alare



dalla condizione di tangenza:

$$\vec{v}\cdot\vec{n} = 0 \Leftrightarrow \nabla\Phi\cdot\vec{n} = 0$$

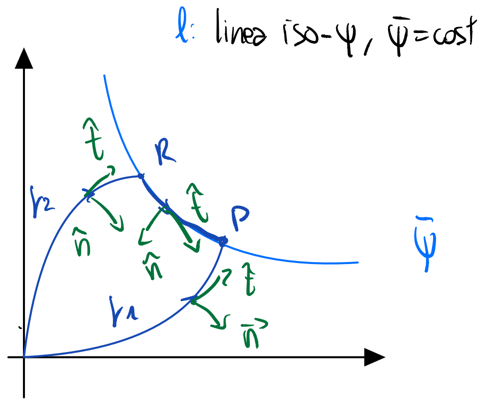
$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\Phi}{dn} = 0} \quad (5.14) \quad \blacksquare$$

2D: ∃hp1, ∃hp2 ∃hp3

$$\begin{cases} (5.6) \quad \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \\ (3.37.5) \text{ o } (5.5) \quad p + \frac{1}{2}\rho V^2 = cost \underset{\text{se note } p_\infty,\, V_\infty}{=} p_\infty + \frac{1}{2}\rho V_\infty^2 \\ (5.8) \quad \dfrac{\partial u}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y}(\Phi) - \dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y}(\Phi) = 0 \end{cases}$$

con $V^2 = u^2 + v^2 = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2$

inoltre:



$$\psi_P = \bar{\psi} = \int_{O,\gamma_1}^{P} (\vec{V}\cdot\vec{n})\, ds$$

$$\psi_P = \bar{\psi} = \int_{O,\gamma_2}^{R} (\vec{V}\cdot\vec{n})\, ds + \int_{R}^{P} (\vec{V}\cdot\vec{n})\, ds$$

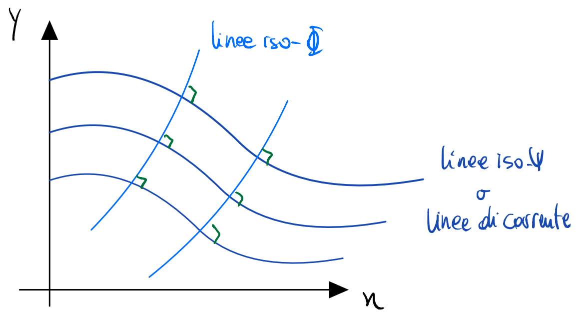
$$\Rightarrow \int_{R}^{P} (\vec{V}\cdot\vec{n})\, ds = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{V}\cdot\vec{n} = 0} \quad (5.17)$$

$$\Updownarrow$$

$$\Leftarrow \boxed{\vec{V} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \vec{V} // \hat{t}}$$

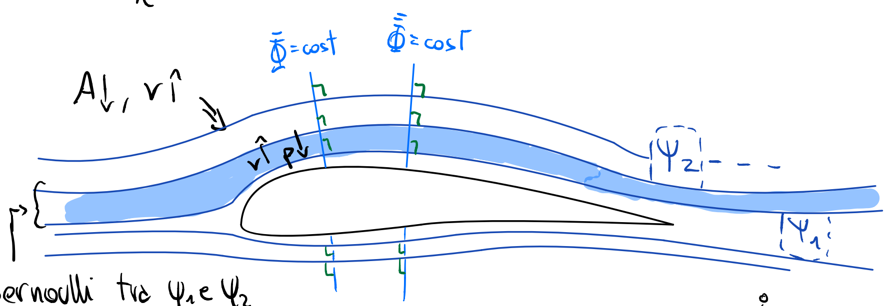
$\Rightarrow$ $\boxed{\text{linee iso-}\psi \equiv \text{linee di corrente}}$

(5.13)+(5.17) $\Rightarrow$ le linee iso-Φ intersecano perpendicolarmente le linee di corrente ($\overset{\text{linee iso-}\psi}{\parallel}$)



ψ = cost: $\vec{V}$

Φ = cost: $\vec{V}$



descrizione campo di moto attorno a profilo alare con linee iso-Φ e iso-ψ

ossIV) Due linee di corrente (ldc) individuano un tubo di flusso

Non c'é portata attraverso le ldc

La portata del tubo di flusso é data dalla $\overbrace{\text{differenza tra le } \psi \text{ delle due ldc}}^{|\psi_2-\psi_1|}$

$$d\psi\Big|_{AC} = -v_t\,dr \qquad d\psi\Big|_{CB} = +v_r\,r\,d\theta$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$(5.22.1)\quad \boxed{v_t = -\frac{\partial \psi}{\partial r}} \qquad \boxed{v_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta}} \quad (5.22.2)$$

$$\Rightarrow \boxed{d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial r}\,dr + \frac{\partial \psi}{\partial \theta}\,d\theta} \quad (5.23)$$

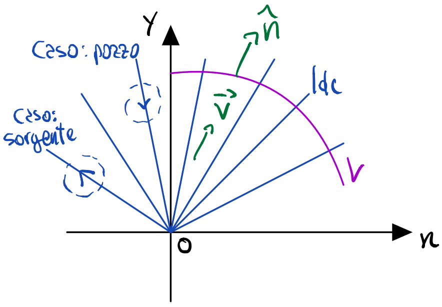
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 77 di 216

b) Perturbazioni attraverso singolarità

b1) Sorgente / Pozzo di portata Q.

introduzione / prelievo di portata

Punto (O) di singolarità: entra o esce portata in direzione radiale

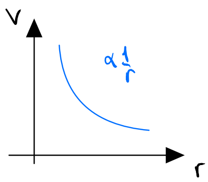


$$\vec{v} = \begin{cases} v_r = v \\ v_t = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{Q = \oint_{l} \vec{v} \cdot \vec{n} \, ds = v_r \cdot 2\pi r} \quad (5.25)$$

Q: portata per unità di profondità (caso 2D)

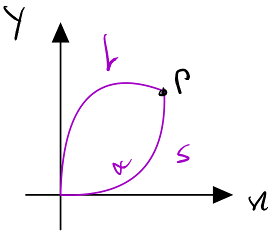
se nota $Q \begin{cases} > 0 \Leftarrow \text{sorgente} \\ < 0 \Leftarrow \text{pozzo} \end{cases}$ $\boxed{v = \dfrac{Q}{2\pi r}}$ (5.26): $r \to \infty \Rightarrow v \to 0$

$r \to 0 \Rightarrow \underbrace{v \to \infty}_{\text{singolarità}}$



Sfruttando le proprietà di $\psi = Q$ si ha

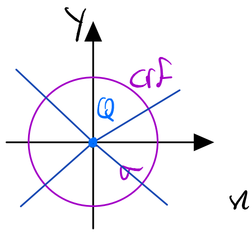
senza sorgenti all'interno di σ



$$Q = \oint_{s-l} \vec{v} \cdot \vec{n} \, ds = \int_{\sigma} \underbrace{\nabla \cdot \vec{v}}_{=0} \, d\sigma$$

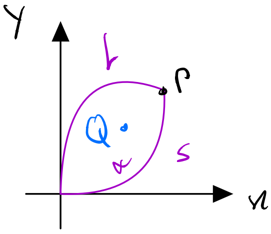
hp: incompressibilità

con sorgenti all'interno di σ I)



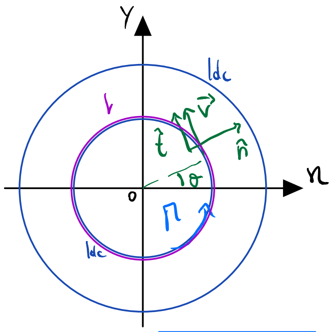
$$Q = \oint_{crf} \vec{v} \cdot \vec{n} \, ds = \int_{\sigma} \nabla \cdot \vec{v} \, d\sigma$$

II)



$$Q = \int_{s-l} \vec{v} \cdot \vec{n} \, ds = \int_{\sigma} \nabla \cdot \vec{v} \, d\sigma$$

b2) $\boxed{\text{Vortice irrotazionale}}$ di intensità Γ



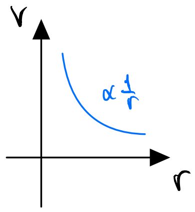
da (4.21) $\Gamma = \oint_{crf \equiv ldc} \vec{v}\cdot\vec{t}\, ds \begin{cases} >0 & \text{antiorario} \\ <0 & \text{orario} \end{cases}$

$$\vec{v} = \begin{cases} v_r = 0 \\ v_t = v \end{cases} \Rightarrow \Gamma = \int_{crf \equiv ldc} v_t\, r\, d\theta = \underset{v}{v_t}\, 2\pi r$$

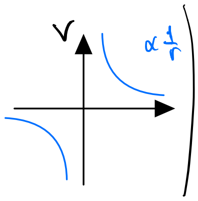
se noto $\Gamma \Rightarrow \boxed{v = \frac{\Gamma}{2\pi r}}$ (5.30)

$r \to \infty \Rightarrow v \to 0$

$r \to 0 \Rightarrow v \to \infty$

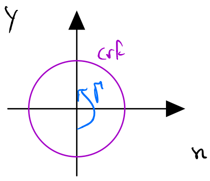


oppure, altra notazione:

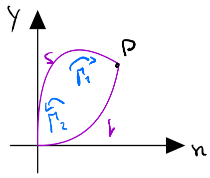


Sfruttando le proprietà di Γ, si ha:

con sorgenti all'interno di σ

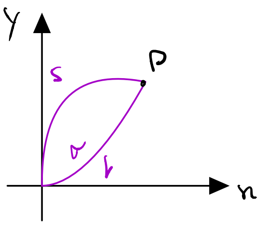


$$\oint_{crf} \vec{v}\cdot\vec{t}\, ds = \Gamma$$



$$\oint_{s-l} \vec{v}\cdot\vec{t}\, ds = -\Gamma_1 + \Gamma_2$$

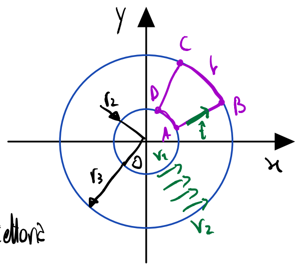
senza sorgenti all'interno di σ



$$\Gamma = \oint_{s-l} \vec{v}\cdot\vec{t}\, ds = \int_\sigma \underbrace{(\nabla \times \vec{v})}_{=0}\cdot\vec{n}\, d\sigma = 0$$

hp: irrotazionalità $\Rightarrow 0$

anche se le p.f. hanno moto circolare $\Rightarrow \vec{v}$ tangente traiettoria

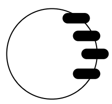


$$\Gamma = \underbrace{\oint_{ABCD} \vec{v}\cdot\vec{t}\, ds}_{=0} = \int_{A}^{B} \underbrace{\vec{v}\cdot\vec{t}}_{0=}\, ds + \int_{B}^{C} v_t\, r\, d\theta + \int_{C}^{D} \underbrace{\vec{v}\cdot\vec{t}}_{0=}\, ds + \int_{D}^{A} (-v_t)\, r\, d\theta$$

no Γ concatenate $\Rightarrow 0$

$\Rightarrow 0 = v_2 r_2 - v_1 r_1 \Rightarrow \boxed{v = \frac{K}{r}}$ (5.31) costante

oss: p.f. non ruotano su sé stesse



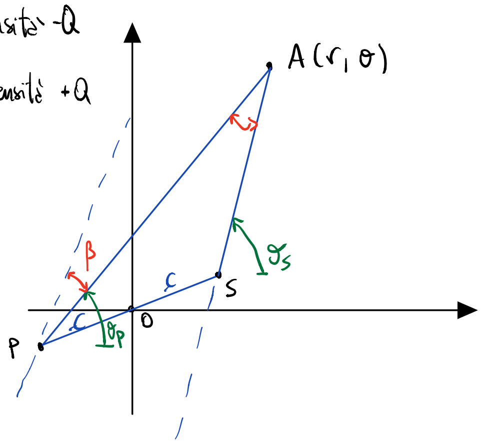
c) Doppietta

composizione di sorgente e pozzo, con distanza tra essi che tende a zero.

P: pozzo di intensità $-Q$

S: sorgente di intensità $+Q$

caso I) c finita



$$\Psi_A = \Psi_A|_S + \Psi_A|_P$$

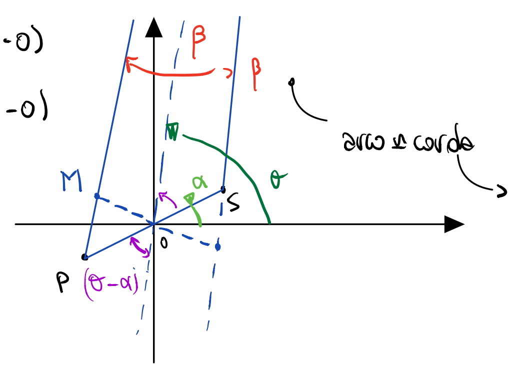
$$\Psi_A|_S = \frac{Q}{2\pi}\vartheta_S \qquad \Psi_A|_P = \frac{-Q}{2\pi}\vartheta_P$$

$$\Psi_A = \frac{Q}{2\pi}\underbrace{(\vartheta_S - \vartheta_P)}_{\beta} = \frac{Q}{2\pi}\beta$$

caso II) $c \to 0$ (rappresentazione zoomata)

$\overline{OM} = d(AP\text{-}O)$

$\overline{OC} = d(AS\text{-}O)$



$$\overline{MO} = c\sin(\theta-\alpha)$$

$$\overline{MN} = 2c\sin(\theta-\alpha)$$

$$r\beta \cong 2c\sin(\theta-\alpha) \Leftrightarrow \beta = \frac{2c}{r}\sin(\theta-\alpha)$$

$$\Rightarrow \Psi_A = \frac{Q}{2\pi}\frac{2c}{r}\sin(\theta-\alpha)$$

genericamente: $\Psi = \lim_{\substack{c\to 0\\ Q\to\infty}} \frac{2Qc}{2\pi r}\sin(\theta-\alpha)$ con $\boxed{\mu \overset{\Delta}{=} 2Qc}$ (5.34)

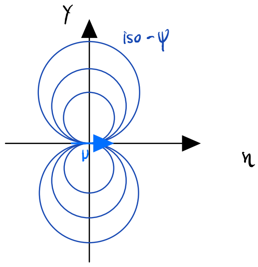
Momento della doppietta (intensità della singolarità)

(5.35) $\boxed{\Psi = \frac{\mu}{2\pi r}\sin(\theta-\alpha)}$

Analogamente[5a] $\boxed{\Phi = -\frac{\mu}{2\pi r}\cos(\theta-\alpha)}$ (5.36) la ldc circonferenziale (di ψ) è tale che:

$\psi \to 0 \Rightarrow r \to \infty$

ovvero degenera in una retta $\Rightarrow$



$$(5.36) \Rightarrow \Phi = -\frac{\mu}{2\pi r}\cos\theta = -\frac{\mu}{2\pi r}\frac{x}{r} = -\frac{\mu}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2}$$

$\Rightarrow x = 0 \Rightarrow \Phi = 0 \Rightarrow$ asse $y \equiv$ linea iso-Φ a $\Phi = 0$

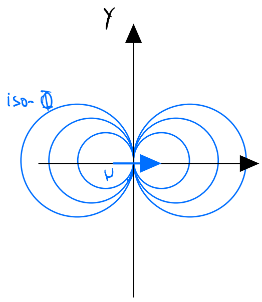
inoltre $x^2+y^2 = \frac{-\mu}{2\pi\Phi}x \Rightarrow x^2+y^2+\frac{\mu}{2\pi\Phi}x = 0$ eq. di circonferenza

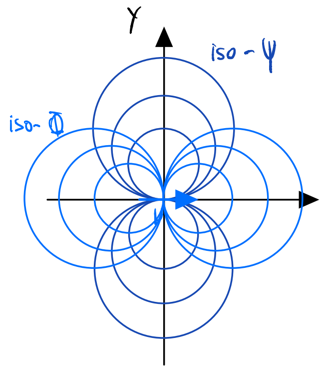
- $C_{entro\,circ}\left(\frac{-\mu}{4\pi\Phi}, 0\right)$
- $c^2 = x_c^2+y_c^2-r^2 \Leftrightarrow c^2 = 0 = \left(\frac{\mu}{4\pi\Phi}\right)^2 + 0 - r^2 \Rightarrow \boxed{r = \frac{\mu}{4\pi\Phi}}$ (5.38)

la linea iso-Φ circonferenziale è tale che

$\Phi \to 0 \Rightarrow r \to \infty$

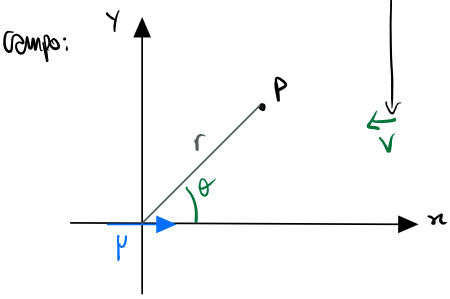
ovvero degenera in una retta





d4) $\boxed{\text{Doppietta con corrente uniforme}}$ ($\vec{\mu}$: allineata con $y=0$)

campo:



$\alpha=0 \qquad \vec{\mu}=\mu\hat{i} \qquad \vec{V}=-V_\infty\hat{i}$

$y_P = r\sin\theta \qquad x_P = r\cos\theta$

da $\psi\big|_V = -Vx+Uy$ e $\psi\big|_{Doublet} = \frac{\mu}{2\pi r}\sin(\theta-\alpha) \rightarrow$

$$\psi = \frac{\mu}{2\pi r}\sin\theta - V_\infty y = \frac{\mu}{2\pi r}\sin\theta - V_\infty r\sin\theta = \boxed{\left(\frac{\mu}{2\pi r} - V_\infty r\right)\sin\theta = \psi} \quad (5.39)$$

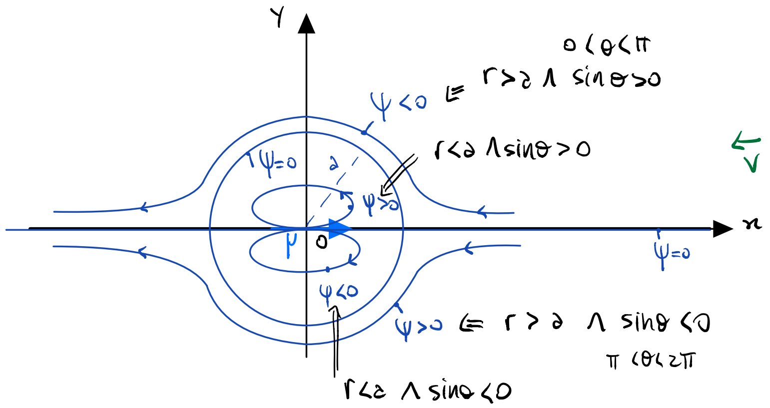
linee a $\psi=0 \Leftarrow \begin{cases} \bullet\ \sin\theta=0 \Leftrightarrow \theta=0,\ \theta=\pi \quad \vee \\ \bullet\ \frac{\mu}{2\pi r} = V_\infty r \Leftrightarrow \mu = 2\pi V_\infty r^2 \Rightarrow r = \boxed{\sqrt{\frac{\mu}{2\pi V_\infty}} \triangleq a} \ (5.40) \end{cases}$

raggio della circonferenza a $\psi=0$

oss VIII) $V_\infty\uparrow$ e $\mu=cost \Rightarrow r\downarrow$

oss IX) tali linee sono 2 semirette ($\theta=0$ e $\theta=\pi$) e una circonferenza di raggio a.

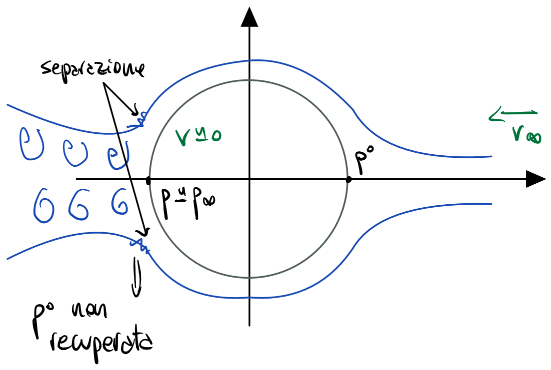
$$\text{Da } (5.39) \equiv \psi = V_\infty\left(\frac{\mu}{2\pi V_\infty r^2}-1\right)r\sin\theta \overset{(5.40)}{=} \boxed{V_\infty\left(\frac{a^2}{r^2}-1\right)r\sin\theta = \psi} \quad (5.41)$$

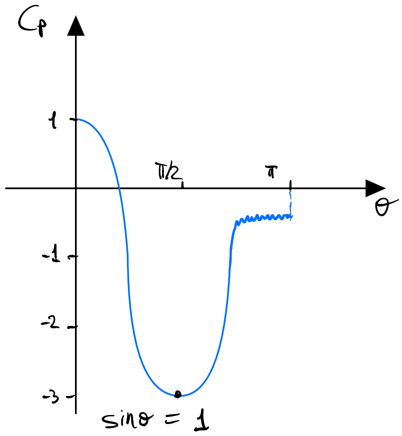


ossX) Questo campo di moto simula quello che si genera attorno a un cilindro (indefinito) investito da corrente uniforme (il campo interno non esiste in quel caso)

oss VII) lez 6.3 (←..) ⇒ Sostituzione ldc circonferenziale con parete solida cilindrica

Caso di Fluido reale



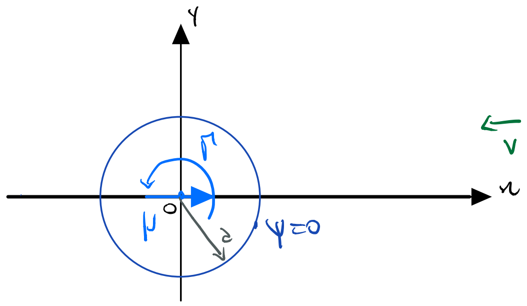


oss XIII) Simmetria sopra-sotto $\Rightarrow L = 0$; Asimmetria davanti-dietro $\Rightarrow$ $\boxed{D \neq 0}$

Resistenze 2D
- Resistenza di forma (o di pressione)
- Resistenza d'attrito — maggiore di $D_{attrito}$ nel caso (come questo) di corpi tozzi.
- Resistenza d'onda

3D $\to$ +
- Resistenza indotta

d2) $\boxed{\text{Vortice + Doppietta + Corrente uniforme}}$



$\vec{V} = -V_\infty \hat{i}$ $\quad r_0 = a$

Come fatto per (5.39) si potrebbero sommare i 3 contributi. Conoscendo però già il caso d1), gli si aggiunge il contributo di Γ

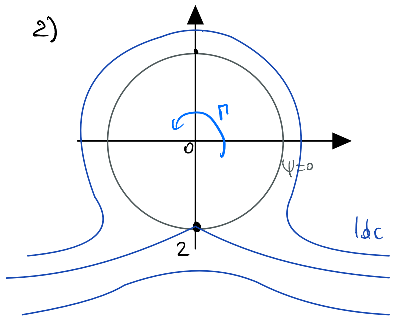
(5.40) $\Rightarrow$ (5.41) $\rightsquigarrow$ (5.44) $\boxed{\psi = V_\infty\left(\frac{a^2}{r^2} - 1\right) r\sin\theta + \left(\frac{-\Gamma}{2\pi}\ln\frac{r}{a}\right)}$ $\rightsquigarrow [r = a \Rightarrow \psi = 0]$

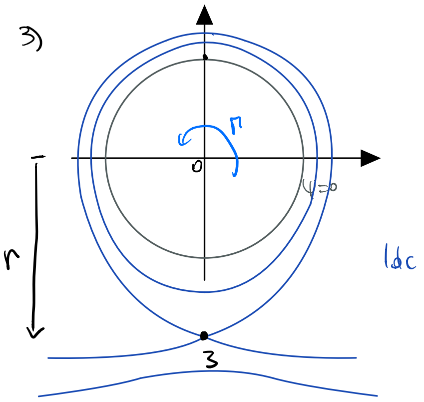
oss XIV) Questo campo simula quello di un cilindro (indefinito) investito da corrente uniforme e posto in rotazione dal vortice.

oss VII) 3.3 C) ($\leftarrow$..) $\Rightarrow$ Studio del campo di moto di cilindro rotante

2) $\Gamma = \Gamma_{lim} = 4\pi V_\infty a \Rightarrow \theta = 3\frac{\pi}{2} \quad (= -\frac{\pi}{2})$

p.d.a. coincidenti in 2 (condizioni limite)





3) $\boxed{\Gamma > 4\pi V_\infty a}$ p.d.a. a $\theta = -\frac{\pi}{2}$

ma lontani dalla superficie

(distanza $r > a$)
$\Downarrow$
$r \neq a$

se $r > a$: $\begin{cases} V_r = V_\infty \left(\frac{a^2}{r^2} - 1\right)\cos\theta \longrightarrow V_r = 0 \Leftrightarrow \cos\theta = 0 \quad \text{OK in } \theta = -\frac{\pi}{2} \\ V_t = V_\infty\left(\frac{a^2}{r^2}+1\right)\sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi r} \longrightarrow (5.47) \quad V_t = 0 \Leftrightarrow V_\infty\left(\frac{a^2}{r^2}+1\right)\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\Gamma}{2\pi r} = 0 \end{cases}$

ma $\theta = -\frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow -V_\infty \frac{a^2}{r^2} - V_\infty + \frac{\Gamma}{2\pi r} = 0 \Leftrightarrow \frac{a^2}{r^2} + 1 = \frac{\Gamma}{2\pi V_\infty r} \Rightarrow$$

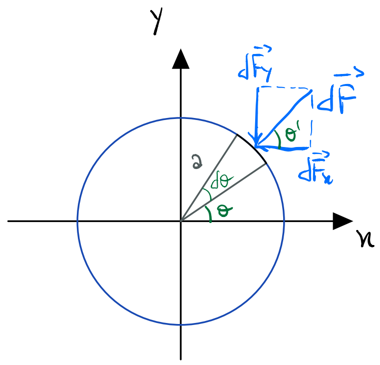
$$(5.48) \quad \boxed{r^2 - \frac{\Gamma}{2\pi V_\infty} r + a^2 = 0} \longrightarrow r = \frac{1}{2}\left(\frac{\Gamma}{2\pi V_\infty} \pm \sqrt{\left(\frac{\Gamma}{2\pi V_\infty}\right)^2 - 4a^2}\right)$$

$$r = \frac{\Gamma}{4\pi V_\infty} \pm \sqrt{\left(\frac{\Gamma}{4\pi V_\infty}\right)^2 - a^2} = \boxed{a\left[\frac{\Gamma}{4\pi V_\infty a} + \sqrt{\left(\frac{\Gamma}{4\pi V_\infty a}\right)^2 - 1}\right] = r} \quad (5.49)$$

$\Uparrow$
segno + poiché $r > a$

Obiettivo: valutare la distribuzione di pressione e integrarla per ricavare le forze aerodinamiche agenti (fluido ideale $\Rightarrow D = 0$ ma $L \neq 0$. $L \mapsto \Gamma$)

$\Rightarrow$ 5.3) $\boxed{\text{Teorema di Kutta - Joukowski}}$



$\theta' \simeq \theta$

$dF = (p - p_\infty)\, a\, d\theta$ (per unità di lunghezza)

$dF_x = -(p-p_\infty)\, a\, d\theta \cos\theta$ "

$dF_y = -(p-p_\infty)\, a\, d\theta \sin\theta$ "

(5.52) $\Rightarrow$ $dF_x = -\left(-\frac{\rho V_\infty \Gamma}{\pi a} \sin\theta\right) a\, d\theta \cos\theta = \frac{\rho V_\infty \Gamma}{\pi} \sin\theta \cos\theta\, d\theta$ (5.53)

$dF_y = -\left(-\frac{\rho V_\infty \Gamma}{\pi a} \sin\theta\right) a\, d\theta \sin\theta = \frac{\rho V_\infty \Gamma}{\pi} \sin^2\theta\, d\theta$ (5.54)

$$F_x = \int_0^{2\pi} dF_x = \int_0^{2\pi} \frac{\rho V_\infty \Gamma}{\pi} \sin\theta\cos\theta\, d\theta = \frac{\rho V_\infty \Gamma}{\pi} \frac{\cos 2\theta}{4}\Big|_0^{2\pi} = \frac{\rho V_\infty \Gamma}{\pi} \frac{0-0}{4} \equiv D = 0$$

Paradosso di D'Alembert

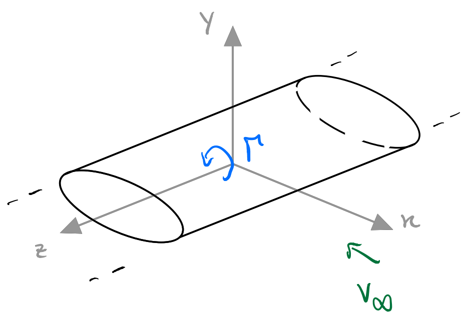
$$F_y = \int_0^{2\pi} dF_y = \int_0^{2\pi} \frac{\rho V_\infty \Gamma}{\pi} \sin^2\theta\, d\theta = \frac{\rho V_\infty \Gamma}{\pi}\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\sin\theta\cos\theta}{2}\right)\Big|_0^{2\pi} = \frac{\rho V_\infty \Gamma}{\pi}\pi \equiv \boxed{L = \rho V_\infty \Gamma} \quad (5.55)$$

$\boxed{\text{Teorema di Kutta - Joukowski}}$ (5.55)

Note ρ, V_∞, Γ si ottiene la portanza L.

oss I) Tale risultato si ottiene anche con una sezione del cilindro di geometria generica (dimostrazione nel libro), quindi anche per profili alari.

es:

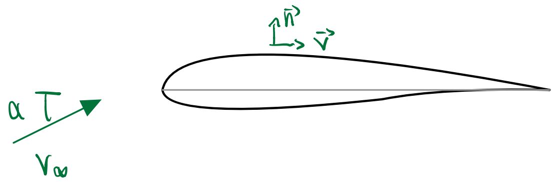


$(\vec{\Gamma} = \Gamma \hat{k}\ , \quad \vec{v}_\infty = v(-\hat{\imath}))$

$\boxed{\vec{L} = \rho\, \vec{V}_\infty \times \Gamma \hat{k}}$ (5.56) ($\rightarrow$ Effetto Magnus)

$\Rightarrow \vec{L} = \rho V_\infty \Gamma\, \hat{\jmath}$

Problema del profilo alare portante

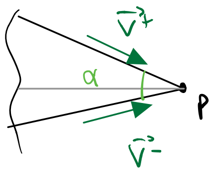


$$\begin{cases} \nabla^2 \Phi = 0 \\ 1^a \quad \vec{v} \cdot \vec{n} = \nabla\Phi \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{(a parete)} \\ 2^a \quad \vec{V}_\infty = \nabla \Phi_\infty \quad \text{(in campo lontano)} \end{cases} \Big\} \text{ condizioni al contorno}$$

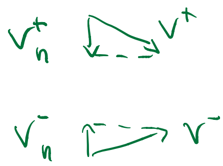
3^a $\nexists$ condizione di Kutta : regolarità della corrente al bordo di fuga.

imponendo la 3^a:

I) bordo di fuga ad angolo finito



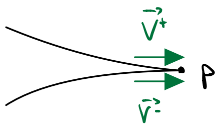
$\alpha > 0$: al limite della corda ($x = c - \varepsilon$)



$\boxed{V_n^+ \neq V_n^-}$ $\Rightarrow$ P punto di arresto

in particolare, V_n^+ opposta a V_n^- $\Rightarrow$ discontinuità

II) bordo di fuga a cuspide



$\alpha = 0$: al limite della corda ($x = c - \varepsilon$)

$$V^+ /\!/ V^- \xrightarrow[\text{Bernoulli}]{} \begin{cases} p^+ + \frac{1}{2}\rho V^{+2} = p^- + \frac{1}{2}\rho V^{-2} \\ p^+ = p^- \quad \text{(continuità)} \end{cases} \Rightarrow \boxed{V^+ = V^-}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 95 di 216

Circolazione d'aria iniziale equivalente a vortice (Γ) e circolazione d'aria dopo il "moto" di P_2 equivalente a vortice ($-\Gamma$).

OSS III) durata del transitorio $\boxed{\Delta t \sim \frac{l}{V_\infty}}$ (dell'ordine), l caratteristica (es: corda)

$\Rightarrow$ Dopo l'allontanamento del vortice, gli effetti della viscosità sono di nuovo trascurabili $\rightarrow$ soddisfatte le condizioni per studiare il fluido come inviscido.

Condizione di Kutta fa tener conto degli effetti di viscosità anche nel caso di fluido inviscido (Quindi, se il fluido non fosse viscoso, non ci sarebbe L)

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 97 di 216