NUMERO: **2499A** ANNO: 2020

A P P U N T I

STUDENTE: Pieretto Letizia

MATERIA: Ricerca Operativa - Prof. Norese

MODELLI PROGRAMMAZIONE LINEARE

- problema → questione da risolvere
- modello → rappresentazione del problema
- istanza → valori assegnati ai parametri in input del problema
- algoritmo → procedura operativa che porta alla soluzione di ogni istanza

PROGRAMMAZIONE MATEMATICA

set di metodologie che permettono di determinare una tra le scelte in un insieme di alternative

formato da:
1) variabili decisionali: $x_1, \dots x_n$
le incognite
2) funzione obiettivo: $f(x_1, \dots x_n)$
funzione delle variabili del problema
3) vincoli: $g_1(x_1 \dots x_n) \geq b_1$, $g_m(x_1 \dots x_n) \geq b_m$ stabiliscono i valori che le variabili del problema possono assumere, delimitano la regione di ammissibilità

PROGRAMMAZIONE LINEARE (PL)

sia i vincoli, sia la funzione obiettivo sono lineari

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 140

$0.8x_1 + 0.6x_2 \geq 2.8$ vincolo B_1

$x_1 + 0.6x_2 \geq 9$ vincolo B_2

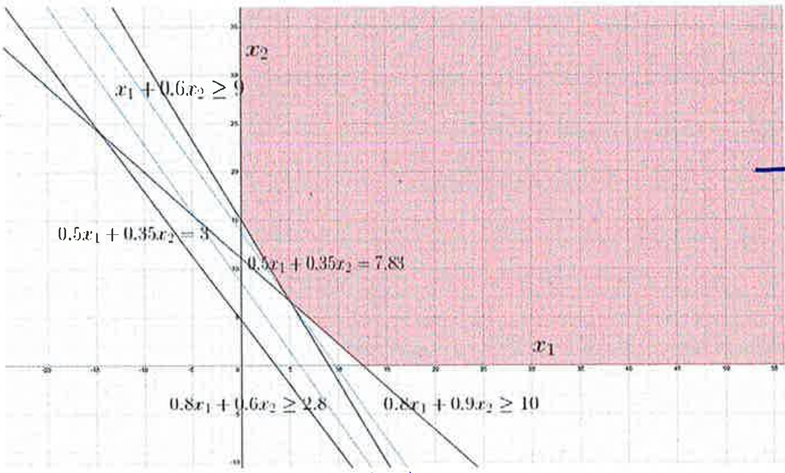
$0.8x_1 + 0.9x^2 \geq 10$ vincolo B_6

$x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$

↓

devono essere tutti verificati contemporaneamente

Esempio di modello PL – LinDiet



(qui sono rispettati i vincoli)

→ regione ammissibile

↓

intersezione di piani generata dai vincoli

rette di isoprofitto: due rette // che trovano la soluzione ottima del problema (fascio di rette che rispettano la funzione obiettivo)

$0.5x_1 + 0.35x_2 = 3$

$0.5x_1 + 0.35x_2 = 4.83$ → cade nella regione ammissibile, punto più estremo

$x_1 = 5$ $x_2 = \frac{20}{3}$ → quantità sostanze

4.83 → costo minimo

- funzione obiettivo e vincoli

max $750 x_1 + 1000 x_2$ massimizzare profitto

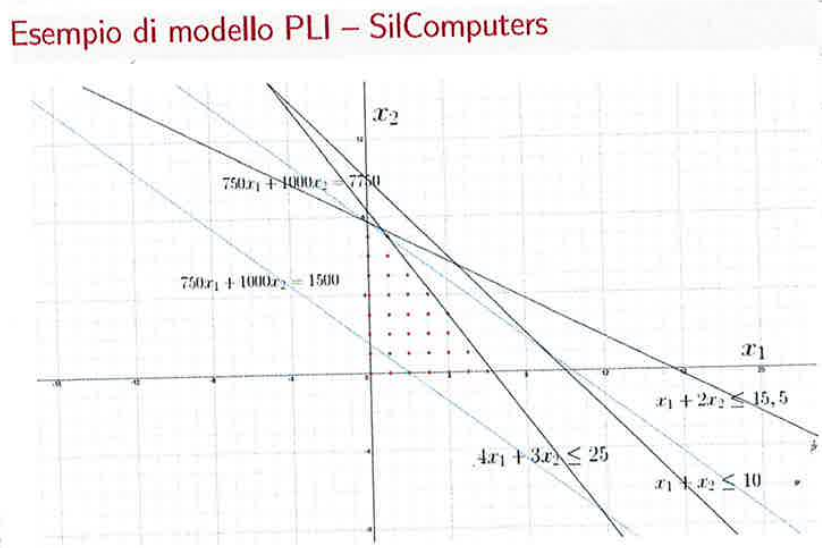
$x_1 + x_2 \leq 10$

$x_1 + 2x_2 \leq 15.5$

$4x_1 + 3x_2 \leq 25$

tutti ÷ 100 perché guardo i lotti, non i pezzi

$x_1 \in \mathbb{N}$, $x_2 \in \mathbb{N}$



la regione di ammissibilità è formata da pt perché ho variabili intere

rette isoprofitto: $750 x_1 + 1000 x_2 = 1500$

$750 x_1 + 1000 x_2 = 7750$

↓

soluzione ottimale

$x_1 = 1$ $x_2 = 7$ → 100 notebook e 700 pc desktop

7750 → profitto max

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 7 di 140

$x_1 \geq 2$
$x_2 \geq 2$
$x_3 \geq 6$
$x_4 \geq 10$
$x_5 \geq 1$
$x_6 \geq 2$

vincoli qtà minime

PROBLEMA DI MIX

L'acciaieria Plastik deve evadere un ordine di 1000 tonnellate di acciaio INOX. Per questa produzione servono manganese (almeno l'1%), cromo (almeno il 18%) e molibdeno (almeno il 2%). I fornitori di metalli non ferrosi vendono, per esigenze di mercato, questi prodotti in tre tipi di confezioni differenti. La prima confezione contiene 2 Kg di manganese, 2 Kg di cromo e 1 Kg di molibdeno e costa 10 euro. La seconda confezione contiene 2 Kg di manganese, 3 Kg di cromo e 1 Kg di molibdeno e costa 15 euro. La terza confezione contiene 1 Kg di manganese, 2 Kg di cromo e 5Kg di molibdeno e costa 20 euro.

Formulare il modello di programmazione lineare che minimizzi il costo di acquisto delle confezioni.

nei problemi di mix non posso acquistare gli elementi singolarmente

$x_i \in \mathbb{N}$ n° confez. di tipo $i = 1, \dots, 3$

$\min 10x_1 + 15x_2 + 20x_3$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0$

$(\min\ 20x_{1A} + 25x_{1B} + 15x_{1C} + 5x_{1D} + 12x_{2A} + 14x_{2B} + 18x_{2C} + 30x_{2D} + 19x_{3A} + 11x_{3B} + 40x_{3C} + 12x_{3D}) \times 0{,}10€$

$x_{1A} + x_{2A} + x_{3A} \geq 100000$
$x_{1B} + x_{2B} + x_{3B} \geq 180000$
$x_{1C} + x_{2C} + x_{3C} \geq 60000$
$x_{1D} + x_{2D} + x_{3D} \geq 75000$

vincoli domanda centri di spostamento

$x_{1A} + x_{1B} + x_{1C} + x_{1D} \leq 125000$
$x_{2A} + x_{2B} + x_{2C} + x_{2D} \leq 180000$
$x_{3A} + x_{3B} + x_{3C} + x_{3D} \leq 40000$

($\leq$ perché ho max prod.) vincoli giornali stampati dalle tipografie

ESERCIZIO A

Un problema di produzione.

Un'azienda produce tre modelli 1, 2 e 3 di un certo prodotto. Ciascun modello richiede due tipi di materiali grezzi (A e B) di cui sono disponibili rispettivamente 4000 e 6000 unità. In particolare, per produrre una unità del modello 1 sono necessarie 2 unità di A e 4 unità di B; per una unità del modello 2 sono necessarie 3 unità di A e 2 unità di B; per una unità del modello 3 sono necessarie 5 unità di A e 7 di B. Il modello 1 richiede, per ogni unità prodotta, il doppio di forza lavoro rispetto al modello 2 e il triplo rispetto al modello 3. La forza lavoro presente in azienda è in grado di produrre al massimo l'equivalente di 700 unità/giorno del modello 1.
Il settore marketing dell'azienda ha reso noto che la domanda minima per ciascun modello è rispettivamente di 200, 200 e 150 unità. Il profitto unitario di ogni modello è di 30, 20 e 50 Euro, rispettivamente.
Si richiede di pianificare la produzione giornaliera massimizzando il profitto.

fine del mese i

$x_1 = 20 + w_1$ $\quad x_1 \leq 40$ $\quad$ mese 1

$w_1 + x_2 = 30 + w_2$ $\quad x_2 \leq 50$ $\quad$ mese 2

$w_2 + x_3 = 50 + w_3$ $\quad x_3 \leq 30$ $\quad$ mese 3

$w_3 + x_4 = 40$ $\quad x_4 \leq 50$ $\quad$ mese 4

(4)

$w_4 = 0$, non lascio nulla a magazzino

$\min\ 34x_1 + 36x_2 + 32x_3 + 38x_4 + 2w_1 + 3w_2 + 2w_3$

ESERCIZIO 2

Un problema di localizzazione.

Si consideri un territorio sul quale siano localizzati 7 punti di domanda (ad es. 7 città) indicati in tabella con $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$: Si considerino, inoltre, 5 punti di offerta indicati in tabella con A, B, C, D, E nei quali potrebbero essere aperti dei centri vendita di un'impresa di distribuzione. Tale impresa è interessata a soddisfare la domanda sopramenzionata in modo tale che i clienti non percorrano più di 30 minuti di auto per raggiungere almeno uno dei centri vendita. In tabella, per ogni coppia di punti di domanda e di offerta, viene indicato il tempo auto necessario. L'obiettivo dell'impresa è di minimizzare i costi di apertura dei centri vendita garantendo il fatto che tutti i punti di domanda vengano serviti.

L'apertura dei centri vendita costa rispettivamente (in milioni di Euro): A = 310, B = 250, C = 260, D = 330, E = 280.

es.

se apro C non posso aprire D $\quad x_C + x_D \leq 1$

o apro C o apro D $\quad x_C + x_D = 1$

se apro C devo aprire anche D $\quad x_C \leq x_D$

se apro C allora apro D o E $\quad x_C \leq x_D + x_E$

o apro C o apro D e E $\quad x_E + x_D = 2(1 - x_C)$

VINCOLI LOGICI

Per gestire relazioni di tipo logico vengono usate delle variabili binarie aggiuntive

VINCOLO BIG-M $\quad \boxed{x \leq My}$ $\quad$ M = così grande e $y \leq x$

Operatore Logico	Vincolo Logico
$y_1 \rightarrow y_2$	$y_1 \leq y_2$
$y_1 \rightarrow \overline{y}_2$	$y_1 \leq 1 - y_2$
$y_1 \bigcup y_2$	$1 \leq y_1 + y_2$
$y_1 \bigcap y_2$	$1 \geq y_1 + y_2$
$(y_1 \bigcap y_2) \rightarrow y_3$	$y_1 + y_2 - 1 \leq y_3$
$(y_1 \bigcup y_2) \rightarrow y_3$	$y_1 + y_2 \leq 2y_3$
$(\bigcap_{i \in I} y_i) \rightarrow \omega$	$\sum_{i \in I} y_i - \lvert I \rvert + 1 \leq \omega$
$(\bigcup_{i \in I} y_i) \rightarrow \omega$	$\sum_{i \in I} y_i \leq \lvert I \rvert \omega$

$y_i \quad i = A, \dots, E$ valore logico che determina l'attivazione del fondo i

$$\max\ 4.5 x_A + \frac{5.4}{2} x_B + \frac{5.1}{2} x_C + \frac{4.4}{2} x_D + 4.1 x_E$$

$x_A + x_B + x_C + x_D + x_E \leq 1.000.000.000$ vincolo budget

$x_B + x_C + x_D \geq 0.4 \times 1.000.000.000$ vincolo % (ipotizzo che venga investito tutto)

$9x_A + 15x_B + 4x_C + 3x_D + 2x_E \leq 5 (x_A + x_B + x_C + x_D + x_E)$

vincolo durata media

$2x_A + 3x_B + x_C + 4x_D + 5x_E \geq 1.5 (x_A + x_B + x_C + x_D + x_E)$

moody's rating

$x_A \leq M y_A$
$x_B \leq M y_B$
$x_C \leq M y_C$ vincoli di connessione v. logiche
$x_D \leq M y_D$
$x_E \leq M y_E$

$y_C + y_D \leq 1$ C e D no insieme
$x_A \geq 1000\, y_A$ investimento minimo se scelgo A
$y_E \leq y_A$ E implica A

$x_1 \leq My$ VINCOLI LOGICI
$x_2 \leq M(1-y)$

ESERCIZIO 1

Un problema di approvvigionamento e produzione.
Un mobilificio possiede due stabilimenti: A e B. Nello stabilimento A vengono prodotti letti e armadi. I primi richiedono 0.2 m^3 di legno ed i secondi 0.6 m^3 di legno oltre a 3 e 5 ore di lavoro rispettivamente. Nello stabilimento B vengono prodotti tavoli e scrivanie che richiedono 0.3 e 0.5 m^3 di legno rispettivamente e 4 ore di lavoro ciascuno. La disponibilità di manodopera è di 4000 ore di lavoro mensili per stabilimento. Il legno è prodotto lontano dagli stabilimenti. La direzione centrale sa di avere mensilmente la disponibilità di 15000 unità di capacità di trasporto con i propri mezzi e che ogni m^3 di legno spedito allo stabilimento A assorbe 5 unità e ogni m^3 di legno spedito allo stabilimento B assorbe 3 unità. La direzione dispone questo mese di 50000 m^3 di legno. I costi unitari del legno sono di 10 Euro/m^3 e per il trasporto di 20 Euro / unità di capacità. Sapendo che i ricavi unitari sono di Euro 150 per i letti, di Euro 80 per gli armadi, di Euro 100 per i tavoli e di Euro 110 per le scrivanie, si vuole ottimizzare la produzione (ricavi - costi) nel mese corrente.

L, T, A, S n° di prodotti $\in \mathbb{N}$

$3L + 5A \leq 4.000$ STABILIMENTO A
$4T + 4S \leq 4.000$ STABILIMENTO B

$0.2L + 0.6A + 0.3T + 0.5S \leq 50.000$ CONSEGNA LEGNO

$5(0.2L + 0.6A) + 3(0.3T + 0.5S) \leq 15.000$ TRASPORTO QTÀ LEGNO

$x_D \geq 2000\, y_D$

$10 x_A + 15 x_B + 14 x_D + 5 x_C \leq 200.000$ forza lavoro

$y_A \leq y_C + y_D$ se A attivo, almeno uno tra C e D attivo

$\max [\underbrace{50 x_A + 60 x_B + 55 x_C + 80 x_D}_{\text{ricavi}} - (\underbrace{14500 y_A + 10000 y_B + 8000 y_C + 9000 y_D}_{\text{costi}})]$

ESERCIZIO 4

Approvvigionamento energetico.
Un amministratore deve pianificare il rifornimento di gasolio da riscaldamento per quattro condomini 1, 2, 3 e 4, che necessitano per i mesi invernali di almeno 1200, 2000, 2500 e 5000 litri rispettivamente. Sono stati selezionati sul mercato tre fornitori di gasolio A, B e C che dispongono di combustibile in quantità praticamente illimitata. Il fornitore A vende il gasolio a 10 euro/litro, ma per ragioni di trasporto non è in grado di rifornire contemporaneamente i condomini 1 e 4. Il fornitore B applica il prezzo di 8 euro/litro. Il fornitore C vende a 12 euro/litro. Per non legarsi ad un solo fornitore, l'amministratore decide che ognuno dei tre fornirà almeno il 15% della commessa totale. Formulare il programma lineare per pianificare l'approvvigionamento a costo minimo alle suddette condizioni.

$x_{i,j}$ $j = 1, \dots, 4$ $i = A, B, C$ n° di litri venduti dal fornitore i al condominio j

$y_1, y_4 \in \{0, 1\}$ $\begin{cases} 1 & \text{se A fornisce } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

$x_i \quad i=1,2,3$ n° di pacchetti acquistati

$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 80$ furgoncini
$x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 130$ medie cilindrate
$x_1 + 2x_3 + x_2 \geq 40$ berline

$8000\, x_1 + 120000\, x_2 + 140000\, x_3 \leq 8.000.000$

$75(2x_1+2x_2+2x_3) + 250\,(x_1+2x_3+x_2) + 125\,(x_1+2x_2$
$+2x_3) \leq 80.000$

oppure $\quad 525x_1 + 650x_2 + 900x_3 \leq 80.000$

max $\quad 4x_1 + 5x_2 + 6x_3$ f. obiettivo

ESERCIZIO 11

Una ditta specializzata in produzioni elettroniche deve pianificare la produzione del suo prodotto principale per i prossimi quattro mesi. La richiesta del prodotto per i mesi in questione è di 1500, 200, 1900, 1100 unità rispettivamente. Ogni unità di prodotto richiede quattro ore/uomo per essere assemblata. Le unità prodotte sono in parte vendute ed in parte immagazzinate per i mesi successivi. Il magazzino può stoccare al massimo 10000 unità al mese. Esso è vuoto all'inizio del primo mese. La disponibilità di forza lavoro (ordinaria) nei prossimi quattro mesi, a causa del piano-ferie, sarà di 7000, 5000, 5000, 1000 ore/uomo; in più la ditta può richiedere ogni mese una quantità di lavoro straordinario non superiore al 50% del monte-ore mensile previsto. Il costo di un'ora/uomo di lavoro ordinario è pari a 30 euro; il lavoro straordinario costa 40 euro all'ora. Formulare il programma lineare per pianificare produzione e magazzino soddisfacendo le richieste mensili previste e minimizzando i costi dovuti alla manodopera.

TV_P / TV_N $\begin{cases} 1 & \text{se faccio spot nella relativa fascia} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

R $\begin{cases} 1 & \text{se faccio il primo spot radiofonico} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

$Ra \in \mathbb{N}$ n° spot oltre al 1°

$G \in \mathbb{N}$ n° pagine giornale acquistate

$G \geq 5$, $G \leq 15$

$Ra \leq 5R$ se faccio il 1° posso fare gli altri, altrimenti no

$400.000\,TV_P + 300.000\,TV_N + 150.000(R + Ra) + 150.000\,G \geq 2.000.000$

$75.000\,TV_P + 40.000\,TV_N + 25.000\,R + 15.000\,Ra + 10.000\,G \leq 200.000$

$\max\ 900.000\,TV_P + 400.000\,TV_N + 300.000\,(R + Ra) + 800.000\,G$

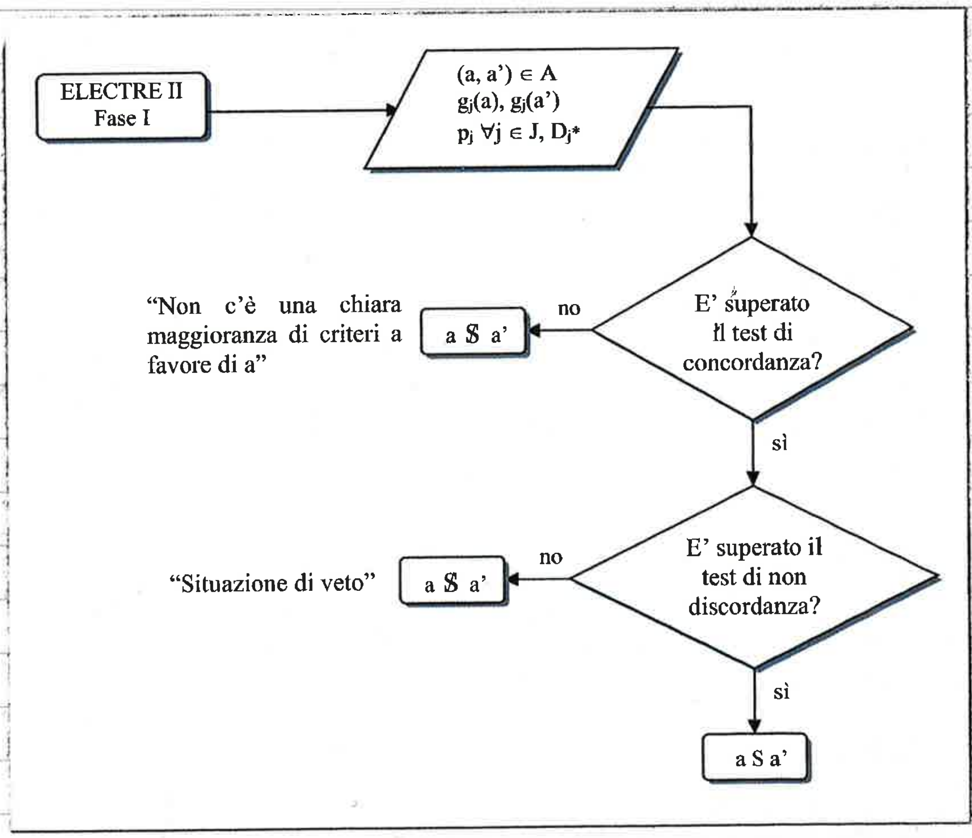
a S a' → se esistono ragioni sufficienti per ritenere che a sia almeno altrettanto buono di a' e non esistono buone ragioni per rifiutare tale affermazione

ELECTRE II

utilizzo veri-criteri, in qualunque scarto di valutazione indica una preferenza in senso stretto

Fase I

Test di concordanza e non discordanza



- TEST di non discordanza → si verifica che sui criteri di $\bar{J}_{-}(a, a')$ non sia attivo il veto di surclassamento di a' da parte di a

non è superato quando a S a' per almeno un criterio $j^* \in \bar{J}^*$

es. ALTERNATIVE DI AUTOMAZIONE

Una nota casa automobilistica vuole modificare il suo ciclo produttivo, per fare fronte alle esigenze del mercato. Ha individuato tre possibili alternative di automazione, in sostituzione del sistema tradizionale, da riorganizzare senza automazione. Le quattro situazioni costituiscono il seguente insieme A:

- a_1 sistema di produzione tradizionale;
- a_2 sistema di produzione flessibile;
- a_3 trasferta rigida;
- a_4 trasferta flessibile.

Gli elementi informativi, che sintetizzano le diverse caratteristiche delle quattro alternative, sono stati strutturati in cinque criteri, riportati nella tabella 1.

I criteri adottati sono: *Impiego di manodopera* (g_1) cui corrispondono due stati di valutazione (Sì / No, con No come stato preferito), *Flessibilità geometrica* (g_2) espresso secondo una scala a quattro stati di valutazione (Insufficiente, Sufficiente, Buona, Ottima), *Flessibilità produttiva* (g_3) cui corrispondono due stati di valutazione (Bassa, Alta), *Agganciamento ad un sistema di produzione integrato* (g_4) cui corrispondono due stati di valutazione (Basso, Alto), aspetto *Economico-finanziario* (g_5) con quattro stati di valutazione secondo una scala a preferenza crescente da 1 a 4.

A ciascun criterio è stato associato un coefficiente di importanza relativa (peso). Sul criterio relativo all'aspetto *Economico-finanziario* è stata identificata una coppia di valori in discordanza (1, 4). Si vuole ottenere una graduatoria delle azioni alternative di automazione.

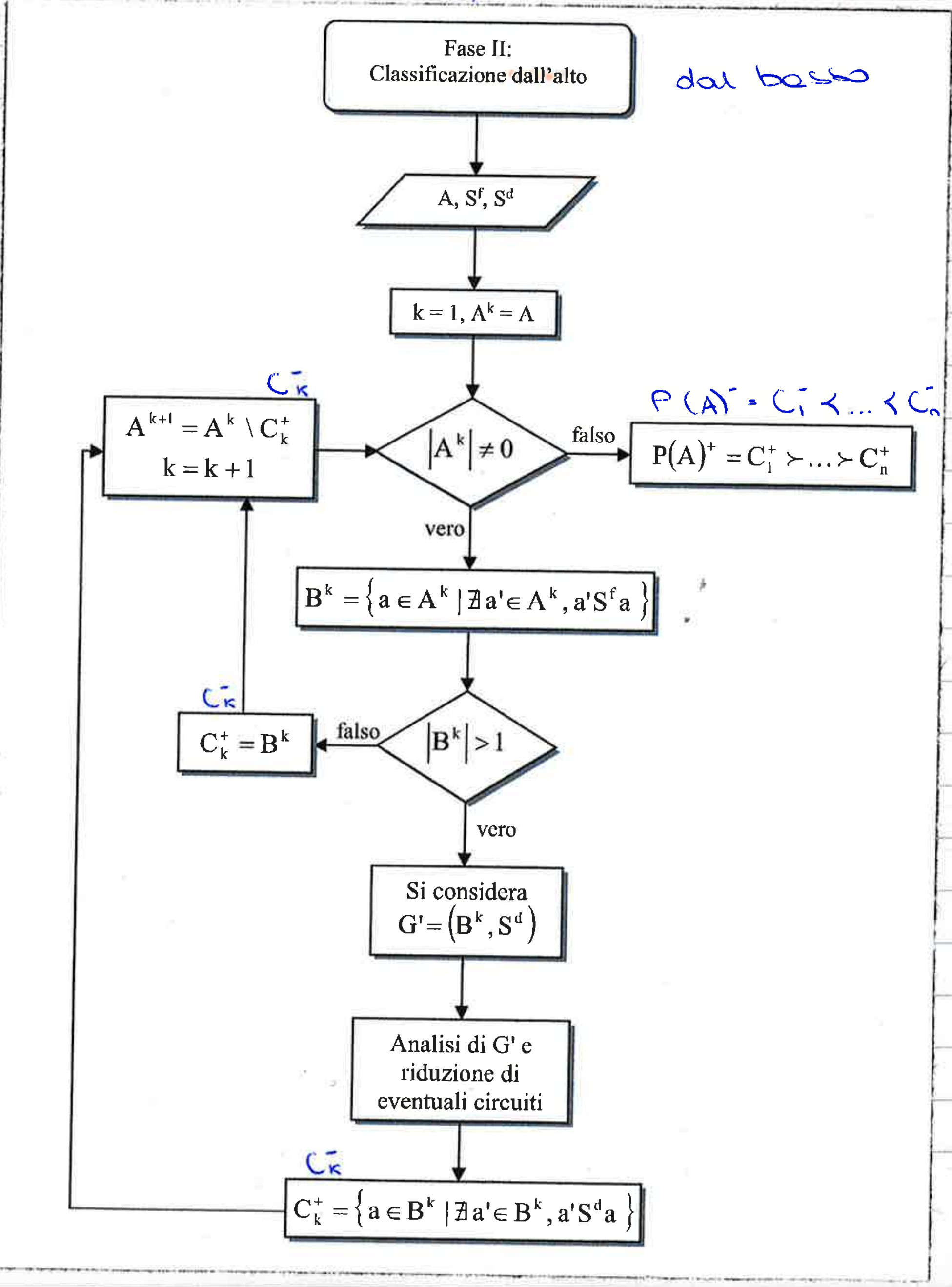
Tabella 1: Valutazioni e parametri

Criteri	Impiego di manodopera 1	Flessibilità geometrica 2	Flessibilità produttiva 3	Produzione integrata 4	Economico-finanziario 5
Pesi	0,20	0,28	0,04	0,20	0,28
Alternative					
a_1	Sì	Suff.	Bassa	Basso	4
a_2	No	Ottima	Bassa	Alto	3
a_3	No	Insuff.	Alta	Alto	2
a_4	No	Buona	Alta	Alto	1
Ins. Disc.					(1, 4)

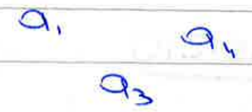
scatta il veto quando la 1ª ho preso 1 e la 2ª ho preso 4 → $a_4 a_1$

fase II

costruzione di una classificazione dall'alto $P_+(A)$ e una dal basso $P_-(A)$



cancello a_2 dal grafo

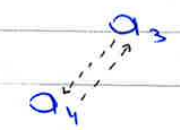


$K=2$

$A_2 = A_1 \setminus C_1^+ = \{a_1, a_4, a_3\}$

$D_1^+ = \{a_1, a_3, a_4\}$

con $c_d = 0.67$



si è generato un circuito

↓

non posso andare avanti, devo contrarre il circuito

a_1 $a_{3/4}$ tutti e 3 sono non surclassati

$C_2^+ = \{a_1, a_3, a_4\}$

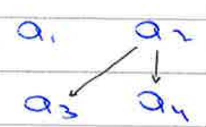
$P(A)^+ = \{a_2\} > \{a_1, a_3, a_4\}$

- $P(A)^-$ → classificazione dal basso

$K=1$

$A^1 = A$

$D_1^- = \{a_1, a_3, a_4\}$



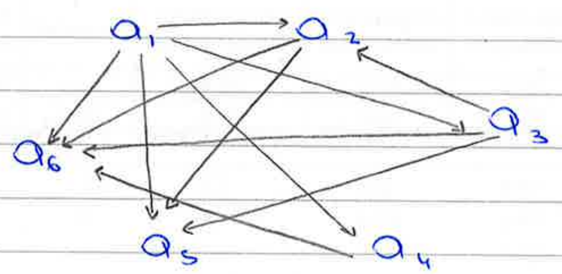
trovo il nodo peggiore

le azioni peggiori sono quelle che non sono in grado di surclassare nessun altro

$P(A)^- = \{a_2\} > \{a_1, a_3, a_4\}$

	J_+	$J_=$	J_-	$P^+ \geq P^-$	$P^+ + P^=$	VETO	S
$a_1\ a_2$	2, 4, 5, 6	/	1, 3	sì	0,75		a_1 S a_2
$a_1\ a_3$	2, 5	3, 4, 6	1	sì	0,90		a_1 S a_3
$a_1\ a_4$	3, 4, 5, 6	2	1	sì	0,90		a_1 S a_4
$a_1\ a_5$	2, 4, 5, 6	/	1, 3	sì	0,75		a_1 S a_5
$a_1\ a_6$	2, 3, 4, 5, 6	1	/	sì	1		a_1 S a_6
$a_2\ a_1$	1, 3	/	2, 4, 5, 6	no			
$a_2\ a_3$	1, 3	5	2, 4, 6	no			
$a_2\ a_4$	3, 4, 5	/	1, 2, 6	sì	0,53		
$a_2\ a_5$	1, 2, 5, 6	3, 4	/	sì	1		a_2 S a_5
$a_2\ a_6$	1, 3, 4, 5, 6	/	2	sì	0,75		a_2 S a_6
$a_3\ a_1$	1	3, 4, 6	2, 5	no			
$a_3\ a_2$	2, 4, 6	5	1, 3	sì	0,75		a_3 S a_2
$a_3\ a_4$	3, 4, 5, 6	/	1, 2	sì	0,65		
$a_3\ a_5$	1, 2, 4, 5, 6	/	3	sì	0,85		a_3 S a_5
$a_3\ a_6$	1, 2, 3, 4, 5, 6	/	/	sì	1		a_3 S a_6
$a_4\ a_1$	1	2	3, 4, 5, 6	no		sì	
$a_4\ a_2$	1, 2, 6	/	3, 4, 5	no			
$a_4\ a_3$	1, 2	/	3, 4, 5, 6	no		sì	
$a_4\ a_5$	1, 2, 5, 6	/	3, 4	sì	0,65		
$a_4\ a_6$	1, 2, 6	3, 5	4	sì	0,80		a_4 S a_6
$a_5\ a_1$	1, 3	/	2, 4, 5, 6	no		sì	
$a_5\ a_2$	/	3, 4	1, 2, 5, 6	no			
$a_5\ a_3$	3	/	1, 2, 4, 5, 6	no		sì	
$a_5\ a_4$	3, 4	/	1, 2, 5, 6	no			
$a_5\ a_6$	1, 3, 4	/	2, 5, 6	no			
$a_6\ a_1$	/	1	2, 3, 4, 5, 6	no		sì	
$a_6\ a_2$	2	/	1, 3, 4, 5, 6	no			
$a_6\ a_3$	/	/	1, 2, 3, 4, 5, 6	no		sì	
$a_6\ a_4$	4	3, 5	1, 2, 6	no			
$a_6\ a_5$	2, 5, 6	/	1, 3, 4	sì	0,55		

fase II



a_1 non è mai surclassato

$D_1^+ = \{a_1\}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 35 di 140

2. audit logistico

Cinque azioni di audit logistico, effettuate in tempi successivi in uno stesso ambito aziendale, sono state caratterizzate mediante otto criteri di valutazione:

1) *Lead time* (tempo dall'invio dell'ordine alla consegna a magazzino, misurabile in giorni), g_1: verso di preferenza – ;
2) *Infortuni* (numero di infortuni in un determinato intervallo di tempo, desumibili dallo apposito registro corrispondente): g_2, verso di preferenza – ;
3) *Allineamento fisico/contabile relativo* (scarto tra il numero totale codici ed il numero codici disallineati, sul numero totale codici, per 100): g_3, verso di preferenza + ;
4) *Utilizzazione volumetrica* (rapporto tra volume medio utilizzato e volume utile del magazzino, per 100): g_4, verso di preferenza + ;
5) *Saturazione magazzino* (rapporto tra posti pallet occupati e posti disponibili, per 100): g_5, verso di preferenza + ;
6) *Costo unitario* (rapporto tra costo logistico totale del trimestre e volume movimentato nel trimestre): g_6, – ;
7) *Rotazione* (rapporto tra consumo nel semestre del codice prodotto e giacenza media nel trimestre): g_7, verso di preferenza + ;
8) *Produttività del lavoro* (rapporto tra volume movimentato nel trimestre e numero addetti alle operazioni di magazzino): g_8, verso di preferenza + .

Applicare il metodo ELECTRE II al modello elaborato per proporre una classificazione delle situazioni, dalla migliore alla peggiore.
La tabella 3 contiene due differenti insiemi di pesi: il primo è quello definito originariamente mentre il secondo è stato originato dall'analisi dei risultati della prima applicazione. **Qui viene sviluppato l'esercizio relativo al secondo scenario di pesi, mentre si lascia l'altro da svolgere.**

Tabella 3: Valutazioni e parametri

Criteri	Lead time	Infortuni	Allineamento fisico/contabile	Utilizzazione volumetrica	Saturazione magazzino	Costo unitario	Rotazione	Produttività del lavoro
Pesi	0,20	0,05	0,15	0,10	0,25	0,15	0,05	0,05
	0,24	0,06	0,18	0,15	0,07	0,18	0,06	0,06
Azioni								
a_1	3	3	0,2	0,61	0,93	5	5	58
a_2	7	11	0,37	0,78	0,91	2,7	18	50
a_3	7	8	0,45	0,92	0,91	4,2	14	70
a_4	4	4	0,85	0,61	0,91	3	18	50
a_5	4	3	0,75	0,72	0,91	4,8	16	54
Ins. Disc.	(7, 3)					Scarto ≥ 2		

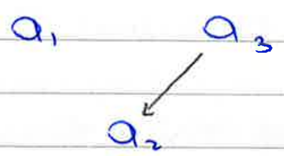
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 37 di 140

$D_2^+ = \{a_1, a_3, a_5\}$

guardo $C_d = 0.61$

$a_5 \dashrightarrow a_1$ $\quad C_2^+ = \{a_5\}$

Tolgo a_5



$D_3^+ = \{a_1, a_3\}$

guardo $C_d = 0.61$ $\rightarrow$ non ho surclas. debole

$P(A)^+ = \{a_4\} > \{a_5\} > \{a_1, a_3\} > \{a_2\}$

mentre

$P(A)^- = \{a_4\} > \{a_5\} > \{a_3\} > \{a_1, a_2\}$

il risultato con 0.75 e 0.67

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 39 di 140

$P(A)^{+} = \{ a_2, a_3\} \succ \{ a_4, a_6\} \succ \{ a_1 \} \succ \{ a_5 \}$

$P(A)^{-} = \{ a_2\} \succ \{ a_6\} \succ \{a_1, a_3\} \succ \{a_4, a_5\}$

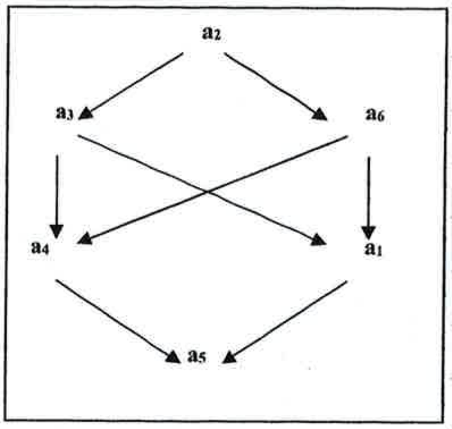


Figura 7: Grafo parziale finale

cal

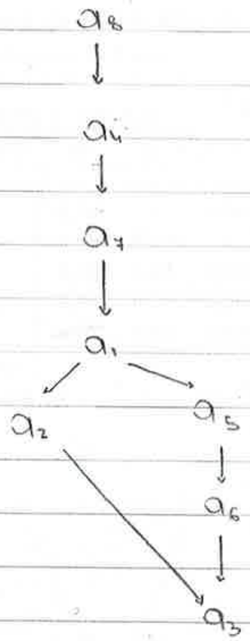
non ho un percorso principale

es.

Risultato ottenuto con le soglie 0.75/0.67 (e 0.66)

$P(A)^{+} = \{ a_4, a_8 \} \succ \{ a_7 \} \succ \{ a_1 \} \succ \{ a_2 \} \succ \{ a_5 \} \succ \{ a_6 \} \succ \{ a_3 \}$

$P(A)^{-} = \{ a_8 \} \succ \{ a_7, a_4 \} \succ \{ a_1 \} \succ \{ a_5 \} \succ \{ a_6 \} \succ \{ a_2, a_3 \}$

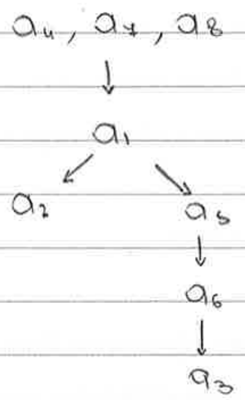


ocu

Con le soglie 0.75/0.61

$P(A)^{+} = \{a_4, a_7, a_8\} \succ \{a_1\} \succ \{a_2\} \succ \{a_5\} \succ \{a_6\} \succ \{a_3\}$

$P(A)^{-} = \{a_4, a_7, a_8\} \succ \{a_1\} \succ \{a_5\} \succ \{a_6\} \succ \{a_3\} \succ \{a_2\}$



a_2 è un nodo sempre isolato, è un elemento di robustezza perché è sempre nella stessa posizione

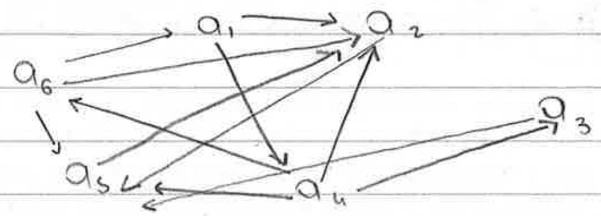
es.

Quando voglio applicare la Fase II di ELECTRE II ai dati elaborati con la Fase I di ELECTRE III devo introdurre le soglie di concordanza, forte e debole, e trasformare il risultato di un Surclassamento fuzzy (i gradi di credibilità di Surclassamento di tabella 1) in un risultato analogo a quello che otterrei con la Fase I di ELECTRE II (un grafo con un arco in corrispondenza del Surclassamento, l'assenza dell'arco se il S non é stato verificato).

Tabella 1: Gradi di credibilità di surclassamento

δ(a, a')	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
a_1	-	1	0,60	0,75	0,70	0,28
a_2	0,50	-	0,90	0,65	0,90	0,65
a_3	0,45	0,30	-	0,65	0,75	0,40
a_4	0,50	0,85	0,75	-	1	0,75
a_5	0,38	0,10	0,75	0,10	-	0,30
a_6	0,75	0,80	0,65	0,30	0,80	-

Scegliamo come soglia forte c_f =**0.75** e come soglia debole c_d=**0.67**.



devo eliminare tutti i circuiti.

SOGLIE DI INDIFFERENZA E PREFERENZA

- CRITERI CON SOGLIE → USATI PER LIMITARE L'INCERTEZZA ASSOCIATA AGLI ERRORI NON ELIMINABILI DELLE MISURE EFFETTUATE, AL TRATTAMENTO DEI DATI, AD ESPRESSIONI DI GIUDIZIO NON DOCUMENTATE
  - → DI INDIFFERENZA: NON SAPER DISTINGUERE LA MIGLIORE
  - → DI PREFERENZA: CONSIDERARE NETTAMENTE DISTINTE SITUAZIONI CORRISPONDENTI A CONDIZIONI EQUIVALENTI

  ↓ !! NON NECESSARIE SE HO VERO-CRITERIO

:ala

ES. 1

Per lo stesso problema, e per lo stesso criterio, sono proposte differenti valutazioni e scale utilizzate. E' richiesta una analisi della natura della scala e dell'affidabilità delle valutazioni, per capire quali sono le incertezze informative e/o preferenziali associate al criterio e quindi le esigenze di soglie. E' richiesta una analisi comparata, orientata a capire quali sono le situazioni più e quelle meno rischiose, tra le tre proposte, sapendo che quanto più il rischio è maggiore, più si adottano soglie e si adottano soglie più ampie e quindi più cautelative. Il problema consiste nella scelta di aree per la localizzazione di insediamenti industriali e sono proposte tre modellizzazioni del criterio g4 – Dotazione idrica.

Criterio 1

Valutazione associata ad una media pesata ottenuta sulla base di tre fattori, la portata dei corsi d'acqua presenti in zona, la presenza di laghi e quella di pozzi di trivellazione.

Azioni	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
$g_4(a)$	4.55	12.10	11.53	10.20	18.75	12.34	6.25	7.12	9.27

Non si tratta di una scala cardinale (non è possibile associarvi nessuna unità di misura), ma neppure di una scala ordinale (due cifre decimali!). Non sono forniti dati grezzi e non sono documentati i pesi, sembra una valutazione "mal costruita" e mal documentata.
Elaborare una media pesata sulla base di fattori a cui in genere sono associate unità di misura molto diverse (m^3/sec per la portata, m^2 di superfice o numero di laghi, m^3 d'acqua resi

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 45 di 140

Criterio 4

Valutazione associata a un punteggio fornito da un team di esperti in relazione a più fattori (portata dei corsi d'acqua, presenza di laghi e pozzi di trivellazione).

Azioni	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}
$g_4(a)$	10	5	6	45	7	3	1	6	18	35	5

Si può ipotizzare che la scala sia qualitativa ordinale ma non si può sapere qual è la sua ampiezza, poiché non è dichiarata. Le posizioni sulla scala sono almeno 45, ma potrebbero essere in tutto 50 o 100 o 500, cambiando nettamente il significato delle valutazioni. Esistono comunque almeno 45 stati di valutazione, molti per una buona scala ordinale. Una scala di questo tipo deve includere un numero limitato di posizioni, di ognuna delle quali deve essere descritto il significato in maniera chiara e oggettiva (descriverne 45, o più, è un'impresa!). La scala è meno affidabile delle due precedenti e il livello di incertezza associato è piuttosto elevato. Quali soglie si potrebbero proporre?

ES. 2

Del criterio 4 dell'esempio precedente si chiede di analizzare la distribuzione delle valutazioni sulla scala. Dall'analisi della distribuzione è possibile dedurre elementi utili a capire quali rischi sono associabili a questa valutazione e quali soglie sono adottabili?

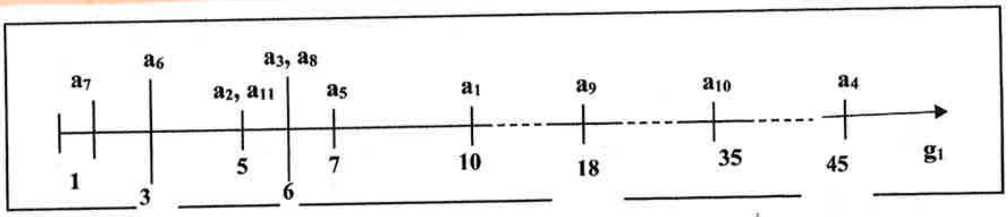


Figura 11 – Undici azioni e le relative valutazioni sul criterio

L'analisi della distribuzione delle valutazioni permette di capire che le valutazioni migliori sono tra di loro abbastanza diverse, quindi l'incertezza associata non dovrebbe creare gravi problemi, qualunque soglia si identifichi per trattarla. Invece le valutazioni peggiori sono molto prossime e richiedono l'introduzione di soglie che evitino di distinguerle in maniera netta. Ciò si collega all'osservazione che le soglie possono dover assumere valori diversi in punti diversi della scala adottata.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 47 di 140

ELECTRE TRI

metodo multicriteri utilizzato per trattare problemi di segmentazione nell'ambito della problematica β

- azioni di riferimento → caratterizzano categorie ordinate e predefinite
- profilo di riferimento b_i → insieme delle valutazioni associato all'i-esima azione di riferimento

fase I → stabilire una relazione di surclassamento tra le azioni da attribuire e le azioni di riferimento (azioni fittizie introdotte per fungere da elementi di separazione tra le differenti classi)

fase II → attribuzione di ogni azione candidata ad una classe

- elementi del modello → A insieme eventualmente evolutivo (A(t)), F famiglia di criteri, le valutazioni delle azioni, l'insieme delle azioni di riferimento b_i, criteri g_j e le varie soglie e pesi p_j

- n categorie, n-1 profili di riferimento

• relazioni

↳ indifferenza: $a \, I \, b$, equivale ad $a S b$, $b S a$

↳ preferenza:

↳ $a \succ b$, equivale ad $a S b$, $b \not S a$

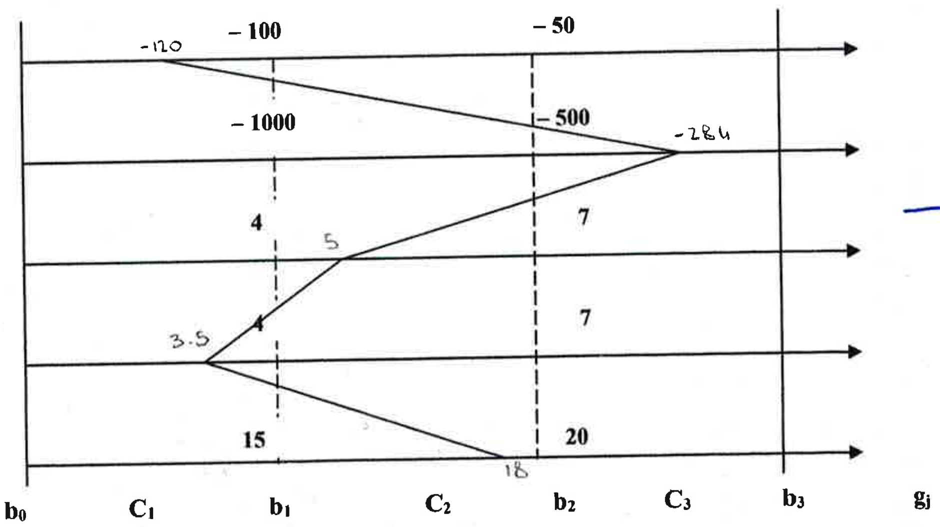
↳ $b \succ a$, equivale ad $b S a$, $a \not S b$

↳ incomparabilità: $a R b$, equivale ad $a \not S b$, $b \not S a$

es.

Tabella 2.1 – Modello multicriteri per l'applicazione di ELECTRE Tri

Criteri	Prezzo del terreno	Costi di trasporto	Stato attuale dell'ambiente	Controllo sui danni ai residenti	Adattabilità ad altri usi
Pesi	0.25	0.45	0.10	0.12	0.08
a_1	-120	-284	5	3.5	18
a_2	-150	-269	2	4.5	24
a_3	-100	-413	4	5.5	17
a_4	-60	-596	6	8	20
a_5	-30	-1321	8	7.5	16
a_6	-80	-734	5	4	21
a_7	-45	-982	7	8.5	13
b_1	-100	-1000	4	4	15
b_2	-50	-500	7	7	20
$q_j \; p_j \; v_j$	15 40 100	80 350 850	1 3 5	0.5 3.5 4.5	1 5 8



→ profilo di a_1

procedure attribuzione

confrontare in modo sistematico ogni azione da assegnare con le azioni di riferimento

1 pessimista o dall'alto

per poter attribuire un'azione ad una categoria è necessario che tutte le valutazioni dell'azione superino la frontiera inferiore della categoria.

consiste nell'attribuire l'azione alla categoria più alta in modo che tale azione surclassa l'azione di riferimento inferiore della classe

a) paragonare a con b_i

b) sia b_h la prima azione di riferimento tale che $a S b_h$, si attribuisce a alla categoria C_{h+1}

es.

Tabella 2.4 – Gradi di credibilità di surclassamento

	$\sigma_s(a_i, b_1)$	$\sigma_s(b_1, a_i)$	$\sigma_s(a_i, b_2)$	$\sigma_s(b_2, a_i)$	$\sigma_s(a_i, b_3)$	$\sigma_s(b_3, a_i)$
a_1	0.85	0	0.62	0	0	0.65
a_2	0.95	0.32	0.72	0.68	0.55	0.98

con $\lambda = 0.68$

procedura dall'alto

$a_1 \not S b_3$

$a_1 \not S b_2$

$a_1 S b_1 \rightarrow a_1 \in C_2$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 53 di 140

Soglia di veto per trattare la discordanza

La soglia di veto è utilizzata per calcolare l'indice di discordanza D_j, che assume valori tra 0 e 1, e che contribuisce a calcolare il grado di credibilità di surclassamento insieme all'indice di concordanza C

$D_j = 1$ quando lo scarto tra due azioni è > della soglia di veto → cancella surclassamento

$D_j = 0$ o $D_j \leq C$ → nessun effetto

$D_j > C$ → effetto penalizzante sul grado di credibilità di S

produttoria

$$\boxed{\delta(a,b) = C(a,b) \prod [1 - D_j(a,b)/1 - C(a,b)]}$$

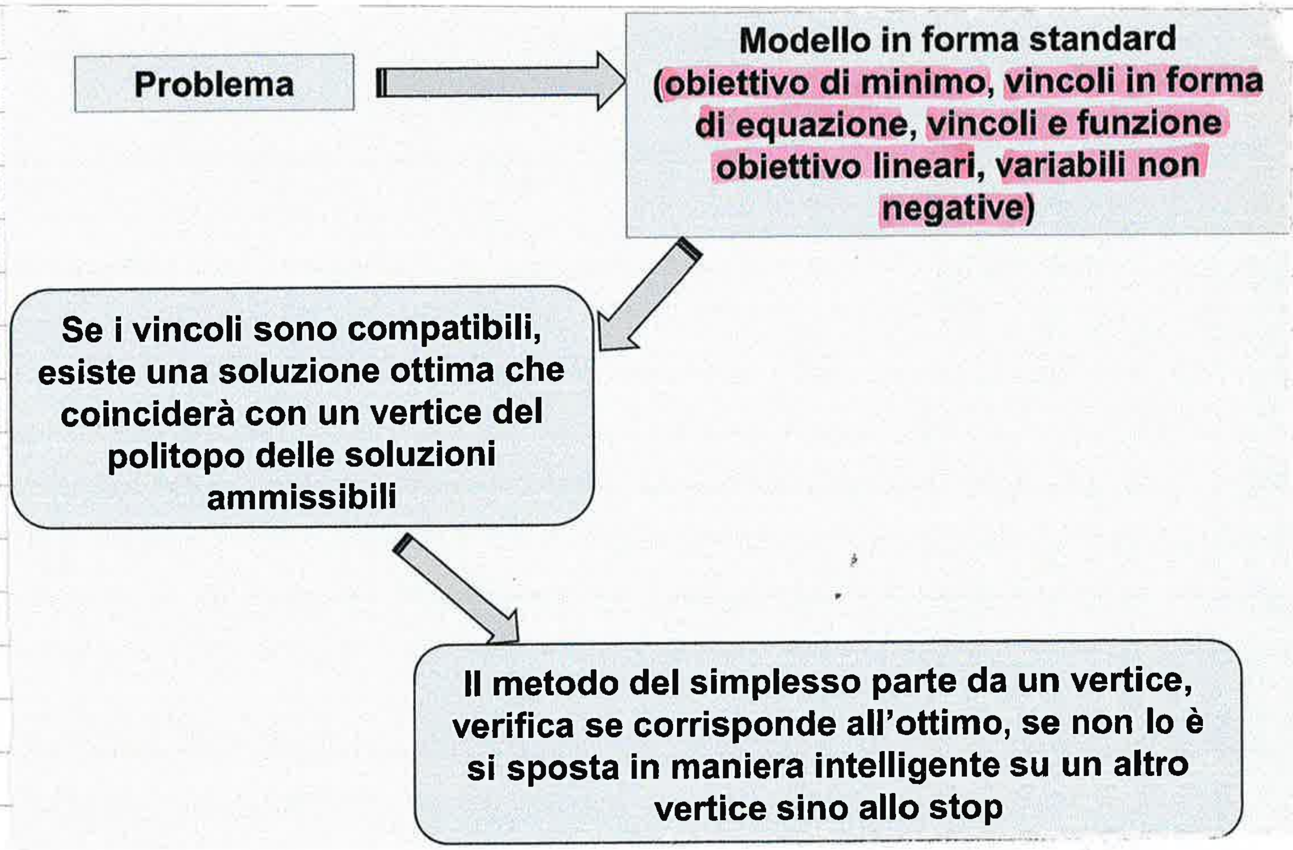
formula per calcolare grado di credibilità di S, compreso tra 0 e 1

- in ELECTRE TRI la soglia di veto deve essere sempre maggiore dello scarto tra il profilo a cui è associata e quello adiacente

- f. obiettivo → rappresentata come fascio di rette, devo trovare il pt più estremo della regione ammissibile

- soluzione ottima → cade sempre su un pt estremo, intersezione di vincoli o base

CONVERSIONE FORMA STANDARD



① conversione f. obiettivo

$$\max(f(x)) = -\min(-f(x))$$

forma vettoriale

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Min } z = cx \\ Ax = b \end{array}} \qquad x \geq 0$$

x: vettore colonna n-dim
c: vettore riga n-dim
A: matrice $m \times n$ (m vincoli, n variabili)
b: vettore colonna m-dim

con $n \geq m$

soluzioni di base $\boxed{Ax = b}$

↓

estraendo da A m vettori colonna linearmente indipendenti, ottengo B = matrice $m \times m$ chiamata matrice base

$\boxed{B x_B = b}$ con x_B = x relative alle colonne estratte

2) MAX $3x_1 + x_2$

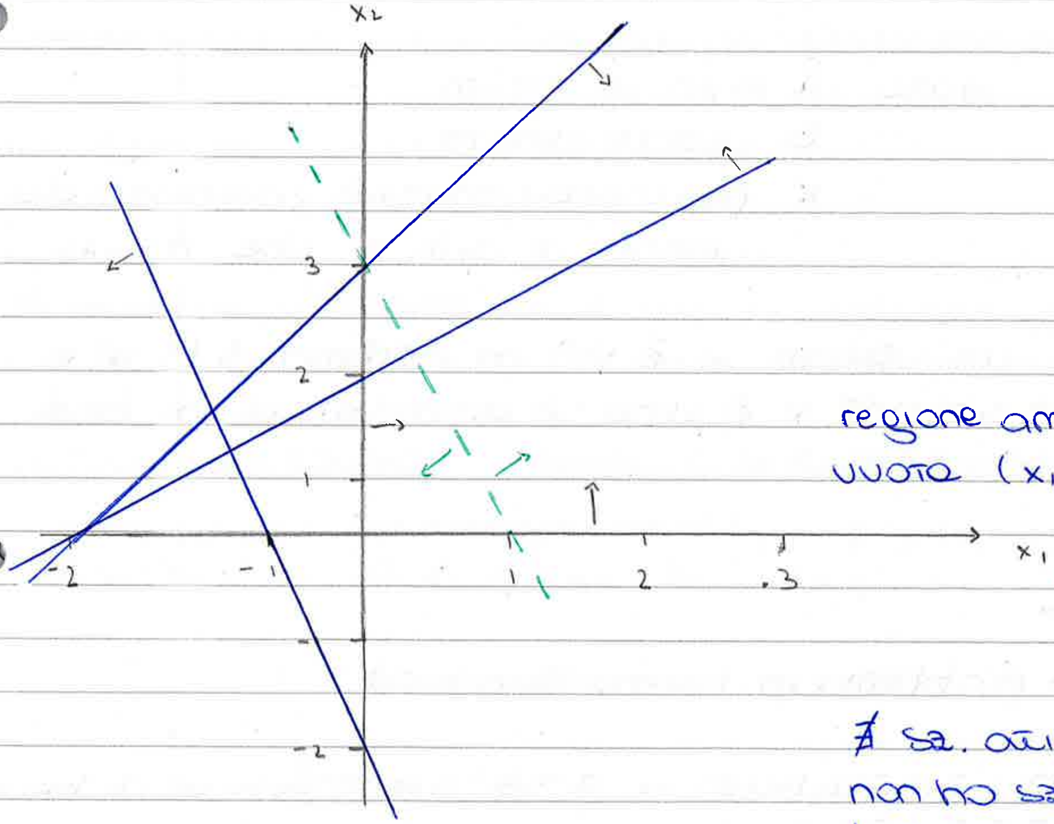
$x_1 - x_2 \leq -2$

$3x_1 - 2x_2 \geq -6$

$2x_1 + x_2 \leq -2$

$x_1, x_2 \geq 0$

x_1	x_2
0	2
-2	0
0	3
-2	0
0	-2
-1	0



regione ammissab. vuota ($x_1, x_2 \geq 0$)

∄ sol. ottima, poiché non ho sol. ammissabile

f. obiettivo → es. scelgo $x_1 = 1$ e $x_2 = 3$

FORMA CANONICA

$$B=\begin{pmatrix}x_1 & & & \\ & x_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & x_m\end{pmatrix} \begin{matrix}+\\+\\ \\+\end{matrix} \overbrace{\begin{pmatrix}\alpha_{1,m+1}x_{m+1} & + & & + & \alpha_{1n}x_n \\ \alpha_{2,m+1}x_{m+1} & + & & + & \alpha_{2n}x_n \\ & & & & \\ \alpha_{m,m+1}x_{m+1} & + & \cdots & + & \alpha_{mn}x_n\end{pmatrix}}^{=D} \begin{matrix}=\\=\\ \\=\end{matrix} \begin{matrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \\ \beta_m\end{matrix}$$

per ogni vincolo ho una variabile che è presente solo in quel vincolo e con coefficiente 1

sz. di base $x_1 = \beta_1 \dots x_m = \beta_m$
$x_{m+1} = 0 \dots x_n = 0$

B matrice identità → di dim. n, sempre quando ho una forma canonica

quindi $A = [B|D]$ variabili in base + fuori base

$Ax = b \rightarrow Bx_B + Dx_D = b$ (↑ matrice coeff.)

moltiplico tutto per B^{-1}

$Ix_B + B^{-1}Dx_D = B^{-1}b$

I				$B^{-1}\underline{a}_{m+1}$	…	$B^{-1}\underline{a}_n$	$B^{-1}\underline{b}$
1	0	0	0	$\alpha_{1,m+1}$	..	$\alpha_{1,n}$	β_1
0	1	0	0	$\alpha_{2,m+1}$	..	$\alpha_{2,n}$	β_2
..	..	..	..	..	..	..	..
0	0	0	1	$\alpha_{m,m+1}$	..	$\alpha_{m,n}$	β_m

$\beta = B^{-1}b$

$\alpha = B^{-1}a_j$
↳ componenti coeff. di D

ESERCIZI Sz. di base

1) MAX $3x_1 - x_2$

$4x_1 - x_2 \leq 4$

$5x_1 + 10x_2 \leq 20$

$x_1 - x_2 \geq -2$

x_1, x_2 libere

a) portare P.L in f. standard
b) identificare una S.A.B
c) calcolare x_B e z_0 (se possibile)

a) f. standard min $-3x_1 + x_2$

$4x_1 - x_2 + y_1^s = 4$

$5x_1 + 10x_2 + y_2^s = 20$

$-x_1 + x_2 + y_3^s = 2$

siccome x_1 e x_2 sono libere

$x_1 = u - v \qquad u, v \geq 0$

$x_2 = k - h \qquad k, h \geq 0$

min $-3(u-v) + (k-h)$

$4(u-v) - (k-h) + y_1^s = 4$

$5(u-v) + 10(k-h) + y_2^s = 20$

$(v-u) + (k-h) + y_3^s = 2$

$u \geq 0, v \geq 0, k \geq 0, h \geq 0, y_i^s \geq 0$

b) il probleme é anche in f. canonica

base $[y_1^s, y_2^s, y_3^s]$

- $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ base $[x_1, x_2]$ $b = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

$B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$x_B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ è ammis. $\rightarrow x_B \geq 0$

$z_0 = C_B^T x_B = (2 \quad 4) \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 12$

- $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ base $[x_1, x_3]$

$B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$x_B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow$ non ammissibile

- x_1 e x_4 non formano una base

- $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ base $[x_3, x_4]$

$x_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7/2 \end{pmatrix} \rightarrow$ non ammissibile

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 67 di 140

METODO DEL SIMPLESSO (revisionato)

considerando la funzione obiettivo

$$z = \underbrace{c_B^T x_B}_{z_0 \,\to\, \text{sol. di base}} + \underbrace{(c_D^T - c_B^T B^{-1} D)}_{\text{costo ridotto}} \underbrace{x_D}_{\text{var. fuori base}}$$

→ costo var. fuori base in f. obbiettivo

$$\boxed{x_B \text{ sol ottima} \Rightarrow (c_D^T - c_B^T B^{-1} D)\, x_D \geq 0}$$

costo var. in base in f. obbiettivo

ovvero se $\underbrace{c_j - c_B^T B^{-1} a_j}_{r_j} \geq 0 \quad \forall j \notin B$

$$\boxed{x_B \text{ non è sol. ottima} \Rightarrow r_j < 0}$$

$\exists\, x_D$ che mi da un contributo negativo e mi riduce f. obiettivo

↓

devo sostituire la var. di base con una fuori base

↓

operazione di **PIVOT**: x_D entra in base se $r_j < 0$, se ho più $r_j < 0$ ne entra solo una in base

- **SCELTA VAR x_B DA FAR USCIRE**

si assume $Ax = b \quad x \geq 0$ non degenere

sia $x = (\underbrace{x_1, \ldots, x_m}_{x_B}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{x_D})$ s.a.b.

es.

$$\min \quad 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4$$
$$x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 5$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 6$$
$$x_i \geq 0 \quad \forall i$$

Trovare sz. ottima partendo da base $[x_2, x_3]$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

det = -3

$$x_B = B^{-1} b = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}$$

$x_B \geq 0$ ↓ ammissibile

$$z_0 = C_B^T x_B = (4 \quad 1) \begin{pmatrix} 7/3 \\ 4/3 \end{pmatrix} = 32/3$$

$$\lambda^T = C_B^T B^{-1} = (4 \quad 1) \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} = (-2/3 \quad 7/3)$$

↳ moltiplicatori del simplesso

calcolo costi ridotti (D comprende x_1, x_4)

$$r_D^T = C_D^T - \lambda^T D = (2 \quad 3) - (-2/3 \quad 7/3) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{3} \quad -\frac{1}{3}\right)$$

x_4 ha costo ridotto negativo → entra in base

$$B^{-1} a_4 = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

↳ colonna matrice D di x_4

$$\min \left\{ \underset{\uparrow x_2}{\frac{7/3}{2/3}} \; ; \; \underset{\uparrow x_3}{\frac{4/3}{2/3}} \right\} \rightarrow \text{esce dalla base } x_3$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 71 di 140

$z_0 = c_B^T x_B = (0 \quad 0) \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix} = 0$

$\lambda^T = c_B^T B^{-1} = (0 \quad 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (0 \quad 0)$

$r_D^T = c_D^T - \lambda^T D = (5 \quad -2 \quad -3)$

x_2 e x_3 hanno $r_j < 0$

entra x_3 (+ negativo)

$B^{-1} a_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\min \left\{ \frac{8}{-2} ; \frac{12}{2} \right\}$ esce x_5 (coef. deve essere +)

↳ min tra valori positivi

base $[x_4 \quad x_3]$ l'ordine va rispettato

$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix}$

$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ det = 2

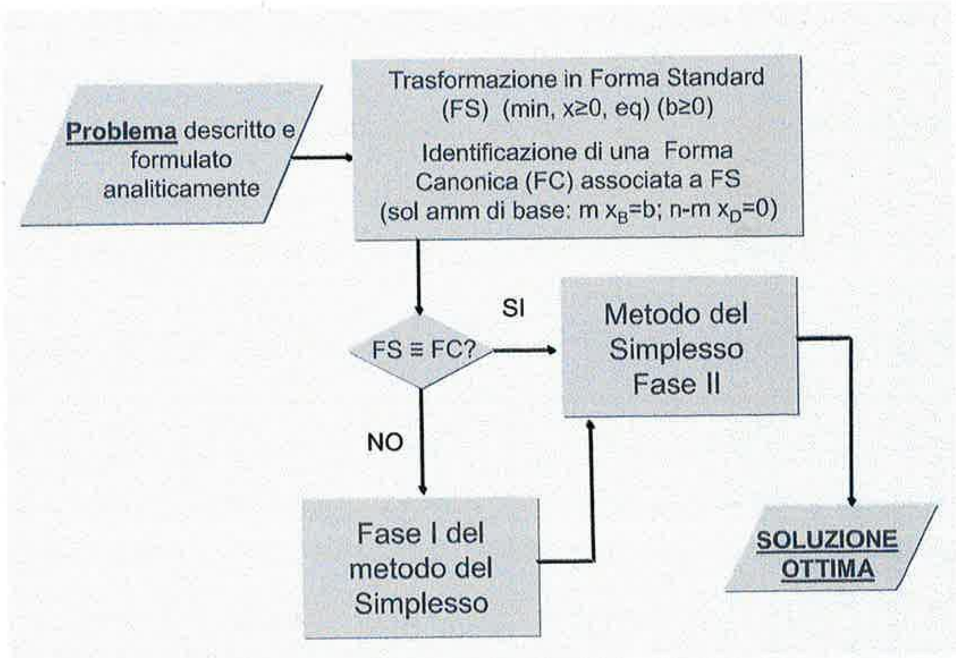
$x_B = B^{-1} b = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 6 \end{pmatrix}$ ammissibile

$z_0 = (0 \quad -3) \begin{pmatrix} 20 \\ 6 \end{pmatrix} = -18$ è diminuito

$\lambda^T = (0 \quad -3) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} = (0 \quad -3/2)$

$r_D^T = c_D^T - \lambda^T D = (5 \quad -2) - (0 \quad -3/2) \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
$= \begin{array}{ccc} (13/2 & -1/2 & 3/2) \\ x_1 & x_2 & x_5 \end{array}$

METODO SIMPLESSO



Fase I → ricerca sz. ammissibile di base

input: problema in FS

si crea un problema artificiale in FC
(inserisco var per vincolo e f.o somma di esse)
output: modello in FC equivalente

↓

se f.o > 0 → problema inaccettabile
se $x_a = 0$ → problema ridondante.
↳ var. artificiale

$$r_D^T = c_D^T - \lambda^T D = (0\ 0\ 0) - (1\ 1)\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (-5\ -4\ -3)$$

x_1 entra in base

$$B^{-1} a_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\min \left\{ \frac{4}{2}, \frac{3}{3} \right\} \to \text{esce } y_2$$

- base $[y_1, x_1]$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \det = 3$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2/3 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$x_B = B^{-1} b = \begin{pmatrix} 1 & -2/3 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$z_0 = c_B^T x_B = (1\ 0)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \to \text{è diminuito}$$

$$\lambda^T = c_B^T B^{-1} = (1\ 0)\begin{pmatrix} 1 & -2/3 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} = (1\ -2/3)$$

$$r_D^T = c_D^T - \lambda^T D = (\underset{x_2}{0}\ \underset{x_3}{0}\ \underset{y_2}{1}) - (1\ -2/3)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= (1\ -4/3\ 5/3)$$

x_3 entra in base

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 77 di 140

dato un problema in FS con 2 vincoli e 3 variabili, quante iterazioni fare per trovare l'ottimo (quanti cambiamenti di base)?

al più un cambiamento di base, una var che esce dalla base non rientra nell'iterazione successiva. Avendo 2 var in base, il max n° di iterazioni è due, quindi al più un cambiamento di base

↓

REGOLA DI BLAND → per evitare cicli infiniti
↳ quando n vincoli e n+1 var

es.

min $3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4$

$2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 \leq 8$

$-x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 4$

$x_i \geq 0$

porto in FS

min $3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4$

$2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5^S = 8$

$-x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 4$

$x_i \geq 0 \quad x_5^S \geq 0$

creo problema artificiale perché non è in FC

$z_0 = c_B^T x_B = 0$ → ho già l'ottimo

ora posso ritornare al prob. di partenza

- base $[x_5^s, x_2]$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

$x_B = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$

$z_0 = c_B^T x_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} = 2$

$\lambda^T = c_B^T B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

$r_D^T = c_D^T - \lambda^T D = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} 7/2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

x_3 entra in base

$B^{-1} a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\min \left\{ \frac{6}{0}, \frac{2}{-1} \right\}$ → non esce nessuno

$\frac{6}{0}$ → illimitato

$\frac{2}{-1}$ → rapporto solo tra +

problema illimitato !

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 81 di 140

• base $[x_4, x_1]$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

$x_B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ ammissibile

$z_0 = (0 \ -3) \begin{pmatrix} 2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = -3/2$ è diminuita

$\lambda^T = (0 \ -3) \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} = (0 \ -3/2)$

$r_D^T = (-2 \ 5 \ 0) - \underset{1\times 2}{(0 \ -3/2)} \underset{2\times 3}{\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$

$1\times 3 \quad (3/2 \ -3/2 \ -3/2)$

$r_D^T = (-7/2 \ \ 13/2 \ \ 3/2)$ entra x_2

$B^{-1} a_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \end{pmatrix}$

$\min \left\{ \frac{2}{0}, \frac{1/2}{-1/2} \right\}$ problema illimitato

2) $\max \quad x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4$

$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 4$

$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 6$

$x_i \geq 0$

è già in FS, ma non FC

creo p. artificiale

$$\lambda^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ -3/4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$r_D^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3/4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5/2 & +1/2 & -5/4 & -3/4 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 5/2 & -1/2 & 5/4 & 7/4 \end{pmatrix}$$

entro x_2

$$B^{-1} a_2 = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ -3/4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\min \left\{ \frac{1}{1/2}, \frac{3}{1/2} \right\} \rightarrow \text{esce } x_3$$

- base $[x_2, y_2]$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x_B = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$z_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \rightarrow \text{è diminuito}$$

$$\lambda^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$r_D^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{sono all'ottimo}$$

non ho sz. ammiss. di base perché ho y_2 in base

↳ prob. ridondante

- base $[x_2, y_2]$

$B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & 0 \\ 1/5 & 1 \end{pmatrix}$

$x_B = \begin{pmatrix} 1/5 & 0 \\ 1/5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

$z_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = 6 \rightarrow$ è diminuito

$\lambda^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/5 & 0 \\ 1/5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 & 1 \end{pmatrix}$

$r_D^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6/5 & 3/5 & 1/5 \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} -6/5 & -3/5 & 4/5 \end{pmatrix}$ entra x_1

$B^{-1} a_1 = \begin{pmatrix} 1/5 & 0 \\ 1/5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 \\ 6/5 \end{pmatrix}$

$\min \left\{ \frac{3}{1/5}, \frac{6}{6/5} \right\} \rightarrow$ esce y_2

- base $[x_2, x_1]$

$B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/6 & -1/6 \\ 1/6 & 5/6 \end{pmatrix}$

$x_B = \begin{pmatrix} 1/6 & -1/6 \\ 1/6 & 5/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

$z_0 = 0 \rightarrow$ ottimo

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 87 di 140

$r_D^T = (5) - \left(\frac{1}{6} \ -\frac{1}{6}\right)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = 5$ → sono all'ottimo

4) $\min \ 7x_1 + 2x_2 - 5x_3 - x_4$

$4x_1 + 3x_2 + 2x_4 \leq 2$

$-5x_1 - 3x_2 + x_3 \leq 1$

$x_i \geq 0$

$\min \ 7x_1 + 2x_2 - 5x_3 - x_4$

$4x_1 + 3x_2 + 2x_4 + y_1 = 2$

$-5x_1 - 3x_2 + x_3 + y_2 = 1$

è in FC

. base $[y_1, x_3]$

$B = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} = B^{-1}$

$x_B = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

$z_0 = (0 \ -5)\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = -5$

$\lambda^T = (0 \ -5)\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} = (0 \ -5)$

$r_D^T = (7 \ 2 \ -1 \ 0) - (0 \ -5)\begin{pmatrix}1 & 3 & 2 & 0\\-5 & -3 & 0 & 1\end{pmatrix}$

$= (7 \ 2 \ -1 \ 0) - (25 \ 15 \ 0 \ -5)$

$= (-18 \ -13 \ -1 \ 5)$ entra x_1

$B^{-1}a_1 = \begin{pmatrix}4\\-5\end{pmatrix}$

$\min \left\{\frac{2}{4}, \frac{1}{-5}\right\}$ esce y_1

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 89 di 140

DUALITÁ

ad ogni programma PL primale, è associabile ad un altro PL duale

P.P	P.D
$\min\ cx$	$\max\ \lambda b$
$Ax \geq b$	$\lambda A \leq c$
$x \geq 0$	$\lambda \geq 0$

PRIMALE	DUALE
f.o. min $z = cx$	f.o. max $v = \lambda b$
coeff. di costo c	termini noti b
termini noti b	coeff. di costo c
matrice coeff. A	matrice coeff. A^T
i-esima relazione $\geq$	variabile $\lambda_i \geq 0$
i-esima relazione $=$	variabile λ_i libera
i-esima relazione $\leq$	variabile $\lambda_i \leq 0$
variabile $x_j \geq 0$	j-esima relazione $\leq$
variabile x_j libera	j-esima relazione $=$
variabile $x_j \leq 0$	j-esima relazione $\geq$

↓

tabella corrispondenze

↳ legge da sx a dx per i prob. di min e da dx a sx per i prob. di max

vincoli → variabili

variabili → vincoli

$$\min\ v = 5\lambda_1 + 2\lambda_2$$
$$2\lambda_1 + 3\lambda_2 \geq 0$$
$$10\lambda_1 + 4\lambda_2 \geq 1$$
$$\lambda_1 \geq 0,\quad \lambda_2 \geq 0$$

all'ottimo z e v sono uguali !

Teorema dualità debole

dato un PP a cui corrisponde un PD

$\min\ z = cx$ | $\max\ v = \lambda b$
$Ax = b$ in FS | $\lambda A \leq c$
$x \geq 0$ | λ libero

dati x' s.a di PP e λ' s.a. di PD

$$\boxed{z(x') \geq v(\lambda')}$$

il min di z è maggiore del max di v

se ho una s.a. ottima $\boxed{cx^\circ = \lambda^\circ b}$

all'ottimo ho
$x^\circ = B^{-1}b$
$\lambda^\circ = c_B B^{-1}$
$z^\circ = \lambda^\circ b$

i moltiplicatori del primale sono s.a del duale e viceversa

ANALISI POST OTTIMALE

- fase zero → analisi della soluzione in relazioni e possibili evoluzioni del modello
- analisi di robustezza → analisi stabilità della sz. ottima al variare dei termini noti, dei coeff. di costo e dei coeff. tecnologici

Analisi stabilità al variare dei principali parametri

- una sz. rimane ottima fino a che le variabili in base non cambiano (anche se varia il loro valore)
- condizioni ottimalità → termini noti positivi o nulli e costi ridotti che mantengono il loro segno
- analisi condotte nell'ipotesi che venga alterato un solo elemento alla volta del vettore dei termini noti o dei vettore dei costi, mentre gli altri rimangono fissi

1 variazione termini noti

- variabilità termine noto → espresso come una perturbazione e trattato come una

$$\begin{cases} 80 + 4/7\, \theta_i^+ \\ 80 - 2/7\, \theta_i^+ \\ 40 - \theta_i^+ \end{cases} \qquad \begin{cases} 80 - 4/7\, \theta_i^- \\ 80 + 2/7\, \theta_i^- \\ 40 + \theta_i^- \end{cases}$$

$$\max \theta_i^+ = \min\left(\frac{80}{2/7}, \frac{40}{1}\right) \qquad \max \theta_i^- = \frac{80}{4/7} = 140$$

$= 40$ (considero solo θ_i^+ positivo)

analisi convenienza economica cambiamento risorse

- variazione di una risorsa → può indurre un miglioramento dell'obbiettivo di cui è stato calcolato il valore ottimo

- variazione termini noti → implica dei costi

$\boxed{\lambda^0 = \Delta z / \Delta b}$ (vettore riga) prezzo ombra → moltiplicatori del simplesso all'ottimo

↳ la sua analisi fornisce informazioni sulla convenzione economica

se $\lambda^0 = 0$ → ho una var. di slack all'ottimo, quindi nessuna modifica è possibile

se $\lambda^0 \neq 0$ → - in un problema di min e + in uno di