NUMERO: **2498A** ANNO: 2020

A P P U N T I

STUDENTE: Pieretto Letizia

MATERIA: Fisica 1 - Prof. Gliozzi

Letizia Pieretto

FISICA

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 264

CINEMATICA DEL PUNTO cap. 1

- **metodo scientifico**:
  1) osservazione sperimentale di un fenomeno
     - → riconoscimento elementi caratteristici
     - → formulazione di ipotesi sulla natura
  2) costruzione di una teoria → metodo induttivo
     - → interpretazione del fenomeno
     - → predizioni sul fenomeno
  3) verifica sperimentale
     - → conferma o smentisce la teoria

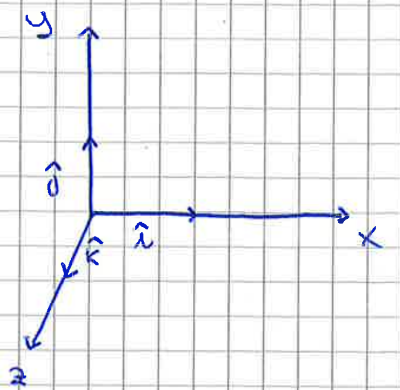
- **grandezze fisiche** → per mettere in opera il metodo scientifico ho bisogno di quantificare = misurare

- **eq. dimensionali** → ad ogni grandezza misurata si associa una dimensione che è indipendente dall'unità di misura

- **grandezze adimensionali**
  - → definite come rapporto fra grandezze omogenee
  - → il loro valore è indipendente dal sistema di unità di misura scelto

- **grandezze scalari**
  - → definite dal loro valore numerico

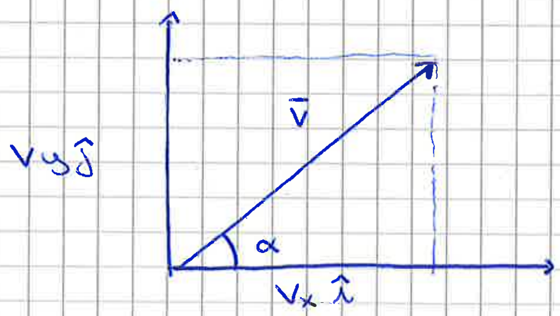
- **versori** → vettore di modulo unitario



vengono utilizzati nella scomposizione dei vettori

$$\bar v = v_x \hat i + v_y \hat j$$

- **vettori nel piano**



$$v_x = |\bar v| \cos\alpha$$

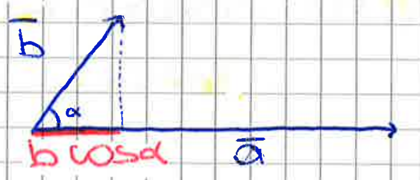
$$v_y = |\bar v| \sin\alpha$$

$$\alpha = \arctan\frac{v_y}{v_x}$$

$$|\bar v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

- **prodotto scalare** → ottengo un numero

$$\boxed{\bar a \cdot \bar b = a\, b \cos\alpha}$$



$\hat i \cdot \hat i = 1$ $\quad \hat j \cdot \hat j = 1$ $\quad \hat k \cdot \hat k = 1$

$\hat i \cdot \hat j = 0$ $\quad \hat j \cdot \hat i = 0$ $\quad \hat k \cdot \hat j = 0$

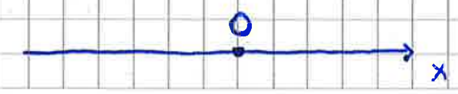
$\hat i \cdot \hat k = 0$ $\quad \hat j \cdot \hat k = 0$ $\quad \hat k \cdot \hat i = 0$

MECCANICA

- meccanica → studio del moto di un corpo
- tipi di moto → traslazione
  → rotazione
  → vibrazione
- sistema di riferimento → costituito da un insieme di corpi, fissi relativamente l'uno all'altro, rispetto ai quali definiamo la posizione del corpo studiato e il suo movimento
- sistema di coordinate → permette la descrizione matematica del movimento rispetto al sistema di riferimento
- traiettoria → luogo dei punti occupati successivamente dal punto materiale nel suo moto
- punto materiale → corpo privo di dimensioni ovvero che presenti ma trascurabili rispetto a a quelle dello spazio

MOTO RETTILINEO

moto che si svolge su una retta in cui vengono fissati arbitrariamente un'origine e un verso. il moto si descrive tramite una sola coordinata $x(t)$



da qui ottengo $dv = a(t)\,dt$

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_{t_0}^{t} a(t)\,dt$$

velocità $[v] = [L][T]^{-1}$

$$\boxed{v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(t)\,dt}$$ → solo se $a = K$

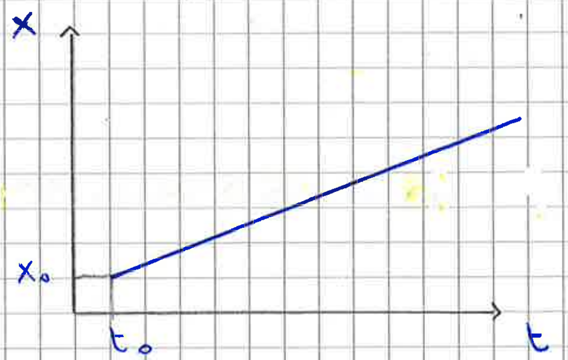
CASI PARTICOLARI di moti unidimensionali

• **moto rettilineo uniforme** $v = K$

$$v = \frac{dx}{dt} = K$$

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt$$

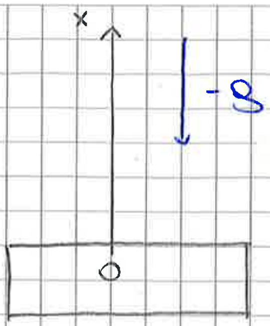
legge oraria $\boxed{x(t) = x_0 + v(t - t_0)}$



• **moto rettilineo uniformemente accelerato**

$a = K$ $\quad a = \frac{dv}{dt} = K$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 11 di 264



di un grave
$$\begin{cases} \text{tempo caduta} \\ t = \sqrt{2h/g} \\ \text{velocità caduta} \\ v = \sqrt{2gh} \end{cases}$$

più in generale $\boxed{x(t) = x_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2}$

• **moto rettilineo smorzato** $a = -kv$

$$\frac{dv}{dt} = -kv$$

$$\frac{dv}{v} = -k\,dt$$

$$\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v} = \int_{t_0}^{t} -k\,dt$$

$$\boxed{\begin{cases} v = v_0\, e^{-k(t-t_0)} \\ x = \frac{v_0}{k}\left(1 - e^{-kt}\right) \end{cases}}$$

MOTO PERIODICO

• è un moto vario

• è periodico quando ad intervalli di tempo regolari la particella torna a passare nella stessa posizione con la stessa velocità

• **moto armonico semplice**

è un moto vario

ESERCITAZIONE 1

1) La posizione di una particella che si muove lungo l'asse x, dipende dal tempo secondo la legge oraria

$x(t) = A t^2 - Bt^3$ con $A, B > 0$

- quali devono essere le dimensioni di A e B?

$[x] = [L]$

$[L] = [A][T]^2 \rightarrow [A] = [L][T]^{-2} = m/s^2$

$[L] = [B][T]^3 \rightarrow [B] = [L][T]^{-3} = m/s^3$

- quanto valgono v_i e a_i?

$v(t) = \frac{dx}{dt} \rightarrow v(t) = 2At - 3Bt^2$

$a(t) = \frac{dv}{dt} \rightarrow a(t) = 2A - 6Bt$

- in quale istante la particella raggiunge la massima ascissa?

$x_{max} \rightarrow v = 0$

$2At - 3Bt^2 = 0$

$t(2A - 3Bt) = 0 \rightarrow t = 0$ oppure $t = \frac{2A}{3B}$

$x_{max} = A\left(\frac{2A}{3B}\right)^2 - B\left(\frac{2A}{3B}\right)^3$

$\underbrace{x_{max}}_{[L]} = \frac{4A^3}{27B^2} = \frac{[L]^{\cancel{3}}\cancel{[T]^{-6}}}{\cancel{[L]^2}\cancel{[T]^{-6}}}$

3) Un oscillatore armonico è costituito da un blocco appoggiato ad un piano orizzontale liscio attaccato ad una molla la cui estremità opposta è fissata ad una parete verticale.
Ad un certo t $x = 0,112\,m$
$v = -13,6\,cm/s$
$a = -0,123\,m/s^2$

- frequenza del moto?

$f = \omega / 2\pi = [T]^{-1}$

$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$

$a(t) = -\omega^2 x(t)$

$\omega = 1,048\,s^{-1}$

$$f = \frac{1,048\,s^{-1}}{2\pi} = 0,167\,s^{-1}$$

- ampiezza dell'oscillazione?

$\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$

$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$

$v(t) = -A\omega\sin(\omega t + \varphi)$

$$\left(-\frac{v}{\omega A}\right)^2 + \left(\frac{x}{A}\right)^2 = 1$$

$$A = \sqrt{x^2 + v^2/\omega^2} = 0,171\,m$$

7) Una massa puntiforme parte da ferma con legge oraria $x(t) = 3\ln(t+1) + (1 - e^{-0,2t})$.
Una seconda massa identica parte con $v_0 = 2\,m/s$ ed è sottoposta ad $a = -0,1\,v(t)$
? v maggiore dopo $t = 5\,s$

$m_1 \rightarrow x(t) = 3\ln(t+1) + (1 - e^{-0,2t})$

$$v(t) = 3\,\frac{1}{t+1} + 0,2\,e^{-0,2t}$$

$v(5) = 0,6\,m/s$

per far sì che l'urto avvenga prima che urtino il suolo, $t_1 < t_2$ ovvero il tempo di caduta libera di un grave

$$t_2 = \sqrt{2h_A/g}$$

$t_1 < t_2 \rightarrow$ quindi $v_0 > v_0^*$

$$v_0^* = \frac{h_A - h_B}{t_2}$$

$$v_0^* = \frac{h_A - h_B}{\sqrt{2h_A/g}} = 7{,}9\ m/s$$

- velocità con la quale si urtano A e B quando $v_0 \geq v_0^*$

$$v_A = \frac{dz_A(t)}{dt} = -gt$$

$$v_B = \frac{dz_B(t)}{dt} = v_0 - gt$$

- valore di v_0 per cui A e B si incontrano a $h_c = 40\ m$

$$h_c = h_A - \frac{1}{2} g t^2$$

$$t_c = \sqrt{\frac{2(h_A - h_c)}{g}} = 1\ s$$

tempo in cui il corpo in caduta libera è a $h = 40m$

$$h_c = h_B + v_0 t - \frac{1}{2} g t_c^2$$

$$v_0 = \left[\frac{1}{t_c}\left(\frac{1}{2} g t_c^2 - h_B\right) + h_c\right] = 24\ m/s$$

- in componenti cartesiane

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{\imath} + x\frac{d\hat{\imath}}{dt} + \frac{dy}{dt}\hat{\jmath} + y\frac{d\hat{\jmath}}{dt}$$

siccome $\hat{\imath}$ e $\hat{\jmath}$ sono due versori, quindi con modulo e direzione costante, la loro derivata è $\varnothing$

$$\boxed{\bar{v} = v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath}} \qquad \boxed{\bar{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}}$$

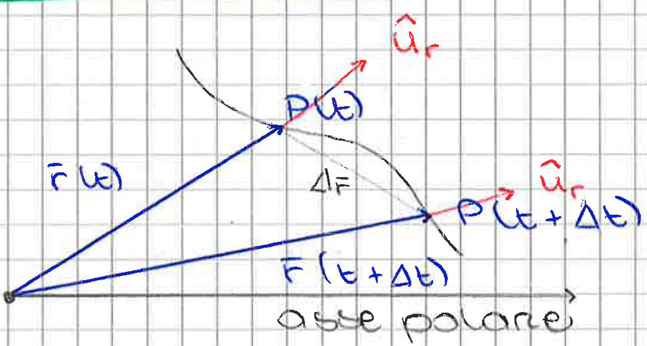
↳ con direzione tg alla curva

da qui di conseguenza ottengo che

$$\boxed{\bar{a} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath}}$$

quindi sia la velocità che l'accelerazione sono entità di tipo vettoriale

- in coordinate polari



$\bar{r} = \overline{OP} = r\,\hat{u}_r$

$\Delta\bar{r}$ = vettore spostamento

$\hat{u}_r$ non è più un versore costante perché cambia direzione, quindi la sua derivata non è più $= 0$ come in coordinate cartesiane

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \underbrace{\frac{dr}{dt}\hat{u}_r}_{\text{velocità radiale}} + \underbrace{r\frac{d\hat{u}_r}{dt}}_{\text{velocità vettoriale}}$$

$$\boxed{v = \frac{dr}{dt}\hat{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\hat{u}_\theta = v_r + v_\theta}$$

da qui ricavo l'accelerazione

$$a(t) = \frac{d\bar{v}}{dt}$$

$$= \frac{dv_r}{dt}\hat{u}_r + v_r\frac{d\hat{u}_r}{dt} + \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\hat{u}_\theta + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\hat{u}_\theta + r\frac{d\theta}{dt}\frac{d\hat{u}_\theta}{dt}$$

$$= \frac{dv_r}{dt}\hat{u}_r + v_r\frac{d\theta}{dt}\hat{u}_\theta + v_r\frac{d\theta}{dt}\hat{u}_\theta + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\hat{u}_\theta + r\frac{d\theta}{dt}\frac{d\hat{u}_\theta}{dt}$$

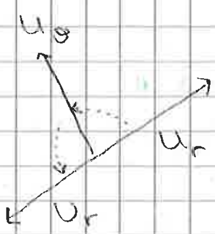
* derivata di un versore *

$\hat{u}_\theta$ non è costante perché cambia direzione

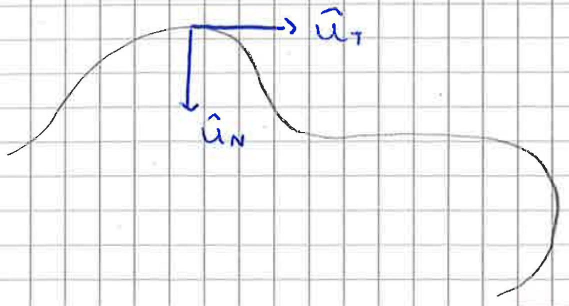
$$\frac{d\hat{u}_\theta}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\hat{u}_\theta(t+\Delta t) - \hat{u}_\theta(t)}{\Delta t}$$

$$= \underbrace{-\frac{d\theta}{dt}\hat{u}_r}$$

con segno − perché prendo $\hat{u}_r$ in senso antiorario



* *



$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{ds}{dt}\hat{u}_T \longrightarrow \boxed{\bar{v} = v\hat{u}_T}$$

velocità vettoriale tg traiettoria

dove v è una velocità scalare

da qui calcolo l'accelerazione

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d^2 s}{dt}\hat{u}_T + \frac{ds}{dt}\frac{d\hat{u}_T}{dt}$$

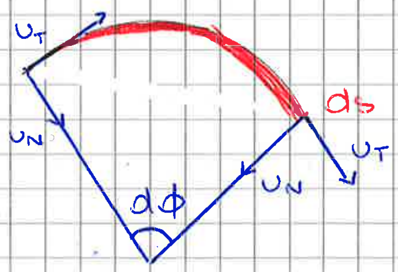
$$= \frac{dv_T}{dt}\hat{u}_T + v_T\frac{d\hat{u}_T}{dt}$$

* <u>derivata di un versore</u> *

$\hat{u}_T$ non è costante, quindi la derivata non $\emptyset$

$$\frac{d\hat{u}_T}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\hat{u}_T(t+\Delta t) - \hat{u}_T(t)}{\Delta t}$$

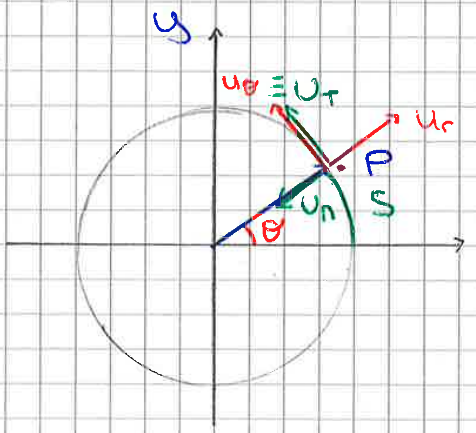
$$= \frac{d\phi}{dt}\hat{u}_N$$ → trovo vettore con direzione $\perp$ a $\hat{u}_T$



cerchio osculatore

$$\boxed{\begin{aligned} a_x &= \frac{dv}{dt}\cos\phi - \frac{v^2}{R}\sin\phi \\ a_y &= \frac{dv}{dt}\sin\phi + \frac{v^2}{R}\cos\phi \end{aligned}}$$

MOTO CIRCOLARE



$\theta = \theta_0 + \omega t$

- coord. cartesiane $\bar{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}$
- coord polari
- coord. intrinseche $s = R\theta(t)$

- coord. cartesiane

si ha la variazione di due coordinate

$$\boxed{\bar{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}}$$

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} \rightarrow \boxed{\bar{v} = \frac{dx}{dt}\hat{\imath} + \frac{dy}{dt}\hat{\jmath}}$$

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} \rightarrow \boxed{\bar{a} = \frac{dv_x}{dt}\hat{\imath} + \frac{dv_y}{dt}\hat{\jmath}}$$

$$\boxed{\bar{a} = \underbrace{-R\omega^2 \hat{u}_r}_{\text{radiale}} + \underbrace{R\alpha \hat{u}_\theta}_{\text{trasversa}}}$$

trasversa $= \frac{d\omega}{dt} \hat{u}_\theta$

radiale $= -\frac{v^2}{R} \hat{u}_r$

$$\theta(t) \rightarrow \omega = \frac{d\theta}{dt} \rightarrow \alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

- **COORD. INTRINSECHE**

$$\boxed{s(t) = R\theta}$$

La velocità deve avere lo stesso modulo di quella in coordinate polari poiché $\hat{u}_T \equiv \hat{u}_\theta$

$$\bar{v} = \frac{ds}{dt} \hat{u}_T$$

siccome $ds = R d\theta \rightarrow \bar{v} = R \frac{d\theta}{dt} \hat{u}_T$

$$\boxed{\bar{v} = R\omega \hat{u}_T} \qquad |v| = R\omega$$

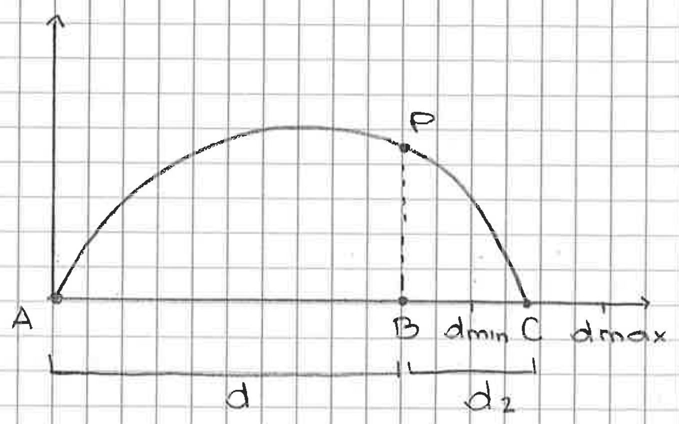
L'accelerazione deve avere segno opposto rispetto a quella in coordinate polari

$$\boxed{\bar{a} = \underbrace{\frac{v^2}{R} \hat{u}_N}_{\text{centripeta}} + \underbrace{R\alpha \hat{u}_T}_{\text{tangenziale}}}$$

ESERCITAZIONE 2

1) Con un cannone in A si tenta di colpire una casa in C al riparo di una collina in B di $h = \overline{BP} = 500$ m. $\overline{AB} = d = 5000$ m, la v_0 del cannone è $v_0 = \sqrt{10 g d / 9}$.

? d_2 / $\overline{BC} < d_2$ e la casa non viene colpita



ricavo eq. della parabola

$$y = tg\theta\, x - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\theta}$$

impongo che $P \in y$

$P(d, h)$

$$h = d\, Tg\theta - \frac{d^2}{2 v_0^2 \cos^2\theta} g$$

$$h = d\, Tg\theta \frac{\cancel{d^2} \cdot 9}{2 \cdot 10 g \cancel{d} \cos^2\theta} \cancel{g}$$ $\qquad \cos^2 = \frac{1}{1 + Tg^2}$

$$\frac{\cancel{d}}{10} = Tg\theta\, \cancel{d} - \frac{9}{20}(1 + Tg^2\theta)\, \cancel{d}$$

$$9 Tg^2\theta - 20 Tg\theta + 11 = 0$$

$$Tg\theta = \begin{cases} \theta_1 = 50{,}6° \\ \theta_2 = 45° \end{cases}$$

$45° < \theta < 50{,}6°$

$$\begin{cases} x(t) = r\cos\omega t \\ y(t) = r\sin\omega t \\ z(t) = v_z t \end{cases}$$

- eq. traiettoria?

$$\begin{cases} t = z/v_z \\ x(z) = r\cos(\omega\, z/v_z) \\ y(z) = r\sin(\omega\, z/v_z) \end{cases}$$

- componenti velocità?

$$\begin{cases} v_x = -r\omega\sin\omega t \\ v_y = r\omega\cos\omega t \\ v_z = v_z \end{cases}$$

$r\omega = v_{xy}$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{v_{xy}^2 \underbrace{\sin^2\omega t + \cos^2\omega t}_{=1} \cdot v_{xy}^2 + v_z^2}$$

$$= \sqrt{v_{xy}^2 + v_z^2} = 0{,}28\ m/s$$

3) una ruota di raggio $R = 50$ m gira con moto uniforme attorno ad un asse passante per il suo centro, $\omega = 4$ rad/s. Quando $\theta = 30°$ da A si stacca un punto che dopo un tempo t colpisce una parete distante $d = 1$ m da O.

? t e v del punto nell'istante in cui urta la parete

DINAMICA DEL PUNTO

cap 2, lez 3

- dinamica → studia come l'interazione dei corpi con l'ambiente modifica il loro moto

I legge di Newton → PRINCIPIO D'INERZIA

un corpo non soggetto a forze non subisce cambiamenti di velocità, ossia rimane in quiete se già lo era o si muove di moto rettilineo uniforme

→ l'assenza di forza non implica l'assenza di moto, ma comporta che la velocità non vari

- forza → grandezza che esprime e misura l'interazione fra sistemi fisici
  - ↳ crea una variazione di velocità in modulo o direzione

è un vettore ed è importante il punto di applicazione

- forze diverse su uno stesso corpo

↓

le accelerazioni risultanti sono proporzionali al modulo della forza applicata

$$F_1/a_1 = F_2/a_2 = F_3/a_3 \dots$$

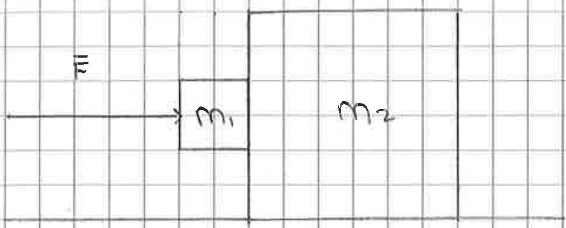
II legge di Newton

l'accelerazione di un oggetto è direttamente proporzionale alla forza risultante agente su di esso ed inversamente proporzionale alla sua massa

$$\boxed{\bar{F}_{ris} = m\bar{a}}$$

da qui si deduce che non esiste una forza isolata, le forze vanno sempre considerate a coppie, cioè esiste sempre un'azione mutua tra i corpi

es



$m_1 = 5\ kg$

$m_2 = 15\ kg$

$F = 20\ N$

I due corpi si muovono in maniera solidale

$\bar{F} = (m_1 + m_2)\bar{a}$

$\bar{a} = 1\ m/s^2$

fra m_1 e m_2 → forza interna al sistema $F_{1,2}$

$F_{1,2} = m_2 \bar{a} = 15\ N$

su m_1 forza di reazione $F_{2,1} = -F_{12}$

$F - F_{21} = m_1 \bar{a} = 5\ N$

$F_{21} = \bar{F} - 5\ N = 15\ N$

EQUILIBRIO STATICO

- equilibrio statico → quando la risultante delle forze agenti su un corpo è nulla e il corpo ha inizialmente velocità nulla, esso rimane in quiete

$$\Sigma F = 0 \longrightarrow \begin{cases} \Sigma F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \end{cases}$$

se invece il corpo ha inizialmente una certa velocità, esso si muoverà di moto rettilineo uniforme

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 37 di 264

QUANTITÀ DI MOTO e IMPULSO

- quantità di moto → definisce lo stato dinamico del sistema

$$\boxed{\bar{p} = m\bar{v}}$$

questa è la forma più generale della II legge di Newton

$$\Sigma F = \frac{d\bar{p}}{dt} = \frac{d(m\bar{v})}{dt}$$

$$= \cancel{\frac{dm}{dt}\bar{v}} + m\frac{d\bar{v}}{dt}$$

$$= m\bar{a}$$

- teorema dell'impulso

l'impulso di una forza applicata ad un punto materiale provoca la variazione della sua quantità di moto

$$\bar{F}dt = d\bar{p}$$

$$\int_{t_0}^{t} \bar{F}\,dt = \int_{p_0}^{p} d\bar{p}$$

$$\boxed{\Delta\bar{p} = \int_{t_0}^{t} \bar{F}\,dt}$$ → impulso (solo se so integrare la forza posso usarlo)

se $\Delta p = 0$
↓
quantità di moto si conserva

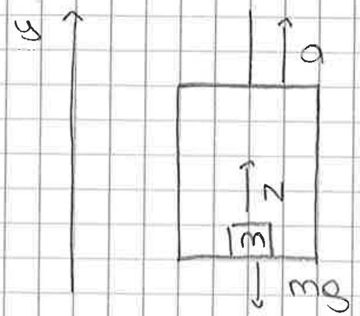
↓
dice qual è l'effetto complessivo della applicazione di una forza in un intervallo finito

$$\boxed{\bar{P} = m\bar{g}}$$

- **sensazione di peso**

un corpo di massa m, poggiato su un pavimento in equilibrio statico, esercita una forza sul pavimento e riceve di una reazione vincolare N

se consideriamo una piattaforma in moto accelerato in direzione verticale...



$$\bar{P} + \bar{N} = m\bar{a}$$

in salita → $\bar{N} - m\bar{g} = m\bar{a}$

$\bar{N} = m\bar{g} + m\bar{a}$

in discesa → $\bar{N} - m\bar{g} = -m\bar{a}$

$\bar{N} = m\bar{g} - m\bar{a}$

FORZA DI ATTRITO

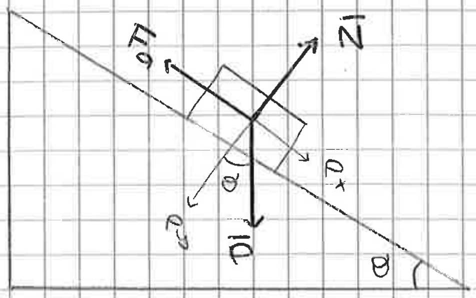
- **radente statico**

resistenza che la materia oppone al movimento di un corpo

se applico una forza per mettere in moto un corpo, finché il corpo non si muove la risultante delle forze agenti su di esso è nulla $F_{as} = -F$

$\boxed{F_{as}^{max} = \mu_s N}$ subito dopo il corpo inizia a muoversi

PIANO INCLINATO



1) SENZA ATTRITO

$\bar{P}+\bar{N}=m\bar{a}$

x: $m\bar{g}\sin\theta = m\bar{a}$

y: $\bar{N} - m\bar{g}\cos\theta = 0$

$\boxed{a_x = g\sin\theta}$ $\boxed{N = mg\cos\theta}$

2) ATTRITO STATICO

$\Sigma F = \bar{P}+\bar{N}+\bar{F}_{as}=0$

x: $mg\sin\theta - F_{as} = 0$

y: $N - mg\cos\theta = 0$

$F_{as} \leq \mu_s N$

$mg\sin\theta \leq \mu_s mg\cos\theta$

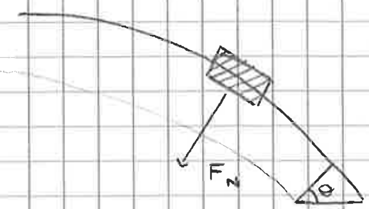
$\boxed{\mu_s = Tg\theta^{max}}$ condizione per l'equilibrio statico

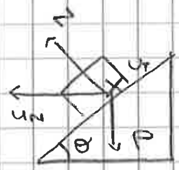
↓

dopo si ha il distacco

FORZA CENTRIPETA

la componente normale alla traiettoria causa l'accelerazione centripeta dell'oggetto





v_T è entrante

$$\Sigma F = m\bar{a}$$

↳ N → $a_N = v^2/R$

↳ T

lungo N $\quad F_N \sin\theta = m a_N = m v^2/R$ → tiene la macchina legata alla curva

lungo T $\quad F_N \cos\theta = mg$

$$F_N = \frac{mg}{\cos\theta}$$

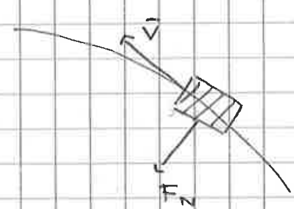
$$F_N = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} mg = \frac{v^2}{R} m$$

$$\boxed{tg\,\theta = v^2/Rg}$$

fissato θ, stabilisce la velocità che deve essere mantenuta per restare sulla traiettoria

(senza attrito)

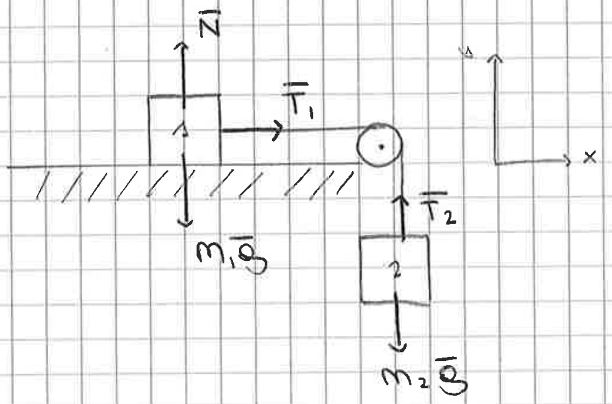
• curve piane



dove la forza centripeta è legata alla forza di attrito statico

- carrucola fissa
↓
si può considerare come una leva a cui sono applicate la forza traente e la massa. L'asse della puleggia è fisso e la ruota ha la sola funzione di deviare la direzione della forza.

es.



1) $x: \quad \bar{T}_1 = m_1 \bar{a}_{1x}$

$y: \quad \bar{N} = m_1\bar{g}$

2) $y: \quad \bar{T}_2 - m_2\bar{g} = -m_2 a_{2y}$

siccome m_{filo} trascurabile $\rightarrow T_1 = T_2$
e quindi $a_1 = a_2$

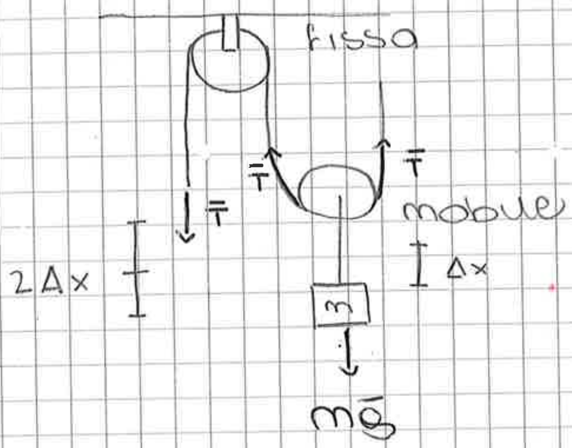
$$\begin{cases} \bar{N} = m_1\bar{g} \\ m_1\bar{a} - m_2\bar{g} = -m_2\bar{a} \end{cases}$$

$$\bar{T} = \frac{m_1 m_2 \bar{g}}{m_1 + m_2}$$

- carrucola mobile

↓

si applica all'asse della carrucola una forza resistente e all'estremità della corda una forza attiva



$m\bar{g} + 2\bar{T} = 0$

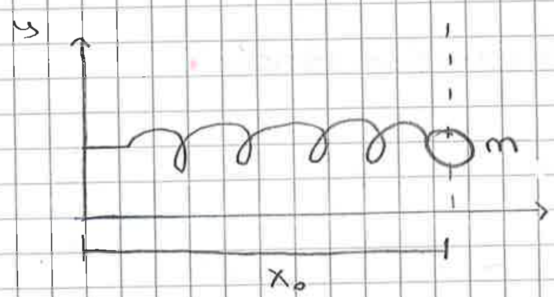
$T = \frac{1}{2} gm$

lo sforzo con cui tiro, l'accelerazione e lo spazio percorso, sono dimezzati

↓

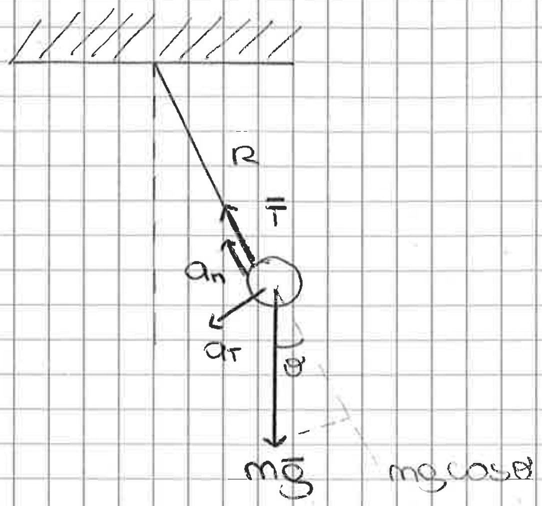
tiro con meno forza ma per più tempo

FORZA ELASTICA → non è costante!



- originata da molle
- x_0 = lunghezza a riposo
- Δx = deformazione molla

PENDOLO SEMPLICE



$\Sigma \bar{F} = \bar{T} + m\bar{g} = m\bar{a}$

N: $T - mg\cos\theta = m a_N$ normale

T: $-mg\sin\theta = m a_T$ tangenziale

↳ direzione opposta al movimento di S lungo la traiettoria ($S = L\theta$)

sinistra verticale ⊕ destra verticale ⊖

siccome $a_N = m\, v^2/R$

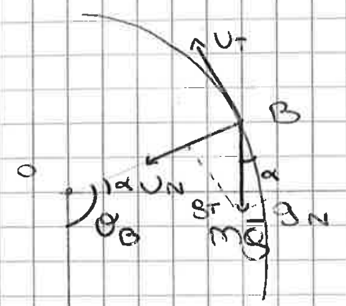
$a_T = m R \alpha = m R \dfrac{d^2\theta}{dt^2}$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{R}\sin\theta = 0$$

per angoli molto piccoli $\omega^2 = g/L$ e quindi si ha la stessa eq del moto armonico

soluzione → $\boxed{\theta = \theta_0 \cos(\omega t + \varphi)}$ legge oraria

e $\boxed{T = 2\pi \sqrt{L/g}}$



$\alpha = \theta_B - \pi/2$

$$\begin{cases} g_T = -g\cos\alpha \\ g_N = g \,\text{sen}\, \alpha \end{cases}$$

$$mg((\text{sen}\,\alpha)\hat{u}_N - (\cos\alpha)\hat{u}_T) + \bar{N}_B = ma$$

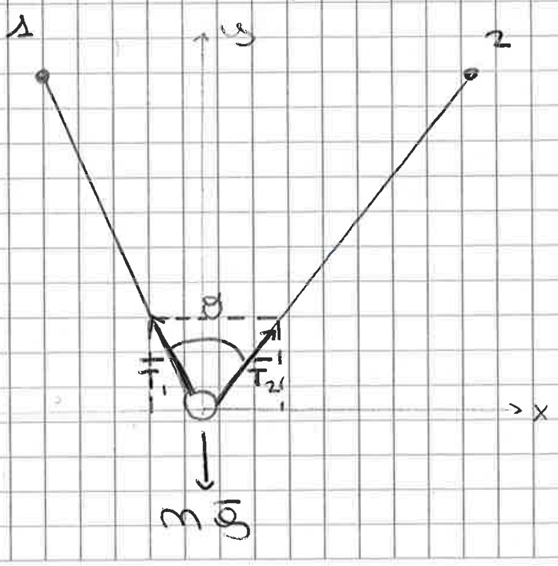
$$mg((\text{sen}\,\alpha)\hat{u}_N - (\cos\alpha)\hat{u}_T) + N_B\hat{u}_N = m\left(\frac{v^2}{R}\hat{u}_N + \frac{dv}{dt}\hat{u}_T\right)$$

$\hat{u}_T$: $-mg\cos\alpha = m\, dv/dt$

$\hat{u}_N$: $mg\,\text{sen}\,\alpha + N_B = m\, v^2/R$

$N_B = m\left[v^2/R - g\,\text{sen}\,\alpha\right] = 0{,}634\ N$

3) Un alpinista di $m = 80$ kg vuole assicurarsi ad una parete verticale usando due funi ideali. Egli resta sospeso al vertice di un triangolo isoscele di angolo θ



$$J = \int_0^t F\,dt = \Delta p$$

$$J = m v_0$$

$$v_0 = J/m$$

x: $-mg\sin\theta - F_d = ma_x$

y: $-mg\cos\theta + N = 0$

$F_d = \mu_d N = \mu_d mg\cos\theta$

$a_x = -g(\sin\theta + \mu_d\cos\theta)$

dall' eq. della cinetica del moto unif. acc.

$v^2 = v_0^2 + 2as$

il corpo si ferma quando $v=0$

$$s = \frac{v_0^2}{2a} = \frac{J^2/m^2}{2(-g(\sin\theta + \mu_d\cos\theta))} = 0{,}3\ m$$

b) determinare se dopo aver raggiunto max quota, rimane fermo o ricade verso il basso

x: $-mg\sin\theta + F_s = 0$

y: $N - mg\cos\theta = 0$

$F_s \leq F_s^{max} \rightarrow F_s \leq mg\cos\theta\,\mu_s$

$mg\sin\theta \leq \mu_s mg\cos\theta$

$\tan\theta \leq \mu_s$

$\theta = 0{,}577 \rightarrow \theta$ per cui il corpo rimane fermo

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 55 di 264

DINAMICA DEL PUNTO

Cap. 2, lez. 5

(lavoro, energia)

• lavoro elementare → relativo allo spostamento elementare

$d\bar{s} = \bar{r}(t+dt) - \bar{r}(t)$

$\boxed{dW = \bar{F}\, d\bar{s}}$ → è una quantità scalare

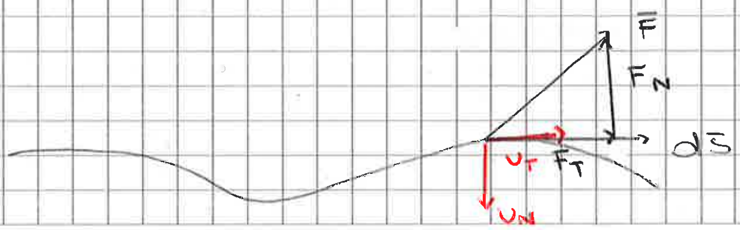
• nel caso in cui lo spazio percorso non sia infinitesimo, ma un tratto di curva da A a B, ho un integrale di linea

$$\boxed{W_{A\to B} = \int_{A,\gamma}^{B} \bar{F}\, d\bar{s}}$$

posso anche vederlo come una quantità scalare che varia al variare di θ

$$\boxed{W_{A\to B} = \int_{A,\gamma}^{B} |\bar{F}||d\bar{s}|\cos\theta}$$

siccome $d\bar{s}$ è Tg alla curva, posso anche esprimerlo in coordinate intrinseche



RIEPILOGO

W → tiene conto dell'effetto di una forza durante lo spostamento nello spazio

J → tiene conto dell'effetto della forza nel tempo

$$W = \int_A^B \bar{F}\, d\bar{s} \qquad J = \int_{t_0}^{t} \bar{F}\, dt$$

- lavoro → variazione di energia

$$W = \Delta E$$

LAVORO E CINEMATICA

voglio trovare un legame tra lavoro e velocità

Teorema della energia cinetica o delle forze vive

$$\bar{F} = m\bar{a}$$

$$\bar{F} = m \frac{d\bar{v}}{dt}$$

$$dW = \bar{F}\, d\bar{s}$$

$$dW = m \frac{d\bar{v}}{dt}\, d\bar{s}$$

$$dW = m\, d\bar{v}\, \underbrace{\frac{d\bar{s}}{dt}}_{\bar{v}}$$

$$dW = m\bar{v}\, d\bar{v}$$

$$W^{TOT}_{A \to B} = \int_{A,\gamma}^{B} \bar{F}\, d\bar{s} = \int_{A,\gamma}^{B} m\bar{v}\, d\bar{v}$$

ma $d\bar{v}$ e $\bar{v}$ hanno stessa direzione, quindi

$$W_{A \to B} \int_{A,\gamma}^{B} m v\, dv$$

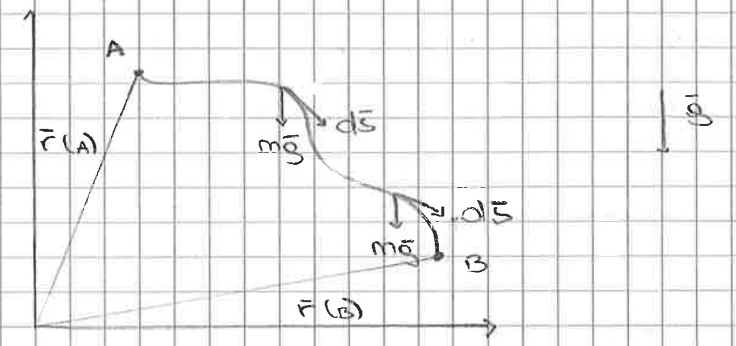
$$W = \int_{A,\gamma}^{B} (-\mu_d N \hat{u}_T)(ds\,\hat{u}_T)$$

$$W = -\mu_d N \int_{A,\gamma}^{B} ds = -\mu_d N L = -\mu_d mgL$$

$$-\frac{1}{2} m v_{0\,min}^2 = -\mu_d mgL$$

$$v_{0\,min} = \sqrt{2\mu_d gL}$$

LAVORO FORZA PESO (conservativa)



$W = \int_{A,\gamma}^{B} \bar{F}\, d\bar{s}$ ma siccome $F =$ cost. $W = \bar{F} \int_{A,\gamma}^{B} d\bar{s}$

$d\bar{s} \rightarrow$ metodo punta-coda $= \bar{r}_B - \bar{r}_A$

$$W = m\bar{g}\,\bar{r}_{AB}$$

$$W = -mg\hat{j}\left((y_B - y_A)\hat{j} + (x_B - x_A)\hat{i}\right)$$

$$W = -mg(y_B - y_A)$$

in questo caso il lavoro non dipende dal percorso

$\boxed{W_g = -\Delta E_p}$ energia potenziale gravitazionale in virtù della posizione

$E_p = mgy + C$ energia potenziale forza peso

$$W = \int_{A,\gamma}^{B} \vec{F} \, d\vec{s} = -\mu_d N \int_{A,\gamma}^{B} \hat{u}_T \, d\vec{s}$$

siccome lo spazio ha la stessa direzione della forza

$$W = -\mu_d N \int_{A,\gamma}^{B} \hat{u}_T \, ds \, \hat{u}_T = -\mu_d N \int_{A,\gamma}^{B} ds$$

ora ds è uno scalare e mi da la lunghezza del percorso misurata lungo la traiettoria effettiva del punto

$$\boxed{W = -\mu_d N L_\gamma}$$

dove L_γ è la lunghezza della traiettoria e non è esprimibile con una differenza dei valori di una funzione nei punti A e B (è una somma di scalari)

FORZE CONSERVATIVE

una forza si dice conservativa se:

- il lavoro non dipende dal percorso

$$\int_{A,\gamma_1}^{B} \vec{F} \, d\vec{s} = \int_{A,\gamma_2}^{B} \vec{F} \, d\vec{s}$$

- la circuitazione della forza è nulla

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$$

integrale di linea lungo una linea chiusa

se ho sia forze conservative che non...

$$W_{AB} = W_{AB}^{nc} + W_{AB}^{c}$$

$$W_{AB} = W_{AB}^{nc} + E_{p,A} - E_{pB}$$

$$W_{AB} = E_{m,B} - E_{m,A} + E_{p,A} - E_{p,B}$$

se perdo energia diventa lavoro delle forze non conservative

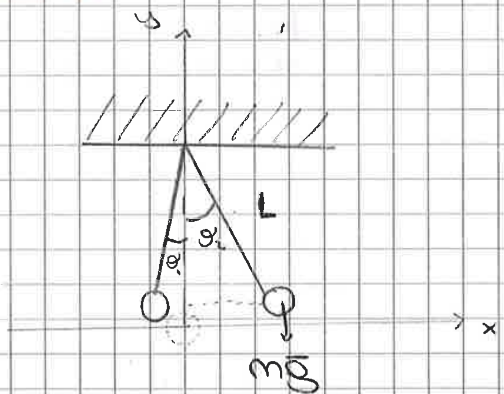
principio di conservazione dell'energia

↓

l'energia non può mai né essere creata né essere distrutta, ma può essere convertita da un tipo ad un altro

es.

pendolo



nel punto più basso (fermo) → $E_p = 0$

$E_p = mgy + c$

in questo caso $c = 0$ se $y = 0$

$E_p(\theta_0) = mgL(1-\cos\theta_0)$

$E_k(\theta_0) = 0$

quindi $E_m = L(1-\cos\theta_0)mg$

nel punto di inversione (il più alto)

in C siccome L non è scabro $v_C = v_B$

in D $mg(h_1 - h_2) = \frac{1}{2} m v_D^2$

$v = \sqrt{2g(h_1 - h_2)}$

in E $v_D = v_E$

in F $mg\underbrace{(h_1 - h_3)}_{<0} = \frac{1}{2} m v_F^2$

< 0 quindi non arrivo in F ma mi fermo ad un'altezza pari a h_1

• inserisco una molla in E

in D $mgh_1 = \underbrace{\frac{1}{2} K \Delta x^2}_{E_p \text{ elastica}} + \underbrace{mgh_2}_{E_p \text{ gravit.}}$

$\Delta x_1 = \frac{mg(h_1 - h_2)}{K}$ → di quanto si comprimerebbe la molla

• tratto L scabro

in D $mgh_1 = \frac{1}{2} K \Delta x^2 + mgh_2 + \underbrace{\mu_d N L}_{E_p \text{ attrito}}$

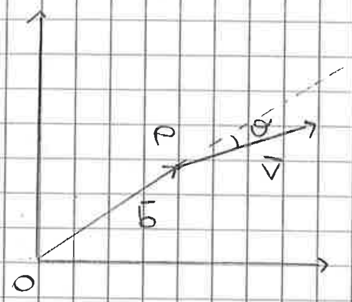
$\Delta x_2 = \frac{\sqrt{2(mg(h_1 - h_2) - \mu_d mgL)}}{K}$ → di quanto si comprimerebbe la molla

• inserisco triangolo in C e L liscio

$\Delta x = \Delta x_1$ perché non perdo energia a causa dell'attrito

MOTI ROTATORI

- si ottengono effetti diversi a seconda del punto di applicazione della forza



momento di un $\bar{v}$ applicato in P, rispetto ad un polo O
↓
dipende dal punto di applicazione!

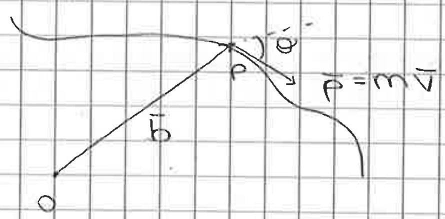
$$\boxed{\bar{M} = \bar{b} \times \bar{v}}$$

(entrante) → momento

↓

$\bar{M} = |\bar{b}||\bar{v}| \sin\theta$

- il momento angolare, invece, ...



$\bar{L} = \bar{b} \times \bar{p}$

$$\boxed{\bar{L} = \bar{b} \times m\bar{v}}$$

momento angolare (uscente)
↓
momento del vettore quantità di moto

↓

$|\bar{L}| = m\,|\bar{v}|\,|\bar{b}| \sin\theta$

cambia a seconda del polo rispetto a cui lo calcolo

- Teorema del momento angolare

$\bar{L} = \bar{b} \times m\bar{v}$

$$\frac{d\bar{L}}{dt} = \frac{d\bar{b}}{dt} \times m\bar{v} + \bar{b} \times m\frac{d\bar{v}}{dt}$$

siccome il braccio viene applicato nell'origine, coincide con il vettore posizione $\bar{r}$

$$\frac{d\bar{L}}{dt} = \bar{v} \times m\bar{v} + \bar{r} \times m\bar{a}$$

$$\boxed{\frac{d\bar{L}}{dt} = \bar{r} \times \bar{F} = \bar{M}}$$ → se il polo è fermo

se $\bar{M} = 0 \rightarrow \bar{L} =$ costante

↓

es. nel moto circolare uniforme

$\tau = \bar{r} \times \bar{F}$ dove ho solo forza centripeta

$\tau = \bar{b} \times F_N \hat{u}_N$

$\tau = b\hat{u}_N \times F_N \hat{u}_N = 0$

$M = 0 \rightarrow L =$ costante

se il polo non è fermo $\bar{b}$ non coincide più con $\bar{r}$

$\bar{r} = \overline{OP} + \bar{b} \rightarrow \bar{b} = \bar{r} - \overline{OP}$

$$\frac{d\bar{L}}{dt} = \frac{d(\bar{r} - \overline{OP})}{dt} \times m\bar{v} + \underbrace{\bar{r} \times \bar{F}}_{\bar{M}}$$

↳ il suo modulo è funzione soltanto della distanza del punto P dal centro

$$\boxed{F = F(r)\hat{u}_r}$$

↳ genera una variazione dello spazio detto campo di forze

↳ è di tipo conservativo

$$\boxed{\frac{d\bar{L}}{dt} = \bar{M} = 0} \rightarrow \text{quindi } \boxed{L = \text{cost}}$$

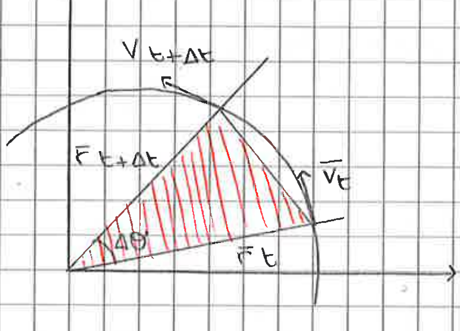
↓

il momento della quantità di moto rispetto al centro della forza deve rimanere costante in:

- direzione → implica che il moto sia piano
- verso → implica che la traiettoria viene percorsa sempre nello stesso verso: orario o antiorario
- modulo → il punto spazza aree uguali in tempi uguali

↓

dimostrazione



? area spazzata nell'unità di tempo

$$dA = \frac{1}{2}\underbrace{|\bar{r}|}_{\text{altezza}}\underbrace{|\bar{r}|d\theta}_{\text{base}}$$

$$dA = \frac{1}{2}r^2 d\theta$$

esercitazione 4

2) Una forza di direzione costante e intensità variabile, agisce su un corpo di $m = 1\,kg$. L'energia cinetica del corpo cresce nel tempo con la legge $E_k(t) = \alpha t^3$.
$v_0 = 0$ iniziale del corpo e l'impulso I in $(0, \tau) = 2\,Ns$

? α e intensità della forza a $\tau = 10\,s$

$t = 0 \quad v_0 = 0 \rightarrow E_k = 0$

$$J = \Delta p = m v_f - \underset{0}{m v_i} = m v_f$$

$$v_f(\tau = 10\,s) = J/m = 2\,m/s$$

$$E_k(\tau = 10\,s) = \alpha t^3 = 1/2\, m v_f^2$$

$$\alpha = \frac{m v_f^2}{2 t^3} = 2 \cdot 10^{-3}\, J/s^3$$

$dL = \bar{F} d\bar{s} = F\, ds$

siccome $v = ds/dt$

$dL = F\, v\, dt$

$L = \Delta E_k$

$$\frac{dE_k}{dt} = F v$$

$$F \cdot v = 3 \alpha t^2$$

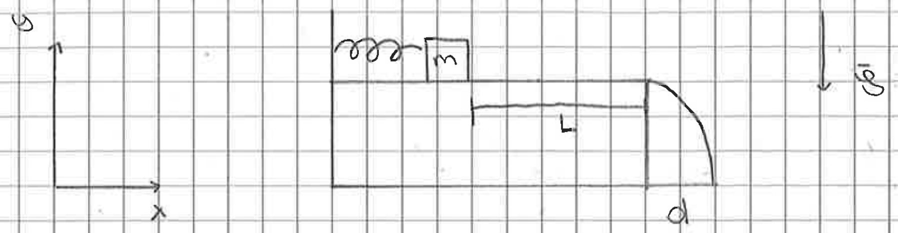
$$F = \frac{3 \alpha t^2}{v} = 0{,}3\,N$$

3) Due piani inclinati di $\alpha = \pi/4$ e scabri. Un corpo viene posato su uno dei due piani ad $h_1 = 6\,m$ e lasciato libero di muoversi con $v_0 = 0$. Il corpo risale ad un $h_2 = 4\,m$.

Un piano scabro di lunghezza L e $h = 2m$.

$\mu_d = \mu_{do} + C \cdot x$ dove $\mu_{do} = 0,1$ e $C = 0,3\ m^{-1}$

a) ? L^* minima affinché il corpo non cada



lungo la molla non c'è attrito

$E_p = E_k = E_m$

$\frac{1}{2} k \Delta x^2 = \frac{1}{2} m v_0^2$

$E_{kf} = \frac{1}{2} m v_f^2$

$W_{nc} = E_{kf} - E_{ki}$

$$\frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} k \Delta x^2 = \int_0^L \bar{F}_{att} \, d\bar{s}$$

$$= - \int_0^L \mu_d N$$

$$= - mg \int_0^L (\mu_{do} + C \cdot x) \, dx$$

$$= - mg (\mu_o L + \frac{1}{2} C L^2)$$

$\frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} k \Delta x^2 = - mg (\mu_o L + \frac{1}{2} C L^2)$

affinché il corpo non cada $V_f = 0$

$- \frac{1}{2} k \Delta x^2 = - mg (\mu_o L + \frac{1}{2} C L^2)$

$$L^* = \frac{-\mu_{od} \pm \sqrt{\mu_{od}^2 + c \frac{k \Delta x^2}{mg}}}{c} = 0,16\ m$$

4) Un proiettile di $m = 50$ g, sparato con $v_0 = 300$ m/s, penetra in un mezzo viscoso e risente di una forza frenante αv^2.
Dopo che il proiettile ha percorso $d = 10$ m, la sua velocità è ridotta del 10%.

a) W fatto dal mezzo sul proiettile lungo d

$$W = \Delta E_k = \frac{1}{2} m (v_f^2 - v_0^2) = -427,5\ J$$

$$v_f = 270\ m/s$$

b) valore di α

$$-\alpha v^2 = ma$$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -\alpha v^2$$

$$m \frac{dv}{dt} = -\alpha v^2$$

moltiplico per dx e divido per dx

$$m \frac{dv}{dx} \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{v} = -\alpha v^2$$

$$m \frac{dv}{dx} = -\alpha v$$

$$\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v} = -\frac{\alpha}{m} \int_{x_0}^{x} dx$$

$$\ln v - \ln v_0 = -\frac{\alpha}{m} \underbrace{(x - x_0)}_{d}$$

$$\ln \frac{v}{v_0} = -\frac{\alpha}{m} d$$

$$\alpha = 5,268 \cdot 10^{-4}\ Kg/m$$

$$\bar{v}' = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{dx'}{dt}\hat{u}_{x'} + \frac{dy'}{dt}\hat{u}_{y'} + \frac{dz'}{dt}\hat{u}_{z'}$$

$$\bar{v}' = v'_x \hat{u}_{x'} + v'_y \hat{u}_{y'} + v_{z'} \hat{u}_{z'}$$

non ho le derivate dei versori perché non variano nel tempo quindi la loro derivata è nulla

$$\bar{v}_{O'} = \frac{dOO'_x}{dt}\hat{u}_x + \frac{dOO'_y}{dt}\hat{u}_y + \frac{dOO'_z}{dt}\hat{u}_z$$

$$\boxed{\bar{v} = \bar{v}' + \bar{v}_{O'}}$$

Teorema delle velocità relative

$$\boxed{\bar{v}' = \bar{v} - \bar{v}_{O'}}$$

$\downarrow$

$$\bar{v} = v_x \hat{u}_x + v_y \hat{u}_y + v_z \hat{u}_z$$

$$\bar{v}' = v'_x \hat{u}_{x'} + v'_y \hat{u}_{y'} + v'_z \hat{u}_{z'}$$

$$\bar{v}_{O'} = v_{O'x} \hat{u}_x + v_{O'y} \hat{u}_y + v_{O'z} \hat{u}_z$$

$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} \rightarrow$ quindi

$$\bar{a} = a_x \hat{u}_x + a_y \hat{u}_y + a_z \hat{u}_z$$

$$\bar{a}' = a'_x \hat{u}_{x'} + a'_y \hat{u}_y + a'_z \hat{u}_{z'}$$

$$\bar{a}_{O'} = a_{O'x} \hat{u}_x + a_{O'y} \hat{u}_y + a_{O'z} \hat{u}_z$$

$$\boxed{\bar{a} = \bar{a}' + \bar{a}_{O'}}$$

Teorema delle accelerazioni relative

$$\boxed{\bar{a}' = \bar{a} - \bar{a}_{O'}}$$

$$\frac{d\bar{v}'}{dt} = a' + v'_x \frac{d\hat{u}_{x'}}{dt} + v'_y \frac{d\hat{u}_{y'}}{dt} + v'_z \frac{d\hat{u}_{z'}}{dt}$$

utilizzo la formula di Poisson

$$\frac{d\bar{v}'}{dt} = \bar{a}' + \bar{\omega} \times \bar{v}'$$

ma $\bar{v}' = \bar{\omega} \times \bar{r}'$

$$\frac{d(\bar{\omega} \times \bar{r}')}{dt} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r}' + \bar{\omega} \times \frac{d\bar{r}'}{dt}$$

$$= \alpha \times \bar{r}' + \bar{\omega} \times (\bar{v}' + \bar{\omega} \times \bar{r}')$$

$$\boxed{\bar{a} = \bar{a}_{o'} + \bar{a}' + 2\bar{\omega} \times \bar{v}' + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}') + \alpha \times \bar{r}'}$$

teorema accelerazioni relative

forza Coriolis $\rightarrow 2\bar{\omega} \times \bar{v}' = a_c$

accelerazione trascinamento $\rightarrow \underbrace{\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}')}_{\text{centripeta (vera)}} + \alpha \times \bar{r}' + \bar{a}_o$

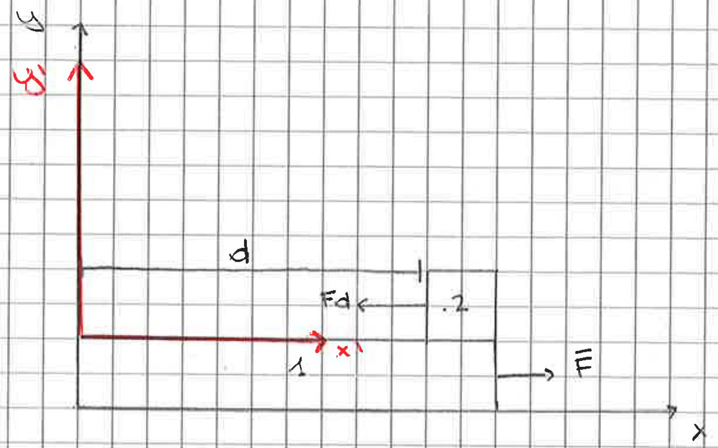
vista da $\bar{a}'$ $\rightarrow a_t = \underbrace{-\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}')}_{\text{centrifuga (apparente)}} - \alpha \times \bar{r}' - \bar{a}_o$

l'accelerazione di trascinamento è quella che vedo da SRI di un oggetto fermo in SNRI

$$\bar{a}' = \underbrace{\bar{a}}_{\text{vera, dovuta a forze reali agenti sul punto}} \underbrace{- \bar{a}_{o'} - \alpha \times \bar{r}' - \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}') - 2\bar{\omega} \times \bar{v}'}_{\text{apparenti, dovute al fatto che il sistema di riferimento è accelerato}}$$

es. 9, dinamica 3

Un corpo di $m_2 = 1$ kg è appoggiato sopra una lastra di $m_1 = 3$ kg senza attrito sul piano orizzontale. Tra 1 e 2 $\mu_d = 0,1$. A $t = 0$ viene applicata su 1 una forza $F = 5$ N. Se $d = 3$ m, dopo quanto 2 cade da 1?



a $t = 0$ i sistemi di riferimento coincidono

- in SRI

$$F - F_d = m_1 \bar{a}_1$$

corpo 1 $\begin{cases} x: \bar{F} - \mu_d m_2 g = m_1 \bar{a}_1 \\ y: -(m_1 + m_2) g + \bar{N} = 0 \end{cases}$

corpo 2 $\begin{cases} x: \mu_d m_2 g = m_2 \bar{a}_2 \\ y: N - m_1 g = 0 \end{cases}$

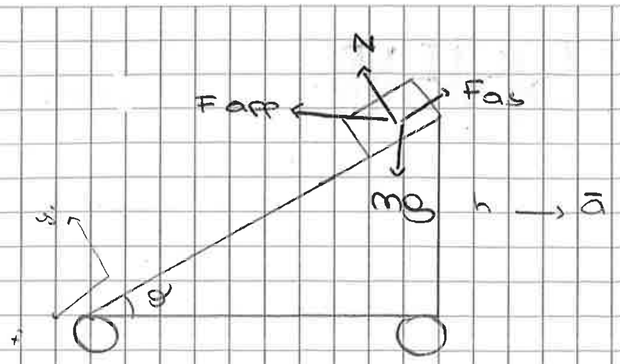
$a_1 = 1,34 \; m/s^2$
$a_2 = 0,98 \; m/s^2$ → si muovono entrambi verso destra

$S_1(t) = \frac{1}{2} a_1 t^2$ (parte dall'origine)

$S_2(t) = d + \frac{1}{2} a_2 t^2$

l'oggetto cade quando $S_1 = S_2$

es.



? max $\bar{a}^*$ per il quale l'oggetto rimane fermo e t per raggiungere la base del carrello se $\bar{a} = 2\bar{a}^*$

$$\Sigma \bar{F} + \bar{F}_{app} = 0$$

$$\bar{F}_{app} = m\bar{a}$$

$$N + mg + F_{as} + m\bar{a} = 0$$

$$y: \quad N - mg\cos\theta + m\bar{a}\sin\theta = 0$$

$$x: \quad -F_{as} + mg\sin\theta + m\bar{a}\cos\theta = 0$$

$$F_{as} \leq \mu_s N \rightarrow \leq \mu_s m(g\cos\theta - \bar{a}\sin\theta)$$

$$m(g\sin\theta + \bar{a}\cos\theta) \leq \mu_s m(g\cos\theta - \bar{a}\sin\theta)$$

$$g\sin\theta + \bar{a}^*\cos\theta = \mu_s(g\cos\theta - \bar{a}^*\sin\theta)$$

↳ a limite, dopo diventa dinamico

$$\bar{a}^* = g\,\frac{\mu_s\cos\theta - \sin\theta}{\mu_s\sin\theta + \cos\theta}$$

$$\boxed{\bar{v}_{cm} = \frac{\sum m_i \bar{v}_i}{\sum m_i}}$$

ma $\bar{P}_{TOT} = \sum m v$

$\bar{P}_{TOT} = \underset{m_{TOT}}{M} \bar{v}_{cm}$

la $\bar{P}_{TOT}$ del sistema coincide con la $\bar{P}$ del centro di massa con r_{cm}, v_{cm} e M_{TOT} del sistema

$$\bar{a}_{cm} = \frac{d\bar{v}_{cm}}{dt} = \frac{1}{\sum m_i} \frac{d \sum m_i \bar{v}_i}{dt}$$

$$\boxed{\bar{a}_{cm} = \frac{\sum m_i \bar{a}_i}{\sum m_i}}$$

$M \bar{a}_{cm} = \sum \bar{F}_i \rightarrow$ forza risultante

$$M \bar{a}_{cm} = \sum \bar{F}_i^{(est)} + \underbrace{\sum \bar{F}_i^{(int)}}_{=0}$$

$M \bar{a}_{cm} = \sum F_i^{(est)}$

il centro di massa si sposta come un punto materiale in cui è concentrata tutta la massa del sistema su cui agisce la risultante delle forze esterne

- **eq. cardinale**

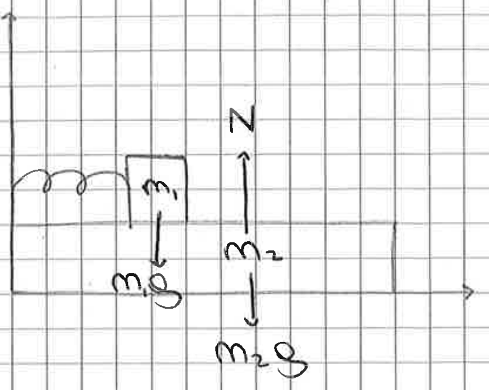
$$\sum F_i^{(est)} = M \bar{a}_{cm} = \left(\sum m_i\right) \frac{d\bar{v}_{cm}}{dt}$$

$$\boxed{\sum F_i^{(est)} = \frac{d\bar{P}_{TOT}}{dt}}$$

nel SRI

$$M_c V_c + m_p V_{px} = 0$$

es.



$m_1 = 1\ Kg$

$m_2 = 3\ K$

$\Delta x = 0{,}1\ m$

$K = 50\ N/m$

? velocità dei due corpi

$$\sum \bar{F}_i^{(est)} = \frac{d\bar{p}}{dt}$$

$P_{TOT} = 0$ e la forza elastica è interna

$$\begin{cases} m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = 0 \\ \underbrace{\frac{1}{2} K \Delta x^2}_{E_{pi}} = \underbrace{\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2}_{E_{kf}} \end{cases}$$

quando m_1 cade da m_2

$$\begin{cases} v_1 = \frac{-m_2}{m_1} v_2 \\ K \Delta x^2 = m_1 \frac{m_2^2}{m_1^2} v_2^2 + m_2 v_2^2 \end{cases}$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{K \Delta x^2 \; m_1}{m_2 \; (m_1 + m_2)}}$$

x: $a'_x = a_t$

y: $a'_y = -g$

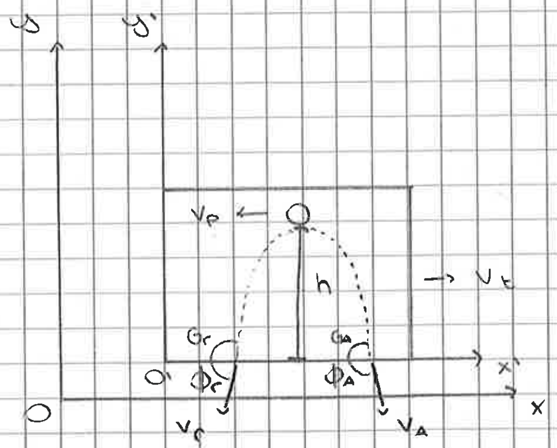
$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2} a_t t^2 \\ y' = -\frac{1}{2} g t^2 + h \end{cases}$$

moto unif. accel. + caduta di un grave

$$\begin{cases} t^2 = \frac{2x'}{a_t} \\ y' = -g/a_t \, x' + h \end{cases}$$

→ è una retta

4) Un carro si muove su un piano orizzontale con moto rettilineo e $v_c = 50,4$ km/h. All'interno del carro ad $h = 1,8$ m, una pallina viene lanciata in direzione orizzontale e opposta a quella di v_c con $v_p = 6$ m/s.



a) ? v_A rispetto alla terra al momento del lancio

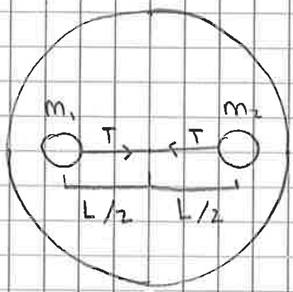
$v_A = \bar{v}_r + \bar{v}_t = -6 + 14 = 8$ m/s

è +, concorde a quella del carro, non la vedo nella direzione di lancio

b) ? t impiegato dalla pallina per arrivare sul pavimento e le gittate G_c e G_A

3) Un disco ruota su un piano orizzontale con $\omega_0 = 8$ rad/s, intorno ad un asse verticale per il suo centro. Lungo il suo diametro si trovano due palline di $m_1 = 0,05$ kg e $m_2 = 0,1$ kg collegate da un filo di $L = 20$ cm

? moto palline quando vengono lasciate libere e T del filo



La F di Coriolis non è nella risult. delle forze

$$\begin{cases} m_1 \bar{a}_1 = \underbrace{m_1 \omega_0^2 x_1}_{} + T \\ m_2 \bar{a}_2 = \underbrace{m_2 \omega_0^2 x_2}_{\text{centrifuga}} - T \end{cases}$$

$x_2 - x_1 = L \rightarrow \bar{a}_1 = a_2$

$$\begin{cases} \bar{a} = \omega_0^2 x_1 + T/m_1 \\ \bar{a} = \omega_0^2 x_2 - T/m_2 \end{cases}$$

$$\omega_0^2 (x_2 - x_1) + T (1/m_1 + 1/m_2)$$

$$\bar{T} = \omega_0^2 L \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = 0,24 \text{ N}$$

(non dipende dal tempo)

per trovare l'eq. del moto, sostituisco $\bar{T}$ in $\bar{a}$

DINAMICA DEI SISTEMI

lez 8, cap. 6

MOMENTO ANGOLARE

$$\bar{L}_{TOT} = \Sigma \bar{L}_i$$

$$\bar{L}_i = \bar{b}_i \times m_i \bar{v}_i$$

$$\bar{L}_{TOT} = \Sigma \bar{b}_i \times m_i \bar{v}_i$$

$$\frac{d\bar{L}_{TOT}}{dt} = \frac{d(\Sigma \bar{b}_i \times m_i \bar{v}_i)}{dt}$$

$$= \frac{d\Sigma \bar{b}_i}{dt} \times m_i \bar{v}_i + \Sigma \bar{b}_i \times \frac{d\bar{v}_i}{dt} m_i$$

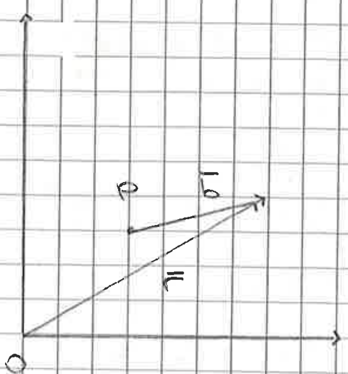
- se polo fisso $\bar{r}_i \equiv \bar{b}_i$

quindi $\bar{v}_i \times m_i \bar{v}_i = 0$

$$\boxed{\frac{d\bar{L}_{TOT}}{dt} = \Sigma \bar{r}_i \times m_i \bar{a}_i}$$

- se polo non fisso

$$\underbrace{\frac{d\bar{b}_i}{dt}}_{v'} = \underbrace{\frac{d\bar{r}_i}{dt}}_{v} - \bar{v}_{polo}$$



quindi cambia

$$\frac{d\bar{L}_{TOT}}{dt}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 97 di 264

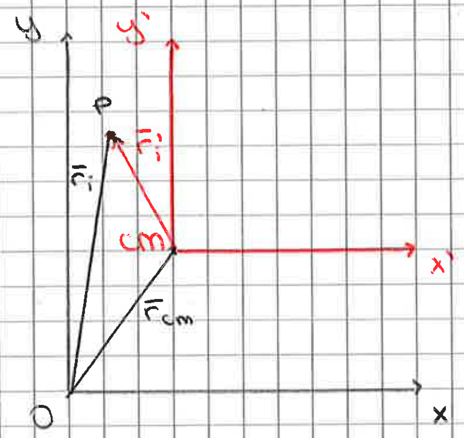
- riassunto teorema del momento angolare

1 pt e polo fisso	$\frac{d\bar{L}}{dt} = \bar{M}$
N pt e polo fisso	$\frac{d\bar{L}}{dt} = \bar{M}^{(ext)}$
N pt e polo in moto	$\frac{d\bar{L}}{dt} = \bar{M}^{(ext)} - V_P \times \bar{V}_{cm} M$

quindi se il polo $\equiv$ cm e $\bar{M}^{(ext)} = 0$, allora il momento angolare si conserva

SISTEMA CENTRO DI MASSA (di riferimento)

- viene considerato in generale come un sistema di riferimento non inerziale



$$\begin{cases} \bar{r}_i = \bar{r}'_i + \bar{r}_{cm} \\ \bar{v}_i = \bar{v}'_i + \bar{v}_{cm} \\ \bar{a}_i = \bar{a}'_i + \bar{a}_{cm} \end{cases}$$

$\bar{v}_{cm}$, $\bar{a}_{cm}$ coincidono con quelle di trascinamento

- P_{TOT} è nullo

- **momenti delle forze**

$\overline{M}_{cm} = \sum \overline{r}_i \times \overline{F}_i$

$\downarrow$ distanze dal polo

ma se $O \equiv cm \rightarrow r_i \equiv r'_i$

$\overline{M}_{cm} = \sum \overline{r}'_i \times \overline{F}_i$ (calcolato da SRI)

$\overline{M}' = \sum r'_i \times F'_i = \sum \overline{r}'_i \times m_i \overline{a}'_i$

$= \sum \overline{r}'_i \times m_i \overline{a}_i - \sum \overline{r}'_i \times m_i \overline{a}_{cm}$

$= \sum \overline{r}'_i \times \overline{F}_i - \underbrace{(\sum \overline{r}'_i m_i)}_{=0} \times \overline{a}_{cm}$

$\overline{M}' = \sum \overline{r}'_i \times \overline{F}_i = \overline{M}_{cm}$

$\overline{M}' = \sum \overline{r}'_i \times \overline{F}_i^{(ext)} + \underbrace{\sum \overline{r}'_i \times F_i^{(int)}}_{=0}$

$\boxed{\overline{M}' = \sum \overline{r}'_i \times \overline{F}_i^{(ext)} = \overline{M}_{cm}}$

SRNI — SRI

quando $O \equiv cm$

il momento risultante rispetto al cm è uguale al solo momento delle forze esterne vere

- **momento angolare**

$\overline{L}_o = \sum \overline{b}_i \times m_i \overline{v}_i$ momento ang. in SRI

se $O \equiv cm \rightarrow b_i \equiv r'_i$

$\overline{L}_o = \sum \overline{r}'_i \times m_i \overline{v}_i$

$\overline{L}_o = \sum \overline{r}'_i \times m_i (\overline{v}'_i + \overline{v}_{cm})$

$$\bar{L}_o = \bar{L}'_{cm} + \bar{r}_{cm} \times \bar{P}_{TOT}$$

$$\boxed{L_o = \bar{L}'_{cm} + \bar{L}_o^{cm}}$$

dove
- L_o = momento rispetto al polo o
- L'_{cm} = momento rispetto al polo cm
- L_o^{cm} = momento del cm (solo del punto) calcolato rispetto al polo o

es.

nel moto terrestre

preso come o il sole e come cm la terra.

calcolo L'_{cm}, poi L_o^{cm} e sostituisco nell'eq.

- per energia cinetica

$$\bar{E}_{k,o} = \frac{1}{2} \sum m_i \bar{v}_i^2$$

$$\bar{E}_{k,o} = \frac{1}{2} \sum m_i (\bar{v}'_i + \bar{v}_{cm})^2$$

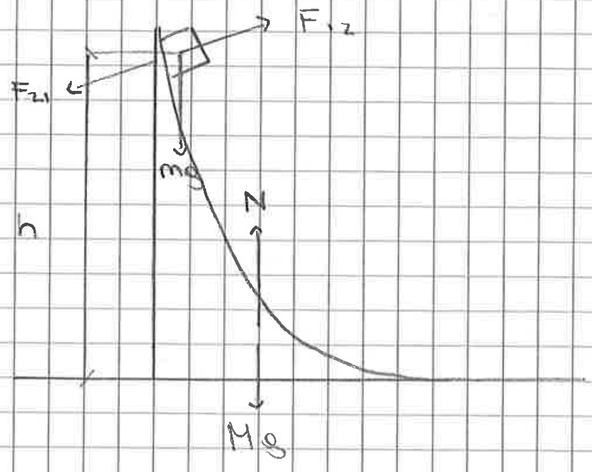
$$E_{k,o} = \frac{1}{2} \sum m_i \bar{v}'^2_i + \frac{1}{2} \sum m_i \bar{v}^2_{cm} + \underbrace{(\sum m_i \bar{v}'_i)}_{0} \bar{v}_{cm}$$

$$\boxed{\bar{E}_{k,o} = \frac{1}{2} \bar{E}'_{k,cm} + \bar{E}^{cm}_{k,o}}$$

dove
- $E_{k,o}$ = energia rispetto al polo o
- $E'_{k,cm}$ = energia rispetto al polo cm
- $E^{cm}_{k,o}$ = energia del cm rispetto al polo o

es

Un corpo di $m = 1$ kg è in quiete ad $h = 1$ m sulla superficie liscia di un cuneo di $M = 10$ kg libero di muoversi su un piano liscio.
Il corpo viene lasciato scendere fino ad incontrare il piano orizzontale



a) ? $E_{k,f}$

$$\frac{d\bar{P}}{dt} = \sum \bar{F}^{(ext)}$$

$$\frac{dP_x}{dt} = 0$$

$$\begin{cases} v_{mx} m + V_{Mx} M = 0 & \text{quantità di moto} \\ mgh = mgh_1 + \frac{1}{2} m (v_{mx}^2 + v_{my}^2) + \frac{1}{2} M (V_{Mx}^2 + V_{My}^2) \end{cases}$$

$E_{p,i}$ $\quad$ $E_{p,f}$ $\quad$ $E_{k,f}$ (punto generico)

quando il corpo arriva al fondo
v_{my} e $V_{My} = 0$ e $h_1 = 0$

$$\begin{cases} v_{mx} m + V_{Mx} M = 0 \\ mgh = \frac{1}{2} m v_{mx}^2 + \frac{1}{2} M V_{Mx}^2 \end{cases}$$

URTI

- in un sistema formato da due masse le forze che si manifestano durante l'urto sono forze interne

- siccome l'urto avviene in un lasso di tempo trascurabile, si può considerare che la posizione dei corpi non vari

- forze in gioco → forze impulsive (non cost.)

- siccome agiscono solo $F^{(int)}$ $\sum F^{(est)} = 0$ e quindi $P_{TOT} = cost.$ → ho conservazione della quantità di moto

quindi per tutti i tipi di urti

$$\boxed{\bar{P}_i = m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_2 v_{2f} + m_1 v_{1f} = \bar{P}_f}$$

anche il moto del centro di massa non viene alterato dall'urto

$$\boxed{\bar{P}_{cm} = (m_1 + m_2) v_{cm} = \bar{P}_i = \bar{P}_f}$$

perché $v_{cm} = cost$

varia però la quantità di moto delle singole particelle $\Delta P \neq 0$

$$\Delta P_1 = m_1 \bar{v}_{1f} - m_1 \bar{v}_{1i} = \bar{J}_{2,1}$$

impulso che subisce 1 dovuto a 2

$$\Delta P_2 = m_2 \bar{v}_{2f} - m_2 \bar{v}_{2i} = \bar{J}_{1,2}$$

$$\int F_{1,2}\, dt = - \int F_{2,1}\, dt$$

$$\boxed{\bar{J}_{1,2} = - \bar{J}_{2,1}}$$

- E_k prima dell'urto

$$E_{ki} = \frac{1}{2} m_1 v_i^2 + \frac{1}{2} m_2 v_i^2 = E'_{ki} + \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_{cm}^2$$

per il teorema di Koenig

E_k dopo l'urto

$E'_k = 0$ perché non c'è più moto rispetto al cm poiché i punti vengono a coincidere con esso

$$\boxed{E_{kf} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_{cm}^2 < E_{ki}}$$

URTI ELASTICI

si ha conservazione di E_k

$$\boxed{\begin{cases} \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 \\ m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \end{cases}}$$

↓

sistema laboratorio

$$\boxed{\begin{cases} \frac{1}{2} m_1 v'^2_{1i} + \frac{1}{2} m_2 v'^2_{2i} = \frac{1}{2} m_1 v'^2_{1f} + \frac{1}{2} m_2 v'^2_{2f} \\ m_1 v'_{1i} + m_2 v'_{2i} = m_1 v'_{1f} + m_2 v'_{2f} \end{cases}}$$

↓

sistema centro di massa

$v_{1f} = -v_{1i} + 2v_{cm}$

$$\boxed{v_{1f} = \frac{(m_1 - m_2)v_{1i} + 2m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2}}$$

$$\boxed{v_{2f} = \frac{(m_2 - m_1)v_{2i} + 2m_1 v_{1i}}{m_1 + m_2}}$$

→ nel sistema laboratorio

URTI ANELASTICI

L'E_k si conserva in parte, viene assorbita durante l'urto e trasformata in altra forma di energia

- coefficiente di restituzione (sistema cm)

$$\boxed{e = -\frac{p'_{1,f}}{p'_{1,i}} = -\frac{v'_{1,f}}{v'_{1,i}}} \qquad 0 < e < 1$$

ed è uguale per la particella due perché $P'_{tot} = 0$

- L'E_k dopo l'urto

$E'_{k,f} = \frac{1}{2} m_1 v'^2_{1f} + \frac{1}{2} m_2 v'^2_{2f}$

$$\boxed{E'_{k,f} = e^2 \left(\frac{1}{2} m_1 v'^2_{1i} + \frac{1}{2} m_2 v'^2_{2i}\right) = e^2 E'_{k,i}}$$

si perde una percentuale di $E'_{k,i}$, definita da e

se $e = 1$ → urto elastico $\Delta E_k = 0$

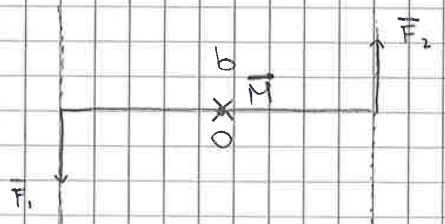
$e = 0$ → urto completamente anelastico

il momento dipende dal polo a meno che $R = 0$

- **coppia di forze**

due forze uguali di verso opposto non aventi la stessa retta d'azione

distanza fra le due rette → braccio (b)



siccome $R = 0$ → $M_O = M_{O'}$

↓

il momento non dipende dalla scelta del polo

$M = \bar r \times \bar F_1 = |\bar r||\bar F_1| \sin\theta = bF$ (ortogonale al piano)

- **forze parallele**

in un sistema di punti → es. forza peso

$$\bar M = \sum \bar r_i \times \bar F_i = \sum \bar r_i \times F_i \underbrace{\hat u}_{\text{direzione forza}}$$

$\boxed{\bar M = \sum \bar r_i F_i \times \hat u}$ momento totale

se applico nel centro del sistema la risultante R delle forze

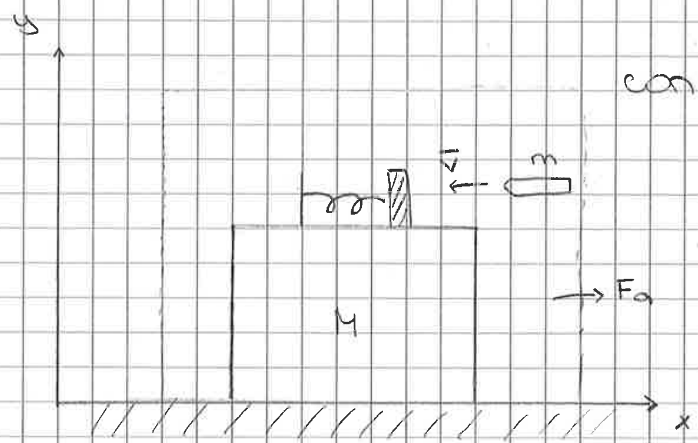
$\boxed{M = \sum F_i \bar r_c \times \hat u}$

ESERCITAZIONE 6

1) Un corpo di massa M è fermo su un piano scabro con attrito statico μ_s. Sul corpo si trova una molla di costante k con un estremo saldato. All'altro estremo è vincolato un blocchetto di massa trascurabile che può scivolare senza attrito. Un proiettile di massa m, con v orizzontale, si conficca nel blocchetto.

? max v proiettile oltre la quale il corpo di massa M si muove a seguito dell'urto

considero il sistema



$M_{TOT} = m + M$

$\Sigma F^{(ext)} = M_{TOT} \cdot \bar{a}_{cm} \neq 0$

$$\begin{cases} x: & \bar{F}_a = M_{TOT} \cdot \bar{a}_{cm} \\ y: & \bar{N} - \bar{P} = 0 \end{cases}$$

$F_a \leq \mu_s N$

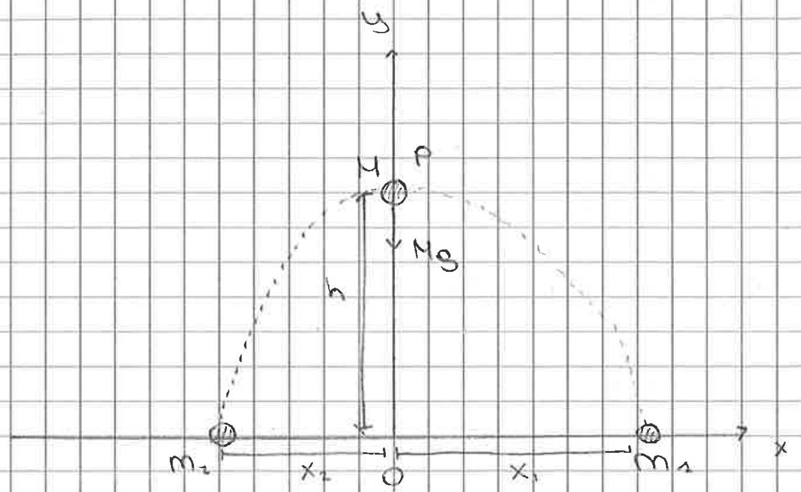
ma $N = M_{TOT}\, g$

$F_a \leq \mu_s M_{TOT}\, g$

2) un corpo di $m = 100$ kg che si trova in un punto P ed ad un'altezza h, esplode dividendosi in due frammenti di $m_1 = 30$ kg a distanza $x_1 = 140$ m dopo $\tau = 10$ s.

? distanza a cui cade m_2

? h a cui è avvenuta l'esplosione



$$\sum \bar{F}^{ext} = M \bar{a}_{cm}$$

x: $a_x = 0$

y: $a_y = -g$

$t = 0$ $\begin{cases} x_{cm} = 0 \\ y_{cm} = h \\ v_{cm\,x} = 0 \\ v_{cm\,y} = 0 \end{cases}$ caduta di un grave

$t \neq 0$
$t \neq \tau$ $\begin{cases} x_{cm} = 0 \\ y_{cm} = h - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$ moto unif. decel.

$\bar{F}_{m,M} = -\bar{F}_{M,m}$

$\bar{F}_{int} = \mu_d mg - K\Delta l = m\bar{a}_m = -M\bar{a}_M$

$ma_m = \mu_d mg - K\Delta l$

$a_m = \dfrac{\mu_d mg - K\Delta l}{m} = -28\ m/s^2$

$a_M = \dfrac{\mu_d mg - K\Delta l}{-M} = 7\ m/s^2$

b) ? v_m e v_M quando il corpo raggiunge l'estremo sinistro della lastra

? E_m persa a causa delle forze d'attrito

$E_{mf} - E_{mi} = L_{nc}$

$$\begin{cases} E_{mf} = E_{kf} = \frac{1}{2} M v_M^2 + \frac{1}{2} m v_m^2 \\ E_{mi} = \underbrace{\frac{1}{2} K\Delta l^2}_{E_p \text{ molla}} \end{cases}$$

$L_{nc} = \frac{1}{2} M v_M^2 + \frac{1}{2} m v_m^2 - \frac{1}{2} K\Delta l^2$

$\bar{F}_{ext} = 0$

ho conservazione della quantità di moto

$Mv_M + mv_m = 0$

$v_M = -\dfrac{m}{M} v_m$

$L_{nc} = \displaystyle\int_A^B \bar{F}_M\, d\bar{s}_M + \int_A^B \bar{F}_m\, d\bar{s}_m$

$\bar{F}_M = -\bar{F}_m$

$\bar{F}_m = \mu_d mg\, \hat{u}_x$

$\mu_s m g = m a_1$

$a_1 = \mu_s g = 2,9 \ m/s^2$

max elong. o min compr $\rightarrow v = 0$ e $a = max$

punto centrale $\rightarrow v = max \quad a = 0$

uso la conserv. dell'energia

$$\underbrace{\frac{1}{2}(m+M)v_0^2}_{E_{ki}} = \underbrace{\frac{1}{2}K\Delta x_{max}^2}_{E_{pf}}$$

$$\Delta x_{max} = v_0 \sqrt{M+m/K} = 40 \ m$$

in un punto qualsiasi

$(m+M)a = -K\Delta x \rightarrow$ l'a del corpo è dovuta alla F elastica

$$(m+M)a_{max} = -K\Delta x_{max}$$

$$a_{max} = \frac{v_0\sqrt{M+m/K}}{(m+M)} = -10 \ m/s^2$$

vedo quando ho il distacco

$$(m+M)a_1 = -K\Delta x_1$$

$$\Delta x_1 = \frac{(m+M)}{K}\underbrace{\mu_s g}_{a_1} = 11,6 \ cm$$

$\downarrow$

dopo 11,6 cm il corpo m scivola

trovo di quanto si comprime la molla dopo che m è scivolato

$$E_{mf} - E_{mi} = \mathcal{L}_{nc}$$

$$\begin{cases} m v_0 = m \underbrace{v_0'}_{v_0 \text{ dopo l'urto}} + MV \\ \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v_0'^2 + \frac{1}{2} MV^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m(v_0 - v_0') = MV \\ \frac{1}{2} m(v_0^2 - v_0'^2) = \frac{1}{2} MV^2 \end{cases}$$

$$m(v_0 - v_0')(v_0 + v_0') = MV^2$$

$$v_0 + v_0' = V$$

$$m(v_0 - v_0') = m(v_0 + v_0')$$

$$v_0' = \frac{m-M}{m+M} v_0$$

$$\frac{1}{2} m v_0'^2 = mgh'$$

$$h' = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{m-M}{m+M} v_0\right)^2}{g} = 0,92 \ m$$

b) ampiezza moto oscillatorio della barretta dopo l'urto

$$\underbrace{\frac{1}{2} MV^2}_{E_k} = \underbrace{\frac{1}{2} KA^2}_{E_p}$$

$$A = \sqrt{\frac{MV^2}{2K}}$$

trovo $K \to \Sigma F = 0$

$$Mg - 2F_{el} = 0$$

$$Mg = 2K(l - l_0)$$

$$K = Mg / 2(l - l_0)$$

$$A = \sqrt{MV^2 / \frac{Mg}{(l-l_0)}} = \sqrt{\frac{V^2}{l - l_0}}$$

$$V_x = -\frac{m}{M} v_1$$

$v_{Tubo} < v_{m_1}$

$$\underbrace{(M+m)\,v_f}_{\downarrow} = m v_1 + M V_x$$

v_f del sistema

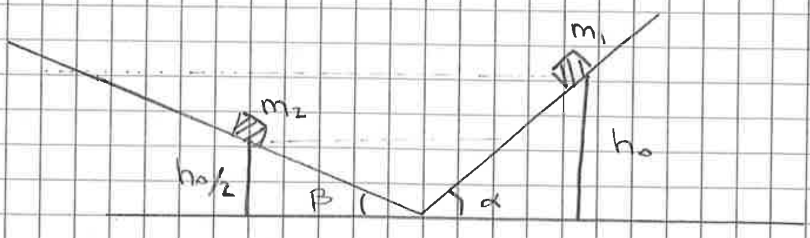
$$v_f = \frac{m v_1 + M V_x}{M + m}$$

$$\underbrace{\tfrac{1}{2}(M+m)v_f^2}_{E_{kf}} + \underbrace{m g h_1}_{E_{pf}} = \underbrace{\tfrac{1}{2} m_1 v_1^2 + \tfrac{1}{2} M V_x^2}_{E_{ki}}$$

$h_1 = 35,5\ cm$

1) Due piani inclinati di angoli $\alpha = 60°$ e $\beta = 30°$. Un corpo di $m_1 = 1kg = m_2$ viene lasciato cadere da $h_0 = 1m$ con una v_0. Dopo aver raggiunto il punto più basso, risale e urta in modo completamente anelastico m_2 che si trova a $h_0/2$. Se $(m_1 + m_2)$ raggiungono h_0

? V_0 a seconda dei piani inclinati e l'E dissipata



a) piani senza attriti

$$\tfrac{1}{2} m_1 v_0^2 + m_1 g h_0 = \tfrac{1}{2} m_1 v_1^2 + m_1 g h_0/2$$

quando m_1 arriva a m_2

$$l_1 = \frac{h_0}{\sin\alpha}$$

$$l_2 = \frac{h_0}{2\sin\beta}$$

$$F_k = \mu\, m_1 g \cos\alpha$$

$$F_k' = \mu\, m_2 g \cos\beta$$

$$\mathcal{L}_{nc} = -\mu\, m_1 g h_0 \left(\operatorname{ctg}\alpha + \tfrac{1}{2} \operatorname{ctg}\beta \right)$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 127 di 264

- caratteristiche forze esterne:

eq. fondament.

a) $\boxed{\bar{R}^{(e)} = m\bar{a}_{cm}}$ responsabili del moto del centro di massa

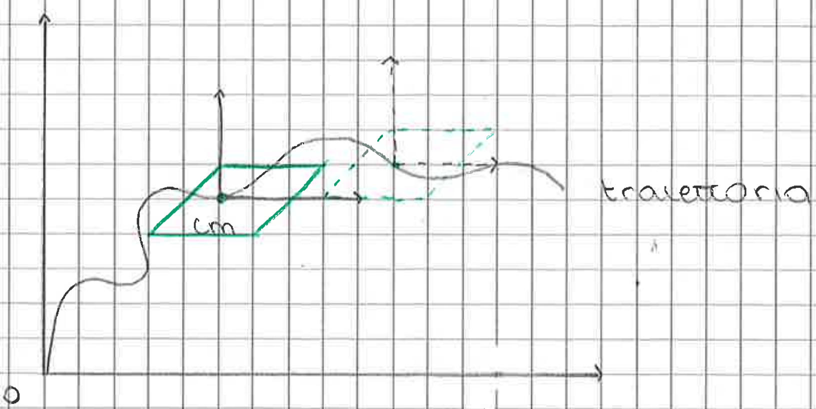
b) $\boxed{\bar{M}^{(e)} = \frac{dL_{TOT}}{dt}}$ responsabili delle rotazioni intorno ad un punto fisso

c) $\boxed{W^{(e)}_{A\to B} = E_{KB} - E_{KA}}$ responsabile della variazione di E_K del sistema

- gradi di libertà → 6 invece di 3N (N = pt)

PURA TRASLAZIONE

Tutti i punti del corpo rigido descrivono traiettorie uguali, parallele tra loro, con la stessa velocità $V = V_{cm}$



$$\boxed{\begin{array}{l} \bar{P}_{TOT} = m_{TOT}\bar{V}_{cm} \\ \bar{R}^{(e)} = m_{TOT}\,\bar{a}_{cm} \end{array}}$$ si comporta come un punto materiale

siccome non c'è movimento rispetto al cm

$E_K' = 0$

$L' = 0$

quindi

DENSITÁ

- densità → distribuzione della massa

↳ volumica: $\rho = \frac{dm}{dV} \rightarrow m = \iiint \rho \, dV (dx\,dy\,dz)$

↳ superficiale: $\rho = \frac{dm}{dS} \rightarrow m = \iint \rho \, dS (dx\,dy)$

↳ lineare: $\rho = \frac{dm}{dL} \rightarrow m = \int \rho \, dL (dx)$

CENTRO DI MASSA

$$\bar{r}_{cm} = \frac{\sum m_i r_i}{\sum m_i} = \frac{\int \bar{r} \, dm}{\int dm} \qquad dm = m_i$$

siccome $\rho = \frac{dm}{dV} \rightarrow dm = \rho \, dV$

$$\bar{r}_{cm} = \frac{\iiint \bar{r}(x,y,z) \, \rho(x,y,z) \, dx\,dy\,dz}{\int_V \rho \, dV}$$

se ρ = costante

$$\boxed{\bar{r}_{cm} = \frac{\iiint r(x,y,z) \, dx\,dy\,dz}{\int dV}}$$

APPLICAZIONE FORZA PESO

considerando un corpo continuo e g = cost per tutti i dm

su ogni dm $\rightarrow dF = \bar{g} \, dm$

$$\boxed{F = \bar{g} \int_m dm = g M_{TOT}}$$

calcolo il momento angolare proiettato sull'asse di rotazione: momento angolare assiale

$L_z = \sum L_{iz}$

$|L_{iz}| = \underbrace{|L_i| \cos(\pi/2 - \theta_i)}_{\text{componente di L lungo z}} = |L_i| \sin(\theta_i)$

$= |r_i||v_i| \sin \pi/2 \, m_i \sin\theta_i$

$= m_i \underbrace{R_i}_{r_i \sin\theta_i} |v_i|$

$= m_i R_i \underbrace{\omega R_i}_{v_i}$

$L_{iz} = m_i \omega R_i^2$

$L_{z\,TOT} = \sum(m_i R_i^2)\omega$ momento angolare assiale

siccome $\boxed{I = \sum m_i R_i^2}$ → momento d'inerzia rispetto all'asse z

↓

dipende dalla distribuzione della massa rispetto all'asse di riferimento cui è definito

$\boxed{L_{//} = I\omega}$ → componente parallela all'asse di rotazione è proporzionale a ω e dipende tramite I solo dalla forma del corpo e dalla posizione dell'asse rispetto al corpo

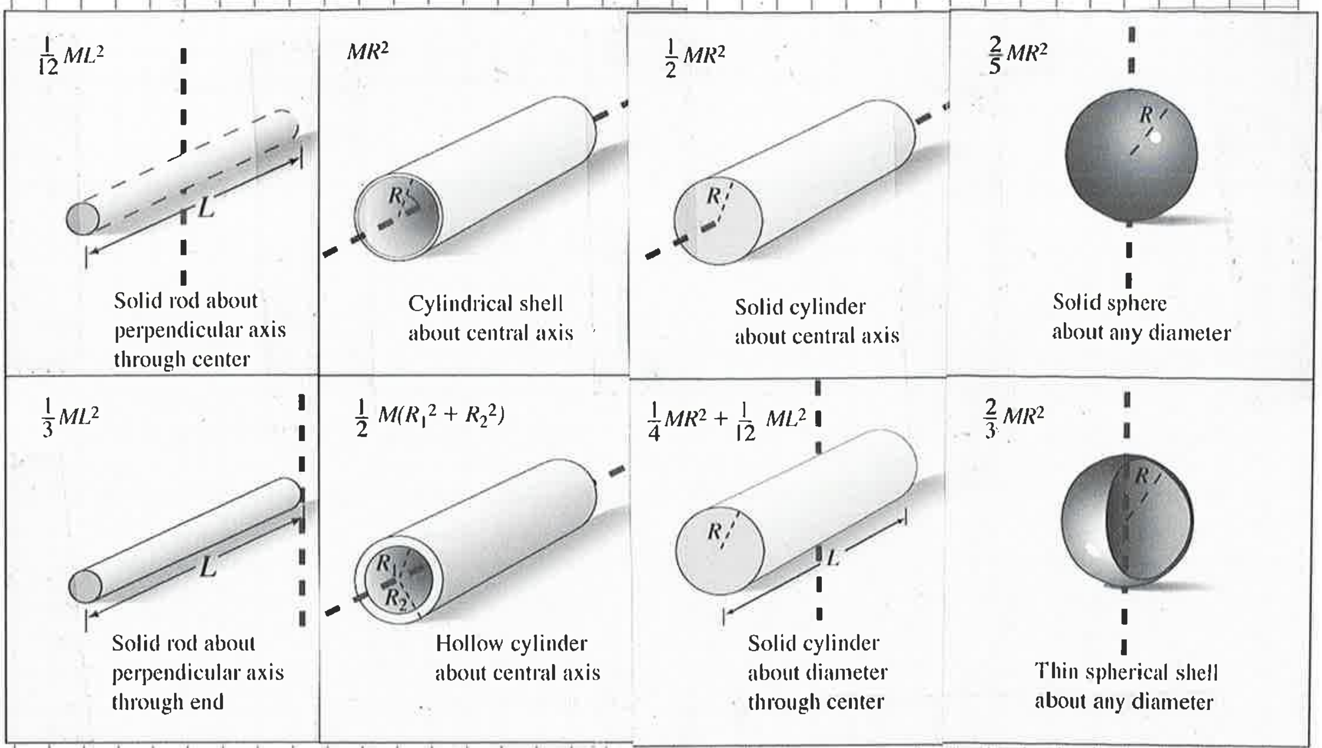
calcolo anche l'altra componente

$L_\perp = |L_i| \sin(\pi/2 - \theta_i) = |L_i| \cos\theta_i$

$= |r_i||v_i| m_i \cos\theta_i$

$\boxed{L_\perp = r_i m_i R_i \omega \cos\theta_i}$ (non so calcolarla)

MOMENTO D'INERZIA



MOTO DI PRECESSIONE del momento angolare

vettore costante L che ruota attorno ad un asse

se ω = costante → anche $L_{//} = I\omega$ = cost

ho un moto di precessione costante

$$M^{(e)} = \frac{d\bar{L}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{L}$$ (Formula Poisson, derivaz. vettore costante)

$$M^{(e)} = \bar{\omega} \times (I\omega + L_\perp)$$

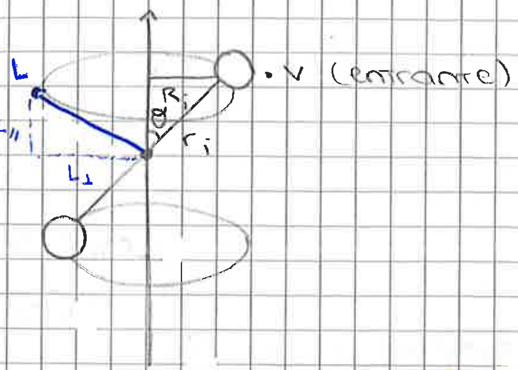
$$\boxed{\begin{cases} M^{(e)} = \bar{\omega} \times \bar{L}_\perp \\ |M^{(e)}| = L_\perp \omega \end{cases}}$$

quando $L \not\parallel \omega$

L cambia direzione a causa del momento delle forze esterne

modulo momento delle forze esterne

es



due circonf. con stesso raggio e sovrapposte

$L_1 = m_1 \bar{r}_1 \times \bar{v}_1$

$|L_1| = m_1 r_1 v_1 \sin\theta$

$|L_1| = \underbrace{R_1}_{r_1 \sin\theta} m_1 v_1$

$|L_1| = m_1 \omega R_i^2$

$L_{//} = 2mR^2\omega$

$M^{(e)} = L_\perp \omega = 2mrR\omega^2\cos\theta$

nel corpo rigido

$L_{//} = I\omega$

$L_{//} = 2m(\sin\theta r)^2\omega$

$L_{//} = 2mR^2\omega$

$L_\perp = 2mrv\cos\theta$

$L_\perp = 2mrR\omega\cos\theta$

EQUAZIONI DEL MOTO

a) L // ω → non c'è precessione del momento angolare

$$\frac{dL_{//}}{dt} = I\frac{d\bar{\omega}}{dt}$$

$$\boxed{M^{(e)} = I\bar{\alpha}}$$

$$\boxed{\alpha = \frac{M^{(e)}}{I}}$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

$$\boxed{\omega = \omega_0 + \int_0^t \alpha\, dt}$$

Forze esterne → f. peso, vincolo, tensione attrito

$$M^{(e)} = \underbrace{\bar{r} \times \bar{T}}_{\text{tensione del filo}} - \underbrace{M^{(F)}}_{\text{momento frenante}}$$

$$M^{(e)} = RT - M^{(F)} = I\alpha$$

$I = \frac{1}{2} MR^2$ del cilindro

$$\begin{cases} m\bar{g} - \bar{T} = m\bar{a} \\ RT - M^{(F)} = \frac{1}{2} MR^2 \alpha \end{cases}$$

aggiungo due eq.

$$\begin{cases} m\bar{g} - \bar{T} = m\bar{a} \\ RT - M^{(F)} = \frac{1}{2} MR^2 \alpha \\ a = \alpha R & \rightarrow \text{a tangenziale} \\ h = \frac{1}{2} a t^2 & \rightarrow \text{eq. del moto di m} \end{cases}$$

I due corpi hanno la stessa accelerazione

$$M^{(F)} = mR\left(g - \frac{3}{2} a\right)$$

b) L non è // ω → precessione del momento angolare

per la componente assiale vale: $\boxed{M^{(e)}_{//} = I \times \bar{\alpha}}$

l'altra componente non porta variazioni di ω, ma è responsabile dei moti di precessione dovuti alle reazioni vincolari $\boxed{M^{(e)}_{\perp} = \frac{dL_{\perp}}{dt}}$

LAVORO per la rotazione

un corpo rigido con ω_i, viene portato a ruotare con ω_f in seguito all'applicazione di un momento esterno

$W = \Delta E_K$ → lavoro compiuto

$$\Delta E_K = \frac{1}{2} I \omega_f^2 - \frac{1}{2} I \omega_i^2$$

$$dW = d\left(\frac{1}{2} I \omega^2\right) = I \omega \, d\omega$$

$$dW = I \frac{d\theta}{dt} d\omega$$

$$dW = I \, d\theta \frac{d\omega}{dt}$$

$$dW = I \bar{\alpha} \, d\theta$$

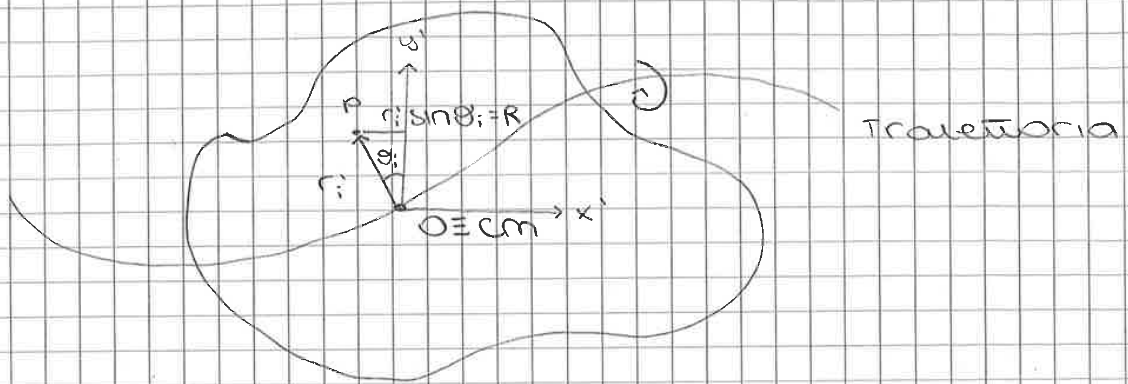
$$W = \int I \bar{\alpha} \, d\theta$$

$$\boxed{W = \int \bar{M}_z^{(e)} \, d\theta}$$

TAVOLA SINOTTICA

traslazione	rotazione
m	I
$\bar{s}$	$\bar{\theta}$
$\bar{v}$	$\bar{\omega}$
$\bar{a}$	$\bar{\alpha}$
$\bar{p} = m\bar{v}$	$\bar{L} = I\bar{\omega} = \bar{r} \times \bar{p}$
$\bar{F}^{(e)} = d\bar{p}/dt$	$M^{(e)} = d\bar{L}/dt$
$\bar{F} = m\bar{a}$	$\bar{M} = I\bar{\alpha}$
$F^{(e)}$	$M^{(e)}$

$V_i = \bar{V}_{cm} + \bar{\omega} \times \bar{r}_i$ riferito al S.R.cm



$$E_k = \sum \tfrac{1}{2} m_i \bar{v}_i^2$$

$$E_k = \sum \tfrac{1}{2} m_i (\bar{V}_{cm} + \omega \times \bar{r}_i)^2$$

$$E_k = \tfrac{1}{2} \sum m_i \left[V_{cm}^2 + (2V_{cm}(\omega \times \bar{r}_i)) + (\omega \times \bar{r}_i)^2 \right]$$

$$E_k = \tfrac{1}{2} M_{TOT} V_{cm}^2 + V_{cm}\,\omega \times \underbrace{\sum m_i r_i}_{=0} + \tfrac{1}{2} \sum m_i \omega^2 \underbrace{R_i^2}_{r_i \sin\theta_i}$$

perché r_i è posizione cm rispetto al cm

$$E_k = \tfrac{1}{2} M_{TOT} V_{cm}^2 + \tfrac{1}{2} \sum m_i \omega^2 R_i^2$$

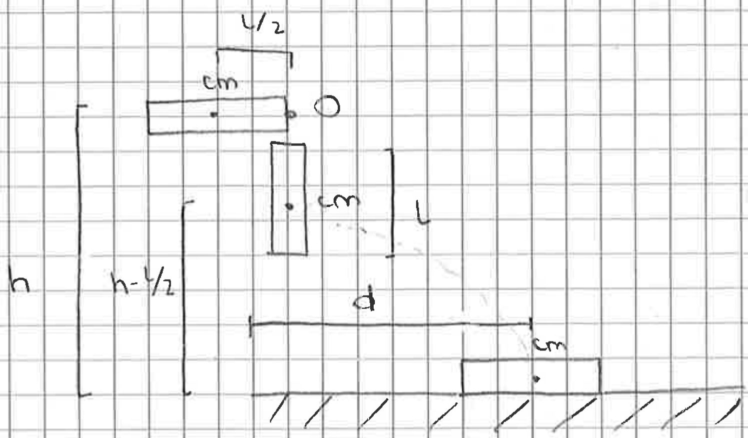
$$E_k = \tfrac{1}{2} M_{TOT} V_{cm}^2 + \tfrac{1}{2} \omega^2 \sum m_i R_i^2$$

$$\boxed{E_k = \underbrace{\tfrac{1}{2} M_{TOT} V_{cm}^2}_{\text{traslazione}} + \underbrace{\tfrac{1}{2} I_{z'} \omega^2}_{\text{rotazione}}}$$

$I_{z'}$ = rispetto ad un asse passante per il cm e // asse z

esercitazione 8

1) un'asta di $M = 2,0$ kg e $L = 40$ cm, è agganciata per un estremo ad un pt fisso ad $h = 3$ m dal suolo, intorno al quale può ruotare liberamente. L'asta, inizialmente ferma, viene abbandonata e quando raggiunge la posizione verticale, il suo estremo si stacca.



a) a quale d l'asta raggiunge il suolo

non ho forze dissipative $E_m = cost$

$$\underbrace{Mgh}_{\substack{E_{pi} \\ (orizz.)}} = \underbrace{\tfrac{1}{2} I \omega^2}_{E_{kf}} + \underbrace{Mg(h - L/2)}_{\substack{E_{pf} \\ (verticale)}}$$

$$\tfrac{1}{2} I \omega^2 - Mg\,L/2 = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{MgL}{I}}$$

$$I_{cm} = \frac{1}{12} mL^2$$

siccome calcolo rotazione rispetto ad O

$$I = I_{cm} + md^2$$

$$I = \frac{1}{12} ML^2 + M(L/2)^2 = \frac{1}{3} ML^2$$

quindi $\omega = \sqrt{3g/L} = 8,58$ rad/s

$$\begin{cases} y: & N_2 - mg = 0 \\ x: & N_1 - T = 0 \end{cases}$$

$N_2 = mg$

$N_1 = T$

calcolo momento delle forze

$\bar{M} = \bar{r} \times \bar{F}$

$|M_{N_1}| = l N_1 \sin(\pi/2 - \theta_0) = l N_1 \cos\theta_0$

$|M_{mg}| = l/2 \, mg \sin\theta_0$

$\Sigma M = l N_1 \cos\theta_0 - l/2 \, mg \sin\theta_0 = 0$

$N_1 = \frac{mg}{2} tg\theta_0 = 22,6 \, N = T$

$N_2 = mg = 78,5 \, N$

b) ? v_{cm} con cui l'asta raggiunge il suolo se la corda viene tagliata

posizione cm
$$\begin{cases} x = l/2 \sin\theta \\ y = l/2 \cos\theta \end{cases}$$

derivo

$V_x = l/2 \, \omega \cos\theta$

$V_y = l/2 \, \omega \sin\theta$

perche $\omega = \frac{d\theta}{dt}$

$V^2 = V_x^2 + V_y^2$

$V = l/2 \, \omega$

$E_m = cost$

a) ? n° giri durante l'applicazione di τ

scatola vuota

$$I_i = \underbrace{m_1 R^2}_{\text{cilindro}} + \underbrace{\frac{1}{2} m_2 R^2}_{\text{disco}}$$

$$I_i = \left(m_1 + \frac{1}{2} m_2\right) R^2 = 1,37 \cdot 10^{-3}\ Kgm^2$$

$$M = I_z \bar{\alpha}$$

$$\downarrow$$

$$\tau = I_i \frac{d\omega}{dt}$$

$$d\omega = \frac{\tau}{I_i} \int dt$$

$$\omega_i = \frac{\tau}{I_i} t \qquad t_0 = 0$$

$$\omega_i = \frac{d\theta}{dt}$$

$$d\theta = \frac{\tau}{I_i} t\, dt$$

$$\theta = \int \frac{\tau}{I_i} t\, dt = \frac{1}{2} \frac{\tau}{I_i} t^2$$

$$t = \frac{\omega_i I_i}{\tau}$$

$$\theta(t) = \frac{1}{2} \frac{\tau}{I_i} \left(\frac{\omega_i I_i}{\tau}\right)^2 = \frac{I_i \omega_i^2}{\tau}$$

$$n° \text{ giri} = \frac{\theta(t)}{2\pi} = 2,76 \text{ giri}$$

b) ? ω_f dopo il riempimento

$$I = I_i + \underbrace{1/2\, m_3 R^2}_{\text{disco di sabbia}}$$

CORPO RIGIDO

lez. 10, cap. 7

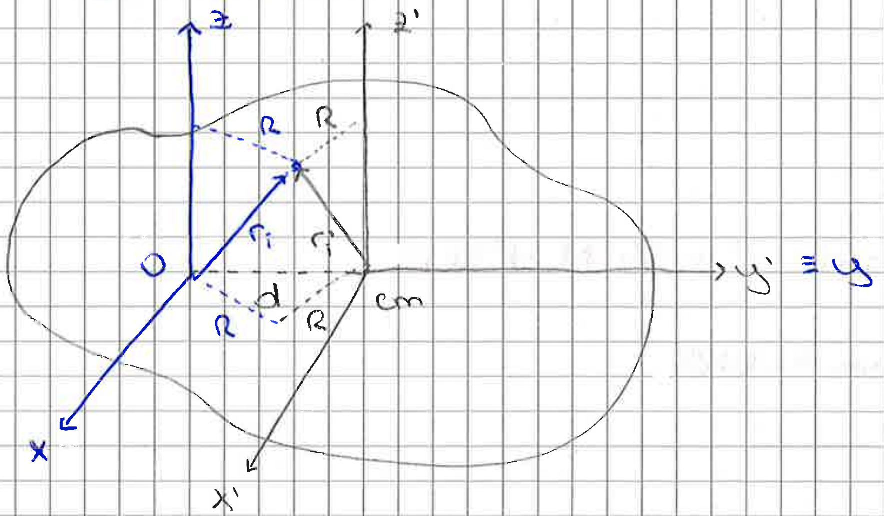
MOMENTO D'INERZIA

teorema di Huygens-Steiner

$$\boxed{I = I_{cm} + m d^2}$$

momento d'inerzia di un corpo di massa m rispetto ad un asse a distanza d dal cm del corpo

dimostrazione



$x_i = x_i'$ $\quad z_i = z_i'$ $\quad y_i = y_i' + d$

$I_o = \sum m_i R_i^2$

dove R_i è la distanza dall'asse di rotazione, la proiezione di r_i su x e y

$I_o = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2)$

$I_o = \sum m_i (x_i'^2 + (y_i' + d)^2)$

$I_o = \sum m_i (x_i'^2 + y_i'^2) + \sum m_i (2y_i' d + d^2)$

$I_o = I_{cm} + 2d \underbrace{\sum m_i y_i'}_{=0} + \sum d^2 m_i$

$I_o = I_{cm} + M_{TOT} d^2$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 151 di 264

$\bar{M}_o^{(e)} = \bar{r}_{cm} \times m\bar{g}$ (entrante e quindi $\ominus$)

$|\bar{M}_o^{(e)}| = -|\bar{r}_{cm}| m_{TOT} |\bar{g}| \sin\theta$ perché R ha braccio nullo

$|M_o^{(e)}| = -h\, m_{TOT}\, g \sin\theta$

siccome asse // M

$-h m_{TOT}\, g \sin\theta = I\alpha$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{h m g \sin\theta}{I} = 0$$

per angoli piccoli $\rightarrow \sin\theta \approx \theta$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \Omega^2 \theta = 0$$

$\Omega^2 = \frac{hmg}{I}$ = pulsazione

ha come soluzione

$$\boxed{\theta = \theta_0 \sin(\Omega t + \phi)}$$

$$\boxed{l = \frac{I}{m_{TOT}\, h}}$$

lunghezza ridotta

↓

lunghezza del pendolo semplice per avere lo stesso periodo del pendolo composto

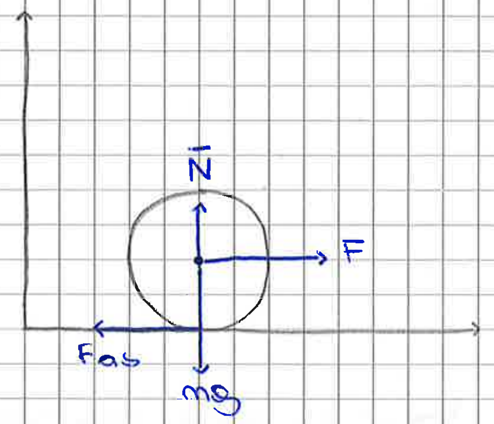
$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi \sqrt{l/g}$$

$$\boxed{\begin{aligned}|v_{cm}| &= \omega R \\ |a_{cm}| &= \alpha R\end{aligned}}$$

dove $R = \overline{cm\,c}$

il cm si muove con velocità cm e intanto il corpo ruota attorno al cm con velocità angolare ω

- **Forza costante**



$f_{as} \rightarrow$ forza di attrito statico che mantiene c fisso

- per la traslazione

$$\begin{cases} x: & F - f_{as} = m a_{cm} \\ y: & N - mg = 0 \end{cases}$$

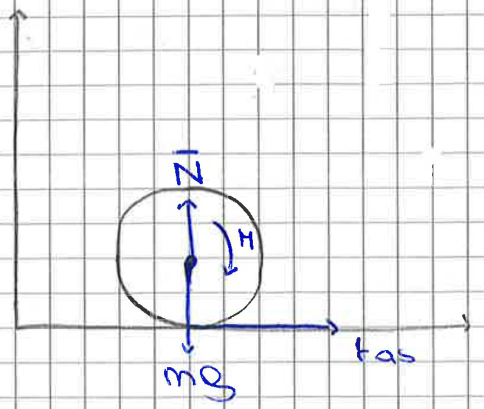
- per la rotazione due casi:

a) se polo cm

F ha braccio nullo e anche mg
N ha momento nullo perché // a mg
quindi

$$M^{(e)} = f_{as} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{braccio}}}{R} = I_{cm}\, \alpha$$

• **momento costante**



polo nel cm

- per la traslazione

$$\begin{cases} x: & f_{as} = m a_{cm} \\ y: & N - mg = 0 \end{cases}$$

- per la rotazione $\Sigma M^{(e)} = M - R f_{as} = I_{cm} \alpha$

$$F_{as} = \frac{M}{\left(\frac{I}{mR^2} + 1\right) R} \leq \mu_s m g$$

$$\boxed{M \leq \mu_s m g R \left(1 + \frac{I}{mR^2}\right)}$$

es. cilindri che rotolano

un cilindro con disco e guscio e uno solo con guscio

$$mgh = \frac{1}{2} m v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2$$

$mg = ma_{cm}$

V_{cm} diminuisce e $\omega = cost \rightarrow$ non ho più moto di puro rotolamento

$\frac{1}{2} I \omega^2 = cost$

$\frac{1}{2} m v_{cm}^2 + I \omega^2 \frac{1}{2} = mgh' + \frac{1}{2} \omega^2 I$

$h' = R/6$

ATTRITO VOLVENTE

- attrito volvente $\rightarrow$ forma di attrito che contribuisce alla dissipazione dell'energia cinetica posseduta da un corpo quando esso rotola
- cause:
  a) momento $M_v = \eta mg$ che si oppone al moto
  b) η coefficiente di attrito volvente
  c) per vincere il momento dovuto all'attrito, bisogna applicare a un corpo di raggio r un forza di trazione $F > \eta mg/r$
- la forza normale ($\bar{N}$) e la forza peso ($\bar{P}$) formano una coppia di forze, con momento non nullo

$$\boxed{M_v = \eta mg}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 159 di 264

$\bar{L}_i = 0$ iniziale

$|L_f| = I\omega = \frac{1}{3} m l^2 \omega$ finale (dopo urto)

$\Delta L = \frac{1}{3} m l^2 \omega = \bar{r} \times \bar{J} = r J$
↓
sono ⊥

$$\omega = \frac{3 r J}{m l^2}$$

subito dopo l'urto l'asta comincia a ruotare e il suo centro di massa si solleverà di $l/2$

$$\underbrace{\frac{1}{2} \omega^2 I}_{E_k} = \underbrace{m g \, l/2}_{E_p}$$ teorema conservazione dell'energia

$$J = \frac{m}{r} \sqrt{\frac{g l^3}{3}}$$

? v_{cm}

cm → si muove su una circonferenza di $r = \frac{l}{2}$

$$v_{cm} = \omega \frac{l}{2} = \frac{3}{2} \frac{r J}{m l} \neq J/m$$

$v_{cm} = J/m$

non ottengo questo risultato perché ho un vincolo e ho variazione di quantità di moto

$\Delta \bar{p} = \bar{J}$

$\bar{J} = \bar{J} + \bar{J}_{vincolo}$
↑
totale

la F. di attrito crea reazione vincolare e inizia a ruotare → ω aumenta

$M^{(e)} = F_{ad} R = I\alpha$

$$\alpha = \frac{F_{ad} R}{I}$$

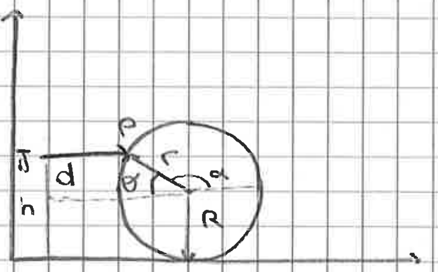
$\omega_i = 0$ (iniziale)

$\omega(t) = \alpha t$

$$\omega(t) = \frac{F_{ad} R}{I} t$$ e quindi aumenta

quindi v_{cm} diminuisce e ω aumenta, quindi dopo un certo tempo diventa un moto di puro rotolamento

es. sfera che rotola su un piano scabro



J non sul cm

$\bar{J} = \Delta\bar{P} = m\bar{v}_{cm}$

$\bar{v}_{cm} = \bar{J}/m$

prendendo il polo sul cm

$$\Delta\bar{L} = \bar{r} \times \bar{J} = I_{cm}\bar{\omega} + \underbrace{L_{cm}}_{=0}$$

$|\bar{r} \times \bar{J}| = I_{cm}\bar{\omega}$

$|\bar{r}||\bar{J}| \sin\alpha = |r||J| \sin(\pi - \theta)$

$J(h - R) = |r||J| \sin\theta$

$E_k = \frac{1}{2} I \omega^2$

siccome $L = I\omega$

$$E_k = \frac{L^2}{2I}$$

$$\boxed{W = E_{k,f} - E_{k,i} = \frac{L^2}{2I_f} - \frac{L^2}{2I_i}}$$

URTI TRA CORPI RIGIDI

- $E_{k,TOT}$ si conserva solo se l'urto è elastico
- se agiscono solo forze interne o quelle esterne non sono impulsive, si conserva P_{TOT}
- se c'è un vincolo non si conserva P_{TOT}
- se rispetto ad un polo fisso, il momento delle forze esterne è nullo, allora si conserva L_{TOT} rispetto a quel polo
- se ci sono solo forze interne il L si conserva sempre indipendentemente dalla scelta del polo

- corpo vincolato

↳ durante l'urto il sistema di vincoli può esercitare una forza risultante R e un momento risultante M

$$\boxed{\begin{aligned} J &= \int \bar{R}\, dt = \Delta \bar{P} \\ r \times \bar{J} &= \int \bar{M}\, dt = \Delta \bar{L} \end{aligned}}$$

↓

siccome sono vettori è possibile realizzare situazioni in cui la conservazione è parziale dalla conservazione del momento angolare

$(d - y_{cm}) m_2 v = I' \omega$

dove $I' = I_{m_1, cm} + I_{m_2, cm}$ (rispetto all'asse cm)

$I_{m_1} = I_{m_1} + m_1 y^2_{cm}$

$\downarrow$

distanza dal nuovo cm

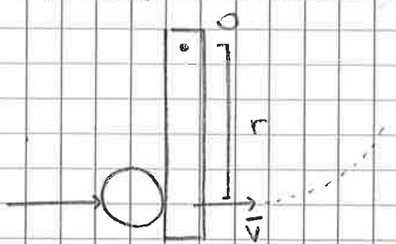
$I_{m_2} = m_2 (d - y_{cm})^2$

$I' = \left(\frac{1}{12} m_1 l^2 + m_1 y^2_{cm} + m_2 (d - y_{cm})^2\right)$

$$\omega = \frac{d m_2 v}{(m_1 + m_2)\frac{L^2}{12} + m_2 (d - y_{cm})^2}$$

- urto completamente anelastico fra un punto materiale e un'asta vincolata

conservo solo momento angolare perché ho una forza impulsiva dovuta al vincolo



$\frac{d\bar{L}}{dt} = 0 \quad \bar{L}_0 = \cos t$

$L_i = \bar{r} \times m_2 \bar{v}$ prima dell'urto

$|L_i| = |r| m_2 |v|$

$|L_f| = I_{tot} \omega$ dopo l'urto

$$\frac{1}{2} m_1 R^2 = (I + m_2 d^2)\omega'$$

$$\omega' = \frac{m_1 R^2}{2m_1 R^2 + 2m_2 d^2}\omega$$

$L_i = m_2 v_2 d$ prima dell'urto

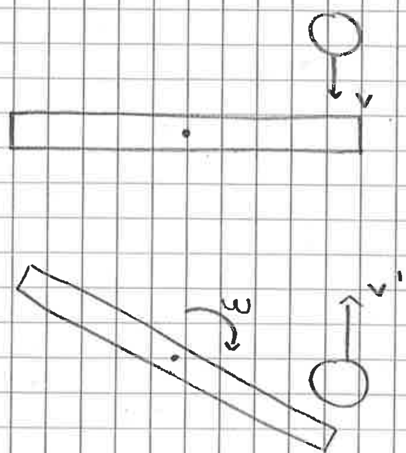
$L_f = 0$ dopo l'urto

$J_x = \Delta P_x = m_2 v'_x = m_2 d\omega'$ componente orizzontale

$J_y = m_2\sqrt{2gh}$ componente verticale

$$J = \sqrt{J_x^2 + J_y^2} = m_2\sqrt{d^2\omega'^2 + 2gh}$$

- **urto elastico fra un punto materiale e un'asta vincolata**



si conserva solo momento angolare rispetto ad O, perché P non si conserva con un vincolo

si conserva anche E_k perché c'è urto elastico

$$\begin{cases} m_2 v \frac{L}{2} = I\omega - m_2 v' \frac{L}{2} \\ I = \frac{1}{12} m_1 L^2 \\ \frac{1}{2} m_2 v^2 = \frac{1}{2} I\omega^2 + \frac{1}{2} m_2 v'^2 \end{cases}$$

$$r_{cm} = \ell = OG = \frac{\sum r_i m_i}{\sum m_i} = \frac{m\,L/2 + M(L+R)}{M+M}$$

$I_o = I_{o,disco} + I_{o,asta}$ rispetto al polo o

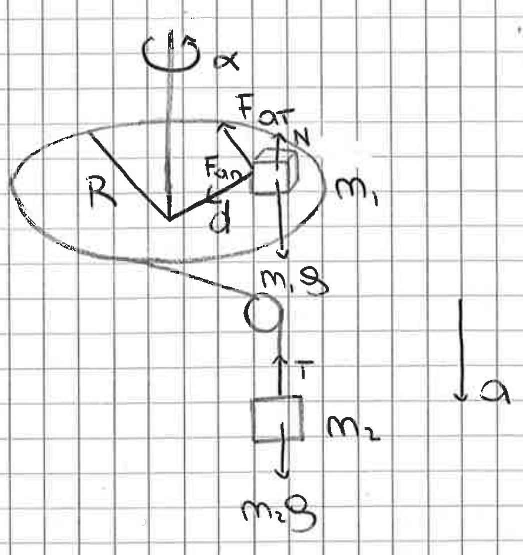
$$I_{o,disco} = I_{cm} + (L+R)^2 M = \frac{1}{2}MR^2 + (L+R)^2 M$$

$$I_{o,asta} = I_{cm} + (L/2)^2 m = \frac{1}{3}mL^2$$

$$I_o = \frac{1}{2}MR^2 + M(R+L)^2 + \frac{1}{3}mL^2$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{1/2\,MR^2 + M(R+L)^2 + 1/3\,mL^2}{g(m\,L/2 + M(L+R))}}$$

2) una puleggia di raggio R e massa M, può ruotare senza attrito in un piano orizzontale attorno al suo asse verticale. Un corpo di massa m_1 è appoggiato sul piano scabro (μ_s) della puleggia ad una distanza d dal suo asse. La puleggia viene messa in rotazione mediante una massa m_2 in caduta verticale connessa mediante una fune che si avvolge alla puleggia senza slittare



a) ? α

$\omega(0) = 0$ in $t = 0$

$F_{aT} = m_1 \underbrace{\alpha d}_{\text{acc tang.} = R\alpha}$ $(m\bar{a})$

$F_{an} = m_1 \underbrace{\omega^2 d}_{\text{acc. radiale} = \omega^2 R}$

in coord. polari

$$|F_a| = \sqrt{F_{aT}^2 + F_{aN}^2} = m_1 d\alpha \sqrt{1 + \alpha^2 t^4}$$

$|F_a| \leq \mu_s N$ per rimanere attaccato

$$m_1 d\alpha \sqrt{1+\alpha^2 t^4} \leq \mu_s m_1 g$$

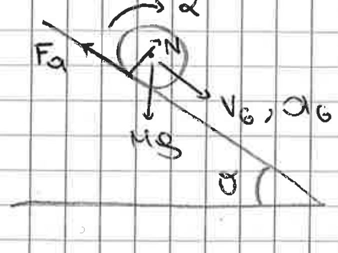
distacco quando $F_a = \mu_s m_1 g$

$$t = \left[\frac{1}{\alpha} \left(\frac{\mu_s^2 g^2}{d^2 \alpha^2} - 1 \right) \right]^{1/4}$$

se m_1 si stacca, non ho più il suo contributo in α iniziale

$$\alpha_f = \frac{m_2 g R}{\frac{1}{2} M R^2 + m_2 R^2}$$

3) un disco omogeneo di massa M e raggio R, rotola senza strisciare lungo un piano inclinato scabro (μ_s)



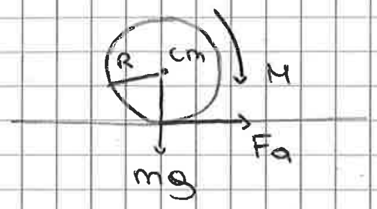
$G = cm$

a) ? α, F_a

$|v_{cm}| = \omega R$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 173 di 264

a) ipotesi ruote con moto di puro rotolamento e a_{cm} dell'auto



F_a opposta al movimento dei punti

$4F_a = m_1 a_{cm}$ (4 ruote)

$F_a = \frac{1}{4} m_1 a_{cm}$

$I\alpha = M - \underbrace{RF_a}_{\text{M forza di attrito}}$

$I\alpha = \underbrace{\frac{1}{2} m_2 R^2}_{\text{del cilindro}} \underbrace{\frac{a_{cm}}{R}}_{a_{cm} = \alpha R \text{ in puro rotolamento}}$

$M - F_a R = \frac{1}{2} m_2 R^2 \frac{a_{cm}}{R}$

$F_a = \frac{1}{R}\left(M - \frac{1}{2} m_2 R a_{cm}\right) = \frac{1}{4} m_1 a_{cm}$

$a_{cm} = \frac{4M}{R(M + 2m_2)} = 2,64 \ m/s^2$

$F_a = \frac{1}{4} m_1 a_{cm} = 3300 \ N$

$|F_a| \leq \mu_s N$

$F_a^{max} = \frac{1}{4} \mu_s M g = 3680 N$ ed è $> 3300 N$, quindi è puro rotolamento

c) n° giri in $t = 5 \ s$

$\Delta t = 5 \ s \rightarrow \Delta\theta = \frac{1}{2} \alpha \Delta t^2$

n° giri $= \Delta\theta / 2\pi = \frac{1}{4\pi} \alpha \Delta t^2 = 17,5$ giri

- **Keplero**

I LEGGE (orbite ellittiche)

Tutti i pianeti descrivono attorno al sole delle orbite di forma ellittica. Il sole occupa uno dei due fuochi, comune a tutte le ellissi

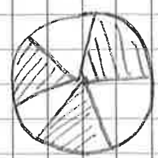
II LEGGE (aree uguali in tempi uguali)

Il raggio vettore di un pianeta, ossia il segmento che congiunge il centro del sole con quello del pianeta, copre aree uguali in tempi uguali

III LEGGE ($T^2 = k r^3$)

Il quadrato dei periodi di rivoluzione dei pianeti è proporzionale ai cubi dei semiassi delle loro orbite (r = semiasse maggiore)

- **conseguenze per orbite circolari**



dalla II legge

$$\frac{dA}{dt} = \underbrace{\frac{1}{2} r^2}_{\text{è sempre costante}} \frac{d\vartheta}{dt} = \text{cost} \rightarrow \omega = \text{cost}$$

$F_c = m\omega^2 r$ forza centripeta

$F_c = \frac{4\pi^2 m}{T^2} r$ siccome $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ma $T^2 = kr^3$

$$\boxed{F_c = m \frac{4\pi^2}{kr^2}}$$

forza sul satellite in orbita

↓

è proporzionale all'inverso della distanza al quadrato un oggetto sulla crosta terrestre viene attratto

$$F = mg \rightarrow F = \gamma \frac{m_T m}{r_T^2}$$

quindi

$$g = \gamma \frac{m_T}{r_T^2}$$ ma non conosciamo γ

ma dalla forza terra - luna

$$F_{T,L} = \gamma \frac{m_T m_L}{r_{TL}^2} = m_L a_c = m_L \omega_L^2 r_{TL}$$

$$\gamma m_T = \omega_L^2 r_{TL}^3$$

quindi

$$g = \frac{\omega_L^2 r_{TL}^3}{r_T^2}$$

$$\boxed{\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{N m^2}{Kg^2}}$$

- Velocità orbitale

velocità con cui un oggetto orbita attorno al baricentro del sistema (ad un corpo con massa maggiore)

è caratteristica delle forze centrali, forza radiale che dipende solo dal modulo della distanza

$$\bar{F} = F(r)\hat{u}_r$$

$$F = \gamma \frac{mM}{r^2} = m\omega^2 r = m \frac{v_0^2}{r}$$

$$\boxed{v_0 = \sqrt{\gamma M/r}}$$

- **velocità di fuga**

velocità minima iniziale a cui un oggetto senza propulsione deve muoversi per potersi allontanare dall'attrazione gravitazionale di una seconda massa

$$E_{m,i} = \underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{E_k} \underbrace{- \gamma \frac{m m_T}{r_T}}_{E_p}$$

del corpo sulla superficie terrestre

$$E_{m,f} = \underbrace{\frac{1}{2}mv_f^2}_{E_k}$$

del corpo all'infinito

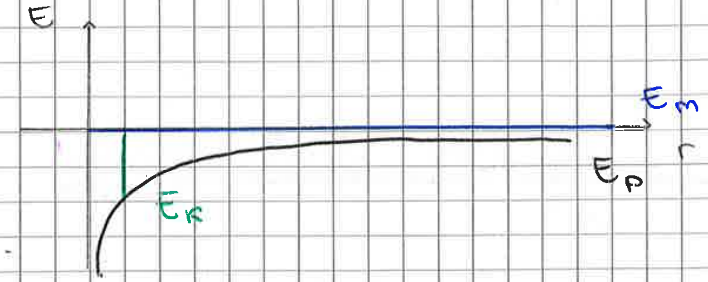
$$\boxed{v_f = \sqrt{\gamma \frac{2 m_T}{r_T}}}$$

ricavata tramite la conservazione dell'energia meccanica

- **orbite**

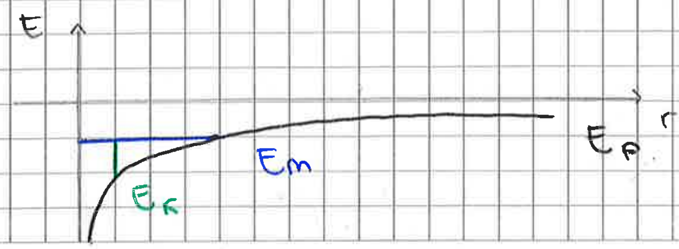
$E_m > 0$

iperbole
(r qualsiasi)



$E_m = 0$

parabola
(r qualsiasi)



$E_m < 0$

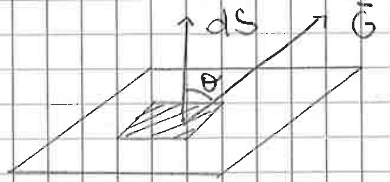
ellisse
(r limitato)

Teorema di Gauss

Calcolo del flusso di un campo

Ogni superficie piana può essere rappresentata mediante un vettore S che ha

- intensità = area della superficie
- direzione ⊥ superficie
- verso, diretto verso l'interno se la superficie è chiusa

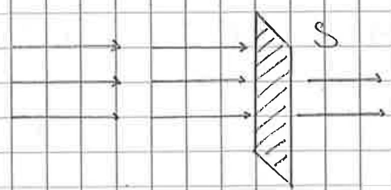


$$d\bar{S} = dS\,\hat{u}_N$$

$$\boxed{\phi = \bar{G}\,\bar{S}}$$

Flusso di un campo vettoriale G uniforme attraverso una superficie piana S

$$\phi = |G||S|\cos\theta$$



Se il campo non è uniforme e la superficie non è piana

$$\boxed{\phi_S = \oint_S G\,dS\,\hat{u}_S}$$

$$\boxed{\phi_S = 4\pi\gamma\sum m_i}$$

Flusso del campo gravitazionale attraverso una superficie chiusa

solo le masse contenute all'interno

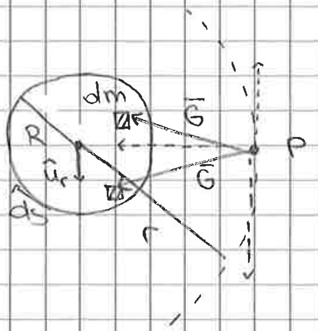
$$\Phi = \gamma m \oint_S d\Omega$$

$$\boxed{\Phi = 4\pi\gamma m}$$ → flusso attraverso una superficie (gaussiana) generato da una massa posta all'interno

il flusso di una massa puntiforme dipende solo dall'angolo solido e non dalla superficie né dalla sua distanza dalla massa

- dimostrazione gauss per una sfera

? campo in P generato dalla massa sferica



- - - = sfera gaussiana

$G_i = -\gamma \frac{m_i}{r^2} \hat{u}_r$ campo gravitazionale generato da dm

dato che le masse sono disposte simmetricamente in una sfera, allora il campo in P viene definito radiale

$\bar{G} = -G(r)\hat{u}_r$ direzione verso il centro della sfera

$$\Phi = \oint_S \bar{G}\, d\bar{s} = -\oint_S G(r)\, d\bar{s}\, \hat{u}_r$$

il campo è costante in tutta la superficie gaussiana perché non cambia il modulo di r

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 185 di 264

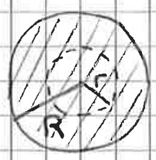
$\rho = m/V = cost$ densità volumica

$$\boxed{G(r) = \gamma \frac{m}{r^2}}$$

$r > R$

campo newtoniano generato da un pianeta

se gaussiana interna



$$\varphi = \frac{m}{V} = \frac{m(r_1)}{4/3\pi r_1^3} = \frac{m(r_2)}{4/3\pi r_2^3} = \dots$$

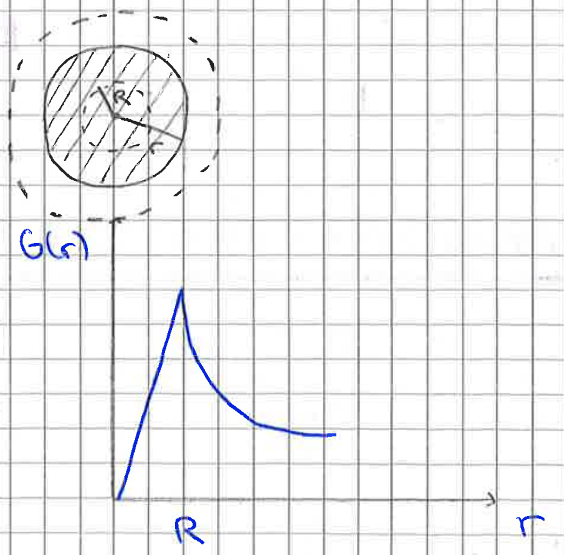
$$\downarrow$$

$$\frac{m_{TOT}}{4/3\pi R^3}$$

$$m(r) = m\frac{r^3}{R^3}$$

$$\Phi(r) = 4\pi r^2 G(r) = 4\pi \gamma m \frac{r^3}{R^3}$$

$$\boxed{G(r) = \gamma m \frac{r}{R^3}}$$



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 187 di 264

$\mu = \frac{1}{m} + \frac{1}{M}$ massa ridotta

$\boxed{F = \mu \bar{a}}$ forza d'interazione

• **energia meccanica**

una massa m che si muove in un campo gravitazionale generato da un'altra massa

$$E_m = \frac{1}{2}\mu v^2 + E_p$$

in coord. polari

$$v^2 = v_r^2 + v_\theta^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

per una particella in moto circolare

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega$$

$$|L| = \underbrace{r^2 \mu \omega}_{r \times \mu \omega r} \rightarrow r^2\omega^2 = \frac{L^2}{r^2\mu^2}$$

quindi

$$\boxed{E = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} + E_p}$$

$$E_m = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \boxed{\frac{L^2}{2\mu r^2} - K/R} \rightarrow \text{energia potenziale}$$

energia cinetica radiale

potenziale efficace

energia cinetica azimutale

$$\boxed{F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{u}_r}$$

$\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}$

costante dielettrica nel vuoto

vale la sovrapposizione degli effetti di gauss

$$F = \Sigma F_i = q_0 \Sigma \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_i}{r_i^2} \hat{u}_i$$

- campo elettrostatico

generato in un punto da un sistema di cariche ferme, definito come la forza elettrica risultante che agisce su una carica di prova

$$\boxed{E = \frac{F}{q_0}} \qquad \frac{[N]}{[C]}$$

- lavoro elettrico

$F = E q_0$

$dW = \bar{F} \cdot d\bar{s} = q_0 E \cdot d\bar{s}$

$$\boxed{W = q_0 \int_C E \, d\bar{s}}$$ integrale di linea

$$\boxed{\frac{W}{q_0} = \int_C \bar{E} \, d\bar{s}}$$ tensione elettrica

↓

lavoro compiuto dalla forza nello spostamento di q_0 lungo C, diviso la carica stessa

$\Phi = |E|\, 2A$ dove A = base del cilindro

per il teorema di Gauss

$\Phi = Q/\varepsilon_0$

siccome $\sigma = \dfrac{Q}{A}$ densità superficiale di carica

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$

campo E generato da una lastra piana

↓

non dipende dalla distanza

CAMPO ELETTRICO	CAMPO GRAVITAZIONALE
• Campo conservativo	• Campo conservativo
• Attrattivo/Repulsivo	• Attrattivo
• Andamento proporzionale al quadrato della distanza	• Andamento proporzionale al quadrato della distanza
• Campo centrale	• Campo centrale
$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\vec{u}_r$	$\vec{G}_{gra} = -\gamma\frac{M}{r^2}\vec{u}_r$
• Vale il principio di sovrapposizione degli effetti	• Vale il principio di sovrapposizione degli effetti
• Vale il teorema di Gauss	• Vale il teorema di Gauss
• Genera una forza conservativa	• Genera una forza conservativa
$\vec{F}_{el} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{r^2}\vec{u}_r$	$\vec{F}_{gra} = -\gamma\frac{Mm}{r^2}\vec{u}_r$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 193 di 264

$I\omega = MV\,L/4$

$V = 4I\omega / ML = \frac{L\omega}{3}$

$v = V + \omega\,L/4$

$v = 7/12\,\omega L$

$m v_0\,L/4 = m v\,L/4 + I\omega$

$m v_0\,L/4 = m\,L/4\;7/12\,\omega L + I\omega$

$m v_0\,L/4 = 7/48\,m L^2\omega + 1/12\,M L^2\omega$

$m v_0 = \omega L\,(7/12\,m + 1/3\,M)$

$\omega^* = \frac{m v_0}{L\,(7/12\,m + 1/3\,M)} = 3,16$ rad/s dopo l'urto

$V = \frac{L\omega}{3} = 0,84$ m/s V di trascinamento

$v = V + \omega\,L/4 = 1,47$ m/s del pt che ha colpito l'asta

b) ? W delle forze interne, durante l'urto, al sistema asta + corpo

$W = E_{k,f} - E_{k,i}$ lavoro f. interne

$$W = \underbrace{\underbrace{1/2\,MV^2}_{\text{dell'asta}} + \underbrace{1/2\,I\omega^2}_{\text{rotazione}} + \underbrace{1/2\,m v^2}_{\text{del punto}}}_{f} - \underbrace{1/2\,m v_0^2}_{i\ \text{del punto}}$$

$W = -8,4$ J

2) Un'asta di $L = 50$ cm e $M = 1$ kg è vincolata con un perno nel suo cm. Da $h = 2$ m, vengono lasciate cadere due palline di $m = 100$ g. Urtano l'asta in modo completamente anelastico a $L/2$ da cm e l'altra a $L/4$

$P_i = -mV_y - mV_y = -2mV_y$

$P_f = -(2m+M)V_{cm}$

$$J = -\left[(2m+M)\omega \frac{ml}{4(2m+M)} + 2mV_y\right] = 1{,}22\ Ns$$

↳ impulso esercitato dal vincolo

c) ? momento della forza peso M_P dopo l'urto

$M_P = \bar{F} \times \bar{r} = (2m+M)g\,|x_{cm}|$

$$M_P = (2m+M)g\frac{ml}{4(2m+M)} = \frac{mgl}{4} = 0{,}12\ Nm$$

d) dopo 1/4 di giro l'asta si arresta a causa dell'attrito

? M_a momento della forza d'attrito

$\theta = \pi/2$

$W_{nc} = \int \bar{M}\, d\theta = M_a \pi/2$

$W_{nc} = E_f - E_i$

$E_i = \frac{1}{2} I \omega^2$ di rotazione

$E_f = -(2m+M)\underbrace{g x_{cm}}$ solo E_P perché l'asta si ferma

↓

h perché l'asta ruota di $\pi/2$

$W_{nc} = -(2m+M)g x_{cm} - \frac{1}{2} I \omega^2 = M_a \pi/2$

$M_a = \left(-(2m+M)g x_{cm} - \frac{1}{2} I_{TOT} \omega^2\right) \frac{2}{\pi}$

$M_a = 0{,}15\ N$ momento forza d'attrito

3) un corpo puntiforme di $m = 1\ kg$, dopo esser scivolato con attrito, colpisce un'asta rigida di $M = 5\ kg$ e $d = 1\ m$. Lo scivolo da un $h = d/2$ e l'asta è sospesa per un suo estremo O, intorno al quale può ruotare