NUMERO: **2496A** ANNO: 2020

A P P U N T I

STUDENTE: Pieretto Letizia

MATERIA: Algebra lineare e geometria - Prof. Casnati

Letizia Pieretto

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 222

MATRICI

LEZ. 1

definizione

$m, n \in \mathbb{Z}$ numeri interi positivi.

$A \in \mathbb{R}^{m,n}$ è una matrice di m righe e n colonne composta da un insieme di mn numeri reali chiamati entrate, coefficienti o componenti della matrice.

casi particolari:

- matrice nulla: $O_{m,n} \in \mathbb{R}^{m,n}$ avente tutte le entrate nulle
- matrice quadrata: se $m = n$
- matrice riga: se $m = 1$
- matrice colonna: se $n = 1$
- matrice 1x1: se $m = n = 1$, $\mathbb{R}^{1,1}$

notazione compatta

In una matrice ad ogni sua entrata "a", rimangono associati due numeri interi e positivi: i = indice di riga e j = indice di colonna

a = entrata in posizione (i, j)

quindi la matrice si può indicare

$$A = (a_{i,j}) \quad \begin{matrix} 1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n \end{matrix}$$

es.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -4 & 5 & 0 \end{pmatrix} \qquad {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

proprietà:

a) $A \in \mathbb{R}^{m,n} \rightarrow {}^tA \in \mathbb{R}^{n,m}$

b) ${}^t({}^tA) = A$ operazione involutiva

c) ${}^t(-A) = -{}^tA$ trasposta compatibile con l'opposto

MATRICI QUADRATE $\in \mathbb{R}^{n,n}$

- diagonale → insieme ordinato delle entrate di posizione (i,i)
- matrice diagonale → se tutte le entrate al di fuori della diagonale sono nulle, cioè se $a_{i,j} = 0$ per ogni $i \neq j$

es
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

notazione: $A = \mathrm{diag}(1, 7, 3)$

- matrice identità → matrice diagonale con tutte le entrate diagonali uguali a 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$(A+B) = (a_{ij} + b_{ij})$

proprietà:

a) commutativa $A+B = B+A$

b) associativa $A+(B+C) = (A+B)+C$

c) matrice nulla → elemento neutro

d) $A + (-A) = 0_{m,n}$

e) compatibilità con la trasposta
$^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$

PRODOTTO per scalare

prodotto dello scalare α : αA

$\alpha A = \alpha a_{ij}$

proprietà:

a) 1 → elemento neutro

b) associativa $\alpha(\beta A) = \alpha\beta A$

c) distributiva $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$

d) distributiva $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$

e) compatibilità con la trasposta
$\alpha\, {}^tA = {}^t(\alpha A)$

f) annullamento del prodotto se
$\alpha = 0$ oppure $A = 0_{m,n}$

$$BA = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 \\ 2 & 4 & -2 \\ -5 & -10 & 5 \end{pmatrix}$$

es.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$AB \rightarrow$ non esiste

1° riga x 3 colonna

$$BA = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2° riga x 1° colonna

- potenze di una matrice quadrata

potenza p-esima: $A^p = A^{p-1} \cdot A$

non valgono i polinomi notevoli se A e B sono due matrici

$$(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$$

es.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

invece

non tutte le matrici quadrate non nulle sono invertibili

es.

$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$ → non è invertibile

perché prendendo una generica

$D = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$CD = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$a + 2c = 1$
$-2a - 4c = 0$ → impossibile

matrice nilpotente → matrici non invertibili e tali che per $p \geq 1$ $A^p = O_{n,n}$

↓

dimostrazione nessuna inversa

se ∃ inversa → $AB = I$

sappiamo che $A^2 = O$

$B(A^2) = BO$

$BA(A) = O$

ma se $(BA)A = IA \rightarrow (BA)A = A$ } contrad.

proprietà matrici invertibili:

a) $AB = I \iff BA = I$

b) se $BA = AB = I$ e $CA = AC = I$, $B = C$

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & & \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

matrice completa $(A|B)$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ \vdots & & & & \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} & b_m \end{array}\right)$$

La notazione matriciale è utile per scrivere in forma compatta il sistema

ponendo $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$$\boxed{AX = B}$$

es.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 3 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ -x_1 + x_2 = -2 \end{cases}$$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{array}\right)$$ matrice completa

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$ forma matriciale

- **matrici fortemente ridotte per righe**

se la riga di indice i contiene entrate non nulle, allora esiste una sua entrata pivot = 1 tale che è l'unica entrata non nulla di quella colonna

es.

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 4 & \boxed{1} & 5 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ci deve essere almeno un pivot su ogni riga esclusa l'ultima

- **matrici ridotte per righe**

se la riga di indice i contiene entrate non nulle, allora esiste una sua entrata pivot tale che nella sua colonna è seguita solo da entrate nulle

es.

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & 3 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \boxed{5} & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & \boxed{1} & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & \boxed{1} & -3 \\ 4/3 & 1 & 0 & 5/3 \end{array}\right) \rightarrow \text{ridotta per righe}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5/3 & 0 & 1 & 1/3 \\ 4/3 & 1 & 0 & 5/3 \end{array}\right) \rightarrow \text{fortemente ridotta per righe}$$

il sistema diventa

$$\begin{cases} z = 1/3 - 5/3\,x \\ y = 5/3 - 4/3\,x. \end{cases}$$

e l'insieme delle soluzioni

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ 5/3 - 4/3\,x \\ 1/3 - 5/3\,x \end{pmatrix} \middle| \; x \in K \right\}$$

- operazioni elementari
  - → sommare ad una riga il multiplo di un'altra riga
  - → moltiplicare una riga per una costante
  - → scambiare due righe

- equivalenti per righe
  - → $R_i \rightarrow R_i + \alpha R_{i_0}$
  - → $R_i \rightarrow \alpha R_i$
  - → $R_i \leftrightarrow R_{i_0}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \boxed{1} & 3 \\ \boxed{1} & 3/2 & 0 & 5/2 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_5 \to R_5 - R_4]{R_4 \to -R_4}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \boxed{1} & 3 \\ \boxed{1} & 3/2 & 0 & 5/2 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \text{ridotta x righe}$$

per renderla fortemente ridotta riparto dal basso

$$\xrightarrow[\substack{R_2 \to R_2 - 5/2\, R_4 \\ R_1 \to R_1 - 3R_4}]{R_3 \to R_3 - 2R_4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \boxed{1} & 3 \\ \boxed{1} & 3/2 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_1 \to R_1 - 2R_3]{R_2 \to R_2 - 3/2\, R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 - R_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \text{fortemente ridotta per righe}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 21 di 222

allora ogni altra sua soluzione X è della forma $X = X_0 + Y$, dove Y appartiene all'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo associato $AX = 0$

dimostrazione

→ se $A = 0$ e $B = 0$, sistema compatibile $rk(A) = rk(A|B)$

se $A = 0$ e $B \neq 0$, sistema incompatibile $rk(A) \neq rk(A|B)$

→ possiamo esprimere le incognite i cui coefficienti sono i pivot (in totale $rk(A)$) in funzione delle rimanenti incognite $(n - rk(A))$

→ $AX = B$ X_0 soluz.
$AX = 0$ Y soluz. (sist. omogeneo associato)

$$AX_0 + AY = B + 0$$

$$A(X_0 + Y) = B$$

$X_0 + Y$ è sz di $AX = B$

$$X_0 + \{\text{soluz } AX = 0\} \subseteq \{\text{soluz. } AX = B\}$$

es.

risolvere i due sistemi

$$\begin{cases} a + b + 2c - d = 3 \\ 2a + 3b + c + 2d = 0 \\ a + 2b - c + 3d = -3 \end{cases} \qquad \begin{cases} a + b + 2c - d = 3 \\ 2a + 3b + c + 2d = 0 \\ a + 2b - c + 3d = 3 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 1 & 2 & -1 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 3 & -3 & 3 \end{array}\right)$$ matrice completa

EQ. MATRICIALI

- eq. matriciali → equazione nella forma
$$AX = B$$
dove

A = matrice incompleta $m \times n$
B = matrice dei termini noti $m \times p$
X = matrice incognita $n \times p$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

con sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} = b_{11} \\ a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} = b_{12} \\ a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} = b_{21} \\ a_{21}x_{12} + a_{22}x_{22} = b_{22} \end{cases}$$

raccogliendo...

$$\begin{cases} a_{11}(x_{11}\ x_{12}) + a_{12}(x_{21}\ x_{22}) = b_{11}\ b_{12} \\ a_{21}(x_{11}\ x_{12}) + a_{22}(x_{21}\ x_{22}) = b_{21}\ b_{22} \end{cases}$$

es.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

matrice completa
$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 25 di 222

l'insieme delle soluzioni è

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1-2x_{21} & 1-2x_{22} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \middle| \; x_{21}\ x_{22} \in K \right\}$$

- Teorema Rouché - Capelli
  - → l'eq. è compatibile se e solo se $rk(A) = rk(A|B)$
  - → se l'eq. è compatibile, le matrice $n \times p$ che sono le sue soluzioni, dipendono da $n - rk(A)$ righe libere
  - → se l'eq. è compatibile e x_0 è una sua soluzione, allora ogni altra sua soluzione x è della forma $x = x_0 + y$

INVERSA DI UNA MATRICE

- matrice invertibile → una matrice quadrata è invertibile se e solo se

$$rk(A) = n$$

metodo per calcolare l'inversa

a) scrivo la matrice completa di A nel modo $(A \mid I_n)$

b) trasformo la matrice in $(A' \mid A'')$ tale che A' abbia solo un'entrata pari a 1 su ogni riga e nulle tutte le altre

c) scambiando le righe di A' in modo tale da ottenere una matrice I a sinistra $(I \mid A'')$

d) $A^{-1} = A''$

$$\xrightarrow{R_2 \to -\frac{1}{4} R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/8 & 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1 & 1/2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 - 3R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3/8 & 1/2 & 1/8 \\ 0 & 0 & 1 & 1/8 & 1/2 & -3/8 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1 & 1/2 \end{array}\right)$$

scambio R_2 e R_3 per ottenere I

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3/8 & 1/2 & 1/8 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/8 & 1/2 & -3/8 \end{array}\right)$$

L'inversa di A è $= \begin{pmatrix} -3/8 & 1/2 & 1/8 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \\ 1/8 & 1/2 & -3/8 \end{pmatrix} = A^{-1}$

LEZ. 6

DETERMINANTI

- **sottomatrice** → matrice ottenuta da $A \in K^{m,n}$ considerando solo le entrate che si trovano all'intersezione di p righe e q colonne

↓

possibilità di combinazioni

$$\binom{m}{p} \cdot \binom{n}{q}$$

- **metodo Sarrus** → valido per 2x2 e 3x3

in 2x2 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ → svolgo le diagonali

$$\det = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

in 3x3 ricopio le prime due colonne

$$\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

→ svolgo le diagonali

det = — − —

- **proprietà**

valido anche per le colonne

a) se A' è ottenuta sommando ad una riga un multiplo di un'altra det(A) = det(A')

b) se A' è ottenuta moltiplicando una riga per una costante det(A') = α det(A)

c) se A' è ottenuta da A scambiando due righe diverse det(A') = − det(A)

d) il det(A) se A è triangolare è il prodotto delle entrate sulla diagonale

es.

per ridurre i calcoli conviene sempre ridurre la matrice in una triangolare

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 3R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1}$$

- matrice aggiunta = adj(A)

↓

l'entrata in posizione (i,j) è il complemento algebrico di $A_{j,i}$ dell'entrata j,i

es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

ricordo matr. segni

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

$A_{11} = -3 \quad A_{12} = 4 \quad A_{13} = 1$

$A_{21} = 4 \quad A_{22} = -8 \quad A_{23} = 4$

$A_{31} = 1 \quad A_{32} = 4 \quad A_{33} = -3$

ora faccio la trasposta

$$adj(A) = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 4 & -8 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

da qui si può ricavare il determinante

↓

$det(A) = A\, adj(A)$ → in posizione $i = j$, ovvero le entrate sulla diagonale

$$det(A) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 4 & -8 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$det(A) = 8$

esercizi sistemi e determinanti

1) Trovare soluzioni dei sistemi

a) $\begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 1 \\ x + y - 2z = -1 \end{cases}$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 + 2R_1]{R_2 \to R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 + R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & \boxed{1} & 0 \\ 3 & \boxed{-3} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$ ridotta per righe

$rk(A) = 2 = rk(A|B) \to$ ha soluzione

parametri liberi $n - rk(A) = 1$

$$\xrightarrow{R_2 \to \frac{1}{3} R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 + 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 2/3 \\ 1 & -1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$ fortemente ridotta

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 + R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1/7 \\ 0 & 0 & 0 & -2/7 \end{array}\right)$$

$rk(A) \neq rk(A|B) \to$ non ci sono soluzioni

2) risolvere il sistema

$$\begin{cases} x + y + z = K \\ x - Ky + z = -1 \\ -x + Ky + z = K \end{cases}$$

a) discutere se $\exists$ sz al variare di K

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & K \\ 1 & -K & 1 & -1 \\ -1 & K & 1 & K \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_2 \to R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & K \\ 0 & -K-1 & 0 & -1-K \\ -2 & K-1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-R_2 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \boxed{1} & K \\ \boxed{-2} & K-1 & 0 & 0 \\ 0 & K+1 & 0 & K+1 \end{array}\right)$$

- se $K \neq -1 \to rk(A) = 3 = rk(A|B)$
  sistema compatibile
  $n - rk(A) = 0 \to$ parametri liberi
  1 sola sz.

$\exists \infty$ sz $\forall a \in \mathbb{R}$?

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & a \end{array}\right)$$

$\forall a \in \mathbb{R}$ $rk(A) = rk(A|B)$

$rk(A) \leq 2$

$n - rk(A) = 3 - 2 > 1$

quindi ho 1 param. libero $\to \infty$ sz.

4) risolvere il sistema

$$\begin{cases} x - 2y + z + 2t = a \\ x + 3y + z - 3t = b \\ 2x + y + 2z - t = c \end{cases}$$

a) trovare relazione tra a, b, c / il sistema sia compatibile

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 & a \\ 1 & 3 & 1 & -3 & b \\ 2 & 1 & 2 & -1 & c \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 + \frac{1}{2}R_1]{R_2 \to R_2 + \frac{3}{2}R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 & a \\ 5/2 & 0 & 5/2 & 0 & b + 3/2\,a \\ 5/2 & 0 & 5/2 & 0 & c + 1/2\,a \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 & a \\ 5/2 & 0 & 5/2 & 0 & b + 3/2\,a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c - b - a \end{array}\right)$$

sistema compat. se $c - b - a = 0$

b) calcolare A^{-1} e risolvere $Ax = 1$

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3 \to \frac{1}{2} R_3]{R_2 \to R_2 - \frac{1}{2} R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3/2 & -1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_2 \to \frac{1}{3} R_2]{R_1 \to R_1 - \frac{1}{3} R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & -1/2 & 1/6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 1/6 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/6 \end{pmatrix}$$

↳ versore $\hat{k}$ applicato in O ⊥ al piano contenente $\hat{i}, \hat{j}$

OPERAZIONI VETTORI

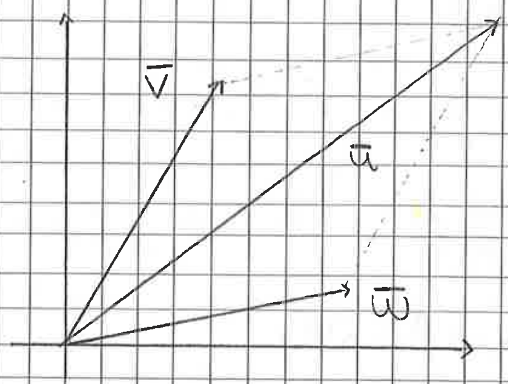
- il vettore può essere identificato con una matrice colonna

$$\overline{OP} \rightarrow \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{pmatrix}$$

- **somma** $\bar{u} = \bar{v} + \bar{w}$

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x + w_x \\ v_y + w_y \\ v_z + w_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}$$

$\bar{u}$ viene ottenuto tramite la regola del parallelogramma



- **prodotto per uno scalare** $\bar{u} = \alpha \bar{v}$

$$\alpha \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha v_x \\ \alpha v_y \\ \alpha v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}$$

$\alpha \bar{v} = 3\alpha \hat{i} + 2\alpha \hat{j} - \alpha \hat{k}$

$$\begin{cases} 3\alpha = 6 \\ 2\alpha = 4 \\ -\alpha = -1 \end{cases} \rightarrow \text{non sono paralleli}$$

- vettori complanari $\Leftrightarrow \bar{w} = \alpha \bar{v} + \beta \bar{u}$

es.

$\bar{v} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$

$\bar{w} = 6\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k}$

$\hat{u} = -3\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$

$-3\hat{i} - 2\hat{j} + 2k = \alpha(3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}) + \beta(6\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k})$

$$\begin{cases} -3 = 3\alpha + 6\beta \\ -2 = 2\alpha + 4\beta \\ 2 = -\alpha - \beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta = 1 \\ \alpha = -3 \end{cases} \quad \bar{u} = -3\bar{v} + \bar{w} \rightarrow \text{sono complan}$$

- punti allineati

prendendo tre punti A, B, C, se $B - A \neq 0$ e $C - A \neq 0$, ovvero non sono coincidenti

$\overline{B-A} \parallel \overline{C-A} \rightarrow$ i punti sono allineati

$(x_B - x_A)\hat{i} + (y_B - y_A)\hat{j} + (z_B - z_A)\hat{k} \parallel (x_C - x_A)\hat{i} + (y_C - y_A)\hat{j} + (z_C - z_A)\hat{k}$

quindi se i due vettori sono $\parallel$

LEZ 8

PRODOTTO SCALARE

- prodotto scalare

↓

$$\boxed{\langle \bar{v}, \bar{w} \rangle = v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z}$$

se ho due matrici colonna, $\langle \bar{v}, \bar{w} \rangle = {}^t v \cdot w$

- tabella versori

$\langle , \rangle$	$\hat{i}$	$\hat{j}$	$\hat{k}$
$\hat{i}$	1	0	0
$\hat{j}$	0	1	0
$\hat{k}$	0	0	1

- proprietà

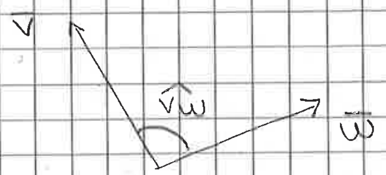
a) commutativa $\langle \bar{v}, \bar{w} \rangle = \langle \bar{w}, \bar{v} \rangle$

b) distributiva $\langle \bar{u}, \bar{v} + \bar{w} \rangle = \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle + \langle \bar{u}, \bar{w} \rangle$

c) $\alpha \langle \bar{v}, \bar{w} \rangle = \langle \alpha \bar{v}, \bar{w} \rangle$

d) prodotto definito positivo $\langle \bar{v}, \bar{v} \rangle > 0$

- angolo tra due vettori → misura in rad dell'angolo del piano individuato dai vettori $\bar{v}$ e $\bar{w}$ ed avente per lati le semirette contenenti i due vettori



$$\bar{w}_{\parallel} = \bar{w} - \bar{w}_{\perp}$$

$$\bar{w}_{\parallel} = \frac{\langle \bar{v}, \bar{w} \rangle}{|\bar{v}||\bar{w}|} \bar{v}$$

$$\bar{w}_{\perp} = \bar{w} - \frac{\langle \bar{v}, \bar{w} \rangle}{|\bar{v}||\bar{w}|} \bar{v}$$

PRODOTTO VETTORIALE

- prodotto vettoriale

$$\boxed{\bar{v} \times \bar{w} = (v_y w_z - v_z w_y)\hat{i} - (v_x w_z - v_z w_x)\hat{j} + (v_x w_y - v_y w_x)\hat{k}}$$

per ricordarlo...
prendo la matrice $\begin{pmatrix} v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{pmatrix}$

ed elimino dalla matrice la colonna corrispondente al versore che prendo in considerazione per creare i determinanti

$$\boxed{\bar{v} \times \bar{w} = \begin{vmatrix} v_y & v_z \\ w_y & w_z \end{vmatrix} \hat{i} - \begin{vmatrix} v_x & v_z \\ w_x & w_z \end{vmatrix} \hat{j} + \begin{vmatrix} v_x & v_y \\ w_x & w_y \end{vmatrix} \hat{k}}$$

- tabella versori

$\times$	$\hat{i}$	$\hat{j}$	$\hat{k}$
$\hat{i}$	0	$\hat{k}$	$-\hat{j}$
$\hat{j}$	$-\hat{k}$	0	$\hat{i}$
$\hat{k}$	$\hat{j}$	$-\hat{i}$	0

per ricordarsi

orario +

antiorario −

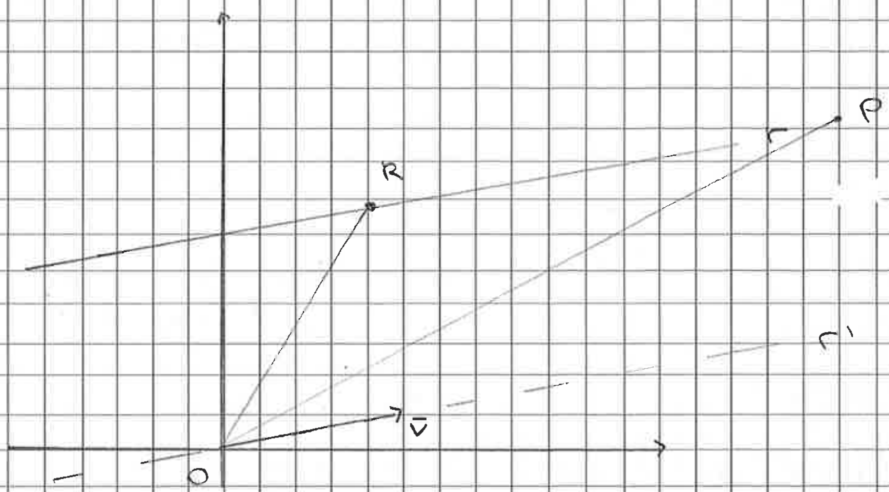
$$\langle \bar{u}, \bar{v} \times \bar{w} \rangle = u_x \begin{vmatrix} v_y & v_z \\ w_y & w_z \end{vmatrix} - u_y \begin{vmatrix} v_x & v_z \\ w_x & w_z \end{vmatrix} + u_z \begin{vmatrix} v_x & v_y \\ w_x & w_y \end{vmatrix}$$

- prodotto misto → volume

$$\boxed{V = \frac{1}{6} \left| \langle D-A, (B-A) \times (C-A) \rangle \right|}$$

LEZ. 9

EQ. PARAMETRICHE DI RETTE



una retta r è sempre parallela ad una unica retta, passante per l'origine, r'

↓

una retta nello spazio è completamente individuata dalla sua direzione $\bar{v}$ e da un suo punto qualsiasi R

$$r = \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + t \end{cases}$$

$A(-1, -2, -3)$

$$\begin{cases} -1 = 1 + 2t \\ -2 = 2 - t \\ -3 = 3 + t \end{cases} \rightarrow A \notin r$$

$B(-1, 1, 2)$

$$\begin{cases} -1 = 1 + 2t \\ 1 = 2 - t \\ 2 = 3 + t \end{cases} \rightarrow B \notin r$$

$C(-3, 4, 1)$

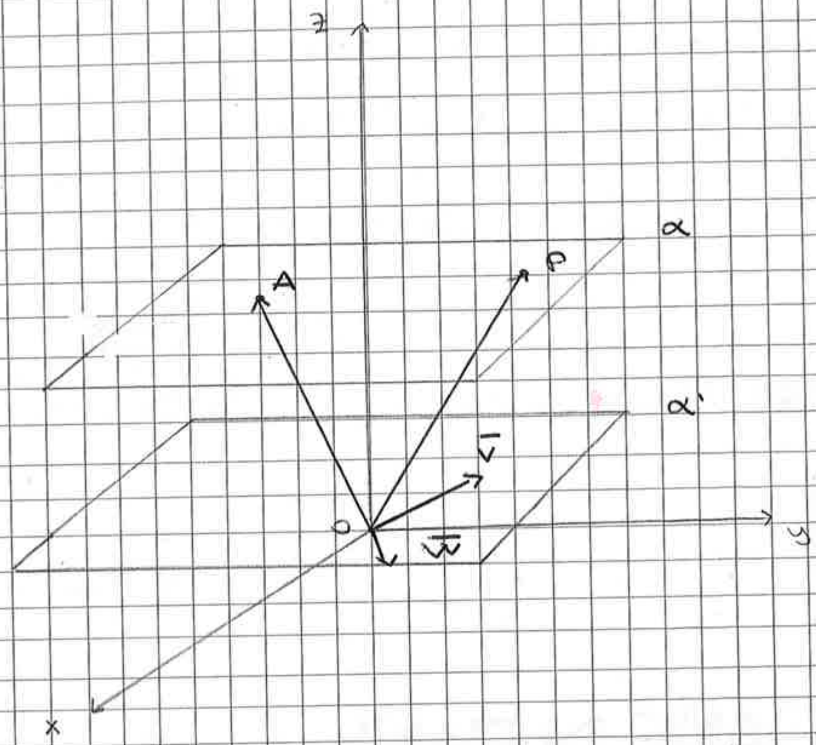
$$\begin{cases} -3 = 1 + 2t \\ 4 = 2 - t \\ 1 = 3 + t \end{cases} \rightarrow C \in r \text{ per } t = -2$$

- posizione relativa di due rette → confronto delle eq. parametriche

complanari
- coincidenti → $\bar{v}$ proporzionali e ∞ sol. del sistema
- incidenti → $\bar{v}$ non proporzionali e il sistema ha soluzione
- parallele distinte → $\bar{v}$ proporzionali e il sistema non ha soluzione

non complanari
- sghembe → $\bar{v}$ non proporzionali e il sistema non ha soluzione

EQ. PARAMETRICHE DI PIANI



$\bar{v}$ e $\bar{w}$ ∈ α' e P un punto qualsiasi

P ∈ α $\overline{OP} = \overline{OA} + t\bar{v} + u\bar{w}$

$$\boxed{\begin{cases} x = x_A + v_x t + w_x u \\ y = y_A + v_y t + w_y u \\ z = z_A + v_z t + w_z u \end{cases}}$$

eq. parametriche del piano

passante per un punto e // a due vettori

RETTA PER DUE PUNTI

$$\boxed{\begin{cases} x = x_A + (x_B - x_A)t \\ y = y_A + (y_B - y_A)t \\ z = z_A + (z_B - z_A)t \end{cases}}$$

eq. parametrica retta per due punti

$$\boxed{ax + by + cz = d}$$

eq. lineare del piano passante per A e $\perp$ a $\bar{v}$

con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ non simultaneamente nulle

es.

$\bar{v} = 3\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$

$A(1, 1, 1)$

$\alpha: 3x - y + z = 3$

- $B(2, -2, 3) \in \alpha$?

$6 + 2 + 3 = 3 \rightarrow$ NO

- $C(2, 1, -2) \in \alpha$?

$6 - 1 - 2 = 3 \rightarrow$ SI

POSIZIONI RELATIVE DI PIANI nello spazio

- paralleli distinti $\rightarrow$ vettori // e $\emptyset$ punti come soluzione del sistema
- paralleli coincidenti $\rightarrow$ vettori // e ∞ punti come soluzione del sistema
- incidenti $\rightarrow$ vettori $\not\parallel$ e ∞ punti come soluzione del sistema, i due piani si intersecano in una retta

- posizioni relative di due piani
  ↓
  metodo con matrici

$\alpha = ax + by + cz = d$

$\alpha' = a'x + b'y + c'z = d'$

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} \qquad (A|B) = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix}$$

$\alpha = \alpha' \rightarrow rk(A) = rk(A|B) = 1$

$\alpha \parallel \alpha'$ e distinti $\rightarrow rk(A) = 1,\ rk(A|B) = 2$

α e α' incidenti $\rightarrow rk(A) = rk(A|B) = 2$

EQ. RETTE come intersezione di due piani

dati due piani

$\alpha: ax + by + cz = d \qquad \alpha': a'x + b'y + c'z = d'$

e se sono tra di loro incidenti

quindi $rk\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 2$

$$\boxed{\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}}$$

eq. cartesiana della retta intersezione di due piani α e α'

che ha come vettore che la individua

$(a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}) \times (a'\hat{i} + b'\hat{j} + c'\hat{k})$

- data una retta in forma cartesiana

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$$

con $rk(A) = 2$

le soluzioni del sistema equivalente sono del tipo

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_0 + lt \\ y_0 + mt \\ z_0 + nt \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \right\}$$

e ricavo l' eq. parametrica di r

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$$

es.

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 \\ z = 3 - 3t \end{cases}$$

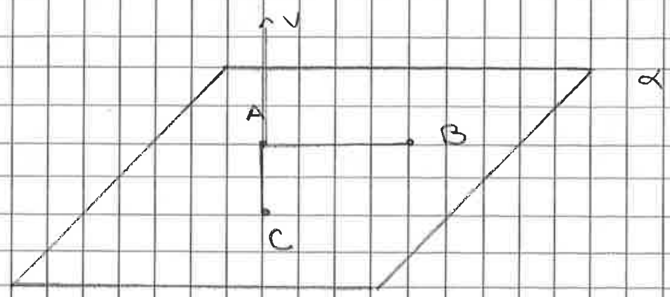
? eq. cartesiana

$$t = \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-3}{-3}$$

$y - 2 = 0 \quad -3(x-1) = 2(z-3) \quad y - 2 = 0$

$y - 2 = 0 \quad 3x + 2z = 3 \quad y - 2 = 0$

EQ. PIANO PER 3 PUNTI



$\left.\begin{array}{l}\overline{C-A}\\ \overline{B-A}\end{array}\right\} \rightarrow$ due vettori $// \alpha$

$(\overline{C-A}) \times (\overline{B-A}) \rightarrow v \perp \alpha$ e trovo il piano

oppure

4 punti complanari $P(x, y, z)$ generico

$$rk \begin{pmatrix} x - x_A & y - y_A & z - z_A \\ x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \end{pmatrix} \leq 2$$

o se

il suo determinante è nullo

<u>es</u>

$A(1,1,1) \quad B(2,-1,2) \quad C(3,-1,2)$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$(x-1)\cdot 0 - (y-1)(-1) + (z-1)(2)$

$y + z = 3 \rightarrow$ eq. del piano

POSIZIONI RETTA-PIANO nello spazio

• data r come intersezione di due piani e un piano α

$$r: \begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$$

$$\alpha: \quad a''x + b''y + c''z = d''$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} \qquad (A|B) = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{pmatrix}$$

$r \subseteq \alpha \rightarrow rk(A) = rk(A|B) = 2$

$r \cap \alpha = \emptyset \rightarrow rk(A) = 2 \quad rk(A|B) = 3$

r e α incidenti $\rightarrow rk(A) = rk(A|B) = 3$

• se le rette sono date in forma parametrica

r e α incidenti $\rightarrow \bar{v}_r \not\perp \bar{v}_\alpha$ e si ha 1 pt di intersezione

$r \parallel \alpha \rightarrow \bar{v}_r \perp v_\alpha$ e ho $\emptyset$ sz del sistema

$r \subseteq \alpha \rightarrow \infty$ soluzioni del sistema

es.

$\alpha: \quad 3x - y + z = 3$

POSIZIONI DUE RETTE NELLO SPAZIO

- date due **rette** in forma **intersezione di due piani**

$$r: \begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$$

$$r': \begin{cases} a''x + b''y + c''z = d'' \\ a'''x + b'''y + c'''z = d''' \end{cases}$$

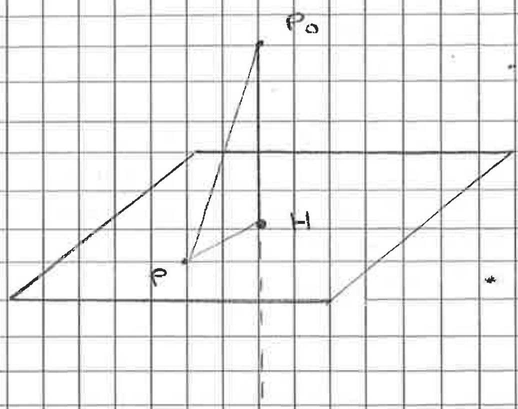
$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \\ a''' & b''' & c''' \end{pmatrix} \qquad (A|B) = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \\ a''' & b''' & c''' & d''' \end{pmatrix}$$

$r = r' \rightarrow rk(A) = rk(A|B) = 2$

$r \parallel r'$ e distinte $\rightarrow rk(A) = 2$ e $rk(A|B) = 3$

r e r' incidenti $\rightarrow rk(A) = rk(A|B) = 3$

r e r' sghembe $\rightarrow rk(A) = 3$ e $rk(A|B) = 4$



se $P \in \alpha$ ho un triangolo rettangolo e quindi

$$d(P_0, H) \leq d(P_0, \alpha) = \inf\{d(P_0, P) \mid P \in \alpha\}$$

al tempo stesso però

$$d(P_0, \alpha) = \inf\{d(P_0, P) \mid P \in \alpha\} \leq d(P_0, H)$$

quindi $d(P_0, H) = d(P_0, \alpha)$ e l'estremo inferiore è anche il minimo

$$\overline{P_0 - P} = (x_0 - x)\hat{\imath} + (y_0 - y)\hat{\jmath} + (z_0 - z)\hat{k}$$

il vettore proiezione ortogonale $\overline{P_0 - P}_{/\!/}$ è uguale ad $\overline{P_0 - H}$

$$\overline{P_0 - P}_{/\!/} = \frac{\langle \overline{P_0 - P}, \bar{v} \rangle}{|\bar{v}|^2}$$

dove $\bar{v}$ è il $\bar{v} \perp \alpha \rightarrow \bar{v}: a\hat{\imath} + b\hat{\jmath} + c\hat{k}$

siccome cerco il modulo, ovvero la distanza

$$|\overline{P_0 - P}|_{/\!/} = \frac{|\langle \overline{P_0 - P}, \bar{v} \rangle|}{|\bar{v}|} \underbrace{\left| \frac{\bar{v}}{|\bar{v}|} \right|}_{= 1}$$

s retta passante per P_0 e $\perp$ a r e incidente in H

$d(P_0, H) = d(P_0, r)$ e l'estremo inferiore è anche un minimo

se P_1 e P_2 sono due punti arbitrari su r, il parallelogramma costruito passante per P_0 e $\perp$ a r ha come altezza $\overline{P_0H}$ e con lato obliquo $\overline{P_0P_1}$ e base $\overline{P_1P_2}$

$|(P_0 - P_1) \times (P_1 - P_2)|$ → area parallelogramma

quindi

$$\boxed{d(P_0, r) = \frac{|(\overline{P_0 - P_1}) \times (\overline{P_1 - P_2})|}{|\overline{P_1 - P_2}|}}$$

distanza punto - retta

se la retta è data in forma parametrica

$$\boxed{d(P_0, r) = \frac{|(\overline{P_0 - P_1}) \times \bar{v}|}{|\bar{v}|}}$$

es.

$P(1,2,3)$ $P'(1,0,0)$ → e r quando $t=0$

$$r: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -t \\ z = 2t \end{cases}$$

$\hat{i} \to \hat{j}$

$$d(P, r) = \frac{|(2\hat{j} + 3\hat{k}) \times (\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k})|}{\sqrt{6}}$$

$$= \frac{|-2\hat{k} + 4\hat{i} + 3\hat{j} + 3\hat{i}|}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{49 + 9 + 4}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{31}}{\sqrt{3}}$$

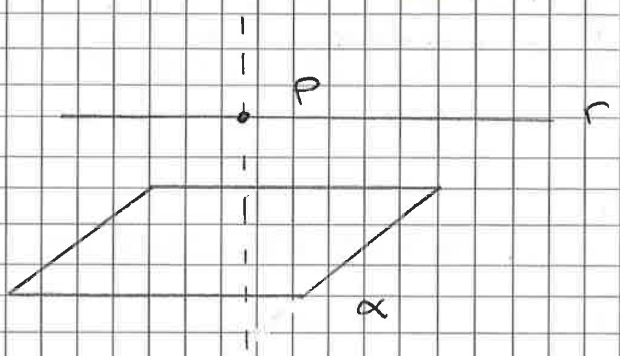
se $\alpha // \alpha_h$, $d \neq \emptyset$

$\bar{V}_\alpha = a \bar{V}_{\alpha h}$ oppure se $rk = 1$

quindi per $h = -3$

$$d = \frac{|1+1|}{\sqrt{9+1+4}} = \frac{2}{\sqrt{14}}$$

DISTANZA RETTA-PIANO



$\alpha: ax + by + cz = d$

$P \in r \ (x_0, y_0, z_0)$

se retta e piano sono paralleli

TROVO un punto $\in r$

$d(r, \alpha) = d(P, \alpha)$

$$\boxed{d(r,\alpha) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$

formula distanza retta - piano

es.

$\alpha: x + y + z = 0$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 73 di 222

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -2 & 1 \\ -5 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \rightarrow \text{sono } //$$

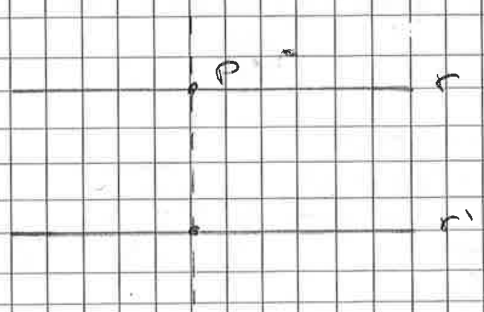
$d(r,\alpha) = d(P,\alpha)$

$P \in r \rightarrow (1,0,1)$

$$d = \frac{|1-4|}{\sqrt{1+9+16}} = \frac{3}{\sqrt{26}}$$

DISTANZA RETTA-RETTA

- se le due rette sono // (complanari)



se $P \in r$ e $P' \in r'$

$d(r,r') = d(P,r')$

applico la formula della distanza punto-retta

$$\boxed{d(r,r') = \frac{|(\overline{P-P'}) \times \bar{v}_r|}{|\bar{v}|}}$$

$d(r,r') \geq d(\alpha,\alpha')$

proietto r su α' $\rightarrow \bar{r}$

$r' \cap \bar{r}$ in un punto

se il vettore $\overline{R-R'}$ è $\perp$ ai vettori delle due rette, l'unica soluzione del sistema corrisponde ai due punti

applico la formula della distanza punto-punto

es.

$$r: \begin{cases} x = 3+t \\ y = t-2 \\ z = 2t-3 \end{cases} \qquad r': \begin{cases} x = -t' \\ y = t'-2 \\ z = 2t'+1 \end{cases}$$

$$\overline{R-R'} = (3+t-t')\hat{\imath} + (t-t')\hat{\jmath} + (2t-2t'-4)\hat{k}$$

$\overline{R-R'} \perp \bar{v}_r$ e $\perp \bar{v}_{r'}$ $\rightarrow \langle \, , \, \rangle = 0$

$\bar{v}_r = \hat{\imath} + \hat{\jmath} + 2\hat{k}$ $\qquad \bar{v}_{r'} = -\hat{\imath} + \hat{\jmath} + 2\hat{k}$

$$\begin{cases} 3+t-t'+t-t'+4t-4t'-8 = 0 \\ -3-t+t'+t-t'+4t-4t'-8 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6t-4t' = 5 \\ 4t-6t' = 11 \end{cases} \rightarrow t = -7/10 \quad t' = -23/10$$

$R\left(23/10, -27/10, -44/10\right)$, $R'\left(23/10, -43/10, -36/10\right)$

$d(R,R') = d(r,r') = 4/\sqrt{5}$

$$\xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} A'''$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - 3R_1 - 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} A''''$$

$\det(A) = 9 \cdot 5 \det(A') = -9 \cdot 5 \det(A'') = 9 \cdot 5 \det(A''')$
$= 9 \cdot 5 \det(A'''') = -630$

3) es. salamon 03 n° 1

? a, b per cui $(\overline{u+v})$ stessa direz. di $\bar{w}$

$\bar{u} = a\hat{i} + 2\hat{j} + b\hat{k}$
$\bar{v} = (1-b)\hat{i} + b\hat{j} + 2\hat{k}$
$\bar{w} = b\hat{i} + b\hat{j} + 2\hat{k}$

$\overline{u+v} = (a+1-b)\hat{i} + 2b\hat{j} + 2b\hat{k}$

stessa direzione $\to \overline{u+v} \parallel \bar{w}$

$\overline{u+v} = h\bar{w}$

$$\begin{cases} a+1-b = hb \\ 2b = hb \\ 2b = 2h \end{cases}$$

$$\begin{cases} a-(1+h)b = -1 \\ (1-h)b = -2 \\ b = 2h-2 \end{cases}$$

4) es. salamon 03 n° 11

? $\bar{v}$ / $|\bar{v}| = 5$ e $\bar{v} // \bar{u} = 2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$

$\bar{v} = h\bar{u}$

$|\bar{v}| = |h\bar{u}| = |h||\bar{u}|$

$|h| = |\bar{v}| / |\bar{u}|$

$|\bar{u}| = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14}$

$|h| = 5/\sqrt{14} \rightarrow h = \pm 5/\sqrt{14}$

$\bar{v} = \pm 5/\sqrt{14}\ \bar{u}$

$\bar{v} = \pm \left(10/\sqrt{14}\ \hat{i} + 5/\sqrt{14}\ \hat{j} - 15/\sqrt{14}\ \hat{k} \right)$

5) es. salamon 03 n° 4

Trovare l'angolo tra le coppie di vettori

a) $\bar{u} = \hat{i} + \hat{j}$ $\qquad \bar{v} = \hat{i} + \hat{k}$

$$\cos \widehat{uv} = \frac{\langle u, v \rangle}{|\bar{u}||\bar{v}|} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = 1/2$$

$\widehat{uv} = \pi/3$

b) $\bar{u} = \hat{i} + \hat{j}$ $\qquad \bar{w} = 2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$

$$\cos \widehat{uw} = \frac{\langle u, w \rangle}{|\bar{u}||\bar{w}|} = \frac{3}{\sqrt{2}\ \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\widehat{uw} = \pi/6$

c) Trovare $\bar{t} \perp$ alla coppia u, v e alla u, w

$\bar{t} = \bar{u} \times \bar{w} = \hat{k} - \hat{j} - 2\hat{k} + \hat{i} = -\hat{k} - \hat{j} + \hat{i}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1-h \\ 0 & 1 & 0 & 3+h \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2h-11 \end{array}\right)$$

$rk(A) = rk(A|B) \iff h = -11/2$

il sistema è compatibile

$n - rk(A) = 0 \rightarrow$ 1 sola sol.

$\bar{V}_{11} = \left(-11/2, 11/2, 0\right)$

$u_1 = 1-h$
$u_2 = 3+h \rightarrow \bar{u}_1 = \left(13/2, -5/2, -1\right)$
$u_3 = -1$

$\bar{u} = \hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - \hat{k} \rightarrow$ corretto

7) es. Salamon 03 n° 9

Trovare i vettori complanari con
$\bar{u} = \hat{\imath} - \hat{k}$, $\bar{v} = \hat{\imath} + \hat{\jmath}$
e ortogonali con $\bar{v} + \bar{u}$

complanari $\rightarrow$ combinazione lineare

$\bar{w} = a\bar{u} + b\bar{v}$

$\bar{w} = a\hat{\imath} - a\hat{k} + b\hat{\imath} + b\hat{\jmath} = (a+b)\hat{\imath} + b\hat{\jmath} - a\hat{k}$

$\bar{u} + \bar{v} = 2\hat{\imath} + \hat{\jmath} - \hat{k}$

$(\bar{u} + \bar{v}) \perp \bar{w} \rightarrow \langle \, , \, \rangle = 0$

$2(a+b) + b + a = 0$

$3a + 3b = 0$

$a = -b$

$\bar{w} = b\hat{\jmath} + b\hat{k} \rightarrow$ infiniti vettori

- cosa rappresenta nello spazio un'eq.

$$x^2+y^2+z^2+\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0$$

per essere una sfera

$$x^2+y^2+z^2+x_c^2+y_c^2+z_c^2-2x_cx-2y_cy-2z_cz-\rho^2=0$$

$\alpha=-2x_c$

$\beta=-2y_c \longrightarrow$

$\gamma=-2z_c$

$$\boxed{\begin{aligned}x_c&=-\alpha/2\\ y_c&=-\beta/2\\ z_c&=-\gamma/2\end{aligned}}$$

$$\delta=x_c^2+y_c^2+z_c^2-\rho^2$$

$$\boxed{\rho=\frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-4\delta}}$$ se $\rho^2\geq 0$

<u>es</u>

per quali valori di h è una sfera?

$$x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z+h$$

se è una sfera, $C(1,1,1)$

è una sfera se

$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-4\delta\geq 0$

$12+4h\geq 0$

$h\geq -3$

$h=-3 \rightarrow$ sfera degenere

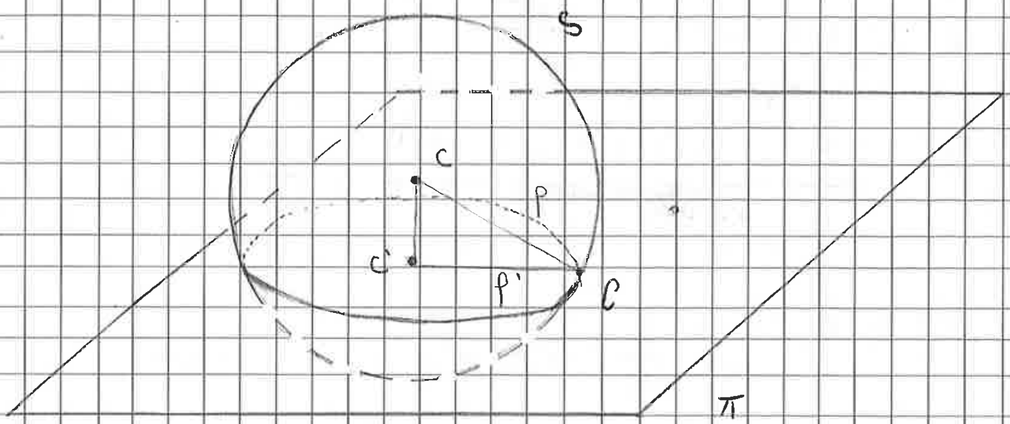
$h>3 \rightarrow$ sfera reale

$h<3 \rightarrow$ sfera immaginaria

$B(0,2,0)$ è circonferenza?

$B \in S$
$B \notin \pi$ $\rightarrow B \notin C$

- per determinare il raggio della circonferenza



dove C e ρ sono $\in S$
C' e ρ' sono $\in C$

C' è la proiezione ortogonale di C su π

$\rho^2 = \rho'^2 + d(\pi, C)^2$

$$\boxed{\rho' = \sqrt{\rho^2 - d(\pi, C)^2}}$$

raggio circonferenza
in relazione con il raggio della sfera e la distanza tra il centro della sfera e il piano

condizione necessaria

$$\boxed{d(\pi, C) < \rho}$$ altrimenti non ho $S \cap \pi$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 87 di 222

INTERSEZIONE DI DUE SFERE

- sfere tangenti
  - internamente $d(C_1, C_2) = |\rho_1 - \rho_2|$
  - esternamente $d(C_1, C_2) = \rho_1 + \rho_2$

  $\downarrow$

  ma non ho intersezione

- ho intersezione quando

$$\boxed{|\rho_1 - \rho_2| < d(C_1, C_2) < \rho_1 + \rho_2}$$

le due sfere descrivono una circonferenza avente centro sulla retta che unisce i punti C_1 e C_2

date

$$\left.\begin{array}{ll} S_1 & x^2+y^2+z^2+\alpha_1 x+\beta_1 y+\gamma_1 z+\delta_1=0 \\ S_2 & x^2+y^2+z^2+\alpha_2 x+\beta_2 y+\gamma_2 z+\delta_2=0 \end{array}\right]$$ non concentriche

se sottraggo membro a membro ottengo

$$\boxed{(\alpha_1-\alpha_2)x+(\beta_1-\beta_2)y+(\gamma_1-\gamma_2)z+(\delta_1-\delta_2)=0}$$

$\downarrow$

ovvero l'eq. di un piano, detto piano radicale di S_1, S_2 che contiene la circonferenza

il centro della circonferenza è dato dall'intersezione del piano radicale con la retta passante per i centri delle sfere

mentre il raggio $\rho = \sqrt{\rho_1^2 - d(C_1, \pi)^2}$

$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=0$

e aggiungo alla sfera un multiplo del piano

$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2+t(x+y+z-3)=0$

ottengo una sfera

$x^2+y^2+z^2+(t-2)x+(t-2)y+(t-2)z+3(1-t)=0$

siccome deve avere raggio 1

$$\frac{1}{2}\sqrt{(t-2)^2+(t-2)^2+(t-2)^2-12(1-t)}=1$$

$3t^2=4$

$t=\pm 2/\sqrt{3}$

LEZ. 13

- **Spazi vettoriali**

su un campo $K=\mathbb{R},\mathbb{C}$

insieme non vuoto V dotato di due applicazioni

somma $V\times V\to V$

$v_1+v_2=S_V(v_1,v_2)$

prodotto $K\times V\to V$

$\alpha V=p_V(\alpha,V)$

dove V è l'insieme degli elementi del vettore, K è il campo di scalari e v_1 e v_2

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

$(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$

$\mathbb{R}^I$ soddisfa gli assiomi

SOTTOSPAZI VETTORIALI

- **sottospazio vettoriale** → $W \subseteq V$ è un sottospazio se, munito delle due applicazioni ristrette s_V, p_V, è uno spazio vettoriale su K

$W \neq \emptyset$ $\quad$ $W \times W \to V$ $\quad$ $K \times W \to V$

$\quad$ $(s_V)|_{W \times W}$ $\quad$ $(p_V)|_{K \times W}$

quindi l'immagine di questa applicazione deve essere contenuta in W

verifico gli altri assiomi

- $\exists\ 0_W \in W$?

$w \in W \subseteq V$

$0_K w \to 0_V \in W$

- elemento opposto?

$w \in W \subseteq V$

$-w \in V$

$(-1) w \in W$

$\downarrow$

$K \times W$

$-w \in W$

es.

$K^{n,p}$

$W = \{ X \in K^{n,p} \mid AX = O_{m,p} \}$

dove $A \in K^{m,n}$

è un sottospazio?

- $W \neq \emptyset$ perché $AX = O$ è un sistema compatibile con almeno una soluzione
- $O_{n,p} \in W \rightarrow$ contiene l'origine
- siano X' e X'' due sz

  $AX' = AX'' = O_{m,p}$

  $A(X' + X'') = AX' + AX'' = O_{m,p} + O_{m,p} = O_{m,p}$

  è chiuso rispetto alla somma
- $A(\alpha X) = \alpha AX = \alpha O_{m,p} = O_{m,p}$

  è chiuso rispetto al prodotto

W è un sottospazio

es

$K^{n,p}$

$W = \{ X \in K^{n,p} \mid AX = B \}$

dove $A \in K^{m,n}$

è un sottospazio?

- se $B = O$ contiene l'origine $\rightarrow$ è un sottosp.

- contiene l'origine
- $x_1 + x_2 \in A$ e $x_1 + x_2 \in B$

$$x_1 + x_2 \in A \cap B$$

è chiuso rispetto alla somma

- $\alpha x_1 \in A$ e $\alpha x_1 \in B$

$$\alpha x_1 \in A \cap B$$

è chiuso rispetto al prodotto

l'intersezione è sempre un sottospazio

c) **unione**

$$A \cup B = \{ x \in X \mid x \in A \text{ o } x \in B \}$$

non è esclusivo

l'unione è un sottospazio solo se $A \subseteq B$ o $B \subseteq A$

se $A \subseteq B \rightarrow A \cup B = B$
se $B \subseteq A \rightarrow A \cup B = A$
è un sottospazio

se $A \nsubseteq B$ o $B \nsubseteq A \rightarrow A \cup B$ non è un sottospazio

d) **somma di sottoinsiemi**

V spazio vettoriale

W' e W'' sottoinsiemi non vuoti