NUMERO: **2489A** ANNO: 2020

A P P U N T I

STUDENTE: Volpini Elena

MATERIA: Analisi 1 - Prof. Cordovez

INSIEMI

DIM X ASSURDO
Nego la tesi x dimostrare che è falsa l'ipotesi

INSIEME: collezione di elementi

SOTTOINSIEME: Fissato un insieme non vuoto X, un sottoinsieme A di X è un insieme i cui elementi appartengono anche a X

$A \subseteq X$ → contenuto (se ammettiamo che A possa coincidere con X)

$\vee$

$A \subset X$ → contenuto propriamente

$A = \{x, y, z \dots\}$ → sottoinsieme definito per elencazione

parentesi graffe → ordine non rilevante

⇓

$$A = \{ x \in X \mid \underbrace{p(x)}_{\text{proprietà caratteristica}} \}$$

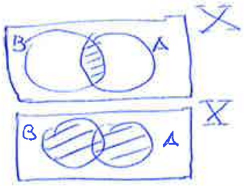
A sottoinsieme

$CA = A' = \{x \in X \mid x \notin A\}$ (Complementare di A) $\qquad C(CA) = A \qquad CX = \emptyset \qquad C\emptyset = X$

A, B sottoinsiemi

$A \cap B = \{x \in X \mid x \in A \wedge x \in B\}$

$A \cup B = \{x \in X \mid x \in A \vee x \in B\}$



(Diagrammi di Eulero-Venn)

Collezione di tutti i sottoinsiemi di X = insieme delle parti $\Rightarrow P(X)$

$\emptyset$ → insieme vuoto ⇒ E' UNICO

- $A = B \iff \{x \in A \iff x \in B\}$
- $A \subset B \iff (x \in A \Rightarrow x \in B)$ (la non è reciproco)
- $A \subset A \qquad x \in A \Rightarrow x \in A$
- $\emptyset \subset A$ — $\emptyset$ appartiene a qualsiasi sottoinsieme

- $(A \cap B) \subset (A \cup B)$
- $(A \cap B) \subset A$
- $(A \cap B) \subset B$
- $A \subset (A \cup B)$
- $B \subset (A \cup B)$
- $A \setminus B \ \{x \in A \mid x \notin B\} = A \cap B'$

- $A \subset B \Rightarrow A \cup B = B$
- $A \subset B \Rightarrow A \cap B = A$
- $A \cup \emptyset \Rightarrow A$
- $A \cap \emptyset \Rightarrow \emptyset$
- $A \cap A' \Rightarrow \emptyset$
- $C(A \cap B) = CA \cup CB$
- $C(A \cup B) = CA \cap CB$] Leggi di De Morgan

- $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ [Differenza simmetrica]

Elementi che non appartengono né a uno né all'altro

- $A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C$
- $A \cap B \cap C = (A \cap C) \cap B$] proprietà distributiva

- $A \cap B = B \cap A$
- $A \cup B = B \cup A$] proprietà commutativa

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 166

INSIEMI NUMERICI

$\mathbb{N}$ = insieme dei numeri naturali

$\mathbb{Z}$ = insieme dei numeri interi relativi: [DALLA SOTTRAZIONE]

$\mathbb{Q}$ = insieme dei numeri razionali

$\mathbb{R}$ = insieme dei numeri reali

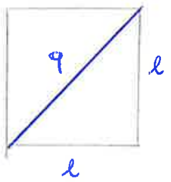
$\mathbb{C}$ = insieme dei numeri complessi

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ ↳ non è completo

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3 \dots\}$ $\Rightarrow$ $\mathbb{N} \in \mathbb{Z}$

$\mathbb{Z} = \{\dots -3, -2, -1, 0, 1, \dots\}$ → Estende la rappresentazione geometrica a sinistra dello 0

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$ →



$\ell = 1$

$q \in \mathbb{Q}$? NO

DIMOSTRAZIONE (PER ASSURDO)

Teorema di Pitagora → $q^2 = 1 + 1$ → $q^2 = 2$ → si può scrivere nella forma $\frac{m}{n}$? ↗ $n \neq 0$ ↘ $(m, n) = 1$

supponendo vero ciò, $q = \frac{m}{n}$

$q^2 = \frac{m^2}{n^2} = 2$ → $m^2 = 2n^2$

⇓

m^2 è pari ⇒ m è pari (2 volte un numero intero)

$m = 2k \quad \wedge k \in \mathbb{Z}$

⇓

$m^2 = 4k^2 = 2n^2 \Rightarrow n^2 = 2k^2$

perciò n^2 è pari → n è pari

Conclusione : $q = \frac{m}{n}$ con m, n interi pari → Contraddizione con l'ipotesi $(m, n) = 1$

perchè essendo pari sono entrambi divisibili per 2

⇓

q non è esprimibile nella forma $\frac{m}{n}$ → q non è razionale

$q = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \Rightarrow \underbrace{\mathbb{Q} \cup \{\text{numeri irrazionali}\}}_{\mathbb{R}}$

$\mathbb{R}$ → decimali finiti o periodici

- Per ciascun punto della retta euclidea esiste un numero e viceversa → Insieme completo

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ campo → Ordinato ⇒ Numeri possono essere confrontati

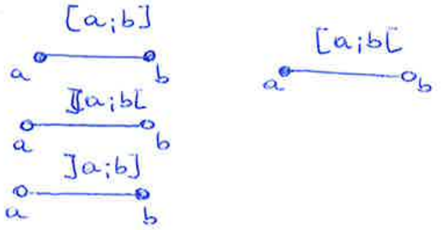
- $x < y \iff x + z < y + z$
- $x < y \iff x \cdot z < y \cdot z \quad \wedge \ \underline{z > 0}$

- Le operazioni aritmetiche definite sui razionali, si estendono ai reali con le medesime proprietà.
- I numeri razionali sono densi nei reali ⇒ (considerando un intervallo non degenere) Tra due numeri reali qualunque esistono infiniti numeri razionali

ASSIOMA DI COMPLETEZZA: ogni sottoinsieme X non vuoto di $\mathbb{R}$, limitato superiormente ammette l'esistenza dell'estremo superiore.

Analogamente se X è limitato inferiormente, ammette l'estremo inferiore

INTERVALLO (definizione): Sia $I \subseteq \mathbb{R}$, esso si definisce intervallo se per ogni x, x_1, x_2 con $x_1, x_2 \in I$ e $x_1 < x < x_2$, risulta che $x \in I$.



$[a;b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ INTERVALLO CHIUSO

$(a;b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ INTERVALLO APERTO

$(a;b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$

$[a;b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$

$(-\infty; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$ INTERVALLI ILLIMITATI

$[a; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$

$\mathbb{R}$ e $\emptyset$ sono intervalli

Oss

$x_0 \in \mathbb{R} \rightarrow x_0$ è un punto interno di I se $x_0 \in I$ e non è un punto di estremo

PROPRIETA' DI DENSITA' DI $\mathbb{Q}$ SU $\mathbb{R} \rightarrow$ se $r \, e \, r' \in \mathbb{R} \wedge r < r'$ (arbitrario), allora esiste sempre un numero $x \in \mathbb{Q}$ tale che $r < x < r'$.

$\downarrow$

Considerando un intervallo non degenere ($\mathbb{R}, \emptyset$, un punto), non esiste un intervallo che contiene solo numeri irrazionali, ma esiste sempre almeno un numero razionale

$\Downarrow$

Un intervallo non ha buchi $\rightarrow$ è composto da zero, solo elemento o infiniti elementi

VALORE ASSOLUTO

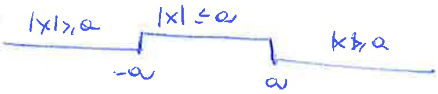
Si definisce $|x|$ come $\begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$

Proprietà

- $|x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $|x| = 0 \iff x = 0$
- $-|x| \leq x \leq |x|$
- $|-x| = |x| \rightarrow$ la funzione $y = |x|$ non è iniettiva su tutto $\mathbb{R}$
- $|x| \leq a \wedge a \geq 0 \Rightarrow -a \leq x \leq a$ $x \geq -a \wedge x \leq a$ $[-a; a]$
- $|x| \geq a \wedge a \geq 0 \Rightarrow x \leq -a \vee x \geq a$ $(-\infty, -a] \vee [a; +\infty)$

(perché $|x| \geq 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$)

Completano la retta euclidea



- $|xy| = |x||y|$
- $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|} \wedge y \neq 0$
- $|x+y| \leq |x| + |y|$ (Disequazione triangolare)
- $\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$

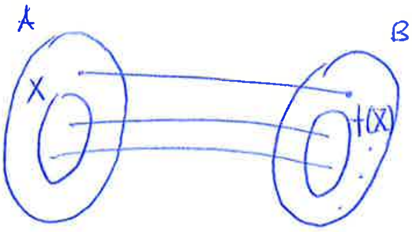
GRAFICO DELLA FUNZIONE: insieme di tutte le coppie ordinate del tipo $(a; f(a))$

$f: A \to B$ funzione
$a \mapsto f(a)$

$X \subset A$

$f(X) := \{f(x) \mid x \in X\} \subset B$ => IMMAGINE DI X ATTRAVERSO f

sottoinsieme del codominio se f non è iniettiva



DIMOSTRAZIONE

Th: $X \subset f^{-1}f(X) \quad \forall X \subset A$

$x \in X \Rightarrow f(x) \in f(X) \Rightarrow f^{-1}f(x) \in f^{-1}f(X) \Rightarrow x \in f^{-1}f(X)$

Poiché $x \in X$, si ha che $X \subset f^{-1}f(X)$, cioè la Th.

Se f è iniettiva, si dimostra che $X = f^{-1}f(X)$

Se due insiemi si contengono reciprocamente sono uguali

$f^{-1}f(X) \subset X$

Infatti se $x \in f^{-1}f(X) \Leftrightarrow \forall y \in f(X)$ t.c. $\exists x' \in X \mid f(x') = y$ $f(x)=y$

$f(x) = f(x') \to x = x'$ => Poiché $x \in f^{-1}f(X)$ e $x' \in X$ allora
Iniettività

$X = f^{-1}f(X)$

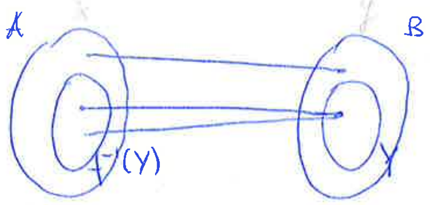
Th

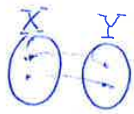
TEOREMA DUALE

$Y \subset B$

Th: $(ff^{-1}(Y)) \subset Y \quad \forall y \in B$ => CONTROIMMAGINE O IMMAGINE INVERSA DI Y ATTRAVERSO f -> sottoinsieme dominio se f non è suriettiva

$f^{-1}(Y) = \{x \in A / \exists y \in Y \mid f(x) = y\} \subset A$





DIMOSTRAZIONE

$y = f(x) \in Y$

$f^{-1}(y) \in f^{-1}(Y) \to f(f^{-1}(y)) \in ff^{-1}(Y) \to y \in f(f^{-1}(Y))$

Poiché $y \in Y$ => $ff^{-1}(Y)$ e Y hanno almeno un elemento in comune => $ff^{-1}(Y) \subset Y$ (Th)

Se f è suriettiva, si dimostra che $ff^{-1}(Y) = Y$

$\forall y \in ff^{-1}(Y) \; \exists x \in f^{-1}(Y)$ t.c. $f^{-1}(y) = x$
$\exists x' \in f^{-1}(Y)$ $f^{-1}(y) = x'$] $y = y'$

Poiché $y \in ff^{-1}(Y)$ e $y' \in Y$

$ff^{-1}(Y) = Y$ se f è suriettiva ogni immagine ha una controimmagine

FUNZIONE: dati due insiemi A e B (non vuoti), definiamo "funzione" la relazione che associa ad ogni elemento a di A ~~uno e un solo~~ al massimo un elemento b di B.

Ogni funzione è definita da 3 informazioni:

(I) Dominio: insieme dei valori che possono essere dati in input alla funzione.

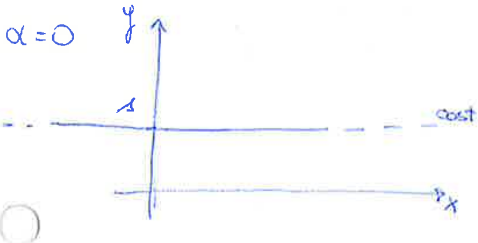
(II) legge di trasformazione

(III) Codominio.

FUNZIONI ELEMENTARI

POTENZE: x^{α}, $\alpha \in \mathbb{R}$ → definita in $\mathbb{R}$

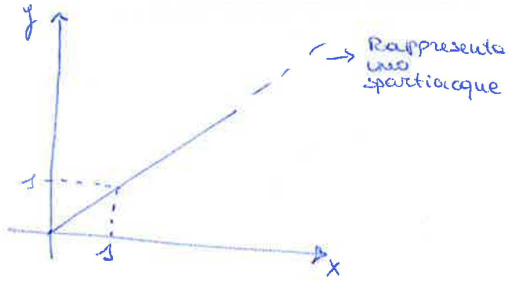
(I) $\alpha = 0$



(II) $\alpha = 1$

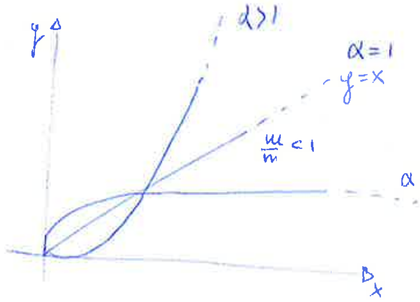
$Dom(x^1) = \mathbb{R}$

$Imm(x^1) = \mathbb{R}$



(III) $\alpha \in \mathbb{R}^+$

$Dom(x^{\alpha}) = \mathbb{R}^+$ (eccezione fatta per le potenze con esponente razionale e denominatore dispari (anche gli interi) perché hanno come campo di esistenza $\mathbb{R}$).



(IV) $\alpha \in \mathbb{R}_-$ ⇒ si ha una vera iperbole solo per $\alpha = -1$

↳ non definite in $x=0$ $\left(\frac{1}{0}\right)$.

FUNZIONI POLINOMIALI: combinazione lineare di potenze intere.

$p(x) := a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$.

Dominio naturale: $\mathbb{R}$

se un polinomio ha solo esponenti pari, è pari.

se un polinomio ha solo esponenti dispari, è dispari.

FUNZIONI RAZIONALI: espressa come rapporto tra polinomi

$Q(x) := \frac{p(x)}{q(x)}$ Dominio naturale: $\mathbb{R} - \{\text{zeri denominatori}\}$.

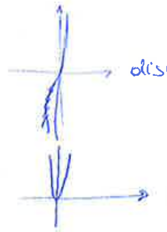
FUNZIONE IPERBOLICA → hanno la stessa nomenclatura delle funzioni trigonometriche perchè soddisfano condizioni analoghe (somigliano, ma non lo sono)

sin e cos trigonometriche hanno a che fare con un cerchio, mentre queste con un' iperbole.

$$\underbrace{\sinh^2 x - \cosh^2 x}_{\text{sono ascissa e ordinata di un punto che si muove sull' iperbole}} = 1$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$ → dispari (simmetria O)

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$ → pari (simmetria asse y)



FUNZIONE SEGNO

segno di $-2 = -1$

segno di 0 ⇒ Non ha senso → A discrezione dei matematici e del contesto → A volte

↳ Richiama il concetto di derivata prima di $y = |x|$.

$$\text{sign}: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} -1 & x<0 \\ 0 & x=0 \\ 1 & x>0 \end{cases} \end{cases}$$

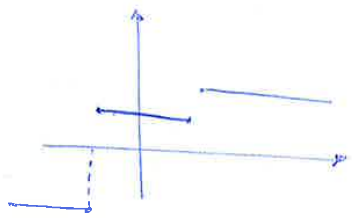
FUNZIONE PARTE INTERA

$[\,\bullet\,] := \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{N} \\ x \mapsto |x| := \text{maggiore intero di } x \text{ dal basso} \end{cases}$

Indica che deve essere qualcosa

EX: $[7,8] = 7$
$[3,5] = 3$
$[-2,4] = -3$
$[-3,4] = -4$.

EX:

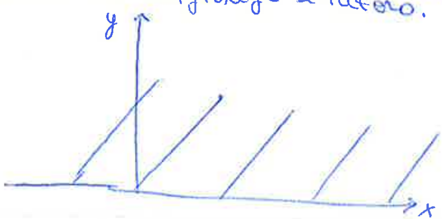


FUNZIONE MANTISSA: valore − parte intera $= x - [x]$.

anche detta "PARTE DECIMALE" → Scorretto perchè non sempre ci si esprime in base 10.

EX: Mantissa di x^2

Finchè $y \to 0$ parabola e mantissa coincidono (0)
quando parabola $= 1$, mantissa $= 0$ (non c'è un valore dopo la virgola)
quando y cresce fino a 1,9 anche la mantissa cresce, ma torna a 0 si raggiunge l'intero.



il segmento su x va da 1 a $\sqrt{2}$ perchè $f(1)=1$ e $f(\sqrt{2})=2$ ⇒ Numeri interi → Mantissa $=0$

CALCOLO COMBINATORIO

$0! = 1$
$1! = 1$] per definizione

$n \in \mathbb{N} \Rightarrow n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)(n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 2$ [FATTORIALE]

$n! = n(n-1)!$

PERMUTAZIONE

- Si utilizza per rappresentare il numero di modi in cui è possibile disporre in sequenza n oggetti distinti.

DISPOSIZIONI: di n oggetti distinti in sequenze di k

- CON RIPETIZIONE: n^k
- SENZA RIPETIZIONE: $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ $\quad 0 \leq k \leq n$

[COEFFICIENTE BINOMIALE] $0 \leq k \leq n \wedge k, n \in \mathbb{N}$

$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \dfrac{(n)(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$

$\binom{n}{0} = 1$

$\binom{n}{n} = 1 \rightarrow$ su n, si può comporre un solo gruppo formato da n elementi.

$\binom{n}{1} = n = \binom{n}{n-1}$

$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ $\quad [\forall n \geq 1]$

- Dimostrabile con i calcoli
- Dimostrabile per induzione

PRINCIPIO DI INDUZIONE MATEMATICA

: Dato un predicato $p(n)$ $n \in \mathbb{N}$ occorre verificarlo $\forall n \in \mathbb{N}$

- se $p(1)$ è verificato (qualunque altro valore → lo esso partire la proprietà) n_0
- Suppongo $p(n)$ vero → Ipotesi induttiva verificata sulla base del fatto che $p(1)$ vera n_0
- Passo induttivo: $p(n) \Rightarrow p(n+1)$ → se lo dimostro, il predicato sarà valido per $n \geq n_0$

ASSIOMA DI INDUZIONE

Dovuto a Gauss e Peano

EX: Sommare tutti i numeri da 1 a 100 [Esperimento Gauss]

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$1+2+3+\dots+99+100$

101

$101 \quad \dots$

1) $p(1) \Rightarrow \dfrac{1(1+1)}{2} = 1$ V $\forall n \in \mathbb{N}$

2) Posso supporre che per un valore generico e arbitrario di n, $p(n)$ è vera (I I)

3) $p(n+1)$ è vera? Lo dimostro

$$I\,I = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$p(n+1) = \sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+1+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$\underbrace{\underbrace{\sum_{k=1}^{n} k}_{I\,I} + \overset{\text{elemento } x(n+1)}{(n+1)}}_{\text{somme degli } n \text{ elementi } + (n+1)\text{esimo elemento}} = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n^2+n+2n+2}{2} = \frac{n^2+3n+2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

I I = Risultato ottenuto per $n+1$ dimostro che il predicato è vero per induzione per $n \geq 1$, cioè $\forall n \in \mathbb{N}$.

BINOMIO DI NEWTON

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Dimostrazione (con l'induzione matematica)

(I) $n=0 \rightarrow \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{0} a^0 b^0 = (a+b)^0 \Rightarrow 1=1$ ✓

(II) Avendo dimostrato che esiste almeno un valore di n per cui l'uguaglianza è vera, posso dedurre l'ipotesi induttiva

$\Downarrow$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \quad \text{vera per } n \text{ generico}$$

(III) Dimostro che se è vera per $n+1$, allora sarà valida $\forall n \geq 0$.

PASSO INDUTTIVO

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k$$

Infatti... $(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n$

Per ipotesi induttiva, $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

$\Downarrow$

$$(a+b)^{n+1} = (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = a \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + b \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1}$$

$$\binom{n}{0} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^{n-k+1} b^k$$

$$\binom{n}{0} a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] a^{n+1-k} b^k + \underbrace{\binom{n}{n} a^0 b^n}_{?}$$

Analogamente si dimostra che $\frac{z_1}{z_2} = \left|\frac{z_1}{z_2}\right| \left(\cos(\theta_1-\theta_2) + i \sin(\theta_1-\theta_2)\right)$ se $z_2 \neq 0$.

LEGGE DI DE MOIVRE (per le potenze)

Considero $z_1 = z_2 = z_3 \dots = z_m$

$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ e $m \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow$ $z^m = |z|^m \cdot (\cos(m\theta) + i\sin(m\theta))$

RADICE N-ESIMA DI z, $z \in \mathbb{C}$

Ogni complesso $z \in \mathbb{C}$ ha esattamente m radici m-esime [conseguenza del teorema fondamentale dell'algebra]

Posto $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$, le sue radici n-esime sono della forma:

$$w_k = \sqrt[m]{|z|} \cdot \left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{m} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{m}\right), \text{ con } k = 0,1,2 \dots (n-1)$$

$\downarrow$

> le radici m-esime sono i vertici di un poligono regolare di m lati inscritto nella circonferenza di raggio $|z|$

POTENZE DI i

$i^2 = -1$
$i^3 = -i$
$i^4 = 1$
$i^5 = i$

costituiscono un ciclo di ordine 4 $\Rightarrow$ i^{2019}

$$\begin{array}{r|l} 2019 & 4 \\ 20 & 534 \\ \hline -19 & \\ 16 & \\ \hline -3 & \end{array}$$

$\rightarrow$ le resto è l'esponente effettivo $\rightarrow$ $i^{2019} = i^3 = -i$

FORMULA DI EULERO $\Rightarrow$ FORMA ESPONENZIALE

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ $\qquad$ $z = |z| \cdot e^{i\theta}$

OSS: se $z = a+bi$, $e^z = e^{a+bi} = e^a \cdot e^{bi} = e^a(\cos b + i\sin b)$

TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA

Sia l'equazione $p(x) := a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \dots + a_m z^0 = 0$ con coefficienti complessi, $m \geq 1$ e $a_0 \neq 0$, tale equazione ammette almeno una radice nel campo complesso.

OSS: supponiamo che $z_0 \in \mathbb{C}$ sia radice di $p(x)$ $\Rightarrow$ allora $p(z) = (z-z_0)(p_1(z))$
e così via

$\Downarrow$

> Se il polinomio studiato è di grado m, ammette al massimo m radici (distinte o uguali (molteplicità $m_i > 0$))

$\longrightarrow$ non accade mai in $\mathbb{R}$

$$(z-z_0)^{\mu_0}(z-z_1)^{\mu_1}(z-z_2)^{\mu_2} \dots (z-z_m)^{\mu_k} \Rightarrow \mu_0 + \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_k = m$$

OSS: se il polinomio ha solo coefficienti reali, esso può avere radici in $\mathbb{R}$ e in $\mathbb{C}$

se ha una soluzione complessa, automatico esiste la sua coniugata

OSS$_2$: se il polinomio ha tutti i coefficienti in $\mathbb{R}$, allora se $z \in \mathbb{C}$ è una sua radice, lo sarà anche il suo coniugato $\bar{z}$ e avrà la stessa molteplicità.

Eq grado 3 coeff. reali - se trovo uno reale, le altre sono complesse

grado 3 e coeff. compl $\rightarrow$ se trovo una reale, non so nulla delle altre

OSS$_3$: se il polinomio ha tutti i coefficienti in $\mathbb{R}$ ed è di grado dispari, allora ammette almeno una soluzione reale. (Radici complesse sempre in coppia con il coniugato)

MONOTONIA DELLE FUNZIONI

FUNZIONE MONOTONA CRESCENTE: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in \mathrm{Dom} f$

STRETTAMENTE CRESCENTE: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in \mathrm{Dom} f$

FUNZIONE MONOTONA DECRESCENTE: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in \mathrm{Dom} f$

STRETTAMENTE DECRESCENTE: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in \mathrm{Dom} f$

la monotonia in senso stretto è più restrittiva della monotonia generale

↳ STRETTAMENTE MONOTONA $\Rightarrow$ MONOTONA (non il contrario!)

> la monotonia in senso stretto è condizione sufficiente per l'iniettività (perciò anche per l'invertibilità)

la monotonia di una funzione nel suo dominio può cambiare, a seconda degli intervalli (intervalli di monotonia) considerati

OSS Una funzione costante è sia crescente che decrescente (non in senso stretto)

SUCCESSIONI

Def: sono successioni delle particolari funzioni che hanno come dominio un sottoinsieme di $\mathbb{N}$

$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \Rightarrow a_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$a_n = \frac{n}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}$

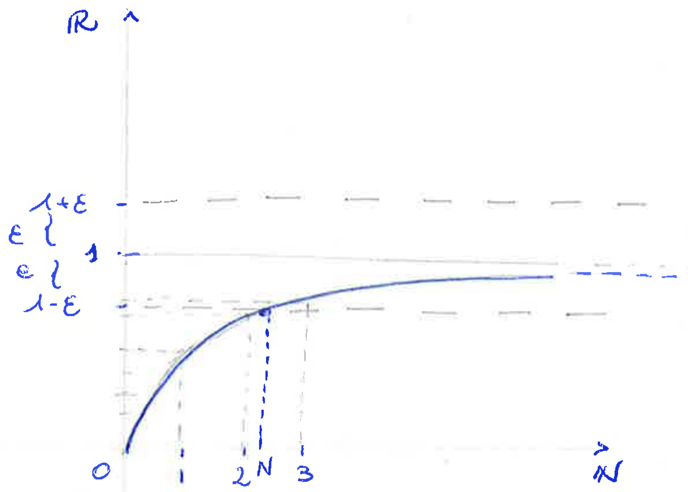
$a_0 = 0$

$a_1 = \frac{1}{2}$

$a_2 = \frac{2}{3}$

$a_3 = \frac{3}{4}$

...



A partire da N, gli infiniti valori della successione hanno immagine compresa tra $1+\varepsilon$ e $1-\varepsilon$ → Distanza retta $(y=1)$ e immagine è minore di ε

⇓

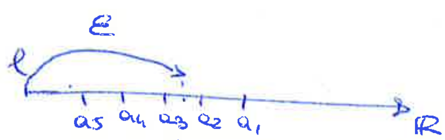
la successione converge a 1.

Def: la successione $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è detta **convergente** a un valore $l \in \mathbb{R}$, se (e solo se)

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \mid \forall n > N_\varepsilon \Rightarrow |a_n - l| < \varepsilon$$

↳ $\lim_{n \to +\infty} a_n = l$

non è operativa ⇓ Fornisce solo una conferma



↳ a partire da $N=3$

Riprendendo l'esempio...

$a_n = \frac{n}{n+1}$

$\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \longrightarrow |a_n - l| < \varepsilon \longrightarrow \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon \iff \frac{|-1|}{|n+1|} < \varepsilon \iff \frac{1}{n+1} < \varepsilon$

$l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon$

Intervallo delle immagini

parte intera x avere un intero

Considero $N_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon} + 1\right] \quad n > \underbrace{\frac{1}{\varepsilon} - 1}_{N_\varepsilon}$

$\lim_{n \to +\infty} k \cdot a_n = k \cdot \ell$

$\hookrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists N_\varepsilon > 0 \mid \forall n > N_\varepsilon \Rightarrow |k \cdot a_n - k\ell| < \varepsilon \rightarrow |k| \, |a_n - \ell| < \varepsilon$ Definizione di limite

$|k| \ell \rightarrow$ Th.

TEOREMA DEL CONFRONTO (Teorema dei carabinieri)

Date 3 successioni di numeri reali: $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

Se $\lim_{n \to +\infty} a_n = \ell = \lim_{n \to +\infty} c_n$, allora $\lim_{n \to +\infty} b_n = \ell$

Dimostrazione

Scelto un $\varepsilon > 0$

Hp: $\lim_{n \to +\infty} a_n = \ell \rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N}, n > N_1 \Rightarrow |a_n - \ell| < \varepsilon \rightarrow \ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon$

A partire da N_1 le immagini di a_n appartengono all'intervallo aperto

$\lim_{n \to +\infty} c_n = \ell \rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_2 \in \mathbb{N} \mid \forall n > N_2, n > N_2 \Rightarrow |c_n - \ell| < \varepsilon \rightarrow \ell - \varepsilon < c_n < \ell + \varepsilon$

a partire da N_2 le immagini di c_n appartengono all'intervallo aperto

Poiché $a_n \leq b_n \leq c_n$ per ipotesi,

$\ell - \varepsilon \leq b_n \leq \ell + \varepsilon \quad \forall N \in \mathbb{N} \rightarrow N = \max\{N_1, N_2\}$ $\hookrightarrow$ per essere certi che valga sempre

$\downarrow \quad \hookrightarrow b_n \in (\ell - \varepsilon; \ell + \varepsilon)$

A partire da N, tutte le immagini di b_n appartengono all'intervallo aperto $(\ell - \varepsilon; \ell + \varepsilon)$

$\Downarrow$

$\lim_{n \to +\infty} b_n = \ell \rightarrow |b_n - \ell| < \varepsilon$ (Definizione di limite)

$e_n \leq 1 + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}}$ $\Rightarrow e_n \leq 1 + \dfrac{1+\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}}{1-\frac{1}{2}}$ } Somma di n valori in progressione geometrica

progressione geometrica di ragione $r = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $-1 \leq r < 1$

$$\lim_{n \to +\infty} 1 + \frac{1+\cancel{(1/2)^{k-1}}^{\,0}}{1-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{\frac{1}{2}} = 1+2=3$$

$\Downarrow$

$e_n \leq 3$ $\to$ Dimostro così che e_n è limitato superiormente (perché convergente)

$\Downarrow$ si vede senza dim. $\to$ (x capire sostituisci i valori) $e_1 = 2$, $e_2 = \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 \to \frac{9}{4} > 1 \ldots$

$e_{n+1} > e_n$ $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ $\Rightarrow$ Crescente $\leftarrow$ Th

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e}$$ $\to$ Numero di Nepero $e = 2{,}7812\ldots$

Def: Data una successione reale $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, sia $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ successione di numeri naturali, $k \in \mathbb{R}$ e $n_1 < n_2 < n_3$ si dice sottosuccessione ricavata dalla successione a_n secondo la legge n_k, la nuova successione $\{a_{n_k}\} \overset{\text{det}}{:=} \{b_n\}$ tale che $b_0 = a_{n_0}$, $b_1 = a_{n_1}$, $b_2 = a_{n_2} \ldots$

ESEMPIO: $n_k = k^3$

a_n $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

$\Downarrow$

$\{b_{n_k}\}$ $\to$ $b_0 = a_0$
$b_1 = a_1$
$b_2 = a_8$
$b_3 = a_{27} \ldots$

TEOREMA DI BOLZANO - WAIERSTRASS

Ogni successione limitata ha una sottosuccessione estratta convergente.

Ex: $\{-1^n\}$

Limitata, ma non convergente $[-1, 1]$ $\Rightarrow$ In compenso ammette due sottosuccessioni estratte convergenti:

$\underbrace{n_k = 2k}_{\text{pari}}$ $\underbrace{n_k = 2k-1}_{\text{dispari}}$

LIMITE DI UNA FUNZIONE

Def Sia $l \in \mathbb{R}$, si dice intorno di raggio r ($r \in \mathbb{R}_+$) l'intervallo limitato aperto

$$|x-l|<r \quad \text{con } x \in \mathbb{R} \qquad \boxed{I_r(l)}$$

$$l-r<x<l+r$$

Si può interpretare in 2 modi
- la distanza geometrica di l da x sulla retta reale
- l'errore assoluto con cui l si approssima a x.

Avrà senso anche definire gli intorni di $-\infty$ e $+\infty$

Def: Si dice intorno di $+\infty$ l'intervallo con estremo inferiore $a \in \mathbb{R}$ e superiormente illimitato.

$$I_a(+\infty) = (a; +\infty)$$

Analogamente...

Def. Si dice intorno di $-\infty$ l'intervallo inferiormente illimitato e con estremo superiore $b \in \mathbb{R}$

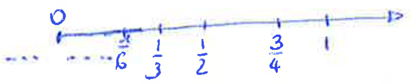
$$I_b(-\infty) = (-\infty; b).$$

Def: Preso $X \subset \mathbb{R}$ e non vuoto e $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ (R incluso (contiene $\pm\infty$)), x_0 è definito punto di accumulazione per X se (e solo se) per ogni intorno U di x_0, l'intersezione tra l'intorno stesso ed il sottoinsieme contiene almeno un elemento con $x \neq x_0$.

$$U \cap X \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$$

Ex:

$$\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}}$$



$x=\frac{3}{4}$ non è un punto di accumulazione

$x=\frac{1}{2}$ non è un punto di accumulazione

] l'unico elemento che $U \cap X \setminus \{x_0\}$ contiene è x_0 $\Rightarrow U \cap X = \emptyset$.

$x=0$ è l'unico punto di accumulazione per X $\rightarrow$ Qualunque intorno completo di $x=0$ contiene elementi di X diversi da x_0

Oss: In un intervallo, ogni elemento è un punto di accumulazione.
Il punto di accumulazione può anche non appartenere $\rightarrow$ Interseco U con X e tolgo x_0.

Def: Supponiamo di avere $l \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$

Si dice che l è il limite di $f(x)$ per $x \to x_0$ se (e solo se)

$$\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0 \mid \forall x \in \mathrm{Dom} f,\ \underbrace{0<|x-x_0|<\delta}_{\text{Intorno di } x_0 \text{ con raggio } \delta} \Rightarrow \underbrace{|f(x)-l|<\varepsilon}_{\text{Intorno di } l \text{ con raggio } \varepsilon}$$

Non è operativo $\rightarrow$ Consente di dimostrare.

Sia $f(x)$ definita in un intorno di $x_0 \in \mathbb{R}$ escluso al più x_0

Ex: $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \lfloor \sin x \rfloor = 0$ $f(x_0) \neq \ell$ → f non è continua in x_0

Scelgo $\delta = \frac{\pi}{2}$

$|x - \frac{\pi}{2}| < \frac{\pi}{2} \rightarrow 0 < x < \pi \wedge x \neq \frac{\pi}{2}$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid \forall x \in Dom f \wedge x \neq x_0, \; 0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$

$|\lfloor \sin x \rfloor - 0| < \varepsilon \longrightarrow \lfloor \sin x \rfloor < \varepsilon$ Poiché ε è arbitrario e $\varepsilon > 0$, $\lfloor \sin x \rfloor = 0$

sempre tra 0 e 0,9

Def: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ se (e (solo se)) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists B \in \mathbb{R}^+ \mid \begin{cases} x \in Dom f \\ x > B \end{cases} \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$

Intorni: $\forall I_\varepsilon(\ell) \; \exists I_B(+\infty) \mid \forall x \in I_B(+\infty) \Rightarrow f(x) \in I_\varepsilon(\ell)$

Def: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ se $\forall M > 0, \exists B \in \mathbb{R}^+ \mid \begin{cases} \forall x \in Dom f \\ x > B \end{cases} \Rightarrow f(x) > M.$

Intorni: $\forall I_M(+\infty) \; \exists I_B(+\infty) \mid x \in I_B(+\infty) \Rightarrow f(x) \in I_M(+\infty)$

Def: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell$ se $\forall \varepsilon > 0 \; \exists B \in \mathbb{R}^+ \mid \forall x \in Dom f, \; x < -B, \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$

Intorni: $\forall I_\varepsilon(\ell) \; \exists I_B(-\infty) \mid \forall x \in I_B(-\infty) \Rightarrow f(x) \in I_\varepsilon(\ell)$

Def: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ se $\forall M > 0 \; \exists B \in \mathbb{R}^+ \mid \forall x \in Dom f, \; x < -B \Rightarrow f(x) > M.$

Intorni: $\forall I_M(+\infty) \; \exists I_B(-\infty) \mid x \in I_B(-\infty) \Rightarrow f(x) \in I_M(+\infty)$

Def: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ se $\forall M > 0 \; \exists B \in \mathbb{R}^+ \mid \forall x \in Dom f, \; x > B \Rightarrow f(x) < -M.$

Intorni: $\forall I_M(-\infty) \; \exists I_B(+\infty) \mid x \in I_B(+\infty) \Rightarrow f(x) \in I_M(-\infty)$

Def: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ se $\forall M > 0 \; \exists B \in \mathbb{R}^+ \mid \forall x \in Dom f, \; x < -B \Rightarrow f(x) < -M$

Intorni: $\forall I_M(-\infty) \; \exists I_B(-\infty) \mid x \in I_M(-\infty) \Rightarrow f(x) \in I_B(-\infty)$

In generale...

$x \to x_0$	δ
$x \to \infty$	B
$\lim \ell$	ε
$\lim \pm\infty$	M

Def: $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ se $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \mid \forall x \in Dom f, \; 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$

Intorni: $\forall I_\varepsilon(\ell) \; \exists I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} \mid \forall x \in I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} \rightarrow f(x) \in I_\varepsilon(\ell)$

Def: $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ se $\forall M > 0 \; \exists \delta > 0 \mid \forall x \in Dom f, \; 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M$

Intorno: $\forall I_M(+\infty) \; \exists I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} \mid x \in I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in I_M(+\infty)$

Def: $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ se $\forall M > 0 \; \exists \delta > 0 \mid \forall x \in Dom f, \; 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < -M$

Intorni: $\forall I_M(-\infty) \; \exists I_\delta(x_0) \mid \forall x \in I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} \rightarrow f(x) \in I_M(-\infty)$

ESERCITAZIONE

$\to \lim_{n\to+\infty} \left[\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{3n}\right]^{\frac{2}{3}} = \left(\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{3n}\right)^{\frac{2}{3}}$

se pongo $3n = m$ ottengo

$\lim_{m\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\right)^{\frac{2}{3}} = e^{2/3}$

$\to \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+3}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{(n+1)+2}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{n+1}\right)^n =$

$= \lim_{n\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{2}{n+1}\right)^n\left(1+\frac{2}{n+1}\right)}{\left(1+\frac{2}{n+1}\right)} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{2}{n+1}\right)^{n+1}}{\underbrace{\left(1+\frac{2}{n+1}\right)}_{\to 0}} = e^2$ per il limite notevole

$\to \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2} = \lim_{n\to+\infty}\left[\left(\frac{n-1}{n}\right)^n\right]^n = \lim_{n\to+\infty}\left(\underbrace{\left(1+\frac{(-1)}{n}\right)^n}_{e^{-1}}\right)^n \quad \lim_{n\to+\infty} e^{-n} = 0$

$\to \lim_{n\to+\infty}\frac{\log(n+1)}{\log n} = \cancel{\lim_{n\to+\infty}} \quad \cancel{\frac{\log(n(1+1/n))}{\log n}}$

$= \lim_{n\to+\infty}\frac{\log\left(n\left(1+1/n\right)\right)}{\log n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\log n + \log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log n} =$

$= \lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\to 0}}{\log n} = 1 + \lim_{n\to+\infty}\frac{\lg 1^{\to 0^+}}{\log n_{\to+\infty}} = 1$ FI.

$\Downarrow$

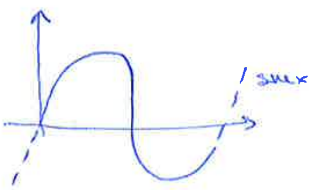
Vince logn x la gerarchia

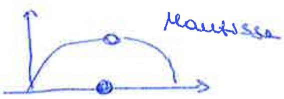
$\Downarrow$

0

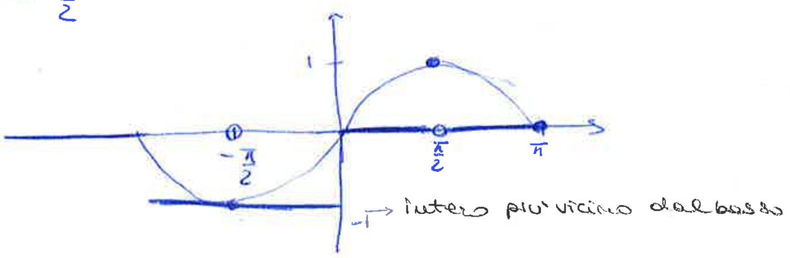
LIMITI DI FUNZIONI

- $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} M(\sin x) = 1$





- $\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}} \lfloor \sin x \rfloor = -1$



CONTINUITA' DI UNA FUNZIONE

Sia x_0 un punto del dominio della funzione f. La funzione dicasi continua in x_0 se per ogni $\varepsilon>0$ esiste un $\delta>0$ tale che:

$$\forall x \in \text{Dom} f,\ |x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

Intorni: $\forall I_{\varepsilon}(\ell)\ \exists I_{\delta}(x_0) \mid \forall x \in \text{Dom} f,\ x \in I_{\delta}(x_0) \Rightarrow f(x) \in I_{\varepsilon}(\ell)$

1) $x_0 \in \mathbb{R}$
2) $x_0 \in \text{Dom} f$
3) $f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$

OSS: In entrambe le definizioni, fissato un valore arbitrario $\varepsilon>0$, è richiesto di trovare almeno un valore di δ che soddisfi le condizioni.

Def: Sia I un sottoinsieme di $\mathbb{R}$, la funzione f (definita in un intorno di x_0) dicasi continua in I se (e solo se) è continua in ogni punto di I.

OSS: Tutte le funzioni elementari (polinomi, razionali, potenze, trigonometriche, esponenziali ed inverse) sono continue nel loro dominio.
In particolare le polinomiali sono continue su $\mathbb{R}$.
↳ DIM

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = ax+b$ Fissato $\varepsilon>0$, $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$

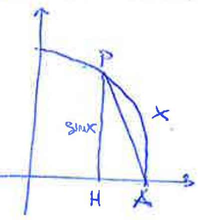
$$\Downarrow$$

$$|a x + \cancel{b} - a x_0 - \cancel{b}| < \varepsilon$$

$$|a||x-x_0|<\varepsilon \quad \begin{cases} \text{se } a=0,\ \forall x \in \mathbb{R} \\ \text{se } a \neq 0,\ \delta = \dfrac{\varepsilon}{|a|} \end{cases} \Bigg] \text{ è comunque continua su } \mathbb{R}$$

∘ $\sin x$ è continua in $\mathbb{R}$
↳ DIM

Posto che $|\sin x| \le |x|$, suppongo che $0 < x < \frac{\pi}{2}$



$\overline{PH} < \overline{PA} < \overset{\frown}{PA}$ perché la distanza tra due punti è minima se il cammino è in linea retta.

$\overline{PH} = \sin x$
$\overset{\frown}{PA} = x > 0$ $\Big] \Rightarrow |\sin x| \le |x|$ è vero

$$\sin x - \sin x_0 = 2 \sin \frac{x-x_0}{2} \cos \frac{x+x_0}{2} \Big] \text{ Prostaferesi}$$

$\boxed{|\cos t| \le 1}\ \forall t \in \mathbb{R}$ → Maggioro → $2\left|\sin \dfrac{x-x_0}{2}\right|\left|\cos \dfrac{x+x_0}{2}\right| \le \cancel{2}\left|\dfrac{x-x_0}{\cancel{2}}\right| \cdot 1$

$$\Downarrow$$

$$|x-x_0|$$

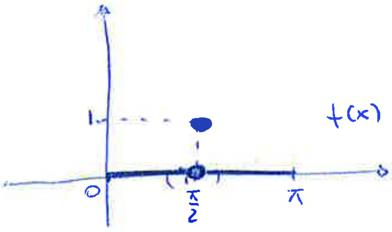
Fissato $\varepsilon>0$ se $|x-x_0|<\varepsilon$ anche $|\sin x - \sin x_0| < \varepsilon$
↳ Continua e $\delta = \varepsilon$.

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq x_0 \\ \ell & x = x_0 \end{cases}$$

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \tilde{f}(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell = \tilde{f}(x_0).}$$

Ex: $f(x_0) \neq \lim_{x \to x_0} f(x)$

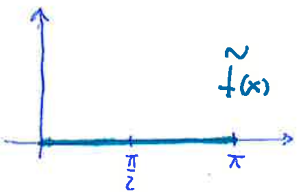
$f(x) = \lfloor \sin x \rfloor \qquad x = [0, \pi]$



$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \lfloor \sin x \rfloor = 0 \rightarrow$ Discontinuità eliminabile

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \lfloor \sin x \rfloor & x \neq \pi/2 \\ 0 & x = \pi/2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to x_0} \tilde{f}(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) = \tilde{f}(x_0) = \ell$$



Ex 2 $\quad f(x_0)$ non esiste $\rightarrow f(x)$ non è definita in $x = x_0$

$f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} \qquad$ Dom f: $x \neq 2$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}} = 4$$

Posso semplificare perché $x_0 \neq 2$ solo nel limite

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & x \neq 2 \\ 4 & x = 2 \end{cases}$$

Oss: Sia f una funzione definita e monotona in un intorno di x_0, escluso al più x_0, allora esistono finiti il limite destro e sinistro per $x \to x_0$ e precisamente:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \leq f(x_0) \leq \lim_{x \to x_0^+} f(x) \quad \text{se è crescente}$$

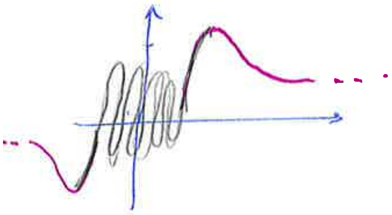
e

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) \leq f(x_0) \leq \lim_{x \to x_0^-} f(x) \quad \text{se è decrescente.}$$

↳ In tal caso f può ammettere solo delle discontinuità di I specie.

DISCONTINUITÀ DI SECONDA SPECIE

Un punto di discontinuità non eliminabile o non di prima specie, è detto punto di discontinuità di seconda specie.



LIMITI FUNZIONI MONOTONE

TEOREMA: Sia f una funzione definita e monotona in un intorno destro di $x_0 \in \mathbb{R}$, escluso al più x_0, allora esiste finito o infinito (finito o infinito) il limite destro per $x \to x_0$ e precisamente si ha:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \begin{cases} \inf f(x) \mid \{x \in I^+(x_0),\ x > x_0\} & \text{se è crescente} \\ \sup f(x) \mid \{x \in I^+(x_0),\ x > x_0\} & \text{se è decrescente} \end{cases}$$

Analogamente, considerando un intorno sinistro di $f(x)$ per $x \to x_0$: un intorno sinistro di x_0, il limite

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \begin{cases} \inf \{f(x) \mid x \in I^-(x_0),\ x < x_0\} & \text{se è decrescente} \\ \sup \{f(x) \mid x \in I^-(x_0),\ x < x_0\} & \text{se è decrescente} \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE (non x esame)

Se f è crescente nell'intorno destro $I^+(x_0)$ di c, allora

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \inf \{f(x) \mid x \in I^+(x_0),\ x > x_0\} = \ell$$

Condizioni per avere un estremo inferiore $\begin{cases} \exists \ell \in \mathbb{R} \mid f(x) \geq \ell \ \forall x \in I_{\text{intorno}} \\ \forall \varepsilon > 0\ \exists x_\varepsilon \in I_{(x_0)} \setminus \{x_0\} \mid f(x_\varepsilon) < \ell + \varepsilon \end{cases}$

Funzione crescente $\Rightarrow x < x_\varepsilon$

$$f(x) < f(x_\varepsilon) \quad \forall x \in I^+(x_0) \setminus \{x_0\},\ x < x_\varepsilon$$

estremo inf.

$$\Downarrow$$

$$\ell - \varepsilon < \ell \leq f(x) \leq f(x_\varepsilon) < \ell + \varepsilon$$

minorazione

$$\Downarrow$$

$$f(x) \in I_\varepsilon(\ell) \Rightarrow \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$$

Ex:

$$\lim_{x \to 1^+} \overbrace{[x^4 - 2x^3 - x + 2]}^{t}$$

Ruffini ± 1, ± 2

$R(1) = 1 - 2 - 1 + 2 = 0$
$R(-1) \neq 0$
$R(2) = 16 - 16 - 2 + 2 = 0$
$R(-2) \neq 0$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & -2 & -1 & 2 \\ 1 & & 1 & -1 & -2 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & / \end{array} \longrightarrow (x-1)(x^3 - x^2 - 2)$$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & -1 & \cancel{2}\,0 & -2 \\ 2 & & 2 & 1 & 2 \\ \hline & 1 & +1 & 1 & / \end{array} \longrightarrow (x-1)(x-2) \quad (x^2 + x + 1) = t$$

Se mi avvicino a 1 da destra $\longrightarrow \overset{+}{(x-1)}\overset{-}{(x-2)}\overset{+}{(x^2+x+1)} \Longrightarrow \overset{-}{t}$

Se $x \to 1^+$, $t \to 0^-$

$\lim_{t \to 0^-} [t] = -1$ $\qquad$ $\lim_{t \to 0^+} [t] = 0$ $\qquad$ limiti laterali esistono, ma sono diversi → il limite non esiste

OSS: Una funzione è continua se:

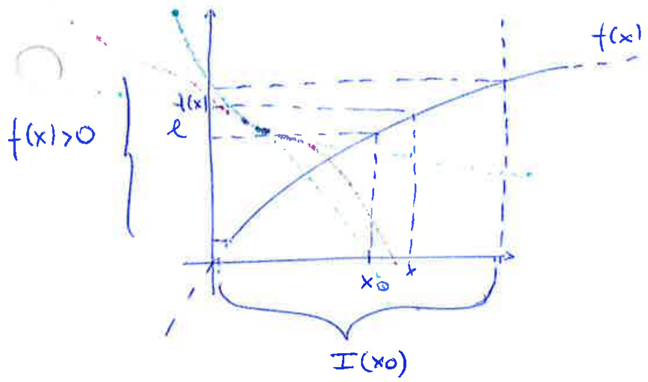
1) $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$

cioè
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$$

2) $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) = \ell$

TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO

Supponiamo che f ammetta limite ℓ (finito o infinito) per x che tende a x_0. Se $\ell > 0$ o $\ell = +\infty$, esiste un intorno $I(x_0)$ in cui $f(x)$ è strettamente positiva.
Il discorso è analogo per il negativo



In tutto l'intorno $x \mid f(x) > 0$.

DIMOSTRAZIONE:

Considero ℓ finito, $\ell > 0$

Considero l'intorno di ℓ di raggio $\varepsilon = \frac{\ell}{2} > 0$

$$\forall I_\varepsilon \ell \ \exists\ I(x_0) \mid \forall x \in \text{dom} f,\ x \in I(x_0) \Rightarrow \underbrace{f(x) \in I_\varepsilon(\ell)}_{|f(x)-\ell| < \frac{\ell}{2}}$$ Def. limite

$$-\frac{\ell}{2} < f(x) - \ell < \frac{\ell}{2}$$

$$\underset{(\varepsilon)}{I\ell} = \left(\frac{\ell}{2}; \frac{3}{2}\ell\right) \subset (0, +\infty) \qquad \frac{\ell}{2} < f(x) < \frac{3\ell}{2}$$

valori strettamente positivi

Th.

Se $\ell = +\infty$ la dimostrazione è analoga (si considera un intorno $I_A(+\infty)$ e def. limite)

OSS: Se f ammette limite ℓ (finito o infinito) per $x \to x_0$ ed esiste un intorno completo di x_0 ($I(x_0) \setminus \{x_0\}$) tale che $f(x) \geq 0$ $\forall x \in I(x_0) \setminus \{x_0\}$, allora $\ell \geq 0$ o $\ell = +\infty$.
Il risultato è analogo per il caso negativo

TEOREMA DEL CONFRONTO 1

Supponiamo che per $x \to x_0$ la funzione f abbia limite ℓ e la funzione g abbia limite m (entrambi finiti o infiniti). Se esiste un intorno di x_0, $I(x_0)$ tale che $f(x) \leq g(x)$ in $I(x_0) \setminus \{x_0\}$, allora $\ell \leq m$.

DIMOSTRAZIONE:

Se $\ell = -\infty$ e $m = +\infty$ non c'è nulla da dimostrare
Altrimenti si consideri la funzione ausiliaria $h(x) = g(x) - f(x)$

Poiché $g(x) \geq f(x)$ per ipotesi $\to h(x) \geq 0$ in $I(x_0)$

$$\lim_{x \to x_0} h(x) = \underbrace{\lim_{x \to x_0} g(x) - \lim_{x \to x_0} f(x)}_{\text{Algebra dei limiti}} = -\ell + m$$

Poiché nell'intorno considerato $h(x) \geq 0$, per il corollario del teorema della permanenza del segno si ha che $m - \ell \geq 0$, cioè la tesi.

Def: se la funzione f ha come limite per $x \to x_0$ un valore finito, esso è limitato in un intorno di x_0, $x \neq x_0$ ($x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$)

$$\forall x \in \bar{\mathbb{R}},\ \exists C \in \mathbb{R} \mid |f(x)| \leq C \quad \forall x \in I(x_0) \setminus \{x_0\}.$$

→ Esistono una costante C e un intorno $I(x_0)$ tale che $|f(x)| \leq C \quad \forall x \in I(x_0) \setminus \{x_0\}$

Ex: $\frac{\lfloor x \rfloor}{x} = f(x)$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\lfloor x \rfloor}{x}$

~~$\lfloor x \rfloor \leq x \leq \lfloor x \rfloor + 1$ (sempre)~~

$x - 1 \leq \lfloor x \rfloor \leq x$ (sempre)!

$$\underbrace{\frac{x-1}{x}}_{\to 1} \leq \underbrace{\frac{\lfloor x \rfloor}{x}}_{\to 1} \leq \underbrace{\frac{x}{x}}_{\to 1}$$

TEOREMA DI LIMITATEZZA LOCALE

COROLLARIO: sia f una funzione limitata in un intorno di x_0, e sia g una funzione tale che:

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$$

Allora $\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = 0$.

Ex:

$\lim_{x \to 0} x \cdot \sin\frac{1}{x} = 0$

x ↓ $g(x)$ → $\lim_{x \to 0} x = 0$.

$\sin\frac{1}{x}$ → $f(x)$ → funzione limitata nell'intorno → $\left|\sin\frac{1}{x}\right| \leq 1$

DIM:

sia f una funzione limitata in un intorno di x_0, cioè $|f(x)| \leq C \quad \forall x \in I_r(x_0) \setminus \{x_0\}$ e C sia una costante positiva

Sia g una funzione tale che $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$ [Infinitesimo per $x \to x_0$]

Allora, dalla definizione di limite, $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \to 0} |g(x)| = 0$

~~$0 \leq |f(x) \cdot g(x)| \leq C|g(x)| \quad \forall x \in I(x_0) \setminus \{x_0\}$~~

$0 \leq |f(x)| \leq C$ → moltiplico per $|g(x)|$

$0 \leq |f(x)\, g(x)| \leq C\,|g(x)| \quad \forall x \in I(x_0) \setminus \{x_0\}$

Allora per il teorema del confronto $\lim_{x \to x_0} 0 = 0$

$$\lim_{x \to x_0} C\,|g(x)| = C \cdot \lim_{x \to x_0} |g(x)| = 0$$

⇓

$$\lim_{x \to x_0} |f(x)\, g(x)| = 0 \quad (\text{Th})$$

Limiti
- Via grafica
- Via analitica
  - Algebra dei limiti
  - Non algebra dei limiti

a) FATTORIZZAZIONE (se ho una frazione, divido tutto per un valore e lo metto a fattor comune)

b) RAZIONALIZZAZIONE

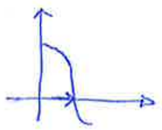
c) TEOREMI (CONFRONTO)

d) SOSTITUZIONE

e) LIMITI NOTEVOLI

f) CONFRONTO LOCALE (Taylor / Landau)

① $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos x} = \left[\frac{1}{0}\right]$ è una forma indeterminata perché il segno dipende da numeratore e denominatore.



$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{\cos x} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty$

$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{1}{\cos x} = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty$

OSS:

Risultati impossibili di limiti → INDETERMINATO, 0^+ 0^-

Risultati possibili → NON ESISTE ($\nexists$), $\pm\infty$, VALORE

② RAZIONALIZZAZIONE

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{\sqrt{(x+1)} + \sqrt{x}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x} + 1 - \cancel{x}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \left[\frac{1}{+\infty}\right] = 0$$

perché $\sqrt{x+1}$ e $\sqrt{x}$ all'infinito sono quasi uguali

ESERCITAZIONE

(7) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \to +\infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{x}}}_{g(x)} \cdot \underbrace{\cos x}_{\text{limitata}} = 0$ (corollario)

limitata $\rightarrow -1 \le \cos x \le 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$

(8) $\lim_{x \to +\infty} \frac{2x - \cancel{\sin x}}{3x + \cancel{\cos x}}$ $\rightarrow -1 \le \sin x \le 1$ e $-1 \le \cos x \le 1$ (sono trascurabili)

$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}$

(9) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\lfloor x \rfloor}{x} = 1$ $\rightarrow$ $\boxed{x-1 \le \lfloor x \rfloor \le x}$ $\rightarrow$ sempre così

$\frac{x-1}{x} \le \frac{\lfloor x \rfloor}{x} \le \frac{x}{x}$

1 (per il teorema del confronto)

(10) SOSTITUZIONE

$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^{3x}+1}{e^{2x}+2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{(e^x)^3+1}{(e^x)^2+2} =$ Pongo $e^x = t$

$x \to -\infty \Rightarrow t \to 0$

$= \lim_{t \to 0} \frac{\cancel{t^3}^{\,0}+1}{\cancel{t^2}^{\,0}+2} = \frac{1}{2}$ per l'algebra dei limiti

Posso anche farlo con l'algebra dei limiti...

$$\frac{\lim_{x \to -\infty} e^{3x} + \lim_{x \to -\infty} 1}{\lim_{x \to -\infty} e^{2x} + \lim_{x \to -\infty} 2} = \frac{0+1}{0+2} = \frac{1}{2}$$

(11) $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{3x}+1}{e^{2x}+1} = \frac{+\infty}{+\infty}$ F.I.

Pongo $e^x = t$

$\hookrightarrow \lim_{t \to +\infty} \frac{t^3+1}{t^2+1} = +\infty$ per la gerarchia degli infiniti.

- $\lim_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty$ • $\lim_{x \to -\infty} x^\alpha = \infty$ se $\alpha > 0$
- $\lim_{x \to +\infty} x^\alpha = 0$ • $\lim_{x \to -\infty} x^\alpha = +\infty$ se $\alpha < 0$

- $\lim_{x \to \pm\infty} \dfrac{a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0} = \begin{cases} \frac{a_n}{b_m} & \text{se } n = m \\ +\infty & \text{se } n > m \\ 0 & \text{se } m > n \end{cases}$

$\frac{a_n}{b_m} \cdot x^{n-m}$

- $\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$ • $\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$ se $a > 1$
- $\lim_{x \to +\infty} a^x = 0$ • $\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty$ se $0 < a < 1$
- $\lim_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty$ • $\lim_{x \to 0^+} \log_a x = -\infty$ se $a > 1$
- $\lim_{x \to +\infty} \log_a x = -\infty$ • $\lim_{x \to 0^+} \log_a x = +\infty$ se $0 < a < 1$
- $\lim_{x \to \pm\infty} \sin x$, $\lim_{x \to \pm\infty} \cos x = \lim_{x \to \pm\infty} \tan x$ $\nexists$
- $\lim_{x \to (\frac{\pi}{2} + k\pi)^\pm} \tan x = \mp\infty \ \forall k \in \mathbb{R}$
- $\lim_{x \to \pm 1} \arcsin x = \pm\frac{\pi}{2}$
- $\lim_{x \to 1} \arccos x = 0$ • $\lim_{x \to -1} \arccos x = \pi$
- $\lim_{x \to \pm\infty} \arctan x = \pm\frac{\pi}{2}$

TEOREMA DI SOSTITUZIONE (esame?)

Sia f funzione che ammette limite (per $x \to x_0$) finito o infinito ℓ e g una funzione definita in un intorno di ℓ, escluso al più ℓ tale che:

- se $\ell \in \mathbb{R}$, $g(x)$ è continua in $\mathbb{R}$;
- se $\ell = \pm\infty$, $\lim_{y \to \ell} g(y)$ esiste finito o infinito,

allora il limite per $x \to x_0$ della funzione composta $g \circ f$ è

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = \lim_{y \to \ell} g(y).$$

DIM:

Pongo $m = \lim_{y \to \ell} g(y)$ → Nel primo caso, $m = g(\ell)$

Preso qualsiasi un intorno $I(m)$ di m, grazie alle ipotesi, esiste un intorno $I(\ell)$ di ℓ tale che

$\forall y \in \text{Dom}\, g$, $y \in I(\ell) \Rightarrow g(y) \in I(m)$ (1)

[Si può scrivere $I(\ell)$ anziché $I(\ell) \setminus \{\ell\}$ perché consideriamo f continua in ℓ]

Poiché $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ → esiste un intorno $I(x_0)$ tale che $\forall x \in \text{Dom} f$, $x \in I(x_0) \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in I(\ell)$ (2)

Esercitazione prof Mercadante 6/11/2019

$$\underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}}_{A} \overset{?}{=} \underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x^3} - \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x^3}}_{B} = \underbrace{+\infty - \infty}_{C}$$

solo B e C sono forme indeterminate!

#1 $\lim_{x\to -\infty} \frac{3x}{\sqrt{4+x^2}} \neq \sqrt{\frac{9x^2}{4+x^2}}$

perché $x \to -\infty$
perciò $3x < 0$
se ci fosse $-3x$ avrei potuto.
$3x \neq \sqrt{9x^2}$ $\longrightarrow$ $t=-x$
se $x \to -\infty$
$t \to +\infty$

$$\lim_{t\to +\infty} \frac{3t}{\sqrt{4+t^2}} = -\lim_{t\to +\infty} \sqrt{\frac{9t^2}{4+t^2}} = -3$$

posso perché è continua (spostare il $-$)

Oss:

$\lim_{x\to -\infty} \sqrt{x}$ e $\lim_{x\to -3} \log x$, $\cancel{\lim}$ $\cancel{4}$

$\boxed{\text{Non hanno senso}}$ perché il valore a cui tende x non è un punto di accumulazione.

$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ ha senso.

#2 $\lim_{x\to 0^+} \frac{\log x}{\sqrt{1+2\log^2 x}} = \rfloor$ $t = \log x$
$x \to 0^+$, $t \to -\infty$

$$\lim_{t\to -\infty} \frac{t}{\sqrt{1+2t^2}} = \lim_{t\to -\infty} \frac{t}{\underset{-t \text{ perché } t\to -\infty}{|t|}\sqrt{\underset{\to 0}{\frac{1}{t^2}}+2}} = \lim_{t\to -\infty} \frac{\cancel{t}}{-\cancel{t}\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

#3 $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}} \overset{=\rfloor}{=} \frac{0}{0}$ F.I.

~~ccsxdsfe~~ $t = x - \pi/2$
$x \to \frac{\pi}{2}$ $t \to 0$

$$\lim_{t\to 0} \frac{\cos(t+\pi/2)}{t} = \lim_{t\to 0} -\frac{\sin t}{t} = -1.$$

#4 $\lim_{x\to \pi} \frac{\cos x + 1}{\cos 3x + 1} = \rfloor = \frac{0}{0}$ F.I.

$\rfloor$ = limite generico

$t = x - \pi \to x = t+\pi$
$x \to \pi$
$t \to 0$

$$\lim_{t\to 0} \frac{\cos(t+\pi)+1}{\cos 3(t+\pi)+1} = \lim_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{1-\cos 3t} \cdot \frac{t^2}{t^2}\cdot\frac{9}{9} = \frac{1}{2}\left(\frac{9}{2}\right)^{-1} = \frac{1}{9}.$$

Oss:
~~con~~ $1^{+\infty}$ è una forma indeterminata perché è ottenibile da funzioni che tendono a valori diversi.

EX: Mostrare che $f(x) = (x + |\sin x|)^{1/x}$ ha discontinuità con salto in $x=0$. ESERCITAZIONE

$$|\sin x| = \begin{cases} \sin x & 0 < x < \pi \\ -\sin x & \pi < x < 2\pi \end{cases}$$

0^+ 0^-

$$\lim_{x \to 0^+} (\sin x + 1)^{1/x} = 1^{\infty} \to \nexists\, !$$

$$\lim_{x \to 0^+} e^{\log(\sin x + 1)^{1/x}} = \lim_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x} \cdot \log(\sin x + 1)} = e^{\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} \log(\sin x + 1) \cdot \frac{\sin x}{\sin x}} =$$

$$= e^{\lim_{x \to 0^+} \frac{\log(\sin x + 1)}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{x}} = e^{\lim_{t \to 0^+} \log\frac{(t+1)}{t} \cdot 1} = e^{1}$$

pongo $\sin x = t$
$x \to 0^+$
$t \to 0^+$

$$\lim_{x \to 0^-} (1 - \sin x)^{1/x} = \lim_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{x} \cdot \log(1 - \sin x)} = \lim_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{x} \cdot \frac{\log(1 - \sin x)}{-\sin x} \cdot (-\sin x)} =$$

$$= \lim_{x \to 0^-} e^{\frac{\log(1-\sin x)}{-\sin x} \cdot \frac{-\sin x}{x}} =$$

$$= \lim_{x \to 0^-} e^{\frac{\log(1-\sin x)}{-\sin x} \cdot (-1)}$$

pongo $-\sin x = t$ $\to$ $\lim_{t \to 0} e^{\frac{\log(1+t)}{t} \cdot (-1)} = e^{-1}$
$x \to 0^-$
$t \to 0^+$

$$e^{-1} \neq e^{+1} \to \lim_{x \to 0^+} f(x) \neq \lim_{x \to 0^-} f(x) \Rightarrow \text{salto } \ell = |e^{1} - e^{-1}|$$

EX: per quali valori reali di α e β la funzione è continua?

$$f(x) = \begin{cases} |x|^{\beta} \cos^2 \frac{1}{x} & x \in (-1; 0) \\ 0 & x = 0 \\ x^{\alpha} \sin^2 x & x \in (0; 1) \end{cases} \qquad D\,(-1;1).$$

$$\underbrace{\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x)}_{\text{Esistenza limite}} = f(0) = 0$$

$$\lim_{x \to 0^-} |x|^{\beta} \cdot \cos^2 \frac{1}{x} \qquad |x^{\beta}| = \begin{cases} -x^{\beta} & x < 0 \\ x^{\beta} & x > 0 \end{cases} \longrightarrow \text{considero } x < 0 \text{ perché } x \to 0^-$$

$$\lim_{x \to 0^-}$$

4

Data $f(x) := \begin{cases} \alpha \sin x & x<0 \quad f^- \\ (x-\beta)^2 - 2 & x \geq 0 \quad f^+ \end{cases}$ determinare $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ in modo che f sia ~~derivabile~~ continua in $\mathbb{R}$ (esercizio che riprenderemo in seguito)

$f(x)$ è continua in $\mathbb{R}$ tranne eventualmente nel punto $x=0$ perché f^- ed f^+ sono combinazione di funzioni continue, perciò impongo le condizioni di continuità in $x=0$ per determinare α e β.

$$\underbrace{\lim_{x\to 0^-} f^- = \left(\lim_{x\to 0^+} f^+\right.}_{\text{Esiste il limite per } x\to 0} \underbrace{\left. = f(0)\right)}_{\text{è uguale a } f(0)}$$

$\lim_{x\to 0^-} \alpha \sin x = 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

$\alpha \in \mathbb{R}$, ma sarà mai $\pm\infty$

$\lim_{x\to 0^+} (x-\beta)^2 - 2 = \beta^2 - 2 = f(0)$ ✓

Impongo che $0 = \beta^2 - 2 \longrightarrow \beta^2 = 2$

$\beta = \pm\sqrt{2}$

α resta indeterminata e β oscilla tra due valori (al momento) $\longrightarrow$ Non succede nell'esercizio originale

5

Determinare $k \in \mathbb{R}$ tale che

$$\underbrace{f_k(x)}_{\text{famiglia di funzioni}} := \begin{cases} k - x & x<1 \\ 2x^2+4x & x \geq 1 \end{cases}$$

$f_k(x)$ è sempre continua tranne eventualmente in $x=1$ dove posso imporre le condizioni di continuità.

$$\underbrace{\lim_{x\to 1^-} k-x = \lim_{x\to 1^+} 2x^2+4x}_{\text{Garantisce l'esistenza del limite}} = f(1) \longrightarrow k-1 = 6$$

$k = 7$.

6

Determinare $a, b \in \mathbb{R}$ tali che

$$f(x) := \begin{cases} \log(1+x) & -1 < x \leq 0 \\ a \sin x + b \cos x & 0 < x < \pi/2 \\ x & x \geq \pi/2 \end{cases} \qquad D: (-1; +\infty)$$

sia continua nel suo dominio.

$f(x)$ è evidentemente continua negli intervalli considerati, tranne eventualmente nei punti di estremo, cioè $x=0$ e $x=\frac{\pi}{2}$, cioè i punti che mettono in contatto gli intervalli.

Altrove la funzione è certamente continua poiché consiste di combinazioni di funzioni continue.

Impongo la continuità nei punti dubbi.

$$\lim_{x\to 0^-} \log(1+x) = \lim_{x\to 0^+} a\sin x + b\cos x \Rightarrow \log(1) = b \longrightarrow b = 0$$

$\qquad \| $

$\quad f(0)$

$$\hookrightarrow f(x) := \begin{cases} \log(1+x) & -1 < x \leq 0 \\ a \sin x & 0 < x < \pi/2 \\ x & x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} a \sin x = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} x \Longrightarrow a = \frac{\pi}{2}$$

$\qquad \| $

$\quad f(\pi/2)$

LIMITI NOTEVOLI

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x\to\pm\infty} \left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a$ — sostituisco $\frac{a}{x} = y \rightarrow \lim_{x\to\pm\infty} [(1+\frac{1}{y})^y]^a$

$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$

se $a=e$

$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

$\lim_{x\to\pm\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ (Dimostrato x successioni)

$\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = 1/\log a$

- $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$ se $a=e$

(Dim pag 112) → Non chiesto all'esame

- $\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \log a \quad (a>0) \xrightarrow{a=e} \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$

- $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha-1}{x} = \alpha \quad (\alpha\in\mathbb{R})$

PROPRIETÀ FUNZIONI CONTINUE

→ proprietà di carattere globale perché valide su tutto l'intervallo in cui la funzione è continua.

Def: Data una funzione reale f, chiamiamo zero di f ogni punto $x_0 \in D_{f}$, in cui la funzione si annulla.

le soluzioni dell'equazione $f(x)=0$.

TEOREMA DI ESISTENZA DEGLI ZERI

Sia f una funzione continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a;b]$. Se $f(a)\cdot f(b)<0$ cioè se f assume sia valori positivi che valori negativi con segno discorde agli estremi dell'intervallo, allora esiste un valore $x_0 \in (a;b)$ che è definito come zero di f.

Oss: Se la funzione f è strettamente monotona in $[a;b]$, x_0 sarà l'unico zero nell'intervallo considerato

DIM: Si può supporre senza operare alcun tipo di restrizione $f(a)<0<f(b)$

Pongo $a_0=a$ e $b_0=b$ $\rightarrow c_0 := \frac{a_0+b_0}{2}$ è il punto medio dell'intervallo $[a_0;b_0]$

Calcolo $f(c_0) \rightarrow$ Ho 3 casi

(I) $f(c_0)=0$ allora $x_0=c_0$ è uno zero (Th)

(II) $f(c_0)>0$ allora pongo $a_1=a_0$ e $b_1=c_0$ → considero la metà sinistra dell'intervallo

(III) $f(c_0)<0$ allora pongo $a_1=c_0$ e $b_1=b_0$ → lato destro

Sia nel caso II che nel caso III ho costruito due intervalli: $[a_1;b_1]\subset[a_0;b_0]$ tali che

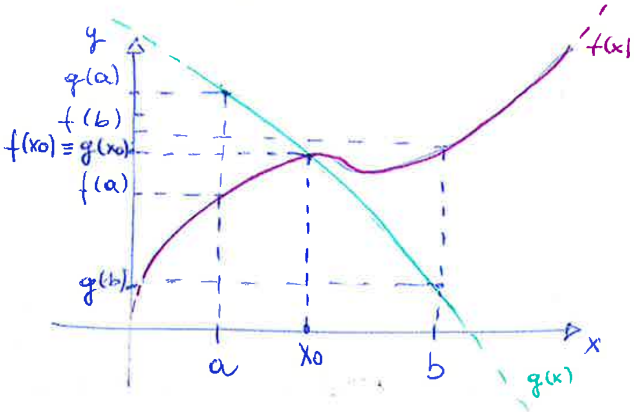
$f(a_1)<0<f(b_1)$ e $b_1-a_1 = \frac{b_0-a_0}{2}$

Considero una successione di intervalli del tipo $[a_0;b_0]\supset[a_1;b_1]\supset[a_2;b_2]\supset\dots\supset[a_n;b_n]$ che soddisfino le seguenti condizioni:

$-a_n+b_n = \frac{b_0-a_0}{2^n}$ e $f(a_n)<0<f(b_n)$] giustificato rigorosamente per induzione

COROLLARIO 2 (del teorema di esistenza degli zeri)

- Siano f e g due funzioni continue nell'intervallo limitato e chiuso $[a;b]$. Se $f(a)<g(a)$ e $f(b)>g(b)$ allora esiste almeno un punto $x_0 \in (a;b)$ tale che $f(x_0)=g(x_0)$.



→ I grafici delle funzioni si intersecano almeno in un punto in $(a;b)$.

DIM:

Consideriamo una funzione $h(x)$ definita come
$$h(x) := f(x) - g(x)$$

$h(x)$ è continua in $[a;b]$ perchè è la somma algebrica di due funzioni continue in tale intervallo.

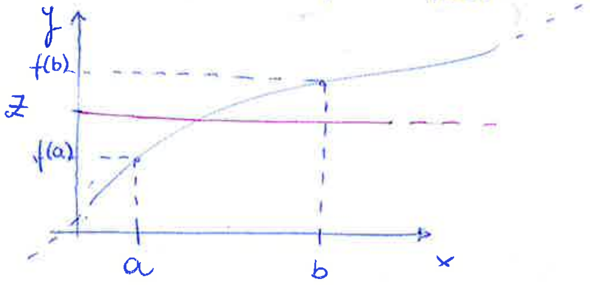
$$\left.\begin{array}{l} h(a) = f(a) - g(a) \rightarrow \text{Poichè } f(a) < g(a) \Rightarrow h(a) < 0 \\ h(b) = f(b) - g(b) \rightarrow \text{Poichè } f(b) > g(a) \Rightarrow h(b) > 0 \end{array}\right] h(a)\cdot h(b) < 0$$

Esistono tutte le condizioni necessarie affinchè si verifichi ciò che è previsto dal teorema di esistenza degli zeri.
⇓
Esiste un punto $x_0 \in (a;b)$ per cui $h(x_0) = 0$
$$h(x_0) = f(x_0) - g(x_0) = 0 \rightarrow f(x_0) = g(x_0) \rightarrow \text{Th.}$$

Se $h(x)$ è strettamente monotona, x_0 è unico.

TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI

Se f è continua in $[a;b]$ chiuso e limitato, allora assume tutti i valori compresi tra $f(a)$ e $f(b)$.



Gli elementi compresi tra $f(a)$ e $f(b)$ rappresentano l'insieme delle immagini degli elementi di $[a;b]$ attraverso f
↓
Non ci sono buchi

Dim

Se $f(a)=f(b)$ non c'è nulla da dimostrare poichè si riduce a un punto.

Se $f(a) \neq f(b)$...

Supponendo $f(a)<f(b)$.

$\exists z \in \mathbb{R} \mid f(a) < z < f(b)$ → sfrutto la proprietà di densità dei numeri reali

Definisco una nuova funzione $g(x) := z$, cioè una funzione costante.

$A_n \neq 0$ per costruzione, perciò posso presumere che esistano un estremo inferiore ed un estremo superiore.

$x_n = \inf(A_n)$

Per la continuità di f $\Rightarrow f(x_m) \geq M - \frac{1}{m}$?

Definisco $x_n :=$ successione degli estremi inferiori di A_n

è crescente perché $M - \frac{1}{m} < M - \frac{1}{m+1}$ ed è limitata perché non posso superarlo

È convergente

$$x_m \underset{m \to +\infty}{\longrightarrow} c$$

Applico il limite (che esiste perché f è continua)

$$f(x_m) \geq M - \frac{1}{m}$$

$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) \geq M - \lim_{n \to +\infty} \overset{\to 0}{1/n} \longrightarrow f(c) \geq M$$

ma poiché si è dimostrato che M è estremo superiore $f(c) \not> M \Rightarrow f(c) = M$

$M \in$ Insieme delle soluzioni ed è un estremo superiore

$\Downarrow$

Th

(II) Se $M = +\infty$ ...

$$A_m := \{x \in [a;b] \mid f(x) \geq m\}$$

$x_n = \inf A_n$

sfrutto la continuità $f(x_n) \geq n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

A_n è crescente e limitata per costruzione $\Rightarrow x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} c$

$$f(x_m) \geq m \rightarrow \lim_{n \to +\infty} f(x_n) \geq \lim_{n \to +\infty} n$$

$$\underbrace{f(c)}_{\text{Reale}} \geq +\infty \Rightarrow \text{Impossibile}$$

Esiste il max solo se $M \in \mathbb{R}$ e perciò se $[a;b]$ è limitato e chiuso.

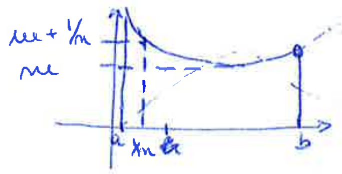
È analoga la dimostrazione per il minimo...

$m = \inf f(x), \; x \in [a;b]$

$m \in \mathbb{R}$ $\qquad m = -\infty$

(I) $m \in \mathbb{R}$

Definisco una successione $A_n := \{x \in [a;b] \mid f(x) < m + \frac{1}{n}\}$



$\rightarrow x_n = \sup(A_n)$

ATTENZIONE!!

RICERCA CONTROESEMPIO: nel caso in cui venisse meno un'ipotesi, ho almeno una funzione che non soddisfa la tesi

può esistere un caso in cui la tesi resta valida ma in almeno un caso non è così.

SIMBOLI DI LANDAU

Siano f e g due funzioni definite in un intorno di c, escluso al più x_0, con $g(x) \neq 0$ per $x \neq c$.
Suppongo che esista (finito o no)

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$$

Se ℓ è finito, f è controllata da g per $x \to c$

$f = O(g)$ « f è un O grande di g » per $x \to c$

In particolare...

Se ℓ è finito

- $\ell \neq 0 \Rightarrow f$ è dello stesso ordine di grandezza di g per $x \to c$

  $f \stackrel{\cup}{\cap} g \quad x \to c$ « f è equigrande di g per $x \to c$ »

- $\ell = 0 \Rightarrow f$ è trascurabile rispetto a g per $x \to c$

  $f = o(g)_{x \to c}$ « f è un o piccolo di g per $x \to c$ »

- $\ell = 1 \Rightarrow f$ è equivalente a g per $x \to c$

  $f \underset{x \to c}{\sim} g$ « f è equivalente a g per $x \to c$ ».

Se ℓ è infinito...

Scrivo il limite come $\lim_{x \to c} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{1}{\ell} = 0 \Rightarrow g = o(f)$ per $x \to c$

« g è un o piccolo di f per $x \to c$ »

OSS: $f = O(g)_{x \to c}$

$\Updownarrow$

$\exists\, c > 0 \mid \forall x \in I(c) \setminus \{c\} \Rightarrow |f(x)| \leq c \cdot |g(x)|$

PROPRIETÀ

1) I simboli $\stackrel{\cup}{\cap}, \sim, o$ sono casi particolari di O

$f \underset{x \to c}{\sim} g \Rightarrow f = O(g)_{x \to c}$

$f \underset{x \to c}{\stackrel{\cup}{\cap}} g \Rightarrow f = O(g)_{x \to c}$

$f = o(g)_{x \to c} \Rightarrow f = O(g)_{x \to c}$

Il simbolo $\sim$ è un caso particolare del simbolo $\stackrel{\cup}{\cap}$

$f \underset{x \to c}{\sim} g \Rightarrow f \underset{x \to c}{\stackrel{\cup}{\cap}} g$

ALGEBRA DEGLI "O PICCOLI" $\left(\lim_{x \to 0} \dots \right.$ $\Big|$ per ogni caso analizzato

- $x^n = o(x^m)_{x \to 0}$, $n > m$

Infatti $\lim_{x \to 0} \frac{x^n}{x^m} = \lim_{x \to 0} x^{n-m} = 0$ sse $n - m > 0$ $\Rightarrow$ Per $x \to 0$, tra due potenze di x è trascurabile quella con esponente maggiore.

- $x^m = o(x^n)_{x \to \pm\infty}$, $n > m$

Infatti $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^m}{x^n} = \lim_{x \to \pm\infty} x^{m-n} = \pm\infty$ $\Rightarrow$ Per $x \to \pm\infty$ è trascurabile la potenza di x con esponente minore.

- $o(x^n) \pm o(x^n) = o(x^n)$
- $o(x^n) \pm o(x^m) = o(x^p) \wedge p = \min\{n, m\}$
- $o(\lambda x^n) = o(x^n)$
- $\varphi(x) \cdot o(x^n) = o(x^n) \wedge \varphi(x)$ limitata è definita in un intorno di 0
- $x^m \cdot o(x^n) = o(x^{m+n})$
- $o(x^n) \cdot o(x^m) = o(x^{m+n})$
- $[o(x^n)^k] = o(x^{nk})$

TEOREMA

Siano $\tilde{f}$ e $\tilde{g}$ funzioni tali che $\tilde{f} \sim f$ e $\tilde{g} \sim g$ per $x \to c$.

Allora $\lim_{x \to c} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \to c} \tilde{f}(x) \cdot \tilde{g}(x)$

DIM:

$$\lim_{x \to c} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \to c} \frac{f(x)}{\tilde{f}(x)} \cdot \tilde{f}(x) \cdot \frac{g(x)}{\tilde{g}(x)} \cdot \tilde{g}(x) = \lim_{x \to c} \overset{1}{\cancel{\frac{f(x)}{\tilde{f}(x)}}} \cdot \lim_{x \to c} \overset{1}{\cancel{\frac{g(x)}{\tilde{g}(x)}}} \cdot \lim_{x \to c} \tilde{f}(x) \tilde{g}(x)$$

[sono equivalenti per ipotesi]

$\hookrightarrow \lim_{x \to c} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \to c} \tilde{f}(x) \cdot \tilde{g}(x)$.

*Analogamente

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{\tilde{f}(x)}{\tilde{g}(x)} .$$

COROLLARIO

Siano $f_1(x) = o(f(x))$ e $g_1(x) = o(g(x))$ per $x \to c$ allora

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) + f_1(x)}{g(x) + g_1(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)}$$

DIM:

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)\left(1 + \overset{0}{\cancel{\frac{f_1(x)}{f(x)}}}\right)}{g(x)\left(1 + \underset{0}{\cancel{\frac{g_1(x)}{g(x)}}}\right)} = \lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)}$$

* Analogamente...

$$\lim_{x \to c} (f(x) + f_1(x))(g(x) + g_1(x)) = \lim_{x \to c} f(x)\, g(x).$$

Analogamente, se voglio confrontare due infiniti $f(x)$ e $g(x) \wedge g \neq 0$ per $x \neq c$

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$$

Se $f \underset{\wedge}{\cup} g$ per $x \to c$, f e g sono infiniti dello stesso ordine
ℓ finito

Se $f = o(g)$ per $x \to c$, f è un infinito di ordine inferiore a g
$\ell = 0$

Se $g = o(f)$ per $x \to c$, f è un infinito di ordine superiore a g
$\ell = +\infty$

Se il caso non soddisfa alcuna delle condizioni precedenti, i due infiniti non sono confrontabili tra loro.

Oltre a confrontare l'ordine di infiniti ed infinitesimi, posso determinarlo.

Def: sia f un infinitesimo (o un infinito) per $x \to c$

allora $\exists \alpha \in \mathbb{R}^+ \mid f \underset{\wedge}{\cup} \varphi^\alpha \quad x \to c$ $\Rightarrow$ Allora α è definito l'ordine infinitesimo (o infinito) di f in c rispetto a φ, detto infinitesimo campione

In particolare...

Se $c \in \mathbb{R}^+$, $c = x_0$

Infinito campione $= \frac{1}{x - x_0}$

Infinitesimo campione $= x - x_0$

Se $c \in \mathbb{R}^-$, $c = x_0$

Infinito campione $= \frac{1}{|x - x_0|}$

Infinitesimo campione $= |x - x_0|$

Se $c = +\infty$

Infinito campione $= x$

Infinitesimo campione $= \frac{1}{x}$

Se $c = -\infty$

Infinito campione $= |x|$

Infinitesimo campione $= \frac{1}{|x|}$.

Oss: $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{\varphi^\alpha(x)} = \ell \Rightarrow f(x) \sim \ell\, \varphi^\alpha(x) \quad x \to c$

$$f(x) = \ell\, \varphi^\alpha(x) + o(\varphi(x)^\alpha) \quad x \to c$$

Def: la funzione $p(x) := \ell \cdot \varphi^\alpha(x)$ si definisce come la parte principale di $f(x)$ (infinito o infinitesimo) rispetto all'infinito (o all'infinitesimo) campione.

Oss: Da un punto di vista qualitativo, il comportamento della funzione f in un intorno abbastanza piccolo coincide con quello della sua parte principale.

ATTENZIONE!

- $f \underset{x \to \xi}{\sim} g$ non equivale a dire $\lim_{x \to \xi} f(x) = \lim_{x \to \xi} g(x)$

Controesempio: $f(x) := \sin x \cdot e^{\frac{1}{x}}$
$g(x) := \sin x$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{\sin x} \cdot e^{\frac{1}{x}}}{\cancel{\sin x}} = 1 \Rightarrow f \sim g$ (sono equivalenti secondo la definizione)

ma $\lim_{x \to +\infty} \sin x\ \nexists \Rightarrow$ non può essere uguale ad un'altra quantità

Anche se il limite del rapporto è 1, non hanno lo stesso limite

Ex1: $h(x) := \frac{\cos x}{1+x^2} - 1$ $\quad x \to 0$ $\qquad \alpha = ?\quad PP?$ $\qquad$ ESERCIZI A LEZIONE

$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1+x^2} - 1 = 0$ (lo ottengo sostituendo perché sono continue) $\to$ Ordine di infinitesimo?

$\varphi(x) = x$ (Infinitesimo campione)

$\lim_{x\to 0} \frac{h(x)}{\varphi(x)^\alpha} = \ell,\ \ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\cos x}{1+x^2} - 1\right) \cdot \frac{1}{x^\alpha} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1 - x^2}{x^\alpha(x^2+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{(x^2+1)x^\alpha} - \frac{x^2}{x^\alpha(x^2+1)} =$

$=$ poiché $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2 \cdot \frac{1}{2}} = 1 \Rightarrow 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$

$1 - \cos x = \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$

$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{x^\alpha + x^{\alpha+2}} - \frac{x^2}{x^\alpha + x^{\alpha+2}} \longrightarrow \alpha < \alpha + 2$ e poiché $x \to 0$ considero l'esponente minore $= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{x^\alpha + o(x^\alpha)}$

Se $\alpha = 2 \longrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} - \frac{x^2}{x^2 + o(x^2)} = -\frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2}$

Cioè

$\lim_{x\to 0} \frac{h(x)}{\varphi(x)^2} = -\frac{3}{2} \Rightarrow$ Per definizione $PP = -\frac{3}{2}x^2$

Oss:

Per $x \to 0$ anziché studiare il limite del quoziente, posso studiare quello della parabola.

Ex2: ordine di infinito/infinitesimo + PP ?

$h(x) := \log x - \log 2$

$\lim_{x\to 2} h(x) = 0$ (sostituisco perché è continua in $\mathbb{R}^+$) $\longrightarrow h(x)$ è un infinitesimo per $x \to 2$.

$\varphi(x) = x - 2$ (Infinitesimo campione)

$\lim_{x\to 2} \frac{h(x)}{\varphi(x)^\alpha} = \ell,\ \ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\lim_{x\to 2} \frac{\log x - \log 2}{(x-2)^\alpha}$ Pongo $t = x - 2$ (se $x \to 2$, $t \to 0$) $\longrightarrow \lim_{t\to 0} \frac{\log(t+2) - \log 2}{t^\alpha} = \lim_{t\to 0} \frac{\log 2\left(\frac{t}{2}+1\right) - \log 2}{t^\alpha} =$

$= \lim_{t\to 0} \frac{\cancel{\log 2} + \log\left(\frac{t}{2}+1\right) - \cancel{\log 2}}{t^\alpha} = \lim_{t\to 0} \frac{\log\left(\frac{t}{2}+1\right)}{t^\alpha}$

Se $\alpha = 1 \longrightarrow \lim_{t\to 0} \frac{\log\left(\frac{t}{2}+1\right)}{t \cdot \frac{1}{2} \cdot 2} = \frac{1}{2}$ per il limite notevole $\longrightarrow$ si può garantire che l'ordine di infinitesimo di $h(x)$ rispetto al campione $\varphi(x)$ è 1.

Oss: significa che per $x \to 2$ (localmente) $h(x) \sim \frac{1}{2}(x-2)$

$PP = \frac{1}{2} \cdot (x-2)^1$

Exs: Calcolare l'ordine infinitesimo e la PP in riferimento a $\varphi(x) = \frac{1}{x}$ per $x \to -\infty$ di $f(x) := \sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2+1}$.

EX. LEZIONE

$$\lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2+1} = +\infty - \infty \text{ F.I.}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{x^2+2} + \sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+2} + \sqrt{x^2+1}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\cancel{x^2}+2 - \cancel{x^2}-1}{\sqrt{x^2+2} + \sqrt{x^2+1}} = \left[\frac{1}{+\infty}\right] = 0$$

$f(x)$ è un infinitesimo per $x \to -\infty$.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)^\alpha} = \ell, \quad \ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2+1}}{\left(\frac{1}{x}\right)^\alpha} = \lim_{x \to -\infty} x^\alpha \left(\sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2+1}\right) =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} x^\alpha \Big(\underbrace{|x|}_{-x \text{ perché } x \to -\infty} \sqrt{1 + \underbrace{\tfrac{2}{x^2}}_{\to 0}} - |x| \sqrt{1 + \underbrace{\tfrac{1}{x^2}}_{\to 0}} \Big) = \lim_{x \to -\infty} x^\alpha \cdot \underbrace{(-\cancel{x} + \cancel{x})}_{\to 0} \Rightarrow$$

$\alpha = 0$ per evitare forme indet.

Ex:

$f(x) := \sqrt{x^2+1}$ ha asintoti?

$D: \mathbb{R}$

- per $x \to -\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty \to$ condizione soddisfatta

$\lceil \to -x$ perché $x \to -\infty$

$a = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|\sqrt{1+1/x^2}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-\cancel{x}\sqrt{1}}{\cancel{x}} = -1$

$b = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+1} - (-1\cdot x) = \lim_{x\to-\infty} \underbrace{\sqrt{x^2+1} + x}_{F.I.} = \lim_{x\to-\infty} \frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}-x} =$

$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{x^2}+1-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+1}-x} = \left[\frac{1}{+\infty}\right] = 0$

a e b esistono entrambi finiti per $x \to -\infty \Rightarrow$ Esiste un asintoto obliquo per $x \to -\infty$ di equazione $y = -x$.

- per $x \to +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty \to$ condizione soddisfatta

$\lceil \to x$ perché $x \to +\infty$

$a_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{|x|\sqrt{1+1/x^2 \to 0}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{1}}{x} = 1$

$b_1 = \lim_{x\to+\infty} f(x) - (x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x^2}-\cancel{x^2}+1}{\sqrt{x^2+1}+x} = \left[\frac{1}{+\infty}\right] = 0$

Esistono finiti a_1 e $b_1 \Rightarrow$ Esiste un asintoto obliquo di equazione $y = x$. per $x \to +\infty$

"DIVERTIMENTO" $\to$ Dimostrazione dell'esistenza della radice quadrata di $a \geq 0$.

- $a \in \mathbb{R}$

$\swarrow \quad \searrow$

$0 < a < 1 \qquad a \geq 1$

(I) $0 < a < 1 \to f(x) := x^2 - a$

$f(0) = a^2 - a < 0$

$f(1) = 1 - a > 0$

f è continua in $[0;1]$

$\to$ sono soddisfatte tutte le condizioni necessarie per il teorema di esistenza degli zeri $\Rightarrow \exists\, c \in (0;1) \to f(c) = 0$.

$f(x) := x^2 - a = 0 \to \cancel{x} = \sqrt{a}$ solo + perché considero $0 < \cancel{x} < 1$.

Almeno una soluzione

(II) se $a \geq 1$, $a \in \mathbb{R}$ f continua in $[1;a]$

$f := x^2 - a$

$f(1) = 1 - a < 0$

$f(a) = a^2 - a > 0$

$\to$ sono soddisfatte le condizioni del teorema di esistenza degli zeri

$\exists\, b \in (1;a) \mid f(b) = 0$

$\downarrow$

$f(x) = x^2 - a = 0$

$\cancel{b}x = \sqrt{a}$

Oss: Considero solo le soluzioni positive $\to$ supponiamo che esistano $x, y > 0$ tale che $x^2 = a$ e $y^2 = a$

$x^2 - y^2 = 0$

$(x-y)(x+y) = 0$

$\hookrightarrow x = -y \to$ contraddice le ipotesi

$\boxed{\text{Ho così dimostrato che esiste la radice quadrata di ogni numero reale positivo e che essa è unica.}}$

Esercitazione Prof Mercadante 28/11/2013

(Con le equivalenze ...)

#1

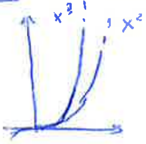
$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2+x}{2x-x^3}$$

Il teorema di sostituzione con funzioni equivalenti vale solo in moltiplicazioni e divisioni. Non vale in somma, sottrazione e funzioni composte

↓

Posso applicarlo anche se il numeratore e il denominatore sono composti da somme/sottrazioni → sostituisco l'intero blocco

OSS: le potenze di grado più alto sono più piatte vicino all'origine e più ripide verso $+\infty$



$x \to 0$ → trascuro grado più alto

$x \to +\infty$ → trascuro grado più basso

⇓

$$\lim_{x \to 0} \frac{(x^2+x)}{(2x-x^3)} \qquad (x^2+x) \sim x, \quad (2x-x^3) \sim 2x \qquad = \frac{1}{2}$$

#2

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(x^2+x)}{(2x-x^3)} \qquad (x^2+x) \underset{+\infty}{\sim} x^2, \quad (2x-x^3) \underset{+\infty}{\sim} -x^3 \qquad = 0 \quad (\text{non } 0^- \text{ o } 0^+)$$

#3

$$\lim_{x \to 0} \frac{(\sin^2 x)}{(1-\cos x)} \qquad \sin^2 x \sim x^2, \quad 1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2 \qquad = 2$$

Potrei anche svolgerlo con i limiti notevoli, ma così risparmio tempo

#4

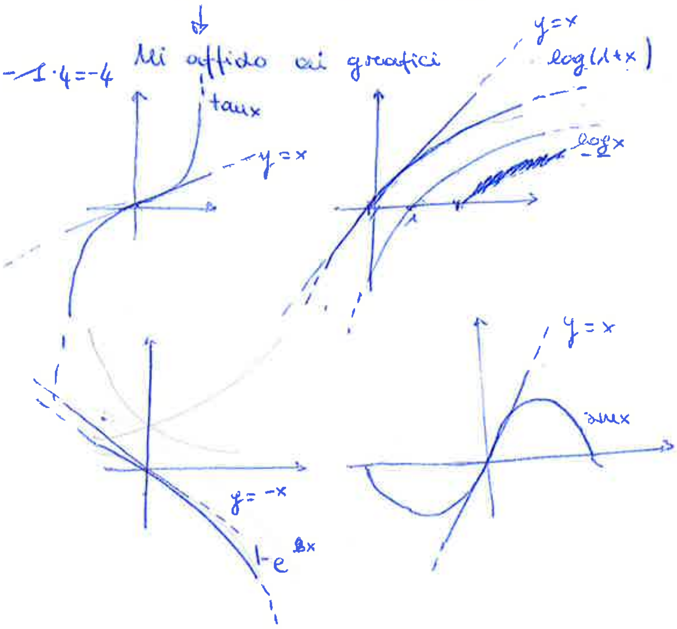
$$\lim_{x \to 0} \frac{(\tan(4x))(\log(1+6x))}{(1-e^{2x})(\sin 3x)} \qquad \tan(4x) \sim x\cdot 4, \quad \log(1+6x) \sim 6x, \quad 1-e^{2x} \sim -2x, \quad \sin 3x \sim 3x$$

S: potrebbe fare con i limiti notevoli, ma è troppo lungo

$$= \lim_{x \to 0} \frac{4\cancel{x}\cdot \cancel{6}\cancel{x}}{-\cancel{2}\cancel{x}\cdot \cancel{3}\cancel{x}} = -1\cdot 4 = -4$$

↓

Mi affido ai grafici



#5

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$$

Non posso fare

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x^3} - \frac{\sin x}{x^3}$$ e poi usare l'equivalenza ⇒ ho una sottrazione in mezzo

⇓

$$\lim_{x \to 0} \frac{(\tan x)(1-\cos x)}{x^3} \qquad \tan x \sim x, \quad 1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2 \qquad = \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x}\cdot\frac{1}{2}\cancel{x^2}}{\cancel{x^3}} = \frac{1}{2}$$

ASINTOTI

(esercitazione)

se il limite a infinito tende al finito → Orizzontale
se il limite al finito tende all'infinito → Verticale
se il limite all'infinito tende all'infinito → Potrebbe esistere un asintoto obliquo

METODO CLASSICO

Ex: $f(x) := (3-x)\, e^{\frac{3-x}{x}}$ $D: x \neq 0$

Calcolo i limiti all'estremo del dominio → $\lim_{x\to 0^+}$, $\lim_{x\to 0^-}$, $\lim_{x\to -\infty}$, $\lim_{x\to +\infty}$

[Calcolando solo per $x \to +\infty$]

$\lim_{x\to+\infty} \underbrace{(3-x)}_{-\infty}\, \underbrace{e^{\frac{3-x}{x}}}_{e^{-1}\neq 0}$ → $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ ⇒ Potrebbe esistere un asintoto obliquo per $x\to+\infty$

$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{\frac{(3-x)}{x}}_{-1} \cdot \underbrace{e^{\frac{3-x}{x}}}_{e^{-1}} = -e^{-1}$] Esiste finito e $\neq 0$

potrebbe essere il coefficiente angolare

NON ESISTE

[se fosse $=0$ sarebbe un asintoto orizzontale
Ma se così fosse, perché ho ottenuto $-\infty$ nel calcolo del limite?

$q = \lim_{x\to+\infty} f(x) - mx = (3-x)\, e^{\frac{3-x}{x}} + e^{-1}\cdot x =$

$= \lim_{x\to+\infty} e^{-1}\left((3-x)\, e^{\frac{3}{x}} + x\right)$ → Poiché $\frac{e^t - 1}{t} \sim 1$

$e^t = t + 1 + o(t)$

$e^{\frac{3}{x}} = \frac{3}{x} + 1 + o\left(\frac{1}{x}\right)$

$= \lim_{x\to+\infty} (3-x)\left(\frac{3}{x} + 1 + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) + x =$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{9}{x} + \cancel{3} + \cancel{3}\, o\left(\frac{1}{x}\right) - \cancel{3} - \cancel{x} + o(1) + \cancel{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{9}{x} + o(1) + o\left(\frac{1}{x}\right)$

Poiché $x\to+\infty$ trascuro le potenze basse x^0 (x^{-1}) trascurabile

$q = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{\frac{9}{x}}_{\to 0} + o\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

$y = -e^{-1}\cdot x$

NUOVO METODO

$f(x) := (3-x)\, e^{\frac{3-x}{x}} = (3-x)\, e^{-1}\cdot e^{\frac{3}{x}} = e^{-1}(3-x)\, e^{\frac{3}{x}} \underset{+\infty}{=} e^{-1}(3-x)\overbrace{\left[1 + \frac{3}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right]}^{\text{sviluppo } e^{\frac{3}{x}}} =$

$\underset{+\infty}{=} e^{-1}\left(\cancel{3} + \frac{9}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) - x - \cancel{3} + o(1)\right) \underset{+\infty}{=} e^{-1}\left(\underset{\to 0}{\frac{9}{x}} - x + \underset{x^0}{o(1)} + \underset{x^{-1}}{o\left(\frac{1}{x}\right)}\right) =$ → Trascurata

$\underset{+\infty}{=} e^{-1}\left(-x + o(1)\right) \underset{+\infty}{=} -e^{-1}x + \underbrace{o(1)}$

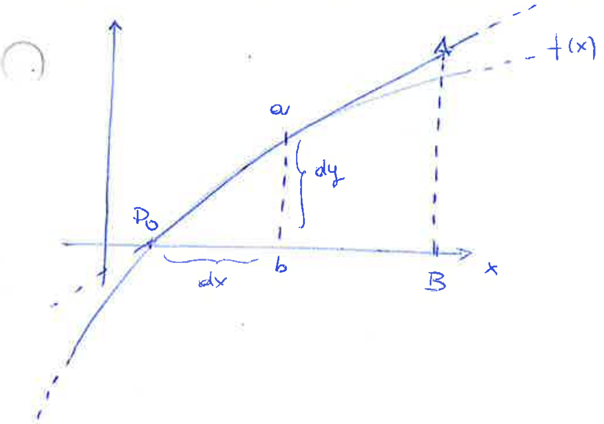
deve comparire $o(1)$ altrimenti non è asintoto

> OSS: Ogni volta che una funzione (all'infinito) è asintoticamente equivalente ad una retta, tale retta è un asintoto della funzione.
> Ogni volta che una funzione per $x \to \pm\infty$ è uguale a una parte lineare $+ o(1)$, la parte lineare corrisponde all'equazione dell'asintoto.

DIMOSTRAZIONE LEIBNIZ (non dovrebbe esserci)

Non utilizzo limiti, ma sfrutto solo la similitudine tra triangoli.

dx, dy, con x = variabile indipendente e $y = f(x)$ = variabile dipendente] chiamati "differenziali"



ΔABP_0 e ΔaP_0b

$\overline{AB} : \overline{P_0B} = \overline{ab} : \overline{P_0b}$ (proprietà geometrica euclidea)

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{P_0B}} = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{y-y_0}{x-x_0} = \frac{dy}{dx}$$

$$y = y_0 + \frac{dy}{dx}(x-x_0)$$

↳ Derivata

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} \rightarrow dy = f'(x)\cdot dx$$

Oss: se incremento un elemento x del dominio, automaticamente avrò un incremento nell'immagine: $x+dx \Rightarrow dy = f(x+dx) - f(x)$

EX: Dimostrare che $f(x) := x^2$ è derivabile per $x \to x_0$ (sia con la definizione che con il metodo di Leibniz)

(I) $$\lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h)^2 - (x_0)^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x_0^2} + h^2 + 2hx_0 - \cancel{x_0^2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(h+2x_0)\cdot \cancel{h}}{\cancel{h}} = 2x_0$$

Derivata prima (calcolata in x_0)

Generica: $2x$

(II) $$dy = (\underbrace{x+dx}_{f(x+dx)})^2 - x^2 = \cancel{x^2} + d^2x + 2xdx - \cancel{x^2} = dx(dx+2x)$$

$dx^2 + 2xdx$ — dx^2 è un infinitesimo, perciò è trascurabile rispetto a dx

cioè

$$dy = 2xdx \rightarrow \frac{dy}{dx} = 2x$$

PROPRIETÀ

Se f è una funzione derivabile in un punto x_0, automaticamente sarà continua in tale punto.

DIM:

Continuità: $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ ossia $\lim_{x\to x_0} f(x) - f(x_0) = 0$

Derivabilità: $$\lim_{x\to x_0} (f(x) - f(x_0)) = \lim_{x\to x_0} \underbrace{\frac{(f(x)-f(x_0))}{(x-x_0)}}_{f'(x_0)} \underbrace{(x-x_0)}_{0} = 0$$ per l'algebra dei limiti

ATTENZIONE: Non vale il reciproco! La continuità è solo una condizione necessaria, non sufficiente. Per dimostrarlo è sufficiente fornire un controesempio.

$p \models q$ — derivabile ⇒ continua

$\neg q \models \neg p$ — non continua ⇒ non derivabile

$f(x) := |x|$

è continua in $x=0$, ma allo stesso tempo, ammette derivata destra e sinistra diverse. Ciò significa che non esiste un unico risultato per il limite del rapporto incrementale. Tale ipotesi viola l'unicità del limite, perciò non esiste esso e $f(x)$ non è derivabile in $x=0$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} -1 & x<0 \\ +1 & x>0 \end{cases}$$

* La proprietà di derivabilità è più forte di quella di continuità.

REGOLE DI DERIVAZIONE

Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni derivabili (e quindi continue) in $x_0 \in \mathbb{R}$.

- Allora la funzione $(f \pm g)(x)$ sarà derivabile e $D(f \pm g)(x) = D f(x) \pm D g(x)$.
  (significa che la derivabilità delle due funzioni è sufficiente e necessaria)

DIM:

$$D(f+g)(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - f(x) - g(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \underbrace{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}_{f'(x)} + \lim_{h\to 0} \underbrace{\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}_{g'(x)}$$

- Allora la funzione $(g \cdot f)(x)$ è derivabile e $D(g\cdot h)(x) = g'f + gf'$

$$D(g\cdot f)(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)\cdot f(x+h) - g(x) f(x)}{h} =$$

sommo e sottraggo

$$= \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) \cdot f(x+h) - g(x)\cdot f(x) - f(x+h)\cdot g(x) + f(x+h) g x}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\overset{\to f(x)}{f(x+h)}\big(g(x+h) - g(x)\big) + g(x)\big(f(x+h) - f(x)\big)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} f(x) \cdot \underbrace{\left(\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right)}_{g'(x)} + g(x) \cdot \underbrace{\left(\frac{f((x)+h) - f(x)}{h}\right)}_{\to f'(x)} = f(x) g'(x) - f'(x) g(x)$$

[REGOLA DI LEIBNIZ]

- Allora se $g(x) \neq 0$, la funzione $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]$ è derivabile e

$$D\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x) g(x) - f(x) g'(x)}{g^2(x)}$$

EX:

$f(x) := \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ (per definizione)

$$D[\tan x] = \frac{D[\sin x] \cos x - \sin x\, D[\cos x]}{\cos^2 x} = \frac{+\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

EX_2:

$f(x) := x \log x$

$$D[f(x)] = D[x] \cdot \log x + x \cdot D[\log x] = \log x + 1.$$

DERIVATA DEL RECIPROCO

Sia $g(x)$ una funzione definita in un intorno di x_0, $I(x_0)$, con $g(x_0) \neq 0$.

Allora...

$$D\left[\frac{1}{g(x)}\right] = \frac{-g'(x)}{g^2(x)}$$

DIM:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}}{h} = \underbrace{\frac{g(x) - g(x+h)}{h}}_{-g'(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{(g(x) g(x+h))}}_{\to g(x)\cdot g(x) \text{ per } h\to 0} = -g'(x) \cdot \frac{1}{g^2(x)}.$$

Ex$_2$:

$D[a^x]$ $\quad y := a^x$

$x = f^{-1}(y) = \log_a y$

$$D[a^x] = \frac{1}{\underbrace{D[\log_a y]}_{y=a^x}} = \frac{1}{\frac{\log_a e}{a^x}} = \frac{a^x}{\frac{\log_e e}{\log_e a}} = a^x \cdot \log_e a.$$

proprietà cambio base

Ex$_3$:

$f(x) := y = \arctan x \iff x = \tan y$

$D(\tan y) = 1 + \tan^2 y$ $\qquad D \arctan x = \dfrac{1}{D(\tan x)} = \dfrac{1}{1+\tan^2 y} = \dfrac{1}{1+x^2}.$

DERIVATA FUNZIONE COMPOSTA

Supponiamo f e g derivabili (f in x_0 e g in $y_0 = f(x_0)$) allora la funzione $(g \circ f)(x)$ è derivabile e

$$D[(g \circ f)(x)] = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

$g'(y_0) \cdot f'(x_0)$

PUNTI DI NON DERIVABILITÀ

Def: sia f definita e continua in un intorno destro di $x_0 \in \mathbb{R}$. f si dice derivabile a destra se il limite destro del rapporto incrementale esiste finito.

$$f_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$

Analoga è la definizione di funzione derivabile a sinistra: $f_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}$

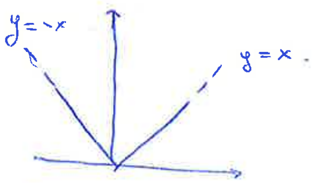
OSS: se f è derivabile in un punto x_0, automaticamente esistono finite le derivate destra e sinistra e queste coincidono.

$\boxed{\text{PUNTI ANGOLOSI}}$ → le derivate destra e sinistra della funzione esistono finite, ma non coincidono.

⇓

Formano un angolo

• Si dicono punti angolosi anche se uno dei limiti del rapporto incrementale è ∞



Ex: $f(x) := |x|$

$f'_+(x_0) = 1$

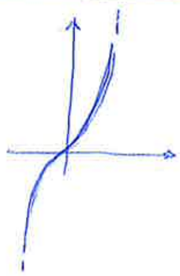
$f'_-(x_0) = -1$

Se entrambi i limiti sono infiniti...

$\boxed{\text{PUNTI (DI FLESSO) A TANGENTE VERTICALE}}$ $f_-(x_0)$ e $f_+(x_0)$ esistono infiniti e concordi

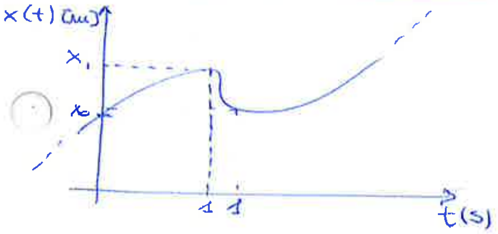
Ex: $f(x) := \sqrt[3]{x}$

$x_0 = 0$



Esercitazione prof. Mercadante — 20/11/2019

INTERPRETAZIONE FISICA DELLA DERIVATA



Moto vario di un punto su un'unica retta
$x(t)$ = distanza percorsa in funzione del tempo trascorso.

Con che velocità la percorro?
- Velocità media $= \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0}$
- Velocità istantanea $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$

$f'(x) = \frac{dt}{dx}$ [Notazione di Leibniz]

non è un rapporto vero e proprio → è un unico simbolo

Calcolo derivata con la definizione

$f(x) := \cos x$

$D(\cos x) = -\sin x$

$\forall x_0 \in \mathbb{R},\ f'(x_0) = -\sin x_0$

$\left.\frac{d\cos x}{dx}\right|_{x=x_0}$ oppure $D(\cos x)(x_0)$

$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{\cos x - \cos x_0}{x - x_0}$

prostaferesi → Trasformo somma e differenza in un prodotto

pongo $x_0 + \Delta x = x$

$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\cos(x_0+\Delta x) - \cos x_0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2 \sin\left(\frac{2x_0+\Delta x}{2}\right) \sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$

$= -\lim_{\Delta x\to 0} \sin\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(\Delta x/2)}{\frac{\Delta x}{2}} = \lim_{\Delta x\to 0} -\sin(x_0+\Delta x) = -\sin x_0$

$\left.\frac{d}{dx}\sqrt{1+x}\right|_{x=0}$

Con la definizione...

$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1}}{x - 0} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{2}x + \cancel{1} + o(x) - \cancel{1}}{x} =$

$\sqrt{1+x} = \frac{1}{2}x + 1 + o(x)$

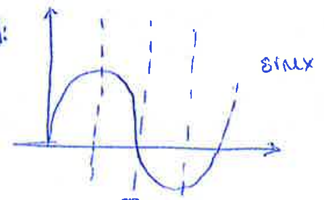
$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}x + o(x)}{x} = \frac{1}{2}x$

trascurabile rispetto a $\frac{1}{2}x$

$f(x) := 3x^3 - \sin x$

$f'(x) := \underbrace{9x^2 - \cos x}_{\text{Linearità della derivata}}$

CONSIGLIO:



Traccio una linea verticale $x = \frac{\pi}{2}$ che sarà la nuova asse y (che spostato in avanti di $\frac{\pi}{2}$)

$D \sin x = \cos x$

$D \cos x = -\sin x$

$D -\sin x = -\cos x$ ...

$f(x) := \frac{3x}{e^x} \Rightarrow f'(x) = \frac{3e^x - 3xe^x}{e^{2x}} =$. $D\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

$= \frac{3\cancel{e^x}(1-x)}{e^x \cdot \cancel{e^x}} = \frac{3(1-x)}{e^x}$

DERIVATA FUNZIONE INVERSA

Esercitazione

È assolutamente necessario che le ipotesi siano rispettate

- f continua e invertibile attorno a $x_0 \in D_{\text{def}}$, in $I(x_0)$ non bucato
- f derivabile
- $f'(x_0) \neq 0$

$$\boxed{f(x) = y \iff x = f^{-1}(y)}$$

$$(f^{-1})'(y) = \cancel{\frac{1}{f'(x)}} = \frac{1}{f'f^{-1}(y)}$$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'f^{-1}(x)}$$

Ex:

$f(x) := \sin x$

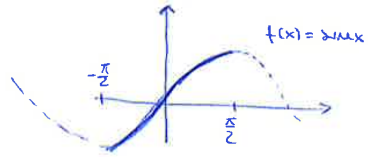
$y = \sin x$

$x = \arcsin y$

se $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ perché $\cos x > 0 \to$ Posso estrarre la radice

$$\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 - y^2}$$

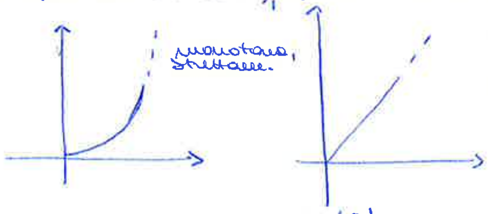
$$(\arcsin)'(y) = \frac{1}{\cos \underbrace{\arcsin y}_{x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$



$f(x) := x^7 + x$

Verifica che f è invertibile su $\mathbb{R}$

È la somma di funzioni monotone e almeno una di queste lo è strettamente perciò $f(x)$ è quindi invertibile



Non sappiamo scrivere f^{-1}

$\Downarrow$

f è derivabile in $\mathbb{R}$

continuità $\to$ composizione funzioni continue

derivabilità? sì perché non si annulla mai la derivata prima

invertibilità

Calcolo $D[f^{-1}]$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{7x^6+1} = \frac{1}{7(f^{-1}(y))^6+1}$$

lascio perdere perché non conosco $f^{-1}(y)$!

- Calcolare $f'(0)$ e $f'(2)$

Poiché a occhio posso dire che

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{7(f^{-1}(x))^6+1}$$

$$f'(0) = \frac{1}{7(f^{-1}(0))^6+1} = \frac{1}{1} = 1 \qquad \to x^2 + x = 0$$

$$f'(2) = \frac{1}{7(f^{-1}(2))^6+1} = \frac{1}{8} \qquad x^2 + x = 2 \to x = 1$$

#1 Esercitazione prof. Mercadante 25/11/2019

Verificare che f è derivabile in $\mathbb{R}$.

$$f(x) := \begin{cases} (x-\beta)^2 - 2 & x \geq 0 \\ a \sin x & x < 0 \end{cases}$$

f è evidentemente continua in $\mathbb{R}$ tranne eventualmente in $x=0$.

Verifico la continuità in $x=0$

$$\lim_{x\to 0^-} (a \sin x) \overset{?}{=} \lim_{x \to 0^+} (x-\beta)^2 - 2 \overset{?}{=} f(0)$$

Sto imponendo la continuità

$0 \Rightarrow \beta^2 = 2 \rightarrow \quad \beta^2 - 2 \quad \beta^2 - 2$

$\beta = \pm\sqrt{2}$

$$f'(x) = \begin{cases} 2(x-\beta) & x > 0 \\ a \cos x & x < 0 \end{cases}$$

Escludo gli estremi perché non so se f è derivabile in $x=0$

f(x) è continua in $x=0$, è derivabile in $\mathbb{R}$, perciò anche in un intorno $I(0) \setminus \{0\}$ perciò posso applicare il teorema del l'Hôpital per imporre la derivabilità in $x=0$.

Impongo che $\lim_{x\to 0^-} f'_-(x) = \lim_{x\to 0^+} f'_+(x) \rightarrow$

continua in $\mathbb{R}$, sostituisco 0^-

$\lim_{x\to 0^-} 2(x-\beta) = -2\beta$

$\lim_{x\to 0^+} \underbrace{a \cos x}_{\text{continua in } \mathbb{R} \text{ sostituisco } 0^+} = a$

$a = -2\beta$ $\quad a_1 = -2\sqrt{2}$, $\quad a_2 = +2\sqrt{2}$

#2 Quiz

a. $f(x) := 2 + |x-7|$

Il valore assoluto può avere problemi di continuità nei punti in cui si annulla, in questo caso in $x=7$

1) f(x) non è derivabile in $x=0$
2) $f'(0) = 1$
3) $f'(0) = -1$
4) $f'(0) = 2$
5) $f'(0) = 0$

$$f(x) = \begin{cases} x-5 & x \geq 7 \\ -x+9 & x < 7 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 7 \\ -1 & x < 7 \end{cases}$$

$f'(0) = -1$

b. $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ in x_0

Rapporto incrementale?

$$\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \frac{\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x_0)}}{x - x_0} = \frac{f(x_0) - f(x)}{f(x) f(x_0)} \cdot \frac{1}{(x-x_0)}$$

PUNTI ESTREMI

Def: Data una funzione, il punto x_0 è detto **massimo locale (o relativo)** se esiste un intorno $I_r(x_0)$ tale che $f(x_0) \geq f(x)$ $\forall x \in I_r(x_0) \cap \mathrm{Dom} f$.

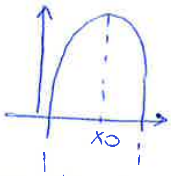
x_0 si dice **massimo assoluto (o globale)** per f se $f(x_0) \geq f(x)$ $\forall x \in \mathrm{Dom} f$.

Def: Data una funzione, il punto x_0 è detto **minimo locale (o relativo)** per f se esiste un intorno $I_r(x_0)$ tale che $f(x_0) \leq f(x)$ $\forall x \in I_r(x_0) \cap \mathrm{Dom} f$.

x_0 è detto **minimo globale (o assoluto)** se $f(x_0) \leq f(x)$ $\forall x \in \mathrm{Dom} f$.

il massimo si definisce **stretto** se $f(x_0) > f(x)$

Oss: Se ho un massimo assoluto, non necessariamente ho un massimo relativo. (Analogo per il minimo)



x_0 è massimo assoluto su $\mathbb{R}$

Ma se considero un intervallo $(0, x_0)$ allora solo il massimo relativo.

Oss: Non è detto che il più grande dei massimi relativi di un intervallo sia il massimo assoluto per f. (Analogo per il minimo).

Def: x_0 si definisce **punto critico (o stazionario)** per f, se data f derivabile in x_0, $f'(x_0) = 0$.

Tangente orizzontale

TEOREMA DI FERMAT

Sia f definita in un intorno di x_0 $(I_r(x_0))$ ed f è derivabile (quindi continua) in x_0. Se x_0 è un punto di estremo per f, allora è un punto critico o stazionario, cioè $f'(x_0) = 0$.

OSS: Non vale il reciproco: se ho un massimo o un minimo, automaticamente $f'(x) = 0$. Ma se ho solo $f'(x) = 0$, anche sapendo che $f(x)$ è derivabile in x_0 non sono certo di avere un max/min

ATT!: può non essere sufficiente cercare i punti stazionari. Per essere certi di determinare tutti i punti estremi, occorre studiare anche i ~~limiti agli estremi del dominio e i punti di non derivabilità~~. Se non soddisfa le altre condizioni.

punti estremi solo nei punti estremi del dominio (in $\mathbb{R}$)

DIM: Supponiamo di considerare un massimo relativo in x_0, per f, ma la dimostrazione è duale se si considera un minimo.

Sia $I_r(x_0)$ l'intorno in cui $f(x_0) \geq f(x)$ $\forall x \in I_r(x_0) \cap \mathrm{Dom} f$

Se $x > x_0 \Rightarrow x - x_0 > 0$

Allora

$$\underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\text{Rapporto incrementale}} \quad f(x)-f(x_0) \leq 0, \quad x - x_0 > 0 \quad \rightarrow \quad \leq 0$$

Per il corollario del teorema della permanenza del segno

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

Invece se $x < x_0 \rightarrow x - x_0 < 0$

Allora

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad f(x)-f(x_0) \leq 0, \quad x - x_0 < 0 \quad \geq 0$$

Per il corollario del teorema della permanenza del segno $\Rightarrow \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$

per ipotesi f è derivabile $\Rightarrow \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

L'unico caso si ha se $\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0 \Rightarrow f'(x_0) = 0$.

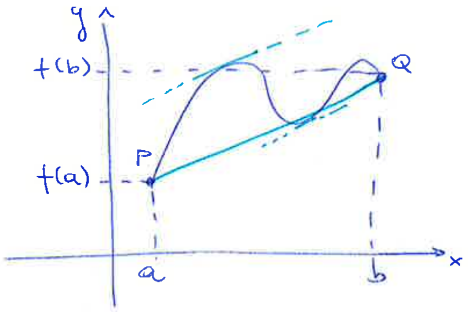
punto critico

TEOREMA DI LAGRANGE

Sia f una funzione continua in $[a,b]$ di limitato e derivabile in (a,b) aperto, allora esiste un punto $x_0 \in (a,b)$ tale che

$$f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Cioè, dal punto di vista geometrico, esiste una retta con lo stesso coefficiente angolare (e quindi parallela) alla secante al grafico di f passante per gli estremi dell'intervallo.



DIM:
Definisco una funzione $g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (x-a)$

$g(x)$ è chiaramente continua in $[a,b]$ in quanto f è continua per ipotesi, analogamente $g(x)$ è derivabile in (a,b)

$$g(a) = f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\underbrace{(a-a)}_{0} \Rightarrow g(a) = f(a)$$

$$g(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{\cancel{(b-a)}} \cdot \cancel{(b-a)} \Rightarrow g(b) = f(a)$$

$g(a) = g(b)$ con g continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b)
⇓
Sono soddisfatte le condizioni del teorema di Rolle
⇓
Posso così dire che esiste almeno un punto $x_0 \in (a,b)$ tale che $g'(x_0) = 0$

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$g'(x_0) = 0 \Rightarrow f'(x_0) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0 \Rightarrow f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad \text{Th.}$$

Oss:

E' bene notare che se non sono verificate le condizioni del teorema di Rolle o di Lagrange, il teorema non mi garantisce la tesi. Tuttavia non è da escludersi che la tesi sia comunque verificabile (MA NON PER TEOREMA)

FONDAMENTALE!

COROLLARIO (Applicazione della seconda formula dell'incremento finito)

Sia I un intervallo in cui f è costante e derivabile $\Rightarrow f'(x_0) = 0 \quad \forall x \in I$

DIM:

$\forall x_0 \in I \wedge x \neq x_0$

$$\underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\text{Rapporto incrementale}} = 0 \Rightarrow f'(x_0) = 0 \quad \forall x \in I$$

Rapporto incrementale $= 0$ perché la funzione è costante per ipotesi

VICEVERSA

Considero una funzione $f(x)$ e impongo che $f'(x) = 0 \quad \forall x \in Dom f \Rightarrow$ Dimostro che è costante

Considero $x_2 < \bar{x} < x_1$ perché esiste sempre in un intervallo reale, presi due punti $x_2, x_1 \in I$ ($x_2 < x_1$) un numero reale tra essi compreso (densità dei reali)

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{(x_2 - x_1)} = f'(\bar{x}) \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(\bar{x})(x_2 - x_1)}_{0} \Rightarrow f(x_2) = f(x_1)$$

$f'(\bar{x})$: 0 per ipotesi

$f(x_2) = f(x_1)$: Dimostrato che è costante

Oss: $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \{-1; 1\}$

$$f(x) := \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \qquad f'(x) = \begin{cases} 0 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \to f'(x) = 0 \quad \forall x \in Dom f$$

ciò nonostante $f(x)$ non è costante

Non vale il corollario perché il dominio di f non è un unico intervallo ma è l'unione di due intervalli disgiunti

$\boxed{\text{IL COROLLARIO VALE SOLO CON GLI INTERVALLI.}}$

TEOREMA

Sia f una funzione derivabile (e quindi continua in I):

- se f è crescente su I, allora $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$;
- se $f'(x) \geq 0$ ($\forall x$) allora f è crescente su I;
- se $f'(x) > 0 \quad \forall x \in I$ allora f è strettamente crescente su I

$\to f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f$ è crescente (se e solo se)

Condizioni necessarie e sufficienti

$f'(x) > 0 \Rightarrow f$ è strettamente crescente

$f'(x) > 0$: condizione sufficiente, ma non necessaria

f è strettamente crescente: condizione necessaria, ma non sufficiente

CONTROEX: $f(x) := x^3$

strettamente crescente in $\mathbb{R}$.

Tuttavia $f'(x) = 3x^2 \to$ si annulla in $x = 0$

$\Downarrow$

Contraddice l'ipotesi

Ex2:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sin x}{3x+2}$$

$f(x) := x + \sin x$ → definita in $\mathbb{R}$ (in particolare in $I(+\infty)$) → Derivabile in $\mathbb{R}$ (in particolare in $I(+\infty)$)

$g(x) := 3x+2$ → definita in $\mathbb{R}$ (in particolare in $I(+\infty)$) → derivabile in $\mathbb{R}$ (in particolare in $I(+\infty)$) → $g'(x) = 3 \neq 0 \quad \forall x \in I(+\infty)$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sin x}{3x+2} = \mp 1.$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1+\cos x}{3x+2} \nexists$$

⇒ Non sono soddisfatte tutte le condizioni del teorema che tuttavia è una condizione sufficiente, non necessaria

⇓

Posso presumere che esista comunque il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sin x}{3x+2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+o(x)}{3x+2} = \frac{1}{3} = \not\exists$$

Oss:

Il teorema di De L'Hôspital ci consente di dimostrare molti limiti notevoli.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to+\infty} |x|^\alpha e^{x} = 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x^\alpha} = 0 \quad \wedge \alpha > 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \log x = 0 \quad \wedge \alpha > 0$$

⇓

$$\lim_{x\to 0^+} x \log x = 0$$

Ex3:

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\sqrt[n]{n} - 1\right)$$

è uguale a $\lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt[x]{x} - 1\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}}$

$f(x) := x^{\frac{1}{x}} - 1$ → definita in $I(+\infty)$, derivabile in $I(+\infty)$

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}\log x} = e^{\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\log x} = e^0 = 1$$

- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

$g(x) := \frac{1}{x}$ → definita in $I(+\infty)$, derivabile in $I(+\infty)$, $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in I(+\infty)$

- $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$

Se $\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ posso applicare il teorema di de L'Hôspital

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-\frac{1}{x^2}\cdot\log x + \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\frac{1}{x}}\left(-\cancel{\frac{1}{x^2}}\left(\log x - 1\right)\right)}{-\cancel{\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{x^{\frac{1}{x}}}_{\to 1} (\log x - 1) = +\infty$$

⇒ Non applico il teorema