NUMERO: **2485A** ANNO: 2020

A P P U N T I

STUDENTE: Volpini Leonardo

MATERIA: Analisi 2 - Prof. Quelali

$$\int \cos^2(x)\,dx = \frac{x + \cos x \cdot \sin x}{2} + c \qquad \int \sin^2(x)\,dx = \frac{x - \cos x \cdot \sin x}{2} + c$$

$$\int \cos^n(x)\,dx = \frac{\sin(x)\cos^{n-1}(x)}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}(x)\,dx$$

$$\int \sin^n(x)\,dx = -\frac{\cos(x)\sin^{n-1}(x)}{n} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}(x)\,dx$$

- $$\int x^n \ln(x)\,dx = \frac{x^{n+1}\left((n+1)\ln(x) - 1\right)}{(n+1)^2} + c$$

$$\int x^n \sin(x)\,dx = -x^n\cos(x) + n x^{n-1} \cdot \sin(x) - n(n-1)\int x^{n-2}\sin(x)\,dx$$

$$\int x^n \cos(x)\,dx = x^n \sin(x) + n x^{n-1} \cdot \cos(x) - n(n-1)\int x^{n-2}\cos(x)\,dx$$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

UNA CURVA PARAMETRICA $\gamma: I \to \mathbb{R}^n$ DESCRIVE LA LEGGE ORARIA DEL PUNTO CHE SI MUOVE LUNGO IL SOSTEGNO DELLA CURVA

ESEMPIO

$\gamma: [0,1] \to \mathbb{R}^2$ $\quad P(x_0, y_0)$ $\quad Q(x_1, y_1)$ $\quad \gamma(t) = P + t(Q - P)$

$\gamma(0) = P$ $\quad \gamma(1) = Q$ $\Rightarrow$ PARTO DA P E ARRIVO A Q

ESEMPIO

$\gamma: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ $\quad t \to (x(t), y(t), z(t))$ PIANA?

$\Rightarrow$ COMBINAZIONE PER CUI $ax + by + cz + d = 0$

OPPURE $z(t)$ (O UNA DELLE ALTRE COMPONENTI) È COMBINAZ. LINEARE DELLE ALTRE DUE

ESEMPIO

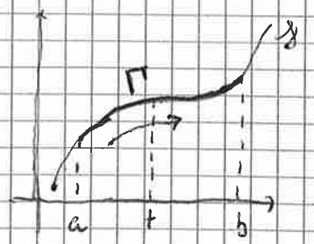
$\gamma(t) = (e^t - t, t^2, e^t - t - t^2)$ $\quad t \in \mathbb{R}$ PIANA?

$e^t - t - t^2 = e^t - t + (-1)(t^2)$ $\Rightarrow$ SÌ È PIANA

ESEMPIO

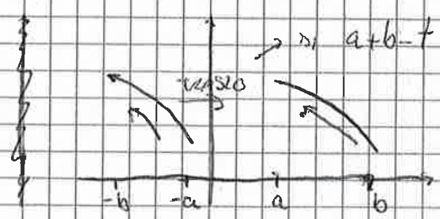
$f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad \gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^2$ $\quad t \to (x(t), y(t))$ $\quad t \to (t, f(t))$

QUINDI PER AVERE SENSO $\to$ $[a,b] \subset I$ $\quad \gamma(a) = (a, f(a))$ $\quad \gamma(b) = (b, f(b))$



PARAMETRIZZATA DA SINISTRA A DESTRA

ORA INVERTO $\to$

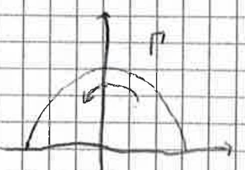


IN GENERALE DA DX A SX: $t \to (a+b-t, f(a+b-t))$ $\quad \gamma(a) = (b, f(b))$ $\quad \gamma(b) = (a, f(a))$

ESEMPIO

$\gamma: [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$ $\quad \gamma(t) = (\cos t, \sin t)$

$\gamma(0) = (1, 0)$ $\quad \gamma(\pi) = (-1, 0)$



SEMPLICE E NON CHIUSA

$\gamma_1 = \gamma$

$\gamma_2: [-1, 1] \to \mathbb{R}^2$ $\quad x^2 + y^2 = 1$ $\quad y = \sqrt{1 - x^2}$ $\Rightarrow$ $\gamma_2(t) = (t, \sqrt{1 - t^2})$

STESSO SOSTEGNO MA DA SX A DX, PER AVERE DA DX A SX $\gamma_3(t) = (-t, \sqrt{1 - t^2})$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 5 di 144

DEFINIZIONE $\gamma: I \to \mathbb{R}^n$ SI DICE REGOLARE SE:

- γ È DERIVABILE IN I, CON DERIVATA CONTINUA $(x_i \in C^1(I))$
- $\|\gamma'(t)\| \neq 0 \quad \forall t \in I \overset{\text{equiv}}{\iff} \gamma'(t) \neq 0 \quad \forall t \in I$

DEFINIZIONE: $\gamma: I \to \mathbb{R}^n$ SI DICE REGOLARE A TRATTI SE QUEST'INTERVALLO È UNIONE DI UN NUMERO FINITO DI INTERVALLI SU CUI LA CURVA È REGOLARE

DEFINIZIONE: $\gamma_1: I_1 \to \mathbb{R}^n$ $\gamma_2: I_2 \to \mathbb{R}^n$ SI DICONO EQUIVALENTI SE ESISTE UNA FUNZIONE $\varphi: I_2 \to I_1$ BIUNIVOCA DERIVABILE CON DERIVATA CONTINUA IN I_2 E TALE CHE $\varphi'(t) \neq 0$ IN I_2 PER CUI $(\gamma_1 \circ \varphi)(t) = \gamma_2(t) \quad \forall t \in I_2$

$\Downarrow$

DUE CURVE EQUIVALENTI HANNO LO STESSO SOSTEGNO, STESSO VERSO DI PERCORRENZA SE $\varphi'(t) > 0$ IN I_2 OPPURE HANNO VERSO OPPOSTO $\varphi'(t) < 0$ IN I_2

ESEMPIO

$\gamma_1(t) = (\cos t, \sin t) \quad t \in [0, 2\pi]$; $\gamma_2(t) = (\cos(2t), \sin(2t)) \quad t \in [0, 2\pi]$

γ_1 = CIRCONFERENZA $\circlearrowleft$ $\quad \gamma_2$ = CIRCONFERENZA MA PERCORSA DUE VOLTE (NON SEMPLICE)

DEFINIZIONE: SIA $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ E $P_0 \in \mathbb{R}^n$. UN INTORNO DI P_0 DI RAGGIO $R > 0$ È UNA PALLA APERTA $(B_R(P_0) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n, \ \vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) : \|\vec{x} - P_0\| < R\})$ $P_0 = (x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n)$

IN $\mathbb{R}$ $B_R(P_0)$ È L'INSIEME DEI PUNTI DI $\mathbb{R}^n$ CHE DISTANO MENO DI R DA P_0

TOPOLOGIA DI $\mathbb{R}^n$

DEFINIZIONE: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $P_0 \in \mathbb{R}^n$

1) Ω^c (IL COMPLEMENTARE) $= \mathbb{R}^n \setminus \Omega$

2) P_0 SI DICE PUNTO INTERNO A Ω SE $\exists R > 0 \ / \ B_R(P_0) \subseteq \Omega$

3) P_0 SI DICE ESTERNO A Ω SE $P_0 \in \Omega^c$

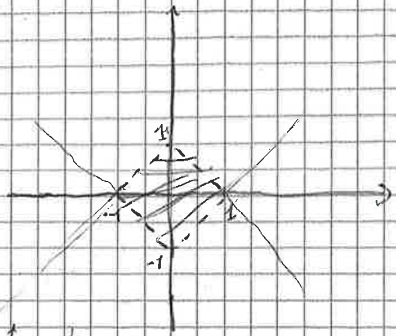
4) P_0 SI DICE PUNTO DI FRONTIERA DI Ω SE $\exists R > 0 \ / \ B_R(P_0) \cap \Omega \neq \emptyset$ E $B_R(P_0) \cap \Omega^c \neq \emptyset$

OSS: I PUNTI DI FRONTIERA DI Ω E DI Ω^c COINCIDONO

Esempio

$\Omega = \{(x,y) \in R^2 / |x| + |y| < 1\}$

$|y| < 1 - |x| \qquad -1 + |x| < y < 1 - |x|$



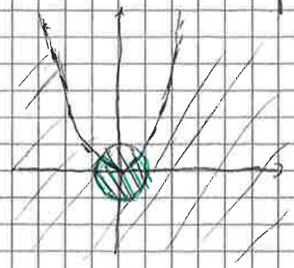
convesso, aperto, limitato e conn. per archi

Esempio

$\Omega = \{(x,y) \in R^2 / x^2+y^2 \le 1 , \; y < x^2\}$

$y < x^2$ parabola

$x^2+y^2 \le 1$ circonf.



no aperto, no convesso, si conn. per archi, no chiuso, limitato

Funzioni scalari

Definizione: sia $\Omega \subset R^n$ sia $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$. Una funzione f di n variabili reali $x_1, \dots, x_n$ a valori reali è una legge $f : \Omega \to R$ che associa a ogni punto $\vec{x}$ di Ω un numero reale $f(\vec{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$

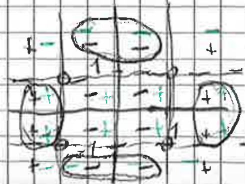
$\Omega = dom(f) = \{(x_1, \dots, x_n) \in R^n / f(x_1, \dots, x_n) \text{ esiste in } R\}$

$imm(f) = \{f(x_1, \dots, x_n) \in R / (x_1, \dots, x_n) \in dom(f)\}$

Esempio

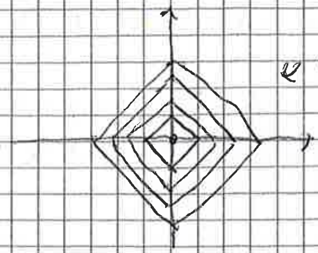
- $f(x,y) = x^2+y^2 \qquad dom(f) = R^2 \Rightarrow$ insieme aperto, convesso, illimitato, conn. per archi
- $f(x,y) = \dfrac{x^2-4y^2}{x^2+y^2} \qquad x^2+y^2=0$ se $x=0$ e $y=0 \Rightarrow dom(f) = R^2 \setminus \{0,0\} = \Omega$
- $f(x,y,z) = \log(x+y+z) \qquad x+y+z>0 \qquad x+y+z=0$ è piano
  $dom(f)$ è un semispazio aperto illimitato
- $f(x,y,z) = xyz + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} \Rightarrow x,y,z \neq 0 \Rightarrow dom =$ tutto R^3 senza gli assi
- $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{y^2-x^2} \qquad y^2 \neq x^2 \quad |y| \neq |x| \Rightarrow dom = R^2 \setminus$ le bisettrici
- $f(x,y) = \sqrt{\dfrac{x^2-1}{1-y^2}} \qquad y^2 \neq 1 \quad y \neq \pm 1 \qquad \dfrac{x^2-1}{1-y^2} \ge 0 \qquad x^2 \ge 1$

$x \le -1 \lor x \ge 1 \qquad 1-y^2 > 0 \quad y^2 < 1 \quad -1 < y < 1$

$dom(f)$:  $\Rightarrow$ $x \le -1 \lor x \ge 1 \land -1 < y < 1$
$-1 \le x \le 1 \land y < -1 \lor y > 1$

ESEMPIO

$f(x,y) = |x|+|y| \qquad |x|+|y| = c$



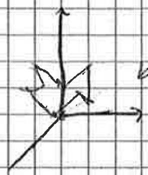
CURVE DI LIVELLO

$x=0 \rightarrow z=|y|$

- $c<0 \quad |x|+|y|<0$ IMP $\Rightarrow \Gamma_c = \emptyset$
- $c=0 \quad |x|+|y|=0 \quad \Gamma_c = \{(0,0)\}$
- $c>0 \quad |x|+|y|>0 \quad \Gamma_c = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / |x|+|y|=c\}$

$|y| = c-|x|$ GRAFICO:

$|x|-c < y < c-|x|$

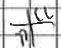


WOLFRAM ALPHA

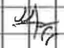
ESEMPIO

$f(x,y) = xy$

- $c=0 \quad xy=0 \quad x=0 \vee y=0$ ASSI X E Y
- $c>0 \quad xy>0$ FAMIGLIA DI IPERBOLI



- $c<0 \quad xy<0$ FAMIGLIA DI IPERBOLI



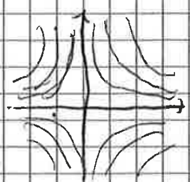


GRAFICO PRINGOLES

PUNTO DI SELLA NELL'ORIGINE

SUPERFICI DI LIVELLO

$f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2 \qquad \Gamma_c = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / x^2+y^2+z^2=c\}$

- $c<0 \quad \emptyset$
- $c=0 \Rightarrow \{(0,0,0)\}$
- $c>0 \quad x^2+y^2+z^2=c$

TUTTE SFERE CONCENTRICHE NELL'ORIGINE

DEFINIZIONE: SIA $f: \Omega \to \mathbb{R} \quad \Omega \subseteq \mathbb{R}^n, \ \vec{x}_0 \in \Omega \quad \vec{x}_0 = (x_0^1, \dots, x_0^n)$

f È CONTINUA IN x_0 SE $\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0 \ \forall \vec{x}\in\Omega$ CON $\|\vec{x}-\vec{x}_0\|<\delta \Rightarrow |f(\vec{x})-f(\vec{x}_0)|<\varepsilon$

OSS: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ CONTINUA

1) INSIEMI APERTI:

$$\Omega_> = \{\vec{x}\in\mathbb{R}^n / f(\vec{x})>0\} \qquad \Omega_< = \{\vec{x}\in\mathbb{R}^n / f(\vec{x})<0\}$$

$$\Omega_{\neq} = \{\vec{x}\in\mathbb{R}^n / f(\vec{x})\neq 0\}$$

2) INSIEMI CHIUSI:

$$\Omega_{\geq} = \{\vec{x}\in\mathbb{R}^n / f(\vec{x})\geq 0\} \qquad \Omega_{\leq} = \{\vec{x}\in\mathbb{R}^n / f(\vec{x})\leq 0\}$$

$$\Omega_= = \{\vec{x}\in\mathbb{R}^n / f(\vec{x})=0\}$$

STRATEGIA PER PROVARE CHE lim ESISTE

1) COMPOSIZIONE FUNZIONI CONTINUE

2) APPLICARE TEOREMA DEL CONFRONTO

3) PASSARE ALLE COORDINATE POLARI $\left(x=\rho\cos\theta \quad y=\rho\sin\theta\right) \quad \rho\geq 0$

ESEMPIO

$f(x,y)=\dfrac{x^3}{x^2+y^2}$ COORDINATE POLARI $\quad dom(f)=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3}{x^2+y^2}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^3\cos^3\theta}{\rho^2\underbrace{(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}_{1}}=\lim_{\rho\to 0}\rho\cos^3\theta$$

$|\cos^3\theta|\leq 1 \quad |\rho\cos^3\theta|\leq\rho \quad \rho\to 0$ SE $\rho\to 0 \Rightarrow |\rho\cos^3\theta|\to 0 \quad \forall\theta \Rightarrow \lim = 0$

DEFINIZIONE: $f:\Omega\to\mathbb{R} \quad \Omega\subseteq\mathbb{R}^n \quad g: I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R} \;/\; f(\Omega)\subseteq I$

$g\circ f: dom(g\circ f)\to\mathbb{R} \quad dom(g\circ f)=\{\vec{x}\in\Omega \;/\; f(\vec{x})\in I\}$

$\Omega\xrightarrow{f} f(\Omega)\subseteq I\xrightarrow{g}\mathbb{R} \qquad \Omega\xrightarrow{g\circ f}\mathbb{R}$

SE f e g SONO CONTINUE, ANCHE $g\circ f$ LO È (ANCHE $f\circ g$)

ESEMPIO

$$f(x,y)=\begin{cases}\log\left(\dfrac{\operatorname{arctg}(xy)}{xy}\right) & xy\neq 0\\ 0 & xy=0\end{cases}$$

CONTINUA IN $(0,0)$?

$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\log\left(\dfrac{\operatorname{arctg}(xy)}{xy}\right)=\log(1)=0 \quad \to$ CAMBIO DI VARIABILE $xy=t$

DEFINIZIONE: SIA $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ $\bar{x}_0$ PUNTO INTERNO DI Ω $f: \Omega \to \mathbb{R}$ SI DICE DERIVABILE IN $\bar{x}_0$ SE AMMETTE TUTTE LE DERIVATE PARZIALI PRIME IN $\bar{x}_0$

OSS: ESISTENZA DERIVATE PARZIALI NON GARANTISCE LA CONTINUITÀ

DEFINIZIONE: SIA $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ $\bar{x}_0$ PUNTO INTERNO A Ω $f: \Omega \to \mathbb{R}$, SUPPONIAMO AMMETTA PARZIALI PRIME IN $\bar{x}_0$ IN TUTTE LE VARIABILI; IL VETTORE DI $\mathbb{R}^n$ CHE HA COME COMPONENTI LE DERIVATE PARZIALI PRIME IN $\bar{x}_0$ SI DICE GRADIENTE DI f IN $\bar{x}_0$: $\nabla f(\bar{x}_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{x}_0)\right)$

• $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ $\bar{x}_0 = (x_0, y_0)$ $\bar{x}_0$ PUNTO INTERNO A Ω $f: \Omega \to \mathbb{R}$ $\nabla f(\bar{x}_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}_0), \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}_0)\right)$

ESEMPIO

• $f(x,y) = \begin{cases} 1 & xy = 0 \\ 0 & xy \neq 0 \end{cases}$ $\bar{x}_0 = (0,0)$ $\nabla f(\bar{x}_0) = (0,0)$

• $f(x,y) = \log(x^2+4y)$ $\quad dom(f): y > -\frac{1}{4}x^2$ $\quad \nabla f(x,y) = \left(\frac{2x}{x^2+4y}, \frac{4}{x^2+4y}\right)$

• $f(x,y) = \sqrt{xy} + x^2 e^y$ $\quad dom(f):$ NO 1° e 3° QUADRANTE $\quad \nabla f(x,y) = \left(\frac{y}{2\sqrt{xy}} + 2xe^y, \frac{x}{2\sqrt{xy}} + x^2 e^y\right)$

• $f(x,y,z) = z^2 e^{xy}$ $\quad \nabla f(x,y,z) = \left(z^2 y e^{xy}, z^2 x e^{xy}, 2z e^{xy}\right) = z e^{xy}(zy, zx, 2)$

DERIVATA DIREZIONALE

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ $\bar{x}_0$ PUNTO INTERNO A Ω $f: \Omega \to \mathbb{R}$ $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{v} \neq \vec{0}$

$\lim_{t \to 0} \frac{f(\bar{x}_0 + t\vec{v}) - f(\bar{x}_0)}{t}$ TALE LIMITE SE ESISTE FINITO SI DICE DERIVATA DI f SECONDO IL VETTORE $\vec{v}$; NEL CASO CHE $\vec{v}$ SIA UN VERSORE SI DICE DERIVATA DIREZIONALE DI f SECONDO $\hat{v}$

OSS: SE ABBIAMO $\vec{v}$ NON VERSORE, LO NORMALIZZO: $\hat{v} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$

DERIVATA DIREZIONALE: $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\bar{x}_0)$

OSS: $\vec{v} = (1,0,\dots,0)$ $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\bar{x}_0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}_0)$ SE $\vec{v} = (0,1,0,\dots,0)$ $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\bar{x}_0) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{x}_0)$ $\quad x_2 = y$

ESEMPIO

$f = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ $\quad y = x^2$ $\quad \lim_{x \to 0} \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2} \Rightarrow$ DISCONTINUA IN $(0,0)$ MA ESISTONO DERIVATE?

$\vec{v} = (a,b) / a^2+b^2 = 1 \Rightarrow$ VERSORE $\quad \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f((0,0)+t(a,b)) - \cancel{f(0,0)}}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(ta,tb)}{t} =$

$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \cdot \frac{t^2 a^2 \cdot tb}{t^4 a^4 + t^2 b^2} = \lim_{t \to 0} \frac{t^3 a^2 b}{t^2(t^2 a^4 + b^2)} = \lim_{t \to 0} \frac{a^2 b}{t^2 a^4 + b^2} \cdot t = \frac{a^2}{b}$ $\quad b \neq 0$ $\quad b = 0 \Rightarrow 0$

DEFINIZIONE: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ $\bar{x}_0 \in \Omega$ interno $f: \Omega \to \mathbb{R}$ si dice differenziabile in x_0 se esiste $\nabla f(\bar{x}_0)$ e se vale $f(\bar{x}) = \underbrace{f(\bar{x}_0) + \nabla f(\bar{x}_0)(\bar{x}-\bar{x}_0)}_{\text{piano tangente a } f \text{ in } x_0} + o(\|\bar{x}-\bar{x}_0\|)$ per $x \to x_0$

$\bar{x}_0 = (x_0, y_0)$ $\quad \bar{x} = (x_0+h, y_0+k)$ $\quad \bar{x}-\bar{x}_0 = (h,k)$ $\quad \|\bar{x}-\bar{x}_0\| = \sqrt{h^2+k^2}$

$\Downarrow$ in due variabili

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)\cdot(h,k) + o\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)$$

se $(h,k) \to (0,0)$: $f(x_0,y_0) = f(x_0,y_0)$

OSS: $\Rightarrow$ se f differenziabile in (x_0,y_0) è continua in (x_0,y_0)

OSS: se f non è continua in x_0 allora f non è differenziabile in $\bar{x}_0$

OSS: $P(x_0,y_0,z_0)$ $\quad \vec{n} = (a,b,c)$ $\quad \bar{x} = (x,y,z)$ $\Rightarrow$ $(\bar{x}-P)\cdot\vec{n} = 0$

• $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ $x_0 \in \Omega$ interno, se $f: \Omega \to \mathbb{R}$ è differenziabile in $\bar{x}_0$ si ha $f(\bar{x}) = f(\bar{x}_0) + \nabla f(\bar{x}_0)\cdot(\bar{x}-\bar{x}_0) + o(\|x-x_0\|)$ $\quad x \to x_0$

$z = f(\bar{x}_0) + \nabla f(\bar{x}_0)\cdot(\bar{x}-x_0)$ $\Rightarrow$ equazione del piano t_g al grafico di f in $(\bar{x}_0, f(\bar{x}_0))$

ESEMPIO

$f(x,y) = x^2+y^2$ $\quad x_0 = (-2,1)$

• f è differenziabile se in ogni punto accetta il piano tangente

$f(-2,1) = 5$ $\quad \nabla f = (2x, 2y)$ $\quad \nabla f(-2,1) = (-4,2)$

$z = f(-2,1) + \nabla f(-2,1)\cdot(x-(-2), y-1) = 5 + (-4,2)(x+2, y-1) = 5 - 4x - 8 + 2y - 2$

$z = -5 - 4x + 2y$ $\Rightarrow$ α: $4x - 2y + z + 5 = 0$

OSS: $z - f(\bar{x}_0) - \nabla f(\bar{x}_0)(\bar{x}-\bar{x}_0) = 0$ $\quad 1\cdot(z - f(\bar{x}_0)) - \nabla f(\bar{x}_0)(\bar{x}-\bar{x}_0) = 0$

$P = (\bar{x}_0, f(\bar{x}_0))$ $\quad X = (\bar{x}, z)$ $\quad X-P = (\bar{x}-\bar{x}_0, z - f(\bar{x}_0))$

$(X-P)\cdot(-\nabla f(\bar{x}_0), 1) = 0$ $\Leftrightarrow$ scrittura iniziale

vettore normale al piano t_g: $N = (-\nabla f(\bar{x}_0), 1)$

TEOREMA (COND. SUFFICIENTI PER LA DIFFERENZIABILITÀ)

SIA $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\bar{x}_0$ INTERNO A Ω, SE f DIFFERENZIABILE IN $\bar{x}_0$ ALLORA:

1) f È CONTINUA IN $\bar{x}_0$

2) ESISTONO LE DERIVATE PARZIALI IN $\bar{x}_0$

3) PER OGNI VERSORE $\hat{v} \neq \bar{0}$ ESISTE $\frac{\partial f}{\partial \hat{v}} = \nabla f(\bar{x}_0) \cdot \hat{v}$

4) $d_{x_0} f = \nabla f(\bar{x}_0)$

5) SE $n=2$ $\bar{x}_0 = (x_0, y_0)$ ESISTE IL PIANO tg AL GRAFICO DI f IN $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ CHE HA EQUAZIONE $z = f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0)$

DERIVATE SECONDE

DEFINIZIONE: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ $\bar{x}_0$ $(x_1, \dots, x_i, \dots, x_s, \dots, x_n)$ INTERNO A Ω $f: \Omega \to \mathbb{R}$. SE f È DERIVABILE RISPETTO A x_i IN UN INTORNO DI $\bar{x}_0$ E INOLTRE $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x})$ È A SUA VOLTA DERIVABILE RISPETTO A x_s IN UN INTORNO DI $\bar{x}_0$ SI DICE CHE f AMMETTE IN $\bar{x}_0$ DERIVATA PARZIALE SECONDA RISPETTO A x_i e x_s.

$$\frac{\partial}{\partial x_s}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} f(\bar{x}_0)\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_s \partial x_i}(\bar{x}_0)$$ → LEGGO DA DX A SX: PRIMA RISPETTO x_i E POI x_s

SE $x_i \neq x_s$ DERIVATA PARZIALE SECONDA MISTA

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\bar{x}_0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}_0)\right) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\bar{x}_0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}_0)\right)$$

TEOREMA DI SCHWARZ

SE LE DUE DERIVATE PARZIALI MISTE, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ $x \neq y$, ESISTONO IN UN APERTO Ω E SONO CONTINUE ALLORA LE DERIVATE SECONDE MISTE COINCIDONO, OSSIA: $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

ESEMPIO

$f(x,y) = x^3 y + \sin(xy)$ $\qquad \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 y + y\cos(xy)$ $\qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x^3 + x\cos(xy)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6xy - y^2 \sin(xy)$ $\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -x^2 \sin(xy)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 3x^2 + \cos(xy) - xy\sin(xy)$ $\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 3x^2 + \cos(xy) - xy\sin(xy)$

⇒ LE MISTE SONO UGUALI

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 19 di 144

ESEMPIO

$f(x,y) = x^2 e^y - \cos x$ DIFFERENZIABILE $P(\pi,0)$ $\vec{v} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$\nabla f(x,y) = \left(2xe^y + \sin x,\ x^2 e^y\right)$ $\nabla f(P) = \left(2\pi,\ \pi^2\right)$ $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P) = \left(2\pi, \pi^2\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\pi,0) = \pi\sqrt{2} + \pi^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$

DEFINIZIONE: una funzione di più variabili a valori vettoriali è una funzione $F: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definita da $F(\vec{x}) = \left(f_1(\vec{x}), \dots, f_m(\vec{x})\right)$ $\vec{x} = x_1, \dots, x_n$

Le funzioni $f_i: \Omega_i \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sono funzioni a valori reali. $i = 1, \dots, m$

Queste funzioni si dicono componenti di F

OSS: $dom(F) = \bigcap_{i=1,\dots,m} \Omega_i$

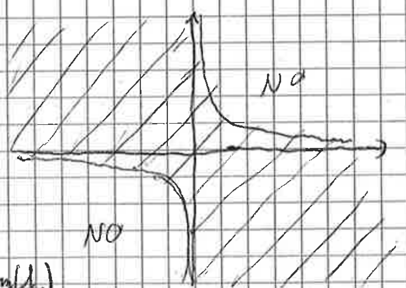
ESEMPIO

$F(x,y) = \left(\sqrt{1-xy},\ \frac{e^{-x^2}}{x+y}\right)$ $dom(F) \to \mathbb{R}^2$

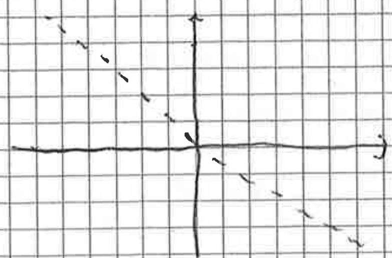
$dom(f_1) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 1-xy \geq 0\right\}$ $dom(f_2) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x+y \neq 0\right\}$

$1-xy \geq 0$ $xy \leq 1$ $y \neq -x$

$x>0$ $y \leq \frac{1}{x}$; $x<0$ $y \geq \frac{1}{x}$

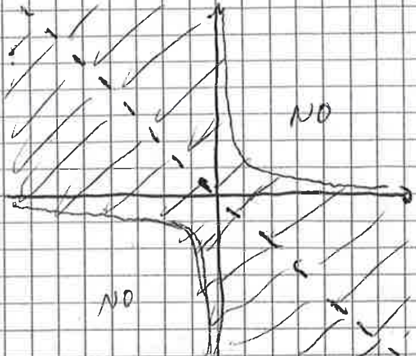


/// = $dom(f_1)$



$dom(f_2)$ = tutto tranne bis II° e IV°

$dom(F)$:



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 21 di 144

DEFINIZIONE: L'APPLICAZIONE LINEARE $d_{x_0} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ DEFINITA DA:
$d_{x_0} F \cdot \bar{x} = JF(\bar{x}_0) \cdot \bar{x}$ E SI DICE DIFFERENZIALE IN $\bar{x}_0$

ESEMPIO

$F: [0,+\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \quad F(\rho,\theta) = (a\rho\cos\theta,\ b\rho\sin\theta) \quad a,b \in \mathbb{R}$

$\rho \geq 0, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$

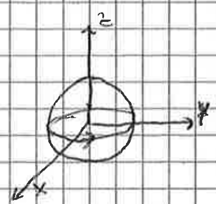
SE FISSO ρ, AL VARIARE DI θ ABBIAMO UN ELLISSE
AL VARIARE DI ρ RIEMPIO L'ELLISSE
} ELLISSE PIENA

$$JF(\rho,\theta) = \begin{bmatrix} a\cos\theta & -a\rho\sin\theta \\ b\sin\theta & b\rho\cos\theta \end{bmatrix}$$

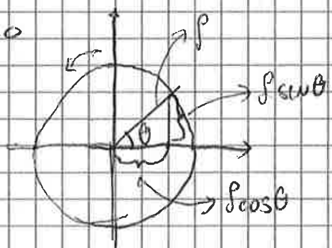
$$\det(JF) = ab\rho\cos^2\theta + ab\rho\sin^2\theta = ab\rho$$

ESEMPIO (COORDINATE SFERICHE)

$F: [0,+\infty) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \quad F(\rho,\theta,\varphi)$

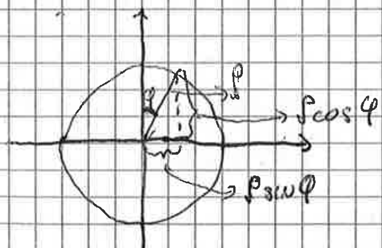


• $z = 0$



$0 \leq \theta \leq 2\pi$ MENTRE $0 \leq \varphi \leq \pi$ $\quad \rho \geq 0$

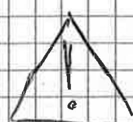
× $x = 0$



$\Rightarrow$ IN TOTALE $\quad x = \rho\sin\varphi\cos\theta \quad y = \rho\sin\varphi\sin\theta$

$$F(\rho,\theta,\varphi) = (\rho\sin\varphi\cos\theta,\ \rho\sin\varphi\sin\theta,\ \rho\cos\varphi)$$

$$\det(JF(\rho,\theta,\varphi)) = +\rho^2\sin\varphi$$



ESERCIZIO

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{y^2 \log x}{(x-1)^2+y^2} \qquad dom(f) = \mathbb{R}^2 - \{(1,0)\} \;\; e \;\; x>0$$

$$x = 1+\rho\cos\theta \qquad y = \rho\sin\theta \qquad \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2 \sin^2\theta \log(1+\rho\cos\theta)}{\rho^2\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\theta} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\cancel{\rho^2}\sin^2\theta\log(1+\rho\cos\theta)}{\cancel{\rho^2}}$$

$$\lim_{\rho\to 0} \sin^2\theta \log(\underbrace{1+\rho\cos\theta}_{t})$$

$$\to \lim_{\rho\to 0} \rho\cos\theta = 0$$

$$\log(1+t) = t + o(t) \quad t\to 0 \implies \lim_{\rho\to 0} \sin^2\theta \cdot \left(\rho\cos\theta + o(\rho\cos\theta)\right)$$

FUNZIONE LIMITATA

$$\lim_{\rho\to 0} \rho \cdot \left[\sin^2\theta \cdot \cos\theta + o(\sin^2\theta\cos\theta)\right] = 0, \;\; \forall\theta$$

ESERCIZIO corretto

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{y\log x}{(x-1)^2+y^2} \qquad dom(f) = \mathbb{R}^2 - \{(1,0)\} \;\; e \;\; x>0 \qquad x = 1+\rho\cos\theta \quad y = \rho\sin\theta$$

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\cancel{\rho}\sin\theta \log(1+\rho\cos\theta)}{\rho^{\cancel{2}}} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\sin\theta}{\rho}\cdot\left(\rho\cos\theta + o(\rho\cos\theta)\right) =$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \sin\theta\cos\theta + o(\sin\theta\cos\theta) \implies \text{LIMITE NON ESISTE}$$

ESERCIZIO

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{(x^2-2x+1)\cdot y}{((x-1)^2+y^2)^\alpha} \qquad \alpha ? \,/\, \exists \lim \qquad dom(f) = \mathbb{R}^2 - \{(1,0)\}$$

$$x = 1+\rho\cos\theta \qquad y = \rho\sin\theta \qquad \lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{(x-1)^2\cdot y}{((x-1)^2+y^2)^\alpha} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2\cos^2\theta\cdot\rho\sin\theta}{\rho^{2\alpha}} =$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \rho^{3-2\alpha}\cdot\cos^2\theta\sin\theta = 0 \iff 3-2\alpha>0 \qquad \alpha < \frac{3}{2}$$

ESERCIZIO

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

PER $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ f È CONTINUA PERCHÉ RAPPORTO E COMBINAZIONE DI FUNZIONI CONTINUE.

$$\text{IN } (0,0)? \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad x=\rho\cos\theta \quad y=\rho\sin\theta \qquad \lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^{\cancel{2}}\cos^2\theta}{\cancel{\rho}} = 0 \;\; \forall\theta \implies \text{CONTINUA IN } \mathbb{R}^2$$

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n \quad f: \Omega \to \mathbb{R}$ DEFINIZIONI:

1) $P_0 \in \Omega$ SI DICE PUNTO MASSIMO ASSOLUTO SE $\forall \bar{x} \in \Omega \quad f(P_0) \geq f(\bar{x})$

2) $P_0 \in \Omega$ SI DICE PUNTO DI MASSIMO RELATIVO SE $\exists R>0 \,/\, \forall \bar{x} \in \Omega \cap B_R(P_0)$ CON $f(P_0) \geq f(\bar{x})$

3) $P_0 \in \Omega$ SI DICE PUNTO DI MINIMO ASSOLUTO SE $\forall \bar{x} \in \Omega \quad f(P_0) \leq f(\bar{x})$

4) $P_0 \in \Omega$ SI DICE PUNTO DI MINIMO RELATIVO SE $\exists R>0 \,/\, \forall \bar{x} \in \Omega \cap B_R(P_0)$ CON $f(P_0) \leq f(\bar{x})$

DEFINIZIONE: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ P_0 INTERNO A Ω $f: \Omega \to \mathbb{R}$. UN PUNTO P_0 IN CUI f È DIFFERENZIABILE SI DICE PUNTO CRITICO O STAZIONARIO PER f SE $\nabla f(P_0) = 0$. SE INVECE $\nabla f(P_0) \neq 0$ IL PUNTO P_0 SI DICE REGOLARE PER f

TEOREMA DI FERMAT

SIA $P_0 \in \Omega$ INTERNO, $f: \Omega \to \mathbb{R}$ f DIFFERENZIABILE IN P_0.
SUPPONIAMO P_0 SIA UN PUNTO DI MASSIMO O MINIMO RELATIVO ALLORA $\nabla f(P_0) = 0$
~~OVVERO~~ OVVERO È UN PUNTO STAZIONARIO.

ESEMPIO

$f(x,y) = x^2 + y^2 - x^2y^2 \qquad \nabla f(x,y) = (2x - 2xy^2,\ 2y - 2x^2y)$

DOVE ∇f È NULLO? $\begin{cases} 2x(1-y^2) = 0 \\ 2y(1-x^2) = 0 \end{cases}$ $\quad ① \begin{cases} x = 0 \\ 2y(1-x^2) = 0 \end{cases} \Rightarrow (0,0)$

ANALOGAMENTE: $② \begin{cases} y = 1 \\ 2y(1-x^2) = 0 \end{cases} \Rightarrow (-1,1)$ e $(+1,1)$ $\quad ③ \begin{cases} y = -1 \\ 2y(1-x^2) = 0 \end{cases} \Rightarrow (-1,-1)$ e $(+1,-1)$

$\Rightarrow$ I PUNTI STAZIONARI SONO: $(0,0), (-1,1), (1,1), (-1,-1), (1,-1)$

ESEMPIO

$f(x,y) = 2x + 3y - 4 \qquad \nabla f(x,y) = (2,3)$ SEMPRE $\neq (0,0) \Rightarrow$ TUTTI PUNTI REGOLARI (INFATTI È UN PIANO)

ESEMPIO

$f(x,y) = x^2 + 2x + 2y^2 - 4y \qquad \nabla f(x,y) = (2x+2,\ 4y-4) \Rightarrow$ STAZIONARIO $(-1,1)$

ALTRO METODO:

RISCRIVO $f(x) = x^2 + 2x + 1 + 2y^2 - 4y + 2 - 3 = (x+1)^2 + 2(y-1)^2 - 3$

$\Rightarrow x = -1$ CON $y = 1$ PUNTO STAZIONARIO $\qquad f(-1,1)$

$$\frac{1}{2}\cdot(x-x_0,\ y-y_0)\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-x_0\\ y-y_0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\underbrace{\left(\lambda_1(x-x_0)^2+\lambda_2(y-y_0)^2\right)}_{\text{FORMA QUADRATICA IN FORMA CANONICA}}$$

~~[illegible]~~ LASCIO STARE IL COEFFICIENTE $\frac{1}{2}$ PERCHÉ MI INTERESSA IL SEGNO

$\Rightarrow \lambda_1(x-x_0)^2+\lambda_2(y-y_0)^2$ → AUTOVALORI DELL' HESSIANA

1) $\lambda_1, \lambda_2 > 0 \Rightarrow$ PUNTO DI MINIMO

2) $\lambda_1, \lambda_2 < 0 \Rightarrow$ PUNTO DI MASSIMO

3) AUTOVALORI DISCORDI $\Rightarrow \lambda_1\cdot\lambda_2 < 0 \Rightarrow$ PUNTO DI SELLA, PUNTO DOVE NON HO NÉ MAX NÉ MINIMO

$$Hf(x_0,y_0)=\begin{bmatrix}a & b\\ b & c\end{bmatrix}\qquad \begin{vmatrix}a-\lambda & b\\ b & c-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-\mathrm{tr}\,H\cdot\lambda+|H|=\lambda^2-\lambda(a+c)+ac-b^2$$

TEOREMA MASSIMI, MINIMI E SELLA

Hp: $\Omega\subseteq\mathbb{R}^2$ $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}$ INTERNO $f:\Omega\to\mathbb{R}$ DI CLASSE C^2 IN UN INTORNO DI (x_0,y_0)

SUPPONIAMO $\nabla f(x_0,y_0)=0 \Rightarrow$ PUNTO STAZIONARIO, SIA $Hf(x_0,y_0)$ L'HESSIANA ALLORA:

Ts: 1) SE GLI AUTOVALORI DI $Hf(x_0,y_0)$ SONO POSITIVI $\Rightarrow$ PUNTO DI MINIMO RELATIVO

$\lambda_1,\dots,\lambda_n>0 \Rightarrow P_0$ PUNTO DI ~~MASS~~ MINIMO RELATIVO

2) $\lambda_1,\dots,\lambda_n<0 \Rightarrow P_0=(x_0,y_0)$ È UN PUNTO DI MASSIMO RELATIVO

3) SE GLI AUTOVALORI SONO SIA POSITIVI CHE NEGATIVI $\Rightarrow$ PUNTO DI SELLA

ESEMPIO

$f(x,y)=3x^2+y^2-x^3y \qquad \nabla f(x_0,y_0)=(6x-3x^2y,\ 2y-x^3)$

$\begin{cases}3x(2-xy)=0\\ 2y-x^3=0\end{cases}$

$\begin{cases}x=0\\ 2y=0\end{cases}\Rightarrow(0,0)\qquad \begin{cases}xy=2\\ 2y-x^3=0\end{cases}\qquad \begin{cases}y=\frac{2}{x}\\ \frac{4}{x}-x^3=0\end{cases}\qquad \begin{cases}y=\frac{2}{x}\\ 4-x^4=0\end{cases}\qquad \begin{cases}y=\frac{2}{x}\\ x=\pm\sqrt[4]{4}\end{cases}$

$\begin{cases}y=\frac{2}{x}\\ x^2=2\end{cases}\qquad \begin{cases}y=\frac{2}{x}\\ x=\pm\sqrt{2}\end{cases}\qquad (\sqrt{2},\sqrt{2})=A\quad B=(-\sqrt{2},-\sqrt{2})\qquad Hf(x,y)=\begin{pmatrix}6-6xy & -3x^2\\ -3x^2 & 2\end{pmatrix}$

$Hf(0)=\begin{pmatrix}6 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\quad \lambda_1=6\quad \lambda_2=2 \Rightarrow 0$ PUNTO DI MINIMO

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 29 di 144

ESERCIZIO

$f(x,y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2 \qquad \nabla f(x,y) = (6x^2 - 6y, -6x + 6y) \qquad \begin{cases} x^2 - y = 0 \\ y - x = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2 - x = 0 \\ y = x \end{cases} \quad \begin{cases} x(x-1) = 0 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow (0,0) \; ; \; (1,1)$ PUNTI STAZIONARI

$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} 12x & -6 \\ -6 & 6 \end{bmatrix} \qquad Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix} \qquad Hf(1,1) = \begin{pmatrix} 12 & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$

1) ~~...~~ $|H| = -36 \Rightarrow (0,0)$ PUNTO DI SELLA

2) $|H| = 12 \cdot 6 - 36 > 0 \qquad 12 > 0 \Rightarrow (1,1)$ PUNTO DI MINIMO RELATIVO

ANALISI 1 $\rightarrow$ f CONTINUA E INVERTIBILE IN UN INTORNO DI x_0 ($x_0 \in \text{dom} f$) E SIA f DERIVABILE IN x_0 CON $f'(x_0) \neq 0$ ALLORA: $(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)} \qquad y_0 = f(x_0)$

OSS: $f(x,y) = 0$ HA COME SOLUZIONE LE COPPIE (x,y) CHE FORMANO UN LUOGO GEOMETRICO SUL PIANO CARTESIANO $(z=0)$, QUESTO LUOGO CORRISPONDE AD UNA CURVA DI LIVELLO DI $f(x,y)$. $\Gamma = \{(x,y) \in \Omega \;/\; f(x,y) = 0\} \quad f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

ESEMPIO

$f(x,y) = \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} + 1 \qquad \text{dom}(f) = \mathbb{R}^2 \qquad f(x,y) = 0\,?$

$\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} + 1 = 0\,? \quad$ MA $\dfrac{x^2}{9} > 0 \quad \dfrac{y^2}{4} > 0 \quad 1 > 0 \Rightarrow$ IMPOSSIBILE

ESEMPIO

$f(x,y) = \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} \qquad f(x,y) = 0\,? \qquad \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 0 \qquad x = 0 \quad y = 0 \Rightarrow (x,y) = (0,0)$

ESEMPIO

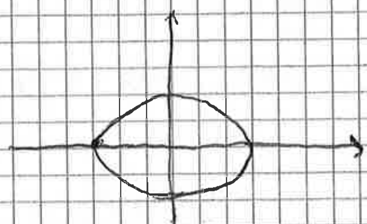
$f(x,y) = \dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} \qquad f(x,y) = 0\,? \qquad \dfrac{x^2}{9} = \dfrac{y^2}{4} \qquad$ ~~...~~

$\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 0 \qquad \left(\dfrac{x}{3} - \dfrac{y}{2}\right)\left(\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2}\right) = 0 \qquad \dfrac{y}{2} = \dfrac{x}{3} \qquad y = \dfrac{2}{3} \quad \wedge \quad y = -\dfrac{2}{3}x$

CIASCUNA DELLE DUE SOLUZIONI È UNA FUNZIONE

ESEMPIO

$f(x,y) = \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} - 1 \qquad f(x,y) = 0\,? \qquad \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1 \Rightarrow$



L'ELLISSE È LA SOLUZIONE

$\downarrow$

$\gamma(t) = (3\cos t, 2\sin t) \qquad t \in [0, 2\pi]$

CONTINUA $\rightarrow$

E ALLORA POSSIAMO OTTENERE $y_0 = \varphi(x_0)$ ~~PER~~ DI CONSEGUENZA LA FUNZIONE $\varphi(x)$ DEVE ESSERE DEFINITA IN UN INTORNO DI x_0

- SUPPONIAMO CHE ESISTA UNA FUNZIONE $\varphi(x)$ DERIVABILE TALE CHE $f(x, \varphi(x)) = 0$ (È UNA IDENTITÀ) $\forall x \in I$ CON $x_0 \in I$

DERIVO A SX E AD DX $\rightarrow$ $\dfrac{d f(x, \varphi(x))}{dx} = 0$

REGOLA CATENA: $\dfrac{d f(x, \varphi(x))}{dx} = \nabla f(x, \varphi(x)) \cdot (1, \varphi'(x)) = 0$

$$= \left(\frac{\partial f(x, \varphi(x))}{\partial x}, \frac{\partial f(x, \varphi(x))}{\partial \varphi(x)}\right) \cdot (1, \varphi'(x)) = 0$$

$$\frac{\partial f(x, \varphi(x))}{\partial x} + \frac{\partial (x, \varphi(x))}{\partial \varphi(x)} \cdot \varphi'(x) = 0$$

IMMAGINO $\partial \varphi(x) = \partial y$

DEVO IMPORRE $\dfrac{\partial (x, \varphi(x))}{\partial y} \neq 0 \Rightarrow \varphi'(x) = -\dfrac{\dfrac{\partial f(x, \varphi(x))}{\partial x}}{\dfrac{\partial f(x, \varphi(x))}{\partial y}}$

TEOREMA DELLA FUNZIONE IMPLICITA (O DI ULISSE DINI)

Hp: SIA Ω APERTO NON VUOTO DI $\mathbb{R}^2$. SIA $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ UNA FUNZIONE DI CLASSE ALMENO C^1.
SUPPONIAMO CHE IN UN PUNTO $(x_0, y_0) \in \Omega$ SI ABBIA $f(x_0, y_0) = 0$ E SE $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ ALLORA:

Ts: $\exists$ UN INTORNO $I = (x_0 - a, x_0 + a)$ DI x_0 E UNA FUNZIONE $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ TALI CHE:

1) $y_0 = \varphi(x_0)$
2) $f(x, \varphi(x)) = 0 \quad \forall x \in I$
3) $\varphi(x)$ È DI CLASSE ALMENO C^1 SU I e $\varphi'(x) = -\dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))}$
4) LA FUNZIONE $\varphi(x)$ È UNICA

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 33 di 144

② $\nabla f(x,y) = \left(-3x^2+2xy+2+y,\ x^2-2+x-2y\right)$ o $\nabla f = \begin{pmatrix} 2x(y-x) - (x^2-2-y), \\ -(y-x)+(x^2-2-y) \end{pmatrix}$

$\begin{cases} 2x(y-x) - (x^2-2-y) = 0 \\ -(y-x) + (x^2-2-y) = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x(y-x) - (y-x) = 0 \\ 2x(y-x) - (x^2-2-y) = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} (y-x)(2x-1) = 0 \\ 2x(y-x) - (x^2-2-y) = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = y \\ 0 = x^2+2+x = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y = -1 \\ x = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 2 \\ x = 2 \end{cases}$ $(-1,-1)$ $(2,2)$

$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + 2y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ 2y = -\frac{5}{4} \end{cases}$ $\rightarrow \left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{8}\right)$ che appunto appartiene al compatto

$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} -6x+2y & 2x+1 \\ 2x+1 & -2 \end{bmatrix}$ $Hf(-1,-1) = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ $\det = -9 < 0 \Rightarrow$ sella

$Hf(2,2) = \begin{bmatrix} -8 & 5 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$ $\det = -9 < 0 \Rightarrow$ sella

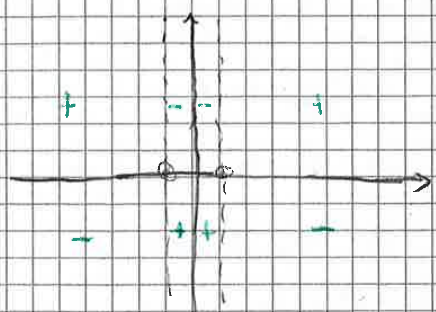
$Hf\left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{8}\right) = \begin{bmatrix} -3-\frac{5}{4} & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ $\det = 6 + \frac{5}{2} - 4 > 0 \Rightarrow$ massimo

Esercizio

$f(x,y) = yx^2 - y = y(x^2-1) \Rightarrow$ se posso scomporre posso utilizzare metodo grafico

$y > 0 \quad x^2-1 > 0 \quad x < -1 \vee x > 1$

$(-1,0) \quad (1,0) \rightarrow$ sella verifica:



$\nabla f(x,y) = (2xy,\ x^2-1)$

$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} 2y & 2x \\ 2x & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{cases} 2xy = 0 \\ x^2 = 1 \end{cases}$ $(-1,0)$ $(1,0)$

$Hf(-1,0) = 2\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ $\det = -1 < 0 \rightarrow$ sella $Hf(1,0) = 2\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\det = -1 < 0 \rightarrow$ sella

Esercizio

$f(x,y) = x^2 e^y \qquad (x_0, y_0) = (-1, 2) \qquad$ TRUCCO:

$g(x,y) = f(x-1, y+2) \Rightarrow (x,y) \to (0,0)$

$g(x,y) = (x-1)^2 e^{y+2} = e^2 (x^2 - 2x + 1) e^y$

$g(x,y) = e^2 (x^2 - 2x + 1)\left(1 + y + \frac{1}{2}y^2\right) + o(x^2+y^2)$

$g(x,y) = e^2 \left(x^2 - 2x - 2xy + 1 + y + \frac{1}{2}y^2\right) + o(x^2+y^2)$

$f(x,y) = e^2 \left((x+1)^2 - 2x - 2 - 2(x+1)(y-2) + 1 + y - 2 + \frac{1}{2}(y-2)^2\right) + \cancel{o(x+1)^2}$

$f(x,y) = e^2 \left(x^2 - 2x + 2)(y-2) + y - 2 + \frac{1}{2}(y^2 + 4 - 4y)\right) + o\left((x+1)^2 + (y-2)^2\right)$

SIA $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ DI CLASSE C^1 $\quad f(x,y,z) = 0 \,/\, \exists\, (x_0, y_0, z_0) : f(x_0, y_0, z_0) = 0$

VOGLIAMO SAPERE SE ESISTE UN INTORNO $B_R(x_0, y_0)$ E UNA FUNZIONE $z = \varphi(x,y)$ /

$f(x,y,\varphi(x,y)) = 0 \quad \forall (x,y) \in B_R(x_0,y_0)$ CON $\varphi(x_0,y_0) = z_0$ $\quad$ (TEOREMA DEL DINI IN 3 VARIABILI)

$\nabla f(x,y,\varphi(x,y)) \cdot \left(1, 0, \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y)\right) = 0 \quad \to$ REGOLA DELLA CATENA

$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,\varphi(x,y)), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,\varphi(x,y)), \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,\varphi(x,y))\right) \cdot \left(1, 0, \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y)\right) = 0$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,\varphi(x,y)) + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,\varphi(x,y)) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,\varphi(x,y)) \neq 0$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,\varphi(x,y))}{\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,\varphi(x,y))} \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,\varphi(x,y))}{\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,\varphi(x,y))}$$

$\downarrow$

TEOREMA DEL DINI IN 3 VARIABILI

SIA Ω UN APERTO NON VUOTO DI $\mathbb{R}^3$. SIA $f \in C^1$. $(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$.

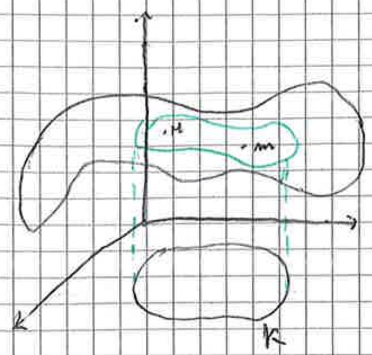
Hp: ① $f(x_0, y_0, z_0) = 0 \qquad$ ② $\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$

Ts: $\exists$ UN INTORNO $B_R(x_0,y_0)$ E UN'UNICA FUNZIONE $\varphi(x,y) : B_R(x_0,y_0) \to \mathbb{R} \in C^1$ ✓

① $z_0 = \varphi(x_0, y_0) \qquad$ ② $f(x,y,\varphi(x,y)) = 0 \quad \forall (x,y) \in B_R$

③ $$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,\varphi(x,y))}{\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,\varphi(x,y))} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,\varphi(x,y))}{\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,\varphi(x,y))}$$

MASSIMI E MINIMI VINCOLATI



STUDIARE NON SOLO NEL COMPATTO K MA ANCHE NELLA SUA FRONTIERA (∂K)

DEFINIZIONE: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ $f: \Omega \to \mathbb{R}$ $K \subseteq \Omega$ (CHE SARÀ IL VINCOLO)
UN PUNTO $P_0 \in K$ SI DICE PUNTO DI MASSIMO VINCOLATO DELLA FUNZIONE f SU K SE $f(P_0) \geq f(\bar{x})$ $\forall x \in K$. MINIMO VINCOLATO SE $f(P_0) \leq f(\bar{x})$ $\forall x \in K$

TEOREMA DI WEIERSTRASS (FUNZIONI IN PIÙ VARIABILI)

SE $K \subseteq \mathbb{R}^n$ È COMPATTO, LA FUNZIONE $f: K \to \mathbb{R}$ È CONTINUA ALLORA:
f HA ALMENO UN PUNTO DI MASSIMO ASSOLUTO E UNO DI MINIMO ASSOLUTO SU QUEST'INSIEME K, OSSIA: $\exists \bar{x}_M, \bar{x}_m \;/\; \forall \bar{x} \in K \;\; f(\bar{x}_m) \leq f(\bar{x}) \leq f(\bar{x}_M)$

a) CERCHIAMO I PUNTI STAZIONARI DI f SU $\mathring{K}$ (K INTERNO), OVVERO:
$\nabla f(x,y) = (0,0)$ CON $(x,y) \in \mathring{K}$

b) SI VALUTA f SULLA FRONTIERA DEL COMPATTO (∂K)

c) SI CONFRONTANO I VALORI TROVATI NEI DUE PASSAGGI PRECEDENTI

b1) METODO DI SOSTITUZIONE (COMPOSIZIONE)

b2) METODO DELLE CURVE DI LIVELLO

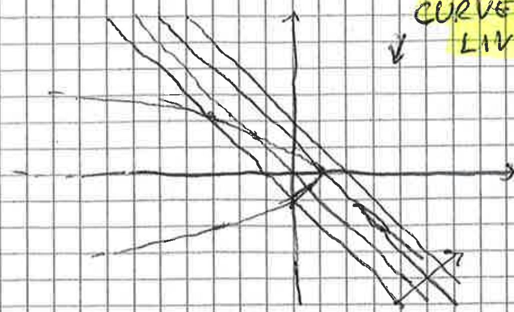
b3) METODO MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 39 di 144

CURVE DI LIVELLO

② $f(x,y)=k \qquad x+y=k \qquad y=-x+k$

Γ : $x=1-y^2$



TUTTE RETTE $y=-x+k$ // O CON DUE INTERSEZIONI CON Γ, MA SOLO UNA TANGENTE CHE INTERSECA IL SOSTEGNO IN $\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)$

$\nabla f(x,y)=(1,1) \neq (0,0)$ NO PUNTI STAZIONARI

ESEMPIO

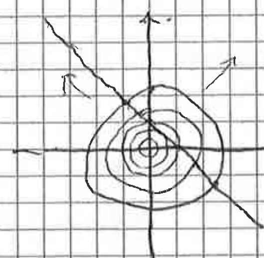
$f(x,y)=x^2+y^2$ VINCOLO: $x+y=1 \qquad y=1-x$

① $t=x \qquad \gamma(t)=(t,\ 1-t) \qquad f(\gamma(t))=t^2+1+t^2-2t=2t^2-2t+1$

$f'(\gamma(t))=4t-2 \qquad 4t-2\geq 0 \qquad t=\frac{1}{2}$

$\gamma(t)=\left(\frac{1}{2},\ 1-\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ MINIMO VINCOLATO

② $x^2+y^2=k$ CURVE DI LIVELLO



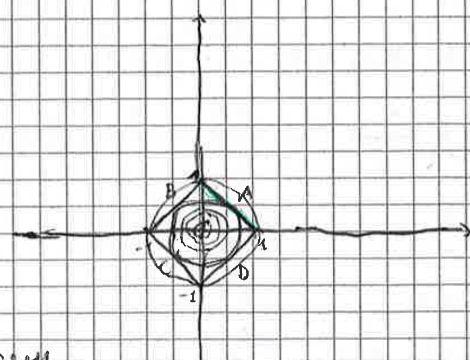
$y=1-x$ tg IN $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ PUNTO STAZIONARIO MA MI ALLONTANO $\Rightarrow$ MINIMO

ESEMPIO

$f(x,y)=x^2+y^2$ VINCOLO: $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / |x|+|y|=1\}$

$x^2+y^2=k$ C'È UNA CIRCONFERENZA TANG A 4 PUNTI A B C D E E UNA A $(1,0)$ $(0,1)$ $(-1,0)$ $(0,-1)$.



MI ALLONTANO DA A B C D E QUINDI QUESTI SARANNO MINIMI MENTRE MI AVVICINO AGLI ALTRI MI STO AVVICINANDO E QUINDI SONO 4 MASSIMI

PARAMETRIZZO SOLO IL TRATTO CON A : $y=-x+1 \qquad t=x$

$\gamma(t)=(t,\ 1-t) \qquad 2t^2-2t+1 \qquad f'(\gamma(t))=4t-2$

$4t-2\geq 0 \qquad t=\frac{1}{2} \qquad \gamma(t)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=A \qquad B\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \quad C\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right) \quad D\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$

$t=0$ —— $t=\frac{1}{2}$ —— $t=1$ $\Rightarrow t=0$ E $t=1$ MASSIMI

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 41 di 144

PROPRIETÀ: IN UN PUNTO REGOLARE SU UNA CURVA DI LIVELLO $\nabla f(x_0,y_0)$ È $\perp$ ALLA TANGENTE DELLA CURVA IN TALE PUNTO

$f(\gamma(t)) = f|_{\Gamma}(t)$ $\quad f'(\gamma(t)) = 0 \Leftrightarrow \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0$

con $t=0 \Rightarrow \gamma(0) = (x_0,y_0)$ $\quad \nabla f(x_0,y_0) = 0$

OSS: SE SUPPONIAMO (x_0,y_0) È UN ESTREMO RELATIVO DI $f|_{\Gamma}$ ALLORA IN UN INTORNO DI t_0 (OSSIA IN UN INTORNO DI (x_0,y_0)) ZERO È LA CONTROIMMAGINE DI (x_0,y_0) $\to$ $0 = \gamma^{-1}(x_0,y_0)$ E DOVRÀ ESSERE UN PUNTO DI ESTREMO RELATIVO PER $f(\gamma(t))$ $\Rightarrow$ PER IL TEOREMA DI FERMAT IN (x_0,y_0) LA DERIVATA PRIMA SARÀ NULLA $\to \nabla f(x_0,y_0) \cdot \gamma'(0) = 0$

$\Rightarrow$ O IL GRADIENTE È NULLO O È $\perp$ AL VETTORE TANGENTE

TEOREMA DI FERMAT SUL VINCOLO

SIANO $f,g : \Omega \to \mathbb{R}$ $\quad \Omega$ APERTO DI $\mathbb{R}^2$ $\quad f,g \in C^1(\Omega)$

$g(x_0,y_0) = 0 \quad \nabla g(x_0,y_0) \neq (0,0)$

SE (x_0,y_0) È UN PUNTO ESTREMO (PUNTO DI MAX O MIN) PER f SUL VINCOLO $g(x,y)=0$

$\Rightarrow (x_0,y_0)$ È UN PUNTO CRITICO PER f SUL VINCOLO

TEOREMA

SIANO $f,g : \Omega \to \mathbb{R}$ $\quad \Omega$ UN APERTO DI $\mathbb{R}^2$ $\quad f,g \in C^1(\Omega)$

$g(x_0,y_0) = 0 \Rightarrow (x_0,y_0) \in$ AL VINCOLO $\quad \nabla(x_0,y_0) \neq (0,0)$

$\Rightarrow$ IL VETTORE $\nabla f(x_0,y_0)$ È $\perp$ AL VETTORE TANGENTE AL VINCOLO NEL PUNTO (x_0,y_0)

$\Rightarrow \nabla f(x_0,y_0)$ È $/\!/$ $\nabla g(x_0,y_0) \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}$ $\quad \nabla f(x_0,y_0) = \lambda \cdot \nabla g(x_0,y_0)$

PROPRIETÀ: NEI PUNTI DI MASSIMO E DI MINIMO I DUE GRADIENTI SONO $/\!/$ $\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \,/\, \nabla f = \lambda \nabla g$

$A\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ $B\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ $C\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ $D\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$

$f(A)=4$ $f(B)=4$ $f(C)=-1$ $f(D)=-1$

ESSENDO SU UN COMPATTO $\rightarrow$ A, B MAX VINCOLATI C, D MIN ASSOL. VINCOLATI

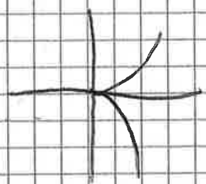
ESEMPIO

$f(x,y)=x$ VINCOLO $g(x,y)=y^2-x^3=0$

$$\begin{cases}(1,0)=\lambda(-3x^2,2y)\\ y^2-x^3=0\end{cases} \quad \begin{cases}1=-3\lambda x^2\\ 0=2\lambda y\\ y^2-x^3=0\end{cases} \quad \begin{cases}\lambda=-\frac{1}{3x^2}\\ \cancel{\lambda=0} \vee y=0\\ y^2-x^3=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\lambda=\frac{1}{3x^2}\\ y=0\\ x^3=0\end{cases}$$ SE $x=0$ $1=0$ $\Rightarrow$ NON POSSO APPLICARE LAGRANGE

$y^2=x^3$ $y=+\sqrt{x^3}$ $\vee$ $y=-\sqrt{x^3}$



$(0,0)$ PUNTO DI NON REGOLARITÀ $\Rightarrow$ $g(x,y)\notin C^1$

AL CRESCERE DELLE CURVE $x=k$ MI ALLONTANO DA $(0,0)$ $\Rightarrow$ $(0,0)$ È MINIMO

ESEMPIO

$f(x,y)=x^2+|y|-y^2-3$ VINCOLO: $K=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x^2+y^2\leq 3\}$

SE $y\geq 0$ $f(x,y)=x^2-y^2+y-3$ $\nabla f=(2x,-2y+1)$

$$\begin{cases}2x=0\\ 1-2y=0\end{cases} \quad \begin{cases}x=0\\ y=\frac{1}{2}\end{cases}$$ $A\left(0,\frac{1}{2}\right)$ PUNTO CRITICO. VALIDO $y\geq 0$

$$\begin{cases}(2x,1-2y)=\lambda(2x,2y)\\ x^2+y^2\leq 3\\ y\geq 0\end{cases} \quad \begin{cases}2x=\lambda 2x\\ 1-2y=\lambda 2y\\ x^2+y^2-3=0\\ y\geq 0\end{cases}$$

$f\left(0,\frac{1}{2}\right)=0+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-3=-\frac{11}{4}$

$$\begin{cases}x(1-\lambda)=0\\ 1-2y=\lambda 2y\\ x^2+y^2-3=0\\ y\geq 0\end{cases} \quad \begin{cases}\lambda=1 \vee x=0\\ 1=4y \vee 1-2y=\lambda 2y\\ y^2-3=0\\ y\geq 0\end{cases} \quad \begin{cases}x=0\\ 1-6=6\lambda\\ y=\pm\sqrt{3}\\ y\geq 0\end{cases}$$

$(0,\sqrt{3})=B$ $f(B)=\sqrt{3}-6$

$x^2+\frac{1}{16}=3$ $x^2=\frac{47}{16}$ $x=\pm\frac{\sqrt{47}}{4}$ $C=\left(\frac{\sqrt{47}}{4},\frac{1}{4}\right)$ $D=\left(-\frac{\sqrt{47}}{4},\frac{1}{4}\right)$ $f(C)=f(D)=\frac{1}{8}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 45 di 144

ESEMPIO

$f(x,y) = \cos^2(x+y) - \sin(x-y) - x - 1 = 0$ $\quad y = \varphi(x)$ in un intorno di $x=0$

con $\varphi(0) = \pi$. $x=0$ massimo relativo per $y = \varphi(x)$?

$f(0,\pi) = 1 - 0 - 0 - 1 = 0$ $\quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2\cos(x+y) - \sin(x+y) + \cos(x+y)$

$\frac{\partial f}{\partial y}(0,\pi) \neq 0$ sì $\Rightarrow$ teorema del Dini

$f(x, \varphi(x)) = 0$ $\quad \forall x$ intorno $x=0$ $\quad f(x,\varphi(x)) = \cos^2(x+\varphi(x)) - \sin(x-\varphi(x)) - x - 1 = 0$

$$\frac{df}{dx} = -2\cos(x+\varphi(x)) \cdot \sin(x+\varphi(x)) \cdot (1+\varphi'(x)) - \cos(x-\varphi(x)) \cdot (1-\varphi'(x)) - 1 = 0$$

in $x=0$ $\quad -2\cos(0+\varphi(0)) \cdot \sin(\varphi(0)) \cdot (1+\varphi'(0)) - \cos(-\varphi(0)) \cdot (1-\varphi'(0)) - 1 = 0$

$\varphi(0) = \pi$ $\quad \sin\pi = 0$ $\quad -\cos(-\pi) \cdot (1-\varphi'(0)) - 1 = 0$

$\cancel{1} - \varphi'(0) - \cancel{1} = 0$ $\quad \varphi'(0) = 0 \Rightarrow x=0$ punto critico per $y = \varphi(x)$

$$\frac{d^2f}{dx^2} = 2\sin(x+\varphi(x))(1+\varphi'(x))^2 \sin(x+\varphi(x)) - 2\cos(x+\varphi(x))\cos(x+\varphi(x))(1+\varphi'(x))^2 -$$
$$-2\cos(x+\varphi(x))\sin(x+\varphi(x)) \cdot \varphi''(x) + \sin(x-\varphi(x))(1-\varphi'(x))^2 - \cos(x+\varphi(x))(-\varphi''(x)) = 0$$

in $x=0$

$$2\sin(\varphi(0)) \cdot (1+\varphi'(0))^2 \cdot \sin(\varphi(0)) - 2\cos(\varphi(0))\cos(\varphi(0))(1+\varphi'(0))^2 - 2\cos(\varphi(0)) \cdot$$
$$\cdot \sin(\varphi(0)) \cdot \varphi''(0) + \sin(\varphi(0))(1-\varphi'(0))^2 - \cos(\varphi(0))(-\varphi''(0)) = 0$$

$\Rightarrow 0 - 2 - 0 + 0 - \varphi''(0) = 0$ $\quad \varphi''(0) = -2$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 47 di 144

$\gamma(t) = (x(t), y(t)) \quad t \in [a,b] \quad \gamma'(x'(t), y'(t))$

$$\int_\gamma f \, dS = \int_a^b f(x(t), y(t)) \cdot \sqrt{(x')^2(t) + (y')^2(t)} \, dt$$

OSS: $y = g(x) \quad \gamma(t) = (t, g(t)) \quad \gamma'(t) = (1, g'(t)) \neq (0,0)$

$$\int_a^b f(\gamma(t)) \sqrt{1 + (g'(t))^2} \, dt \qquad y = g(x) \in C^1$$

OSS: SE $f(x,y) \geq 0$ LUNGO γ ALLORA $\int_\gamma f \, dS$ RAPPRESENTA L'AREA DELLA SUPERFICIE $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; x = x(t) \;\; y = y(t) \;\; z \in [0, f(x(t), y(t))]\}$ CON $t \in [a,b]$

ESEMPIO

$\int_\gamma \frac{y}{x^2+y^2} \, dS \quad \gamma$ È LA SEMICIRCONFERENZA DI CENTRO L'ORIGINE E RAGGIO R

$\gamma(t) = (R\cos t, R\sin t) \quad t \in [0, \pi]$ SEMICIRCONFERENZA POSITIVA

$\gamma(0) = (R, 0) \quad \gamma(\pi) = (-R, 0) \quad f(\gamma(t)) = \frac{R\sin t}{R^2\cos^2 t + R^2 \sin^2 t} = \frac{\sin t}{R}$

$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{R^2\sin^2 t + R^2\cos^2 t} = R$

$$\int_\gamma \frac{y}{x^2+y^2} \, dS = \int_0^\pi \frac{\sin t}{R} \cdot R \, dt = [-\cos t]_0^\pi = 1 + 1 = 2$$

TEOREMA: SE γ_1 E γ_2 SONO DUE CURVE EQUIVALENTI

$\Rightarrow \int_{\gamma_1} f \, dS = \int_{\gamma_2} f \, dS$

$\Rightarrow$ INTEGRALE CURVILINEO I^a SPECIE NON DIPENDE DALLA PARAMETRIZZAZIONE MA SOLO DAL SOSTEGNO

OSS: IN 3 VARIABILI: $\int_\gamma f \, dS = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \cdot \sqrt{(x')^2(t) + (y')^2(t) + (z')^2(t)} \, dt$

~~Esercizio~~

OSS: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\quad \bar{x} \to f(\bar{x})$ $\quad$ VINCOLO $g_i(\bar{x})$ $\quad i = 1, \dots, m$ $\quad$ (PIÙ VINCOLI)

$$\begin{cases} \nabla f(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot \nabla g_i(\bar{x}) \\ g_i(\bar{x}) = 0 \end{cases}$$

ESERCIZIO

$f(x,y,z) = -x - y + 2z$ $\qquad -x + y + 2z = k \to$ SUPERFICI DI LIVELLO

VINCOLO $\quad x^2 + y^2 = 10 \qquad y + z = 3$

$\nabla f = (-1, -1, 2) \qquad \nabla g_1 = (2x, 2y, 0) \qquad \nabla g_2 = (0, 1, 1)$

$$\begin{cases} (-1,-1,2) = \sum_{i=1}^{2} \lambda_i \nabla g_i \\ g_1 = 0 \\ g_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} (-1,-1,2) = \lambda_1 (2x, 2y, 0) + \lambda_2 (0, 1, 1) \\ x^2 + y^2 - 10 = 0 \\ y + z - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1 = 2\lambda_1 x \\ -1 = 2\lambda_1 y + \lambda_2 \\ 2 = \lambda_2 \\ x^2 + y^2 = 10 \\ y + z = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda_2 = 2 \\ -1 - 2 = 2\lambda_1 y \\ -1 = 2\lambda_1 x \\ x^2 + y^2 = 10 \\ y + z = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda_2 = 2 \\ \lambda_1 = -\frac{3}{2y} \\ -1 = -\frac{3}{y} x \\ x^2 + y^2 = 10 \\ y + z = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3x \\ x^2 + 9x^2 = 10 \\ z = 3 - y \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = 3x \\ z = 3 - y \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1 \lor x = -1 \\ y = 3 \lor y = -3 \\ z = 0 \lor z = 6 \end{cases} \qquad \begin{matrix} A(1, 3, 0) \\ B(-1, -3, 6) \end{matrix}$$

$f(A) = -1 - 3 = -4 \qquad f(B) = 1 + 3 + 12 = 16 \implies$ A MINIMO $\quad$ B MASSIMO

ESERCIZIO

PERIMETRO $2p$ - RETTANGOLO AREA MASSIMA?

AREA $\to f(x,y) = xy$ $\qquad$ VINCOLO $\to 2x + 2y - 2p = 0$

$$\begin{cases} (y, x) = \lambda(2, 2) \\ 2x + 2y - 2p = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 2\lambda \\ x = 2\lambda \\ 2x + 2y - 2p = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 2\lambda \\ x = 2\lambda \\ 4\lambda + 4\lambda = 2p \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \frac{1}{2}p \\ x = \frac{1}{2}p \\ \lambda = \frac{1}{4}p \end{cases}$$

$\implies x = \frac{1}{2}p \quad$ E $\quad y = \frac{1}{2}p$

IL VALORE DI $s(f) = S(f)$ SI DICE INTEGRALE DOPPIO DI f SU R, OVVERO: $\iint_R f(x,y)\,dx\,dy \rightarrow \int_{x=a}^{x=b}\int_{y=c}^{y=d} f(x,y)\,dx\,dy$

OSS: SE $f(x,y) \geq 0 \ \forall (x,y) \in R \Rightarrow \iint_R f(x,y)\,dx\,dy$ RAPPRESENTA IL VOLUME DELL'INSIEME $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, 0 \leq z \leq f(x,y) \text{ con } (x,y) \in R\}$

ESEMPIO

$\iint_R (xe^y + x^2)\,dx\,dy \qquad R = [0,2] \times [-1,1]$

$\hookrightarrow \int_{x=0}^{x=2}\int_{y=-1}^{y=1} (xe^y + x^2)\,dx\,dy$

FACCIAMO RISPETTO A y: $\int_0^2 \left[xe^y + x^2y\right]_{y=-1}^{y=1} dx = \int_0^2 \left(ex + x^2 - \frac{1}{e}x + x^2\right) dx =$

$= \int_0^2 \left(2x^2 + xe - x\frac{1}{e}\right) dx = \left[\frac{2x^3}{3} + e\frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{2e}\right]_0^2 = \frac{16}{3} + 2e - \frac{2}{e}$

SE INVERTO L'ORDINE? $\int_{y=-1}^{y=1}\int_0^2 (xe^y + x^2)\,dx\,dy =$

$\int_{-1}^{1} \left[e^y\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right]_0^2 dy = \int_{-1}^{1} 2e^y + \frac{8}{3} = \left[2e^y + \frac{8}{3}y\right]_{-1}^{1} = 2e + \frac{8}{3} - \frac{2}{e} + \frac{8}{3} = \frac{16}{3} + 2e - \frac{2}{e}$

$\Rightarrow$ OSS: È INDIFFERENTE INTEGRARE PRIMA RISPETTO A x O A y.

TEOREMA DI FUBINI PER I RETTANGOLI

$R = [a,b] \times [c,d] \qquad f: R \rightarrow \mathbb{R}$ CONTINUA

Ts: $\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_{x=a}^{x=b}\left(\int_{y=c}^{y=d} f(x,y)\,dy\right)dx = \int_{y=c}^{y=d}\left(\int_{x=a}^{x=d} f(x,y)\,dx\right)dy$

OSS: SE $f(x,y) = g(x) \cdot h(y) \Rightarrow \iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_{x=a}^{x=b} g(x)\,dx \cdot \int_{y=c}^{y=d} h(y)\,dy$

ESEMPIO

$R = [0,1] \times [0,\frac{\pi}{2}] \qquad \iint_R x^3\cos y\,dx\,dy = \int_0^1 x^3 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos y\,dy =$

$= \frac{1}{4} \cdot [\sin y]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{4}$

CONSIDERIAMO LA PARTIZIONE DI UN RETTANGOLO R CHE CONTIENE Ω:

$s(\chi_\Omega, \mathcal{P})$ = SOMMA DELLE AREE DI RETTANGOLI INDIVIDUATI DA $\mathcal{P}$ CHE SONO TUTTI COMPLETAMENTE CONTENUTI IN Ω.

$S(\chi_\Omega, \mathcal{P})$ = SOMMA AREE RETTANGOLI CHE CONTENGONO Ω

$S(\chi_\Omega, \mathcal{P}) - s(\chi_\Omega, \mathcal{P})$ = SOMMA AREE RETTANGOLI CHE CONTENGONO IL BORDO $= \partial\Omega \Rightarrow |\partial\Omega| = 0 \Rightarrow$ INSIEME LIMITATO È MISURABILE $\Leftrightarrow |\partial\Omega| = 0$

~~UN INSIEME LIMITATO È MISURABILE~~

TEOREMA

SIA Ω UN INSIEME LIMITATO E MISURABILE DI $\mathbb{R}^2$ E SIA $f : \Omega \to \mathbb{R}$ UNA FUNZIONE LIMITATA E CONTINUA SU Ω

$\Downarrow$

f È INTEGRABILE SU Ω

DEFINIZIONE: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ SI DICE DOMINIO Y-SEMPLICE SE ESISTONO DUE FUNZIONI CONTINUE $\varphi_1, \varphi_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ / $\varphi_1 \leq \varphi_2$ E $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \in [a,b], \varphi_1 \leq y \leq \varphi_2\}$. O DOMINIO VERTICALMENTE CONVESSO

DEFINIZIONE: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ SI DICE DOMINIO X-SEMPLICE SE ESISTONO DUE FUNZIONI CONTINUE $\psi_1, \psi_2 : [c,d] \to \mathbb{R}$ / $\psi_1 \leq \psi_2$ E $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y \in [c,d], \psi_1 \leq x \leq \psi_2\}$. O DOMINIO ORIZZONTALMENTE CONVESSO

OSS: I DOMINI X-SEMPLICE E Y-SEMPLICE SONO INSIEMI MISURABILI

OSS: UN DOMINIO X-SEMPLICE O Y-SEMPLICE È UN INSIEME CHIUSO E LIMITATO

DEFINIZIONE: Ω SI DICE DOMINIO REGOLARE SE È UNIONE DI UN NUMERO FINITO DI DOMINI SEMPLICI

3) ADDITTIVITÀ RISPETTO AL DOMINIO DI INTEGRAZIONE:

Ω_1 e Ω_2 / $|\Omega_1 \cap \Omega_2| = 0$ ALLORA:

$$\iint_{\Omega_1 \cup \Omega_2} f(x,y)\,dxdy = \iint_{\Omega_1} f(x,y) + \iint_{\Omega_2} f(x,y)\,dxdy$$

4) MAGGIORAZIONE DELL' INTEGRALE:

$$\left|\iint_{\Omega} f(x,y)\right| \le \iint_{\Omega} |f(x,y)| \le M \cdot |\Omega| \qquad M \to \text{OPPORTUNA COSTANTE}$$

DEFINIZIONE: DEFINIAMO IL VALORE MEDIO DI $f: \Omega \to R$ SU Ω (DI MISURA NON NULLA) COME: $\bar{f}_{\Omega} = \frac{1}{|\Omega|} \cdot \iint_{\Omega} f(x,y)\,dxdy$

FORMULE DI RIDUZIONE

1) Ω DOMINIO Y-SEMPLICE: $\iint_{\Omega} f(x,y) = \int_{x=a}^{x=b} \int_{y=\varphi_1(x)}^{y=\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx$

2) Ω DOMINIO X-SEMPLICE: $\iint_{\Omega} f(x,y) = \int_{y=c}^{y=d} \int_{x=\psi_1(y)}^{x=\psi_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy$

ESEMPIO

$\Omega = \{(x,y) \in R^2 / \; 0 \le x \le 1 \quad \sqrt{x} \le y \le 1\}$ $\iint_{\Omega} e^{y^3}\,dx\,dy =$

$= \int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 e^{y^3}\,dy\,dx =$ ~~NO, FACCIO ANZI x-SEMPLICE~~

NO, RISCRIVO Ω: $\Omega = \{(x,y) \in R^2 / \; 0 \le y \le 1 \quad 0 \le x \le y^2\}$

$$\int_0^1 \int_0^{y^2} e^{y^3}\,dx\,dy = \int_0^1 \left[x e^{y^3}\right]_0^{y^2} dy = \int_0^1 y^2 e^{y^3}\,dy = \frac{1}{3}\left[e^{y^3}\right]_0^1 = \frac{e}{3} - \frac{1}{3} = \frac{e-1}{3}$$

ESEMPIO

$\int_{x=-1}^{x=1} \int_{y=|x|}^{y=\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx$ CAMBIA ORDINE DI INTEGRAZIONE:

TEOREMA DI CAMBIAMENTO DI VARIABILI

SIA Ω MISURABILE, f INTEGRABILE SU Ω.

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\Phi^{-1}(\Omega)} f(x(u,v), y(u,v)) \cdot |\det(J(\Phi(u,v)))|\,du\,dv$$

ESEMPIO

$\Phi(u,v) = (au+bv, \cancel{g} \; cu+dv)$ $\qquad ad-bc \neq 0$

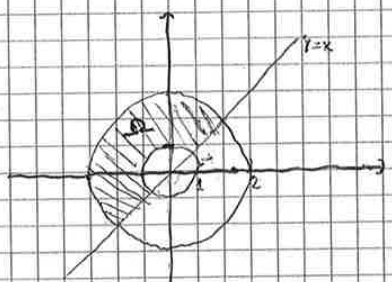
Φ NON CONSERVA LE AREE!

OSS: IL TERMINE $|\det J(\Phi(u,v))|$ RAPPRESENTA IL FATTORE DI TRASFORMAZIONE DALL'ELEMENTO INFINITESIMO $du \cdot dv$ ALL'ELEMENTO INFINITESIMO $dx \cdot dy$

$\Rightarrow dx\,dy = |\det J(\Phi(u,v))| \cdot du\,dv$

ESEMPIO

$$\iint_{\Omega} \frac{xy^2}{x^2+y^2}\,dx\,dy \qquad \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 1 \le x^2+y^2 \le 4 \;\; e \;\; y \ge x\}$$



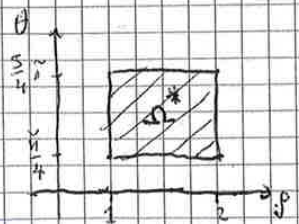
COORDINATE POLARI: $\Phi(\rho,\theta) = (x(\rho,\theta), y(\rho,\theta))$

$x(\rho,\theta) = \rho\cos\theta \qquad y(\rho,\theta) = \rho\sin\theta$

SI RICORDA CHE $|\det J\Phi(\rho,\theta)| = \rho$

$1 \le \rho \le 2 \qquad \frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{5}{4}\pi$ (PER LA GRAFICA)

$$\Rightarrow \iint_{\Omega^*} \frac{\rho\cos\theta\,\rho^2\sin^2\theta}{\rho^2} \cdot |\det J|\,d\rho\,d\theta =$$



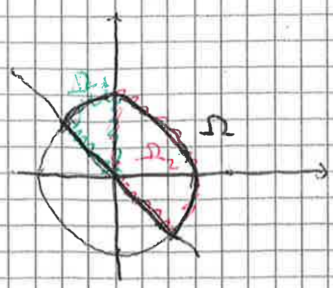
$$= \iint_{\Omega^*} \frac{\cos\theta\,\rho^2\sin^2\theta}{\cancel{\rho}} \cdot \cancel{\rho}\,d\rho\,d\theta = \iint_{\Omega^*} \rho^2\cos\theta\sin^2\theta\,d\rho\,d\theta =$$

$$= \int_{\rho=1}^{\rho=2} \rho^2\,d\rho \cdot \int_{\theta=\frac{\pi}{4}}^{\theta=\frac{5}{4}\pi} \cos\theta\sin^2\theta\,d\theta = \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_1^2 \cdot \left[\frac{\sin^3\theta}{3}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} =$$

$$= \left(\frac{8}{3}-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 - \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3\right) = \frac{7}{3} \cdot \left(-\frac{2\sqrt{2}}{12\cancel{8}}\right) = -\frac{7\sqrt{2}}{18}$$

ESEMPIO

$\iint_\Omega |x|y \, dx\,dy \qquad \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x+y \geq 0 \quad x^2+y^2 \leq 1\}$



$|x|y = \begin{cases} xy & x \geq 0 \\ -xy & x \leq 0 \end{cases}$

$\Omega_1^* = \{(\rho,\theta) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq \rho \leq 1 \quad \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3}{4}\pi\}$ $\qquad \Omega_2^* = \{(\rho,\theta) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq \rho \leq 1 \quad -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$

$\iint_\Omega |x|y \, dx\,dy = \iint_{\Omega_1} -xy \, dx\,dy + \iint_{\Omega_2} xy \, dx\,dy$

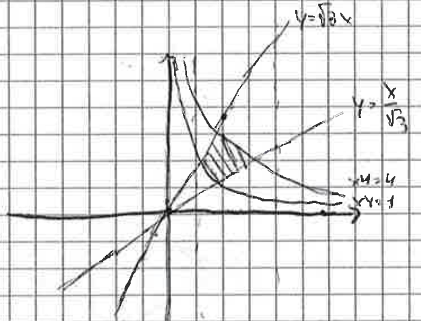
$|\det J| = \rho \qquad \iint_\Omega |x|y \, dx\,dy = \iint_{\Omega_1^*} -\rho^2 \cos\theta \sin\theta \cdot \rho + \iint_{\Omega_2^*} \rho^2 \cos\theta \sin\theta \cdot \rho =$

$= -\int_0^1 \rho^3 \, d\rho \cdot \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{4}\pi} \cos\theta \sin\theta \, d\theta + \int_0^1 \rho^3 \cdot \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \sin\theta \, d\theta =$

$= -\frac{1}{4} \cdot \left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{4}\pi} + \frac{1}{4} \cdot \left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8}$

ESEMPIO

$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq \frac{x}{\sqrt{3}} \leq y \leq \sqrt{3}x \quad 1 \leq xy \leq 4\} \qquad \iint_\Omega \frac{xy}{x^2+y^2} \, dx\,dy$



$tg \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad tg \frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$

$1 \leq \rho^2 \cos\theta \sin\theta \leq 4$ DOVE C'È θ
$\sin\theta$ E $\cos\theta$ SONO POSITIVI

$\Rightarrow \frac{1}{\cos\theta \sin\theta} \leq \rho^2 \leq \frac{4}{\cos\theta \sin\theta}$

OSS: SE IN $f(x,y)$ C'È x^2+y^2 SI CONSIGLIANO LE COORDINATE POLARI

$\frac{1}{\sqrt{\sin\theta\cos\theta}} \leq \rho \leq \frac{2}{\sqrt{\sin\theta\cos\theta}}$ → CONDIZIONE DI ρ

$\int_{\frac{1}{\sqrt{\sin\theta\cos\theta}}}^{\sqrt{\cdots}} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\rho^2 \cos\theta \sin\theta}{\rho^2} \rho \, d\theta \, d\rho = \int_{\frac{1}{\sqrt{\ }}}^{\frac{2}{\sqrt{\ }}} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \rho \cos\theta \sin\theta \, d\theta \, d\rho = \int_{\frac{1}{\sqrt{\ }}}^{\frac{2}{\sqrt{\ }}} \rho \left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} d\rho =$

$= \int_{\frac{1}{\sqrt{\ }}}^{\frac{2}{\sqrt{\ }}} \rho \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\right) d\rho = \frac{1}{2}\left[\frac{\rho^2}{2}\right]_{\frac{1}{\sqrt{\sin\theta\cos\theta}}}^{\frac{2}{\sqrt{\sin\theta\cos\theta}}} = \left[\frac{1}{4}\left(\frac{4}{\sin\theta\cos\theta} - \frac{1}{\sin\theta\cos\theta}\right)\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} =$

$= \frac{1}{4}\left(\frac{3}{\sqrt{3}}\right) = \frac{3}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ (ERRORE! SBAGLIATO ORDINE DI INTEGRAZIONE)

[illegible]

DEFINIZIONE: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ si dice dominio ~~regol~~ regolare in $\mathbb{R}^3$ se è l'unione di un numero finito di insiemi di tipo ① e ②.

① $\Omega = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / (x,y)\in D / \varphi_1(x,y) \le z \le \varphi_2(x,y)\}$ dove $\varphi_1, \varphi_2 \in C^1(D)$

② $\Omega = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / z\in[a,b], (x,y)\in \Omega(z)\}$ $\Omega(z)$ insieme misurabile in $\mathbb{R}^2$

FORMULE DI RIDUZIONE

Ω un dominio regolare di $\mathbb{R}^3$. $f: \Omega \to \mathbb{R}$ f continua su Ω allora:

1) INTEGRAZIONE PER FILI se Ω è ① ovvero $\Omega = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / (x,y)\in D / \varphi_1 \le z \le \varphi_2\}$

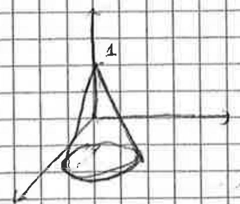
allora: $$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dxdydz = \iint_D \int_{z=\varphi_1}^{z=\varphi_2} f(x,y,z)\,dz\,dx\,dy$$

2) INTEGRAZIONE PER SEZIONI se Ω è ② allora:

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dxdydz = \int_{z=a}^{z=b} \iint_{\Omega(z)} f(x,y,z)\,dxdy\,dz$$

ESEMPIO

$\iiint_\Omega (x^2+y^2)z\,dxdydz$ $\quad \Omega = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / 0 \le z \le 1-\sqrt{x^2+y^2}\}$



• per fili: se $z=0$ $\quad 1-\sqrt{x^2+y^2}=0 \quad x^2+y^2=1$

$\Rightarrow$ circonferenza raggio uno $\Rightarrow D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x^2+y^2 \le 1\}$

$$= \iint_D \int_{z=0}^{z=1-\sqrt{x^2+y^2}} (x^2+y^2)z = \iint_D \left[(x^2+y^2)\frac{z^2}{2}\right]_0^{1-\sqrt{x^2+y^2}} = \iint_D (x^2+y^2)\cdot\frac{1+x^2+y^2-2\sqrt{x^2+y^2}}{2}\,dxdy =$$

$x = \rho\cos\theta \quad y = \rho\sin\theta \quad \iint_{D'} \quad 0\le\rho\le1 \quad 0\le\theta\le2\pi$

$$= \iint_{D'} \frac{\rho^2}{2}\cdot(1+\rho^2-2\rho)\cdot\underset{\text{jacobiano}}{\rho} = \iint_{D'} \frac{\rho^5-2\rho^4+\rho^3}{2} =$$

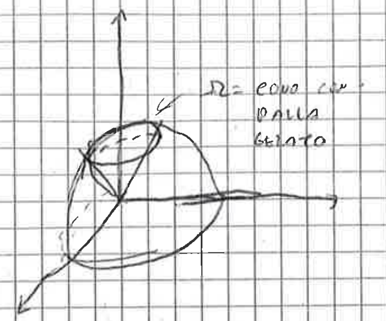
$$= \frac{1}{2}\int_0^1\int_0^{2\pi} (\rho^5-2\rho^4+\rho^3)\,d\theta\,d\rho = \frac{1}{2}\int_0^1 2\pi(\rho^5-2\rho^4+\rho^3)\,d\rho = \pi\left[\frac{\rho^6}{6}-\frac{2\rho^5}{5}+\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1 =$$

$$= \pi\left(\frac{1}{6}-\frac{2}{5}+\frac{1}{4}\right) = \pi\left(\frac{20-48+30}{120}\right) = \frac{\pi}{60}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 63 di 144

Esercizio

$\iiint_\Omega z\,dx\,dy\,dz \qquad \Omega = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, x^2+y^2\le z^2 \quad z\ge 0 \quad x^2+y^2+z^2\le 4\}$



$y = \rho\sin\varphi\sin\theta \qquad z = \rho\cos\varphi$

$x = \rho\sin\varphi\cos\theta$

$|\det J\Phi(\rho,\theta,\varphi)| = \rho^2\sin\varphi$

$0\le\varphi\le\frac{\pi}{4} \qquad 0\le\theta\le 2\pi \qquad 0\le\rho\le 2$

$\iiint_{\Phi^{-1}(\Omega)} \rho\cos\varphi\cdot\rho^2\sin\varphi = 2\pi\left(\int_0^2\rho^3\cdot\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\varphi\sin\varphi\right) = \cancel{2}\pi\left(4\cdot\frac{\sin^2\frac{\pi}{4}}{\cancel{2}}\right) =$

$= 4\pi\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2\pi$ OSS: in $\mathbb{R}^3$ $x^2+y^2=R^2$ è cilindro infinito non circonf.

~~Esercizio~~

OSS: $\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \\ z=z \end{cases}$ $\rho\ge 0$, $\theta\in[0,2\pi]$ → cilindro pieno infinito

↳ coordinate cilindriche $\qquad |\det J\Phi| = \rho$

Esercizio

$\iiint_\Omega \frac{z}{(1+x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy\,dz \qquad \Omega = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, x^2+y^2\le 1 \quad 0\le z\le 3\sqrt{x^2+y^2}\}$

Ω è di tipo (1) coordinate cilindriche

$\iiint_{\Omega^*}\frac{z}{(1+\rho^2)\cancel{\rho}}\cdot\cancel{\rho} = \iiint_{\Omega^*}\frac{z}{1+\rho^2} = \qquad 0\le\rho\le 1 \quad 0\le\theta\le 2\pi \quad 0\le z\le 3\rho$

$= 2\pi\left(\int_{\rho=0}^{\rho=1}\int_{z=0}^{z=3\rho}\frac{z}{1+\rho^2}\right) = 2\pi\cdot\int_0^1\left[\frac{z^2}{2(1+\rho^2)}\right]_0^{3\rho}d\rho = 2\pi\cdot\int_0^1\frac{9\rho^2}{2(1+\rho^2)} =$

$= 9\pi\int_0^1\frac{\rho^2}{1+\rho^2}\,d\rho =$

$= 9\pi\int_0^1\frac{\rho^2+1-1}{\rho^2+1}\,d\rho = 9\pi\left[\int_0^1 1 - \int_0^1\frac{1}{1+\rho^2}\right] = 9\pi\left(1-\arctan(1)\right) = 9\pi\left(1-\frac{\pi}{4}\right) = 9\pi-\frac{9}{4}\pi^2$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 65 di 144

VOLUME DEI SOLIDI DI ROTAZIONE

SIA S IL SOLIDO OTTENUTO ROTANDO IL GRAFICO DI UNA FUNZIONE $\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}^+$ ATTORNO ALL'ASSE z. RAGGIO: $R=\varphi(z)$

$$S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, a\le z\le b \quad 0\le x^2+y^2\le \varphi^2(z)\}$$

PER CALCOLARE QUESTO VOLUME USEREMO L'INTEGRAZIONE PER SEZIONI

$$\Omega(z)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, 0\le x^2+y^2\le \varphi^2(z)\}$$

$$\text{VOLUME}=|S|=\iiint_S 1\,dx\,dy\,dz=\int_{z=a}^{z=b}\iint_{\Omega(z)}1\,dx\,dy\,dz$$

$$\iint_{\Omega(z)}1\,dx\,dy=|\Omega(z)|=\pi\varphi^2(z)$$

$$\Rightarrow \boxed{|S|=\pi\int_a^b \varphi^2(z)\,dz \longrightarrow \text{FORMULA DI PAPPO-GULDINO}}$$

ES: CALCOLARE IL ~~VOLUM~~ VOLUME DEL SOLIDO GENERATO DALLA ROTAZIONE ATTORNO ALL'ASSE z DELLA REGIONE $\Omega=\{(0,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, 0\le z\le a \quad 0\le y\le \cosh z\}$

$$|S|=\pi\int_0^a \cosh^2 z\,dz=\pi\left[\frac{z+\cosh z+\sinh z}{2}\right]_0^a=\pi\left(\frac{a+\cosh a+\sinh a}{2}\right)=\pi\left(\frac{a}{2}+\frac{\sinh(2a)}{4}\right)$$

SI RICORDA: $\int\cosh^2 z=\frac{z+\cosh z+\sinh z}{2}+c$ e $\sinh(2a)=2\sinh(a)\cosh(a)$

ESEMPIO

$$\Omega=\{(x,0,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, 0\le x\le a \quad x^2\le z\le a^2\}$$

$$x=\sqrt{z}=\varphi(z) \qquad |S|=\pi\int_0^{a^2}(\sqrt{z})^2\,dz=\frac{\pi}{2}a^4$$

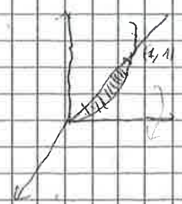
ESEMPIO

$$\Omega=\{(x,0,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, x^2\le z\le x\} \qquad |S|=\pi\int_a^b \varphi^2(x)\,dx$$

SOLIDO INTORNO A ASSE x

$$|S|=\pi\int_0^1 x^2-(x^2)^2\,dx=$$

$$=\pi\int_0^1 x^2-x^4\,dx=\pi\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right]_0^1=\pi\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)=\frac{2}{15}\pi$$



Esercizio.

$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, a \leq x \leq b \quad 0 \leq y \leq \varphi(x)\}$ ATTORNO ASSE X

ORA FACCIAMO PER FILI $|S| = \iiint 1 \, dx\,dy\,dz = \int_{x=a}^{x=b} \left(\iint_D dx\,dy\right) dz$

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2+y^2 \leq \varphi^2(x)\}$

$$|S| = \int_{x=a}^{x=b} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{\rho=0}^{\rho=\varphi(x)} \rho \, d\rho\, d\theta\, dx = 2\pi \int_{x=a}^{x=b} \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^{\varphi(x)} dx =$$

$$= \pi \int_a^b \varphi^2(x)\, dx \qquad \text{MA ANCHE } |S| = 2\pi \iint_\Omega \rho \, d\rho\, dx$$

OSS.: SE $y_B = \rho$ $\quad |S| = 2\pi y_B \iint_\Omega dx\,dy \Rightarrow |S| = 2\pi y_B |\Omega| \Rightarrow y_B = \dfrac{|S|}{2\pi|\Omega|}$

Esercizio

CALCOLARE CENTRO DI MASSA DEL SEMICERCHIO OMOGENEO DI RAGGIO R. SEMICERCHIO POSITIVO.

PER SIMMETRIA $x_B = 0$

$$y_B = \frac{\text{VOLUME SFERA PIENA}}{2\pi \text{ AREA SEMICERCHIO}} = \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \left(\frac{\pi R^2}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}\pi\right)^{-1} = \frac{4R}{3\pi}$$

INTEGRALI CURVILINEI DI 2ª SPECIE

SIA Ω UN INSIEME APERTO DI $\mathbb{R}^n$, SIA $F: \Omega \to \mathbb{R}^n$

CAMPO VETTORIALE IN Ω $\quad F(\bar{x}) = \left(f_1(\bar{x}), f_2(\bar{x}), \dots, f_n(\bar{x})\right)$

$\gamma : [a,b] \to \Omega$ UNA CURVA REGOLARE, SEMPLICE E ORIENTATA

$T(t) = \dfrac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$ È IL VERSORE ~~TANG~~ TANGENTE A γ IN $P = \gamma(t)$

$F \cdot T(t)$ È UNA FUNZIONE SCALARE E PUÒ ESSERE INTEGRATA LUNGO γ

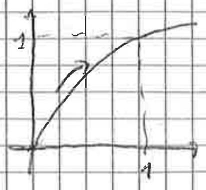
$$\int_\gamma F\, d\gamma = \int_\gamma F \cdot T(t)\, ds = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \frac{\gamma'(t)}{\cancel{\|\gamma'(t)\|}} \cdot \cancel{\|\gamma'(t)\|}\, dt$$

$$\Rightarrow \int_\gamma F\, d\gamma = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt$$

ESERCIZIO

• $F(x,y) = (x^2+y,\ x+y^2)$ $\quad \gamma_1(t) = (t^2, t)$ $\quad t \in [0,1]$ $\quad \int_{\gamma_1} F\, d\gamma_1$?

$F(\gamma_1(t)) = (t^4+t,\ t^2+t^2) = (t^4+t,\ 2t^2)$ $\quad x = t^2 \quad y = t \Rightarrow y = \sqrt{x}$



$\gamma(0) = (0,0) \quad \gamma(1) = (1,1)$

$$\int_0^1 (t^4+t,\ 2t^2)\cdot(2t,\ 1)\, dt =$$

$$\int_0^1 2t^5 + 2t^2 + 2t^2\, dt = 2\int_0^1 t^5 + 2t^2 = 2\left[\frac{t^6}{6} + \frac{2}{3}t^3\right]_0^1 = 2\left(\frac{1}{6}+\frac{2}{3}\right) = \frac{5}{3}$$

Ora $\gamma_2(t) = ((-t+1)^2,\ -t+1)$ → TRUCCO VISTO A INIZIO ANNO, RICONTROLLO

• $\gamma_2(t) = ((t-1)^2,\ 1-t)$ $\quad x = (t-1)^2 \quad y = 1-t$ $\quad F(\gamma_2(t)) = ((t-1)^4+1-t,\ (1-t)^2+(1-t)^2)$

$\gamma(0) = (1,1) \quad \gamma(1) = (0,0)$ ⇒ HO INVERTITO IL SEGNO

$$\int_0^1 ((t-1)^4+1-t,\ 2(t-1)^2)\cdot(2(t-1),\ -1)\, dt =$$

$$\int_0^1 2(t-1)^5 + 2(t-1) - 2t(t-1) - 2(t-1)^2\, dt = \int_0^1 2(t-1)^5 + 2(t-1)(1-t) - 2(t-1)^2\, dt =$$

$$= \int_0^1 2(t-1)^5 - 2(t-1)^2 - 2(t-1)^2\, dt = 2\left[\frac{(t-1)^6}{6} - \frac{2(t-1)^3}{3}\right]_0^1 =$$

$= 2\left(-\frac{1}{6} - \frac{2}{3}\right) = -\frac{5}{3}$, INFATTI VIENE L'OPPOSTO CHE CON γ_1

• $\gamma_3 = (t, t^2)$ con $t \in [0,1]$ $\quad F(\gamma_3(t)) = (2t^2,\ t^4+t)$

$$\int_0^1 (2t^2,\ t^4+t^4)\cdot(1,\ 2t)\, dt = \int_0^1 2t^2 + 2t^2 + 2t^5 = 2\int_0^1 t^5 + 2t^2 =$$

$$= 2\left[\frac{t^6}{6} + \frac{2}{3}t^3\right]_0^1 = 2\left(\frac{1}{6}+\frac{2}{3}\right) = \frac{5}{3}$$

• $\gamma = \gamma_2 \cup \gamma_3$ $\quad \int_\gamma F\, d\gamma = \int_{\gamma_2} F\, d\gamma_2 + \int_{\gamma_3} F\, d\gamma_3 = -\frac{5}{3} + \frac{5}{3} = 0$

⇒ $\oint_\gamma F\, d\gamma = 0$

• $G = (y, -x)$ su γ? $\quad G(\gamma_2(t)) = (1-t,\ -(t-1)^2)$ $\quad \int_{\gamma_2} G\, d\gamma_2 = \int_{\gamma_2} (1-t,\ -(t-1)^2)\cdot(2(t-1),\ -1)$

$$= \int_0^1 -2(t-1)^2 + (t-1)^2\, dt = \int_0^1 -(t-1)^2\, dt = -\left[\frac{(t-1)^3}{3}\right]_0^1 = -\frac{1}{3}$$

$\int_{\gamma_3} G = \int_0^1 (t^2, -t)\cdot(1, 2t)\, dt = \int_0^1 t^2 - 2t^2 = \left[-\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = -\frac{1}{3}$ $\quad \Rightarrow \oint_\gamma G\, d\gamma = -\frac{1}{6}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 71 di 144

ESEMPIO

$F(x,y) = (x^2+y,\ x+y^2)$ È CONSERVATIVO?

$\frac{\partial U}{\partial y \partial x} = 1 \qquad \frac{\partial U}{\partial x \partial y} = 1 \qquad 1=1 \Rightarrow$ SÌ TEOREMA DI SCHWARTZ

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = x^2+y \\ \frac{\partial U}{\partial y} = x+y^2 \end{cases} \xrightarrow{\text{INTEGRALO}} U = \frac{x^3}{3} + x \cdot y + \varphi(y) \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial y} = x + \frac{d\varphi(y)}{dy} = x+y^2$$

$\varphi(y)$: COSTANTE RISPETTO A x

$$\Rightarrow \frac{d\varphi(y)}{dy} = y^2 \qquad \varphi(y) = \frac{y^3}{3} + c \quad \Rightarrow \quad U = \frac{x^3}{3} + xy + \frac{y^3}{3} + c$$

TEOREMA: INTEGRALE DI LINEA DI UN CAMPO CONSERVATIVO

Hp: SIANO $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ APERTO NON VUOTO, $F: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ UN CAMPO VETTORIALE CONTINUO E CONSERVATIVO, $U: \Omega \to \mathbb{R}$ UN POTENZIALE DI F SU Ω, $\gamma: [a,b] \to \Omega$ UNA CURVA PARAMETRICA REGOLARE A TRATTI

Ts: $\int_\gamma F\, d\gamma = U(\gamma(b)) - U(\gamma(a))$

ESEMPIO

$F(x,y) = (x^2+y,\ x+y^2) \qquad U(x,y) = \frac{x^3}{3} + xy + \frac{y^3}{3} + c \qquad \gamma: [0,1] \to \mathbb{R}^2$

$\gamma(0) = (0,0) \qquad \gamma(1) = (1,1)$

$U(\gamma(0)) = 0+0+0+c = c \qquad U(\gamma(1)) = \frac{1}{3} + 1 + \frac{1}{3} + c = \frac{5}{3} + c$

$$\int_{\partial\gamma} F\, d\gamma = U(\gamma(1)) - U(\gamma(0)) = \frac{5}{3} + c - c = \frac{5}{3}$$

OSS: $\frac{dU(\gamma(t))}{dt} = \nabla U(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \qquad [a,b] \xrightarrow{\gamma} \Omega \xrightarrow{U} \mathbb{R}$

$$\int_\gamma F\, d\gamma = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = \int_a^b \nabla U(\gamma(t))\, \gamma'(t) = \int_a^b \frac{dU(\gamma(t))}{dt} = U(\gamma(b)) - U(\gamma(a))$$

DEFINIAMO IL ROTORE DI $F: \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ (Ω APERTO NON VUOTO):

$$\vec{rot}\, F = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix}$$

DEFINIZIONE: UN CAMPO VETTORIALE $F: \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ / $\vec{rot}\, F = 0$ SI DICE IRROTAZIONALE. OVVERO $\vec{rot}\, F = 0 \Rightarrow$ IRROTAZIONALE

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} = \hat{i}\left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}\right) + \hat{j}\left(\frac{\partial f_3}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial z}\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right) \quad \triangle!$$

$$\vec{rot}\, F = 0 \qquad \frac{\partial f_3}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial z} \ \wedge \ \frac{\partial f_3}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial z} \ \wedge \ \frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial y}$$

ESERCIZIO

$$F(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right) \qquad \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{-1(x^2+y^2) + y(2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-x^2-y^2+2y^2}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \Rightarrow F \text{ IRROTAZIONALE}$$

$\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ $t \in [0, 2\pi]$ CIRCONFERENZA RAGGIO 1

$$\int_\gamma F\,d\gamma = \int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt = \int_0^{2\pi} \left(-\frac{\sin t}{1}, \frac{\cos t}{1}\right)\left(-\sin t, \cos t\right) dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sin^2 t + \cos^2 t \; dt = [t]_0^{2\pi} = 2\pi \neq 0 \Rightarrow \text{NO CONSERVATIVO}$$

DEFINIZIONE UN APERTO CONNESSO PER ARCHI $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ~~CONTENUTO~~ SI DICE SEMPLICEMENTE CONNESSO SE OGNI CURVA CHIUSA CONTENUTA IN Ω PUÒ ESSERE DEFORMATA CON CONTINUITÀ IN Ω FINO AD ESSERE RIDOTTA AD UN PUNTO SENZA USCIRE DA Ω

LEMMA: $\omega(x,y) = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ (FORMA DIFFERENZIALE DI CLASSE C^1, OSSIA $P(x,y)$ E $Q(x,y)$ DI CLASSE C^1).

① SIA $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ X-SEMPLICE ($\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y \in [c,d]\ \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$ CON $\partial^+\Omega$ (BORDO SENSO ANTIORARIO), CON ψ_1 E ψ_2 REGOLARI A TRATTI

$$\Downarrow$$

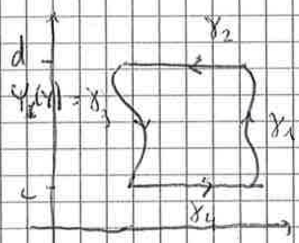
$$\iint_\Omega \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\,dx\,dy = \oint_{\partial^+\Omega} Q(x,y)\,dy$$

② SIA $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ Y-SEMPLICE $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \in [a,b]\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$ CON φ_1 E φ_2 REGOLARI A TRATTI E CON $\partial^+\Omega$.

$$\Downarrow$$

$$\iint_\Omega \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,dx\,dy = \oint_{\partial^+\Omega} P(x,y)\,dx$$

ESEMPIO (DIMOSTRAZIONE)



$$\iint_\Omega \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy = \int_{y=c}^{y=d} \int_{x=\psi_1(y)}^{x=\psi_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy =$$

$$= \int_c^d \Big[Q(x,y)\Big]_{x=\psi_1(y)}^{x=\psi_2(y)} dy = \int_c^d Q(\psi_2(y),y) - Q(\psi_1(y),y)\,dy =$$

$y = t$

$$= \int_c^d Q(\psi_2(t),t) - \int_c^d Q(\psi_1(t),t)\,dt = \int_{\gamma_1} \overbrace{Q(\gamma_1(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt}^{Q(x,y)dy} + \int_{\gamma_3} Q(x,y)\,dy$$

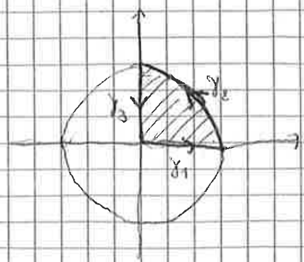
$$\int_{\gamma_2} Q(x,y)\,dy = \int_{\gamma_4} Q(x,y)\,dy = 0 \quad \text{Y NON VARIA}$$

$$= \int_{\gamma_1} Q\,dy + 0 + \int_{\gamma_3} Q\,dy + 0 = \oint_{\partial\Omega} Q(x,y)\,dy$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 77 di 144

Esercizio

$F = (x^2+y,\ e^y - x)$ $\quad \gamma$ è il bordo di $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ x \geq 0 \ \ y \geq 0 \ \ x^2+y^2 \leq 4\}$

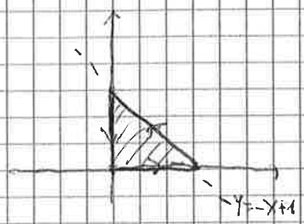


$$\oint_\gamma F\,d\gamma = \iint_\Omega \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} = \iint_\Omega -1-(+1) =$$

$$= \iint_\Omega -2\,dxdy = -2|\Omega| = -2 \cdot \frac{1}{4}\pi\,(2)^2 = -2\pi$$

Esercizio

$F(x,y) = (x^2, xy)$ $\quad \gamma$ è il bordo del triangolo di vertici $(0,0)$ $(1,0)$ $(0,1)$ orientato in senso antiorario



$$\int_\gamma F\,d\gamma = \iint_\Omega \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} = \iint_\Omega y \ dxdy$$

$$\int_{x=0}^{x=1}\int_{y=0}^{y=-x+1} y = \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{-x+1} =$$

$$= \int_0^1 \frac{x^2+1-2x}{2} = \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3} - x^2 + x\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-1+1\right) = \frac{1}{6}$$

Esercizio

① $F(x,y) = (0,x)$ $\quad \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} = 1$

② $F(x,y) = (-y,0)$ $\quad \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} = 1$

③ $F(x,y) = (-y,x)$ $\quad \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} = 2$

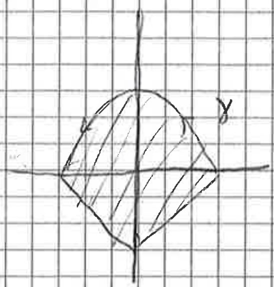
In ① e ②: $\displaystyle\int_{\partial^+\Omega} F\,dP = \iint_\Omega 1\,dxdy = |\Omega|$

In ③: $\displaystyle\int_{\partial^+\Omega} F\,dP = \frac{1}{2}\iint_\Omega 2\,dxdy = |\Omega|$ $\quad$ → mi serve per avere area di Ω

Esercizio

$F(x,y) = \left(e^{\arctan x}\sqrt{1+x^2} - 3y,\ 2x + \log\left(e^{y^3}+y^4+5\right)\right)$

$$\int_\gamma F\,d\gamma = \iint_\Omega \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} = \iint_\Omega 2+3 = 5\,|\Omega|$$



Esercizio molto veloce

Esercizio

$F(x,y) = \left(\frac{(1-x)(1+y^2)}{1+x^2},\ \varphi(x)\cdot y\right)$ determinare le funzioni $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ / F è conservativo in $\mathbb{R}^2$

$\frac{\partial\, \varphi(x)\cdot y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{(1-x)(1+y^2)}{1+x^2}\right)$ per vedere quando irrotazionale.

$\cancel{y}\cdot\varphi'(x) = \frac{1-x}{1+x^2}\cdot 2\cancel{y}$ $\quad \varphi'(x) = \frac{2(1-x)}{1+x^2}$ $\quad \int \frac{2(1-x)}{1+x^2}\,dx = 2\int \frac{1-x}{1+x^2}\,dx =$

$= 2\int \frac{1}{1+x^2}\,dx - \int \frac{2x}{1+x^2}\,dx = 2\arctan x - \ln|1+x^2| + c = \varphi(x)$

Esercizio

$F(x,y,z) = \left(y+e^x,\ x+z+4y^3,\ y-\sin z\right)$ su $\mathbb{R}^3$ (semplicemente connesso) irrotazionale?

$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x} \quad \wedge \quad \frac{\partial f_1}{\partial z} = \frac{\partial f_3}{\partial x} \quad \wedge \quad \frac{\partial f_2}{\partial z} = \frac{\partial f_3}{\partial y}$

• $1 = 1$ sì • $0 = 0$ sì • $1 = 1$ sì $\rightarrow$ irrotazionale

⚠ Potenziale? $\exists U / \nabla U = F$ $\quad \frac{\partial U}{\partial x} = y + e^x \quad \frac{\partial U}{\partial y} = x+z+4y^3 \quad \frac{\partial U}{\partial z} = y - \sin z$

• $\int y+e^x\,dx = yx + e^x + \varphi(y,z) \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial y} = \cancel{x} + \frac{\partial \varphi(y,z)}{\partial y} = \cancel{x}+z+4y^3$

$\frac{\partial \varphi(y,z)}{\partial y} = z + 4y^3 \quad \varphi(y,z) \int z+4y^3\,dy = zy + y^4 + \psi(z)$

$U(x,y,z) = xy + e^x + yz + y^4 + \psi(z) \quad \frac{\partial U}{\partial z} = y + \frac{\partial \psi(z)}{\partial z} = y - \sin z$

$\frac{\partial \psi(z)}{\partial z} = -\sin z \quad \psi(z) = \int -\sin z\,dz = \cos z + c$

$\Rightarrow U = xy + e^x + yz + y^4 + \cos z + c$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 81 di 144

Esercizio

$$F(x,y) = \left(\frac{x^2\cos(x^3-2)}{3y+1}, -\frac{\sin(x^3-2)}{(3y+1)^2} \right) \qquad \gamma(t) = \left(2^{t/3}, t\right) \quad t \in [0,1]$$

$$\cancel{\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{(3y+1)^2\cos(x^3-2)\cdot 3x^2 - \sin(x^3-2)\cdot 2\cdot 3(3y+1)}{(3y+1)^4} = \frac{3x^2\cos(x^3-2)(3y+1) - 2\sin(x^3-2)}{(3y+1)^3}}$$

$$x = 2^{t/3} \quad y = t \quad x = 2^{y/3} \quad y = 3\log_2 x \qquad \gamma(0) = (1,0) \quad \gamma(1) = (2^{1/3}, 1)$$

$$\cancel{\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{(3y+1)\left[2x\cos(x^3-2) + x^2\cdot 3x^2 \cdot -\sin(x^3-2)\right] - 3x^2\cos(x^3-2)}{(3y+1)^2}}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = -\frac{3}{(3y+1)^2}\cdot x^2\cos(x^3-2) \qquad \frac{\partial f_2}{\partial x} = -\frac{\cos(x^3-2)\,3x^2}{(3y+1)^2}$$

$$\Rightarrow \exists U \,/\, \nabla U = F \qquad \int \frac{x^2\cos(x^3-2)}{3y+1}\,dx = \frac{1}{3y+1}\cdot\frac{1}{3}\sin(x^3-2) + \varphi(y)$$

$$U = \frac{\sin(x^3-2)}{3(3y+1)} + \varphi(y) \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = \sin(x^3-2)\cdot -\frac{1}{\cancel{3}}\frac{\cancel{3}}{(3y+1)^2} + \frac{d\varphi(y)}{dy} \overset{\text{deve}}{=} -\frac{\sin(x^3-2)}{(3y+1)^2} + 0$$

$$\Rightarrow \frac{d\varphi(y)}{dy} = 0 \quad \Rightarrow \varphi(y) \text{ è una costante}$$

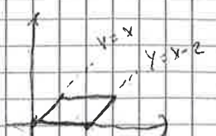
$$U(x,y) = \frac{\sin(x^3-2)}{3(3y+1)} + c$$

$$\int_\gamma F\,d\gamma = U(\gamma(1)) - U(\gamma(0)) = U(\sqrt[3]{2}, 1) - U(1,0) =$$

$$= \frac{\sin(2-2)}{3(3+1)} + c - \frac{\sin(1-2)}{3(0+1)} + c = \cancel{c} - \frac{\sin(-1)}{3} - \cancel{c} = \frac{\sin(1)}{3}$$

Esercizio

$$F(x,y) = \left(3y^2 + 2x e^{y^2}, 2x^2 y e^{y^2}\right) \qquad \gamma \text{ è il bordo del parallelogramma } (0,0)\,(2,0)\,(3,1)\,(1,1) \text{ verso antiorario}$$



$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = 6y + 2xy e^{y^2} \qquad \frac{\partial f_2}{\partial x} = 4xy e^{y^2}$$

$$\int_\gamma F\,d\gamma = \iint_\Omega \cancel{4xye^{y^2}} - 6y - \cancel{4xye^{y^2}}\,dx\,dy = \iint_\Omega -6y\,dx\,dy =$$

$$= \int_{y=0}^{y=1}\int_{x=y}^{x=y+2} -6y\,dx\,dy = \int_{y=0}^{y=1} -6y\left[x\right]_y^{y+2} dy = -6\int_0^1 y\,(\cancel{y}+2-\cancel{y}) = -6\int_0^1 2y = -12\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1 =$$

$$= -6(1-0) = -6$$

FISSIAMO $v = v_0$ $\Rightarrow$ AL VARIARE DI u HO UNA CURVA

$\Rightarrow$ $\sigma(u, v_0) = (x(u, v_0), y(u, v_0), z(u, v_0))$ VETTORE TANGENTE

DERIVATA PARZIALE DI σ RISPETTO A u: $\sigma_u(u, v_0) = \left(\frac{\partial}{\partial u} x(u, v_0), \frac{\partial}{\partial u} y, \frac{\partial}{\partial u} z\right) =$ 1ª COLONNA DELLA JACOBIANA

ANALOGAMENTE SE FISSO u_0 $\Rightarrow$ $\sigma(u_0, v)$

QUESTE DUE SONO LE CURVE COORDINATE DELLA SUPERFICIE (σ, Σ)

OSS: PRODOTTO VETTORIALE $\sigma_u(u_0, v_0) \times \sigma_v(u_0, v_0)$ = VETTORE NORMALE AL PIANO tg SUPERFICIE

CURVA REGOLARE $\rightarrow$ PRODOTTO REGOLARE $\neq 0$

$N = \sigma_u(u_0, v_0) \times \sigma_v(u_0, v_0)$ VETTORE $\perp$ PIANO TANG. IN (u_0, v_0)

ESEMPIO

$$\sigma: \begin{cases} x = uv \\ y = 1 + 3u \\ z = v^3 + 2u \end{cases} \quad \text{REGOLARE?} \quad J_{\sigma(u,v)} = \begin{pmatrix} v & u \\ 3 & 0 \\ 2 & 3v^2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ RANGO = 2 SE $(u, v) \neq (0,0)$ $\Rightarrow$ REGOLARE OVUNQUE $\setminus (0,0)$

$\sigma_u = (v, 3, 2)$ $\quad$ $\sigma_v = (u, 0, 3v^2)$

$$\sigma_u \times \sigma_v = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ v & 3 & 2 \\ u & 0 & 3v^2 \end{vmatrix} = 9v^2 \hat{i} - (3v^3 - 2u)\hat{j} - 3u\hat{k}$$

NEL PUNTO $P_0(1,4,3)$ $\quad \begin{cases} uv = 1 \\ 1 + 3u = 4 \\ v^3 + 2u = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} u = \frac{1}{v} \\ u = 1 \\ 1 + 1 \cdot 2 = 3 \text{ SÌ} \end{cases} \Rightarrow u = 1 \text{ E } v = 1$

$N(u, v) = (9v^2, -3v^3 + 2u, -3u) \Rightarrow N(1,1) = (9, -1, -3)$

PIANO: $9x - y - 3z + d = 0$ $\quad 9 - 4 - 3 \cdot 3 + d = 0$ $\quad d = 4$ $\Rightarrow$ $9x - y - 3z + 4 = 0$

È IL PIANO TANGENTE ALLA SUPERFICIE

TEOREMA

SIANO $\sigma_1 : K \to \mathbb{R}^3$ $\sigma_2 : K \to \mathbb{R}^3$ DUE CALOTTE SUPERFICIALI REGOLARI CHE DIFFERISCONO PER UN CAMBIAMENTO DI PARAMETRIZZAZIONE.

$$\int_{\sigma_1} f \, d\sigma_1 = \int_{\sigma_2} f \, d\sigma_2$$

PROPRIETÀ

- LINEARITÀ: f e g CONTINUE SU $\Sigma \subseteq \Omega$ ALLORA $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

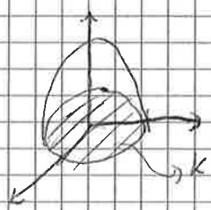
$$\int_{\sigma} (\alpha f + \beta g) \, d\sigma = \alpha \int_{\sigma} f \, d\sigma + \beta \int_{\sigma} g \, d\sigma$$

- ADDITIVITÀ: $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ $\quad \Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset \Rightarrow \int_{\Sigma} f \, d\sigma = \int_{\Sigma_1} f \, d\sigma + \int_{\Sigma_2} f \, d\sigma$

ESEMPIO

$\int_{\Sigma} z^2 \, d\sigma \qquad \Sigma = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \ x^2+y^2+z^2 = 1 \quad z \geq 0 \}$ → SEMISFERA

$$K = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ x^2+y^2 \leq 1 \}$$



$$g(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2} \qquad \sigma : \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = \sqrt{1-x^2-y^2} \end{cases}$$

$$n(x,y) = \sigma_x \times \sigma_y = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}, -\frac{\partial g}{\partial y}, 1 \right)$$

$$n(x,y) = \left(-\frac{2x}{2\sqrt{1-x^2-y^2}}, -\frac{2y}{2\sqrt{1-x^2-y^2}}, 1 \right)$$

$$\| n(x,y) \| = \sqrt{\frac{x^2}{1-x^2-y^2} + \frac{y^2}{1-x^2-y^2} + 1} = \sqrt{\frac{\cancel{x^2}+\cancel{y^2}+1-\cancel{x^2}-\cancel{y^2}}{1-x^2-y^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

$$f(\sigma) = \left(\sqrt{1-x^2-y^2}\right)^2 = 1-x^2-y^2$$

$$\int_{\Sigma} f \, d\sigma = \int_{\Sigma} z^2 \, d\sigma = \iint_K (1-x^2-y^2) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \, dx\,dy = \iint_K \sqrt{1-x^2-y^2} \, dx\,dy =$$

$$= \int_{\rho=0}^{\rho=1} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \sqrt{1-\rho^2} \cdot \rho \, d\theta \, d\rho = 2\pi \cdot -\frac{1}{2} \int_0^1 -2\rho (1-\rho^2)^{1/2} \, d\rho =$$

$$= -\pi \left[\frac{(1-\rho)^{3/2}}{3} \cdot 2 \right]_0^1 = \frac{2}{3}\pi$$

$$= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4^6}{\cancel{6}3}\cos^7\varphi \sin\varphi = \frac{4^6}{3}\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-\frac{\cos^8\varphi}{8}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{4^6\pi}{24}\cdot\frac{\cos^8 0}{1} = \frac{4^6}{24}\pi$$

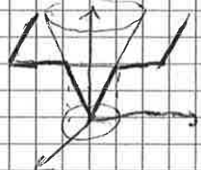
$$\iiint_B x^2+y^2+z^2 = \dots = \frac{2\pi}{30}4^5 = \frac{4^5}{15}\pi$$

$$\Rightarrow z_B = \frac{4^6}{24}\pi\cdot\left(\frac{4^5}{15}\pi\right)^{-1} = \frac{4^6}{4^5}\cdot\frac{15}{24} = \frac{4\cdot 15}{24} = \frac{30}{12} = \frac{15}{6} = \frac{5}{2}$$

ESERCIZIO

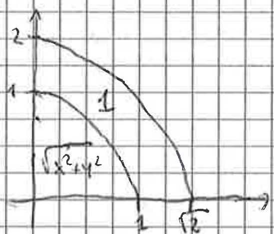
$f(x,y) = \min\left(\sqrt{x^2+y^2}, 1\right)$ $\quad \Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x^2+y^2\le 2 \quad x\ge 0 \quad y\ge 0\}$

$\iint_\Omega f(x,y)$?



$\sqrt{x^2+y^2}\le 1 \qquad x^2+y^2\le 1$

$\Omega_1 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x^2+y^2\le 1\}$



$\Omega_2 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / 1\le x^2+y^2\le 2\}$

$$\iint_\Omega f = \iint_{\Omega_1}\sqrt{x^2+y^2} + \iint_{\Omega_2} 1\, dx\,dy$$

$$\iint_{\Omega_1}\sqrt{x^2+y^2} = \int_{\rho=0}^{\rho=1}\int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}}\sqrt{\rho^2}\cdot\rho = \frac{\pi}{2}\int_0^1\rho^2 = \frac{\pi}{6}\left[\rho^3\right]_0^1 = \frac{\pi}{6}$$

$$\iint_{\Omega_2} 1 = |\Omega| - |\Omega_1| = \frac{2\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \qquad \iint_\Omega f\,dx\,dy = \frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4} = \frac{5}{12}\pi$$

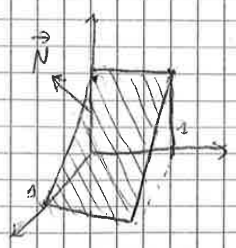
DATA UNA SUPERFICIE PARAMETRICA $\sigma(u,v)$ REGOLARE DI SOSTEGNO Σ SI DEFINISCE IL <u>VETTORE NORMALE</u> $\vec{n}(u,v) = \sigma_u \times \sigma_v$

IL VERSO DI $\vec{n}$ INDUCE SU Σ UN ORIENTAMENTO

<u>DEFINIZIONE</u>: UNA SUPERFICIE Σ SI DICE ORIENTABILE SE PER OGNI CURVA CHIUSA CONTENUTA IN Σ, UN OSSERVATORE CHE PARTE DAL PUNTO P DELLA CURVA, DOPO AVER PERCORSO LA CURVA RITORNA SU P E SI TROVA ORIENTATO ALLO STESSO MODO

ESEMPIO

CALCOLA IL FLUSSO DI $F=(\cos(xz), xy, z)$ ATTRAVERSO $\Sigma=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / z=1-x \quad 0\le x\le 1 \quad 0\le y\le 1\}$ CON VERSORE / $\vec{N}\cdot\hat{k}>0$ ($\hat{k}$ VERSORE ASSE z)



$K=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / 0\le x\le 1 \quad 0\le y\le 1\}$

$z=f(x,y)=1-x$ $\quad \sigma=\begin{cases}x=x\\ y=y\\ z=f(x,y)=1-x\end{cases}$

$n(x,y)=\left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right)=(1,0,1)$

$F(\sigma(x,y))=(\cos(x-x^2), xy, 1-x)$

$F(x,y,f(x))\cdot n(x,y)=(\cos((1-x)x), xy, 1-x)\cdot(1,0,1)=\cos(x-x^2)+1-x$

NON SO FARE $\int\cos(x-x^2)$, SBAGLIATO IL TESTO!

ESEMPIO

TESTO ESEMPIO SOPRA MA $z=1-y$

$\Rightarrow n(x,y)=(0,1,1) \quad F(x,y,f(x,y))=(\cos(x(1-y)), xy, 1-y)$

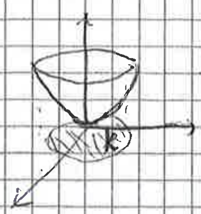
$F\cdot n = xy+1-y$ $\quad$ K UGUALE A PRIMA

$\Phi_\sigma=\int_\sigma F\cdot N\,d\sigma=\iint_K (xy+1-y)\,dx\,dy=\int_0^1\int_{x=0}^{x=1} xy+1-y=$

$=\int_0^1 \left[y\frac{x^2}{2}+x-xy\right]_0^1=\int_0^1 \frac{y}{2}+1-y=\left[\frac{y^2}{4}+y-\frac{y^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{4}+1-\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$

ESEMPIO

CALCOLARE IL FLUSSO DI $F=(-y,x,1)$ ATTRAVERSO LA PORZIONE DI PARABOLOIDE DI EQUAZIONE: $z=x^2+y^2$ $\quad 0\le z\le 9$



$K=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x^2+y^2\le 9\}$ $\quad \sigma=\begin{cases}x=x\\ y=y\\ z=x^2+y^2\end{cases}$

$\vec{n}(x,y,z)=(-2x,-2y,1)$

$F\cdot n=(-y,x,1)\cdot(-2x,-2y,1)=\cancel{2xy}-\cancel{2xy}+1=1$

$\Phi=\int_\sigma F\cdot N\,d\sigma=\iint_K 1\,dx\,dy=\int_{\rho=0}^{\rho=3}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\rho=2\pi\left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^3=9\pi$

$F(\gamma_2(t)) = ((4-t)t, 0, 0)$

$\gamma_3(t) = (0, 0, 4-t)$ $\quad t \in [0,4]$ $\qquad \gamma_3'(t) = (0, 0, -1)$

$F(\gamma_3(t)) = (0, 0, 0)$

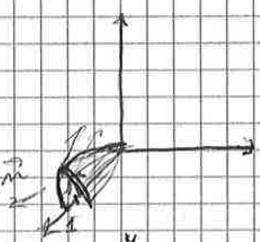
$\Rightarrow \oint_\gamma F\,dP = \oint 0 + \int_{\gamma_2} F\,dP + 0 = \int_0^4 (4t-t^2, 0, 0)(-1, 0, 1)\,dt =$

$= \int_0^4 -4t + t^2\,dt = \left[-2t^2 + \frac{t^3}{3}\right]_0^4 = -32 + \frac{64}{3} = -\frac{32}{3}$

ESEMPIO

CALCOLARE FLUSSO ROTORE DI $F = (2e^x, 3(x-1), 2\sin y)$ ATTRAVERSO Σ

DEFINITA DA $x = z^2 + y^2$ $\quad z \geq 0$ $\quad x \leq 1$ $\quad \vec{n} \cdot \hat{i} > 0$

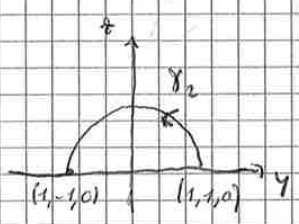


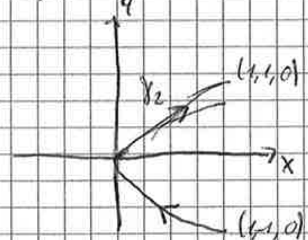
$\vec{n}$ HA VERSO OPPOSTO A QUELLO CLASSICO

$\Rightarrow$ ANTIORARIO (A SX SAREBBE ORARIO)

$\int_\sigma \text{rot}\, F\, N\, d\sigma = \oint F\,dP =$

$\int_{\gamma_1} F\,dP + \int_{\gamma_2} F\,dP$





$\gamma_1(t) = (1, \cos t, \sin t)$ $\quad t \in [0, \pi]$

$\gamma_1'(t) = (0, -\sin t, \cos t)$

$F(\gamma_1(t)) = (\cos t \cdot e, 3(1-1), \sin t \cdot \sin(\cos t)) = (e\cos t, 0, \sin t \sin(\cos(t)))$

$\int_{\gamma_1} F\,dP = \int_0^\pi 0 + 0 + \sin t \cos t \sin(\cos(t)) = \cos(\cos t)\cos t - \int_0^\pi \cos(\cos t)\sin t\,dt =$

$= \left[\cos t \cdot \cos(\cos t) - \sin(\cos t)\right]_0^\pi = -\cos(-1) - \sin(-1) - \cos(1) + \sin(1) =$

$= -2\cos(1) + 2\sin(1)$

Teorema di Gauss (o della divergenza)

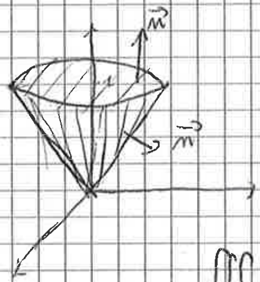
Sia $K \subseteq \mathbb{R}^3$ un aperto con bordo di $\mathbb{R}^3$. ∂K orientato in senso uscente da K, sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un aperto / $K \subseteq \Omega$.
Sia $F: \Omega \to \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale di classe C^1 su Ω.

FLUSSO $= \int_{\partial K} F N \, d\sigma = \iiint_K \text{div } F \, dxdydz$

∂K qui indica una superficie

Esempio

$F(x,y,z) = (2x+z^2, 3, e^y)$ calcolo flusso di F uscente dal bordo di $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 1\}$



FLUSSO $= \Phi_\sigma = \int_{\partial\Omega} F N \, d\sigma = \iiint_\Omega \text{div } F \, dxdydz$

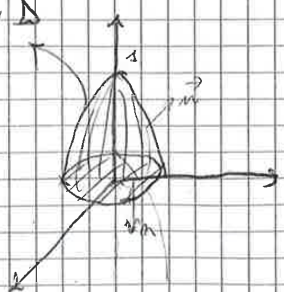
$\text{div } F = 2 + 0 + 0 = 2$

$\iiint_\Omega 2 \, dxdydz = 2|\Omega| = 2 \cdot$ Volume cono $= 2 \cdot \frac{\pi 1^2 \cdot 1}{3} = \frac{2}{3}\pi$

Esempio

$F = (xy, xy, z)$ calcolo flusso attraverso $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / z = 1-x^2-y^2 \quad z \ge 0\}$

SOLIDO D



$\Phi = \int_\Sigma F N \, d\sigma = \iiint_D y + x + 1 \quad dxdydz =$

$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2+y^2 \le 1 \quad 0 \le z \le 1 - x^2 - y^2\}$

$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^3 / x^2+y^2 \le 1\}$

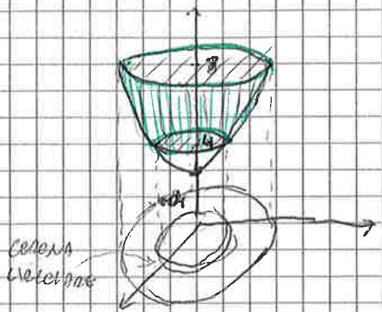
$= \iint_K \int_{z=0}^{z=1-x^2-y^2} (x+y+1) \, dxdydz = \iint_K (x+y+1)(1-x^2-y^2) = \iint_{K'} (\rho\cos\theta + \rho\sin\theta + 1)(1-\rho^2)\rho =$

$= \int_{\rho=0}^{\rho=1} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \rho^2\cos\theta - \rho^4\cos\theta + \rho^2\sin\theta - \rho^4\sin\theta + \rho - \rho^3 =$

ESERCIZIO (INTEGRALE SUPERFICIE)

$$\iint_\Sigma \frac{4x^2}{(x^2+y^2)\sqrt{1+36(x^2+y^2)}}\, dS \qquad \Sigma = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ / \ z = 3+3x^2+3y^2 \quad 4\le z\le 8\}$$

NON È UN CAMPO => INTEGRALE SUPERFICIE DI 1ª SPECIE



$$\begin{cases} z = 4 \quad \vee \ z=8 \\ z = 3+3x^2+3y^2 \end{cases}$$

$3+3x^2+3y^2 = 4 \qquad x^2+y^2 = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow x^2+y^2 \ge \frac{1}{3}$

$3+3x^2+3y^2 = 8 \qquad x^2+y^2 = \frac{5}{3} \quad \Rightarrow x^2+y^2 \le \frac{5}{3}$

$K = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / \frac{1}{3} \le x^2+y^2 \le \frac{5}{3}\}$ → CORONA CIRCOLARE

$$\sigma = \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = f(x,y) = 3+3x^2+3y^2 \end{cases} \qquad n(x,y) = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right) = (-6x, -6y, 1)$$

$$\|n(x,y)\| = \sqrt{36x^2+36y^2+1} = \sqrt{1+36(x^2+y^2)}$$

$$\iint_\Sigma f(x,y) = \iint_K \frac{4x^2}{(x^2+y^2)\cancel{\sqrt{1+36(x^2+y^2)}}} \cdot \cancel{\sqrt{1+36(x^2+y^2)}}\, dx\,dy =$$

$$= \iint_K \frac{4x^2}{x^2+y^2}\, dx\,dy = \int_{\rho=\frac{1}{\sqrt3}}^{\rho=\sqrt{\frac53}} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \frac{4\cancel{\rho^2}\cos^2\theta}{\cancel{\rho^2}} \cdot \rho =$$

$$= 4\int_0^{2\pi}\int_{\frac{1}{\sqrt3}}^{\sqrt{\frac53}} \cos^2\theta\, \rho = 4\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\theta}{2}\left(\frac53 - \frac13\right) = 2\int_0^{2\pi} \frac43 \cos^2\theta =$$

$$= \frac83 \int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta = \frac83\left[\frac{\theta+\cos\theta\sin\theta}{2}\right]_0^{2\pi} = \frac83 \pi$$

ESERCIZIO (STOKES)

$F = (-y^3, x^3, -z^3)$ CALCOLA IL LAVORO COMPIUTO DA F PER SPOSTARE UN PUNTO MATERIALE LUNGO L'ELLISSE γ CHE È L'INTERSEZIONE DEL CILINDRO $x^2+y^2=1$ E DEL PIANO $x+z=3$ ORIENTATA IN SENSO ANTIORARIO SE VISTA DALL'ALTO.

$x+z=3 \qquad z = 3-x$