NUMERO: **2484A** ANNO: 2020

A P P U N T I

STUDENTE: Volpini Leonardo

MATERIA: Analisi 1 - Prof. Cordovez

RADICE n-SIMA

SE $b \in \mathbb{R}$:

- POSSIEDE UN'UNICA RADICE → ESSA È DETTA PRINCIPALE
- POSSIEDE DUE RADICI → LA POSITIVA È QUELLA PRINCIPALE

$\sqrt[n]{b}$ DENOTA SOLO LA RADICE n-SIMA PRINCIPALE DI b

$\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n$ È VERO OGNI VOLTA CHE LE SCRITTURE HANNO SENSO

RADICI RAZIONALI: $\pm \dfrac{\text{DIVISORI}(a_0)}{\text{DIVISORI}(a_n)}$ DI $p(x) = a_n x^n + \dots + a_0$

SE $p(x)$ HA COEFFICIENTI INTERI

RETTE

RETTE PASSANTI PER $P(x_0; y_0)$: $y - y_0 = m(x - x_0)$

m DELLA RETTA PASSANTE PER A E B

↓

$$m: \frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{x - x_A}{x_B - x_A}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 67

NOZIONI ELEMENTARI TEORIA DEGLI INSIEMI

A e B sono insiemi

- $A = B \iff (x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Rightarrow x \in A)$

$$\Downarrow$$

$$A = B \iff (x \in A \iff x \in B)$$

- $A \subset B \iff (x \in A \Rightarrow x \in B)$ $\quad A \subset B \Rightarrow A$ è contenuto in B

- A' = complementare di A

  $A' \Rightarrow x \in A' \iff \neg\, x \in A \iff x \notin A$

- $A \subset B \iff B' \subset A'$

DIMOSTRAZIONE: $A \subset B \iff (x \in A \Rightarrow x \in B)$

$(x \in A \Rightarrow x \in B) \iff (x \notin B \Rightarrow x \notin A) \iff (x \in B' \Rightarrow x \in A')$

$(x \in B' \Rightarrow x \in A') \iff B' \subset A'$

- insieme vuoto $\emptyset = \{x \,/\, x \neq x\}$

  $\emptyset \subset X$ cioè appartiene a tutti gli insiemi

  $X \subset X$ perché $p \Rightarrow p$. Ogni insieme è sottoinsieme di sé

OPERAZIONI CON GLI INSIEMI

- $x \in A \cap B \iff (x \in A \wedge x \in B)$
- $x \in A \cup B \iff (x \in A \vee x \in B)$
- $A \setminus B = \{x \,/\, x \in A,\ x \notin B\}$

  $x \in A \setminus B \iff (x \in A \wedge x \notin B)$

- $A \cap A' = \emptyset$

ESEMPIO: prova che $A \setminus B = A \cap B'$

$x \in A \setminus B \iff x \in A \wedge x \notin B \iff x \in A \wedge x \in B'$

$x \in A \wedge x \in B' \iff x \in A \cap B'$

ESEMPIO: prova che $A \cup C = A \cup B \Rightarrow B = C$

$A = \{1,2,3,4,5\}$ $\quad B = \{2\}$ $\quad C = \{2,3,4\}$

$A \cup C = A$ $\quad A \cup B = A \Rightarrow A \cup C = A \cup B$

ma $B \neq C \Rightarrow A \cup C = A \cup B \Rightarrow B = C$ FALSA

- $(A \cap B)' = A' \cup B'$ $\quad (A \cup B)' = A' \cap B'$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

ASSIOMA DI COMPLETEZZA

- $X \subset \mathbb{R} \;/\; X \neq \emptyset \;\wedge\; \sup(X) \neq +\infty$
  AMMETTE ESTREMO SUPERIORE
- $X \subset \mathbb{R} \;/\; X \neq \emptyset \;\wedge\; \inf(X) \neq -\infty$
  AMMETTE ESTREMO INFERIORE

INTERVALLI

INTERVALLO CHIUSO: $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$

INTERVALLO APERTO: $(a,b) = \{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$

CHIUSO A SINISTRA: $[a,b) = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\}$

CHIUSO A DESTRA: $(a,b] = \{x \in \mathbb{R} / a < x \leq b\}$

$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} / x \leq b\}$ $\quad [a; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} / x \geq a\}$

$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$ ANCHE $\emptyset$ È UN INTERVALLO

VALORE ASSOLUTO

$$|x| = \begin{cases} x & \text{SE } x \geq 0 \\ -x & \text{SE } x < 0 \end{cases}$$

$d(x,y) = |x-y| = |y-x|$

$|x| \geq 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R}; \; |x| = 0 \iff x = 0$

$|x| = |-x| \;\; \forall x \in \mathbb{R}$ $\qquad -|x| \leq x \leq |x| \;\; \forall x \in \mathbb{R}$

$|x+y| \leq |x| + |y|$ $\qquad |x| \cdot |y| = |x \cdot y|$ $\qquad \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

$|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$ $\qquad |x| \geq a \iff x \leq -a \;\vee\; x \geq a$

MODUS TOLLENS E MODUS PONENS

MODUS TOLLENS (MT): $\sim q \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow \sim p$

- → TAUTOLOGIA → SEMPRE VERO
- → DIMOSTRAZIONE CONTRONOMINALE

MODUS PONENS (MP): $p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow \sim p$

- → TAUTOLOGIA → SEMPRE VERO
- → DIMOSTRAZIONE DIRETTA

TEOREMA

$\mathbb{Q}$ È DENSO IN $\mathbb{R}$ $\quad r, r' \in \mathbb{R} / r < r'$

ALLORA $\exists\, a \in \mathbb{Q} / r < a < r'$

COEFFICENTE BINOMIALE

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad n, k \in \mathbb{N} \quad 1 \leq k \leq n$$

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)!}{k!} = \binom{n}{k}$$

$\binom{n}{k}$: RAPPRESENTA IL NUMERO DI SOTTOINSIEMI CON k ~~[illegible]~~ ELEMENTI DI UN INSIEME AVENTE n ELEMENTI

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 7 di 67

TEOREMA COEFFICENTI BINOMIALI

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k$$

DIMOSTRAZIONE PER INDUZIONE:

SE $n=1$ $\quad a+b \overset{?}{=} a^{1-0} \cdot b^0 + a^{1-1} \cdot b^1$ VERO

$\overline{\text{ii}}$ = IPOTESI INDUTTIVA: PER UN CERTO n ARBITRARIO VERO L'IPOTESI

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} \cdot b^k$$

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)^n \cdot (a+b) \underset{\overline{\text{ii}}}{=} \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k\right](a+b) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \underbrace{a \cdot a^{n-k}}_{a^{n+1-k}} \cdot b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot \underbrace{b \cdot b^k}_{b^{k+1}} =$$

STACCO QUANDO $k=0$:

$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} \cdot b^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} \cdot b^{k+1} =$$

$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} \cdot b^k + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} \cdot b^k + b^{n+1} =$$

$$a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right] a^{n+1-k} \cdot b^k + b^{n+1} =$$

$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} \cdot b^k + b^{n+1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} \cdot b^k \Rightarrow \text{DIMOSTRATO ANCHE PER } n+1$$

- A INSIEME $\quad \mathcal{P}(A)$ È L'INSIEME DELLE PARTI DI A

$$X \in \mathcal{P}(A) \iff X \subset A$$

- $X, Y \quad (X \neq \emptyset,\ Y \neq \emptyset)$

$$X \times Y := \{(x,y) \,/\, x \in X,\ y \in Y\} \qquad X \times Y \neq Y \times X$$

↳ PRODOTTO CARTESIANO

TRASFORMAZIONI ELEMENTARI DI FUNZIONI ELEMENTARI

DATA LA FUNZIONE $f(x)$:

- $f(-x)$ SIMMETRIZZO ATTORNO ALL'ASSE Y
- $-f(x)$ SIMMETRIZZO ATTORNO ALL'ASSE X
- $-f(-x)$ SIMMETRIA RISPETTO ALL'ORIGINE
- $f(|x|)$ RISPETTO L'ANDAMENTO PER $x \geq 0$ IN $x<0$
- $|f(x)|$ SIMMETRIZZO LE PARTI NEGATIVE DEL GRAFICO
- $f(x+K)$ CON $K>0$ → TRASLAZIONE ORIZZONTALE VERSO SINISTRA
- $f(x)+K$ CON $K>0$ → TRASLAZIONE VERTICALE VERSO L'ALTO
- $Kf(x)$ CON $K>1$ → DILATAZIONE VERTICALE
- $Kf(x)$ CON $0<K<1$ → CONTRAZIONE VERTICALE
- $f(Kx)$ CON $K>1$ → CONTRAZIONE ORIZZONTALE
- $f(Kx)$ CON $0<K<1$ → DILATAZIONE ORIZZONTALE

FUNZIONI SURIETTIVE E INIETTIVE

- FUNZIONE DICESI SURIETTIVA SU $Y \iff IMM\, f = Y$

ES: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = ax+b$ CON $a \neq 0$ È SURIETTIVA SU $\mathbb{R}$: y È IMMAGINE DI $x = \frac{y-b}{a}$

ES: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ NON È SURIETTIVA SU $\mathbb{R}$ IN QUANTO $Y: [0;+\infty)$

- UNA FUNZIONE SI DICE INIETTIVA SE $\forall y \in IMM\, f$ È IMMAGINE DI UN SOLO ELEMENTO $x \in DOM\, f$

SE $y = f(x_1) = f(x_2)$ CON $x_1, x_2 \in DOM\, f \Rightarrow x_1 = x_2$

$\Rightarrow$ SE $x_1 \neq x_2$ ALLORA $f(x_1) \neq f(x_2)$

FUNZIONE INVERSA (NON LA RECIPROCA)

FUNZIONE DETTA INVERSA SE $x = f^{-1}(y) \iff y = f(x)$

$\Rightarrow DOM\, f^{-1} = IMM\, f$; $IMM\, f^{-1} = DOM\, f$

SE UNA FUNZIONE È INIETTIVA ALLORA È INVERTIBILE

SE f È INIETTIVA E SURIETTIVA SU Y SI DICE CHE f È UNA FUNZIONE BIETTIVA DI X IN $Y \Rightarrow \forall x \in X$, $\exists!\, f(x) \in Y$ E VICEVERSA

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 11 di 67

NEGAZIONE DELLA DEFINIZIONE:

$\neg[\exists l \in \mathbb{R} / (\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N} (n > N \Rightarrow |a_n - l| < \varepsilon)] =$

$\Updownarrow$

$n \leq N \vee |a_n - l| \geq \varepsilon$

$= \forall l \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon > 0 / \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N} / (n > N \wedge |a_n - l| \geq \varepsilon)$

ESEMPIO: $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+5} \neq 1$ $\quad \left|\frac{n}{2n+5} - 1\right| < \varepsilon$

$\left|\frac{n-2n-5}{2n+5}\right| < \varepsilon \quad \left|\frac{-n-5}{2n+5}\right| < \varepsilon \quad \frac{|-(n+5)|}{2n+5} < \varepsilon$

$\frac{n+5}{2n+5} < \varepsilon \quad n+5 < 2n\varepsilon + 5\varepsilon \quad n(1-2\varepsilon) < 5\varepsilon - 5$

$n(1-2\varepsilon) < 5(\varepsilon - 1)$

SUPPONIAMO UN ε GRANDE $\varepsilon = 2$:

$n(1-4) < 5(2-1) \quad -3n < 5$ ~~$n>\dots$~~ OK!

SUPPONIAMO $\varepsilon = \frac{1}{5}$

$n(1-\frac{2}{5}) < 5(\frac{1}{5} - 1) \quad \frac{3}{5} n < -4$ MA

n È POSITIVO QUINDI $+ \cdot + < -$ IMPOSSIBILE

DIVERGENZA

- SUCCESSIONE a_n DIVERGE A $+\infty$ (SCRITTO $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$)

SE $\forall M > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n > N, a_n > M$

- $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$ $\quad \forall M > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n > M, a_n < -M$

ESEMPIO: $\lim_{n\to\infty} n^2 - 1 = +\infty \quad n^2 - 1 > M \quad n^2 > M + 1$

$n > \sqrt{M+1} \Rightarrow N = [\sqrt{M+1}]$

ESEMPIO: $\lim_{n\to\infty} 3 - \sqrt{n} = -\infty \quad 3 - \sqrt{n} < -M \quad \sqrt{n} > M + 3$

$n > M^2 + 9 + 6M \Rightarrow N = [M^2 + 9 + 6M]$

SOTTOSUCCESSIONE

SUCCESSIONE $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\quad (n_k)_{k\in\mathbb{N}} \rightarrow$ SUCCESSIONE DI NUMERI NATURALI $n_1 < n_2 < \dots < n_k < n_{k+1}$

- SI DEFINISCE LA SOTTOSUCCESSIONE DI (a_n) LA SUCCESSIONE (a_{n_k})

ES: $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ $\quad$ SOTTOSUCC.: $(a_{2k}) = \frac{(-1)^{2k}}{2k} = \frac{1}{2k}$ $\quad \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}$

SOTTOSUCC.: $(a_{2k+1}) = \frac{(-1)^{2k+1}}{2k+1} = -\frac{1}{2k+1}$ $\quad -1, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{5} \dots$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 13 di 67

LIMITI NOTEVOLI (ORDINE INFINITI)

- $\lim_{n\to+\infty} a^n = \begin{cases} +\infty & a>1 \\ 1 & a=1 \\ 0 & -1<a<1 \\ \nexists & a\leq -1 \end{cases}$

- $\lim_{n\to+\infty} n^b = \begin{cases} +\infty & b>0 \\ 1 & b=0 \\ 0 & b<0 \end{cases}$

- $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ C.E. $a\geq 0$

- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^b} = 1$ $\forall b\in\mathbb{R}$

- $\lim_{n\to+\infty} \frac{\log n}{n^b} = 0$ $b>0$

- $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^b}{a^n} = 0$ con $a>1 \wedge b>0$

- $\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ con $a>1$

LEMMA: $a_n \leq b_n \leq c_n \quad \forall n\in\mathbb{N}$

SE $\lim_{n\to\infty} a_n = l \wedge \lim_{n\to\infty} c_n = l \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n$

ALLORA ANCHE $\lim_{n\to\infty} b_n = l$

ESERCIZIO

$A\subset\mathbb{R};\ A\neq\emptyset \quad \exists (a_n)_{n\in\mathbb{N}} / a_n\in A \wedge \lim_{n\to\infty} a_n = \sup(A)$?

SUPPONIAMO A LIMITATO SUPERIORMENTE CIOÈ $\exists M = \sup(A)$

$\forall x\in A,\ x\leq M \quad \wedge \quad \forall \varepsilon>0,\ \exists x\in A / M-\varepsilon<x$

SCELGO $\varepsilon = \frac{1}{n}$ $\quad \exists x\in A / M-\frac{1}{n}<x$

DEFINIAMO $x = a_n$

$\forall n,\ M-\frac{1}{n} < a_n \leq M$

SE $n\to+\infty$ $\quad \lim_{n\to+\infty} M = \lim_{n\to+\infty} M-\frac{1}{n} = M$

- $\Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = M$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 15 di 67

LIMITI

$l \in \mathbb{R}$ $\quad I_r(l) \to$ INTORNO DI RAGGIO r DI l

$I_r(l) = \{x \,/\, |x-l| < r\}$ CIOÈ $I_r(l) = (l-r, l+r)$

$I_a(+\infty) \to a$ INDICA L'ESTREMO INFERIORE

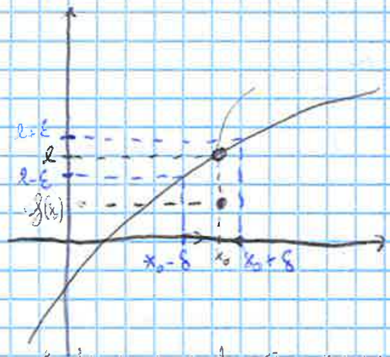
SI DICE CHE $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ CON $l \in \mathbb{R}$ SE

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \,/\, \forall x \in \text{dom} f,$
$0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - l| < \varepsilon$

$x \neq x_0 \iff 0 < |x - x_0|$

DEFINIZIONE IN TERMINI DI INTORNI:

$\forall I_\varepsilon(l), \exists I_\delta(x_0) \,/$
$x \in I_\delta(x_0) - \{x_0\} \implies f(x) \in I_\varepsilon(l)$



ESEMPIO:

$\lim_{x \to 2} (5x-1) = 9$ $\quad \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \,/\, |5x-1-9| < \varepsilon$ se $|x-2| < \delta$

$|5x-1-9| < \varepsilon \quad |5x-10| < \varepsilon \quad |5(x-2)| < \varepsilon \quad 5|x-2| < \varepsilon$

$|x-2| < \frac{\varepsilon}{5} \implies \delta = \frac{\varepsilon}{5}$

ESERCIZIO

ESERCIZIO

$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} [\sin x] = 0 \qquad \varepsilon > 0 \qquad \delta = \frac{\pi}{2}$

$0 < |x - \frac{\pi}{2}| < \delta \qquad |[\sin x] - 0| < \implies 0 < \varepsilon \implies \forall \varepsilon > 0$

- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \quad l \in \mathbb{R}$ SE $\forall \varepsilon > 0, \exists B > 0 \,/$
  $\forall x \in \text{dom} f, x > B \implies |f(x) - l| < \varepsilon$

ESEMPIO: $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+2x}{2x^2+1} = \frac{1}{2} \qquad \left| \frac{x^2+2x}{2x^2+1} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$

$\left| \frac{2x^2+4x-2x^2-1}{2x^2+1} \right| < \varepsilon \qquad \left| \frac{4x-1}{2(2x^2+1)} \right| < \varepsilon \qquad \frac{(4x-1)}{2(2x^2+1)} < \varepsilon$

SUPPONGO $x > \frac{1}{4} \qquad \frac{4x-1}{2(2x^2+1)} < \varepsilon$ MAGGIORO:

$\frac{4x-1}{2(2x^2+1)} < \frac{4x}{2(2x^2+1)} = \frac{2x}{2x^2+1} < \frac{2x}{2x^2} = \frac{1}{x} \qquad \frac{1}{x} < \varepsilon \qquad x > \frac{1}{\varepsilon}$

$B = \{ \frac{1}{\varepsilon} ; \frac{1}{4} \}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 17 di 67

$I_\varepsilon(12) = (11{,}999 ; 12{,}001)$

SICCOME $\lim_{x\to 5} f(x) = 12 \quad \exists I_\delta(5) \,/\, x \in I(5) - \{5\} \Rightarrow f(x) \in I_\varepsilon(12)$

$\Rightarrow f(x)$ SEMPRE $> 11{,}99$

MA SE INCLUDO $x=5$ ALL'INTORNO, IL TUTTO DIVENTA FALSO PERCHÉ IO NON HO $f(5)$, HO SOLO IL LIMITE IN $x_0 = 5$

- f DEFINITA IN $I(x_0) = (x_0 - \delta ; x_0 + \delta)$ $\wedge$ $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ CON $l \in \mathbb{R}$ E $f(x_0) \neq l$ O NON È DEFINITA ALLORA SI DICE x_0 PUNTO DI DISCONTINUITÀ

LIMITI LATERALI

- f DEFINITA IN $I_r^+(x_0)$ INTORNO DESTRO, $x_0 \in \mathbb{R} - \{x_0\}$

SI DEFINISCE $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = l^* \iff \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \,/$

$\forall x \in \text{DOM} f$, $0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

f È CONTINUA A DESTRA IN x_0 SE $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

ESEMPIO:

$\lim_{x\to 1} [x^4 - 2x^3 - x + 2] = \nexists$ $\Uparrow$

$f(x) = [x^4 - 2x^3 - x + 2]$

$f(x) = [x(x^3-1) - 2(x^3-1)]$

$f(x) = [(x-2)(x^3-1)]$

$t = (x-2)(x^3-1)$

$x \to 1^+ \quad t \to 0^-$

$x \to 1^- \quad t \to 0^+$

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} [t] = [0^-] = -1$

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} [t] = [0^+] = 0$

ESEMPIO:

$f(x) = \frac{1}{x} \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \nexists$

ESEMPIO:

$\lim_{x\to 1} H(x) \qquad \lim_{x\to 1^-} H(x) = 1 \qquad \lim_{x\to 1^+} H(x) = 0$

$\Rightarrow \lim_{x\to 1} H(x) = \nexists$

- $\lim_{x\to n^+} [x] = n \qquad \lim_{x\to n^-} [x] = n-1$ CON $n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \lim_{x\to n} [x] = \nexists$

SE LIMITI DESTRO E SINISTRO NON COINCIDONO (MA SONO FINITI) x_0 È UN PUNTO DI DISCONTINUITÀ DI PRIMA SPECIE (SALTO) ⚠

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 19 di 67

INOLTRE $\exists$ (ANCHE) $I''(x_0) \,/\, l-\varepsilon \leq h(x) \leq l+\varepsilon \quad \forall x \in I''(x_0)-\{x_0\}$

DEFINIAMO $I'''(x_0) = I(x_0) \cap I'(x_0) \cap I''(x_0)$

IN $I'''(x_0)-\{x_0\} \quad f(x) \leq g(x) \leq h(x)$

E $\quad l-\varepsilon \leq f(x) \leq l+\varepsilon \quad$ E $\quad l-\varepsilon \leq h(x) \leq l+\varepsilon$

$\Rightarrow l-\varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < l+\varepsilon$

$\Rightarrow g(x) \in I_\varepsilon(l) \Rightarrow \lim_{x\to x_0} g(x) = l$

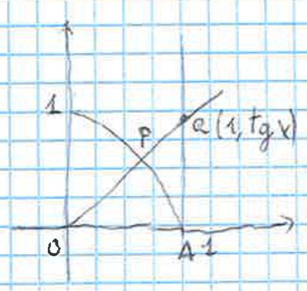
Ts: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x}$

DIMOSTRAZIONE:

FUNZIONE PARI PERCHÉ $f(-x) = f(x)$

$\Rightarrow$ STUDIO IN $x \to 0^+$ $\quad \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$?

$\forall x > 0 \quad \sin x < x \quad 0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\sin x}{x} < 1$



AREA $(OAP) < A(OAQ) \rightarrow \frac{x}{2} < \frac{\operatorname{tg} x}{2}$

$\frac{x}{2} < \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{2} \qquad x < \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \cos x < \frac{\sin x}{x}$

TRA $0 < x < \frac{\pi}{2}$ $\quad \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$

$\lim_{x\to 0^+} 1 = 1 \quad \lim_{x\to 0^+} \cos x = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

SECONDO LIMITE NOTEVOLE:

Ts: $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

DIMOSTRAZIONE:

$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)} =$

$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)} = 1 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{2}$ $\quad (\to 1^2 = 1)$

ALGEBRA DEI LIMITI

1) $\lim_{x\to x_0} (f(x)+g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$

2) $\lim_{x\to x_0} (f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$

3) $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} f(x) : \lim_{x\to x_0} g(x) \qquad g(x) \neq 0$

DIMOSTRAZIONE ①:

Hp: $\lim_{x\to x_0} f(x) \overset{*}{=} l \quad \lim_{x\to x_0} g(x) \overset{**}{=} m \quad l, m \in \mathbb{R}$

(*) $\forall I_{\frac{\varepsilon}{2}}(l), \exists I'(x_0) \,/\, \forall x \in \operatorname{Dom} f,\ x \in I'(x_0) - \{x_0\} \Rightarrow |f(x)-l| < \frac{\varepsilon}{2}$

(**) $\forall I_{\frac{\varepsilon}{2}}(m), \exists I''(x_0) \,/\, \forall x \in \operatorname{Dom} g,\ x \in I''(x_0)-\{x_0\} \Rightarrow |g(x)-m| < \frac{\varepsilon}{2}$

DEFINIAMO $I(x)$ COME $I(x_0) = I'(x_0) \cap I''(x_0)$; $\quad x \in I(x_0) - \{x_0\} \Rightarrow$

$|f(x)+g(x)-(l+m)| \leq |f(x)-l| + |g(x)-m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 21 di 67

LIMITI NOTEVOLI

- $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 = \frac{x}{\sin x}$
- $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$
- $\lim_{x\to\pm\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ $\qquad \lim_{x\to\pm\infty} \left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a$
- $\lim_{x\to 0} \log_a \frac{(1+x)}{x} = \log_a e = \frac{1}{\ln a}$ $\qquad \lim_{x\to 0} \ln \frac{(1+x)}{x} = 1$
- $\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln a$ $\qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$
- $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$

TEOREMA ESISTENZA ZERI

Hp: f continua in $[a,b]$ $\quad f(a)\cdot f(b)<0$

Ts: $\exists\, c \in (a,b) \,/\, f(c)=0$

SE f È STRETTAMENTE MONOTONA c $\exists!$

DIMOSTRAZIONE: $f(a)<0<f(b)$ PONIAMO $a_0=a$

$b_0=b$ SIA $c_0=\frac{a+b}{2}$ $\quad f(c_0)?$ $\; f(c_0)=0 \vee f(c_0)<0 \vee f(c_0)>0$

SE $f(c_0)=0$ TEOREMA DIMOSTRATO

SE $f(c_0)>0$ PONIAMO $a_1=a_0$ $b_1=c_0$ CIOÈ

CONSIDERIAMO LA METÀ SX DI $[a_0,b_0]$

SE INVECE $f(c_0)<0$ PONIAMO $a_1=c_0$, $b_1=b_0$

CIOÈ CONSIDERIAMO LA METÀ DX DI $[a_0,b_0]$

$\Rightarrow [a_1,b_1] \subset [a_0,b_0]$

SUCCESSIONE INFINITA: $[a_0,b_0], [a_1,b_1], \dots, [a_n,b_n]$

$f(a_n)<0<f(b_n) \;\wedge\; b_n-a_n=\frac{b_0-a_0}{2}$

$a_0 \le a_1 \le a_2 \le \dots \le a_n \le \dots \le b_n \le \dots \le b_1 \le b_0$

$(a)_n$ MONOTONA CRESCENTE $\qquad (b)_n$ MONOTONA DECRESCENTE

$\exists \lim_{+\infty} a_n = x_0^- \quad \exists \lim_{+\infty} b_n = x_0^+ \quad x_0^+ - x_0^- = \lim_{+\infty}(b_n-a_n) =$

$= \lim_{+\infty} \frac{b-a}{2} = 0$ OSSIA $x_0^+ = x_0^- = x_0$

SE f È INIETTIVA ESISTE UN UNICO ZERO

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 23 di 67

ESERCIZIO

$\lim_{x \to \pi} [x \cdot \text{sign}(\sin^4 x)] \Rightarrow$ $\quad \sin^4 x$ SEMPRE ≥ 0

$$\Rightarrow \text{sign}(\sin^4 x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x < \pi \\ 0 & x = \pi \quad x = 2\pi \ldots \\ 1 & \pi < x < 2\pi \end{cases}$$

$\Rightarrow \text{sign}(\sin^4 x) = 0 \vee 1$

$\Rightarrow \lim_{x \to \pi} [x \cdot 0 \vee 1]$ $\qquad f(x) = [x \cdot \text{sign}(\sin^4 x)]$

$\lim_{x \to \pi} [x \cdot \text{sign}(\sin^4 x)] = [\pi] = 3 \qquad f(\pi) = 0$

CONFRONTO LOCALE

$x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ $\quad f, g$ FUNZIONI DEFINITE IN UN INTORNO DI x_0, TRANNE EVENTUALMENTE IN x_0 CON $g(x) \neq 0 \ \wedge \ x \neq x_0$ STUDIEREMO: $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$

SE IL LIMITE $\exists$ ESSO È ℓ CON $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

- SE ℓ È FINITO, CIOÈ $\ell \in \mathbb{R}$, SI DIRÀ:

  $f = O(g)$ $\quad x \to x_0$ $\quad$ OVVERO CHE f È CONTROLLATA DA g

  È CONTROLLATA DA

- SE $\ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$: $\quad f \asymp g \quad x \to x_0$

  HA LO STESSO ORDINE DI GRANDEZZA DI g

- SE ℓ È 0 ALLORA: $\quad f = o(g) \quad x \to x_0$

  f È TRASCURABILE RISPETTO A g

- SE ℓ È 1 ALLORA: $\quad f \sim g \quad x \to x_0$

  È EQUIVALENTE A

- SE $\ell = +\infty \vee -\infty$ FAREMO ANZI IL $\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{1}{\ell} = 0$

  $\Rightarrow g = o(f) \quad x \to x_0$

SIMBOLI DI LANDAU: $O, \asymp, \sim, o$

ESEMPI: $\sin x \sim x \quad x \to 0$ $\quad$ INFATTI $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\sin x = o(x) \quad x \to +\infty$ $\quad$ INFATTI $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$

PROPRIETÀ $x \to x_0$

⚠ FRECCE SOLO IN UN VERSO

$f \asymp g \Rightarrow f = O(g)$, $\quad f \sim g \Rightarrow f = O(g)$

$f = o\,g \Rightarrow f = O(g)$, $\quad f \sim g \Rightarrow f \asymp g$

- SE $f \asymp g$ ALLORA $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\ell \cdot g(x)} = 1$

  CIOÈ $f \sim \ell \cdot g \quad x \to x_0$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 25 di 67

- $\sin x \sim x \quad x \to 0 \iff \sin x = x + o(x) \quad x \to 0$
- $1 - \cos x \overset{\vee}{\wedge} x^2 \quad x \to 0 \to 1 - \cos x \sim \frac{1}{2} x^2 \quad x \to 0$
  $\iff 1 = \frac{1}{2} x^2 + o(x^2) \quad x \to 0$
- $\ln(1+x) \sim x \quad x \to 0 \iff \ln(1+x) = x + o(x) \quad x \to 0$
- $e^x - 1 \sim x \quad x \to 0 \iff e^x = 1 + x + o(x) \quad x \to 0$
- $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x \quad x \to 0 \iff$
  $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x) \quad x \to 0$
- $x^\alpha = o(e^x) \quad x \to +\infty$
- $\ln x = o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right) \quad x \to 0^+ \quad \forall \alpha \to \lim_{x \to 0^+} x^\alpha \cdot \ln x = 0$

IN PARTICOLARE SE $\alpha = 1$ $\lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0$

TEOREMA MOLTIPLICAZIONE

$x \to x_0 \quad f \sim \tilde{f}$ e $g \sim \tilde{g}$ ALLORA

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \to x_0} \tilde{f}(x) \cdot \tilde{g}(x) \quad \text{e}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\tilde{f}(x)}{\tilde{g}(x)}$$

DIMOSTRAZIONE: $\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \to x_0} \underbrace{\frac{f(x)}{\tilde{f}(x)}}_{\to 1} \tilde{f}(x) \cdot \underbrace{\frac{g(x)}{\tilde{g}(x)}}_{\to 1} \tilde{g}(x) =$

$= \lim_{x \to x_0} \tilde{f} \cdot \tilde{g} \Rightarrow$ DIMOSTRATO

COROLLARIO: $x \to x_0$ SE $f_1 = o(f)$ e $g_1 = o(g)$

ALLORA $\lim_{x \to x_0} (f(x) + f_1(x))(g(x) + g_1(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x)$

ESERCIZIO

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos 2x}{\sin^2 3x} \qquad 1 - \cos 2x \sim \frac{1}{2}(2x)^2 \quad x \to 0$$

$\sin 3x \sim 3x \quad x \to 0 \qquad \sin^2 3x \sim (3x)^2 \quad x \to 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{2x^2 + o(x^2)}{9x^2 + o(x^2)} = \frac{2}{9}$$

GLI $o(x^2)$ NON SONO ESATTAMENTE ADDENDI

ESERCIZIO

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x + x^3}{4x + 5 \ln(1+x^2)} \qquad x^3 = o(\underset{\text{COMANDA}}{\sin 2x}) \quad x \to 0$$

$5 \ln(1+x^2) = o(\underset{\text{COMANDA}}{4x}) \quad x \to 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3}{\sin 2x} = \qquad \sin 2x \sim 2x$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^3}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{2} x^2 = 0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{5 \ln(1+x^2)}{4x} = \qquad \ln(1+x^2) \sim x^2 \quad x \to 0$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{5x^2}{4x} = \lim_{x \to 0} \frac{5}{4} x = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x + x^3}{4x + 5 \ln(1+x^2)} = \lim_{x \to 0} \frac{2x}{4x} = \frac{1}{2} \qquad \sin 2x \sim 2x$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 27 di 67

ESERCIZIO

$\lim_{x\to+\infty} x^3\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)\sin\frac{3}{x}$

$t=\frac{1}{x}$ $\quad t\to 0^+$

$\lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t^3}\left(1-\cos t\right)\sin 3t \qquad \sin 3t \sim 3t$

$1-\cos t \sim \frac{1}{2}t^2 \qquad \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t^3}\cdot\frac{1}{2}t^2\cdot 3t = \frac{3}{2}$

ESERCIZIO

$\lim_{x\to+\infty} \frac{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\cos x + x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}{\cos x + x} \qquad \cos x = O(x)$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}{x} = \frac{\ln e}{+\infty} = \frac{1}{+\infty} = 0$

ESERCIZIO

$f: \mathbb{R}\to\mathbb{R} \qquad f(x) := \begin{cases} 1 & x\in\mathbb{Q} \\ 0 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ $\quad$ FUNZIONE DI DIRICHLET

f NON È CONTINUA IN NESSUN PUNTO

ESERCIZIO

PER QUALI VALORI DI α, β LA FUNZIONE È CONTINUA NELL'APERTO $(-1;1)$ $\quad f(x) = \begin{cases} |x|^\beta\cdot\cos^2\left(\frac{1}{x}\right) & x<0 \\ 0 & x=0 \\ x^\alpha \sin^2 x & x>0 \end{cases}$

$\lim_{x\to 0^-} |x|^\beta\cdot\cos^2\left(\frac{1}{x}\right)$

INFINITI E INFINITESIMI

$x_0\in\overline{\mathbb{R}}$ $\quad f$ DEFINITA IN $\overset{\circ}{I}_{x_0}$, SI DICE CHE f È UN INFINITESIMO PER $x\to x_0$ SE $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$.

SI DEFINISCE f INFINITO SE $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$.

- f È UN INFINITESIMO (INFINITO) DI ORDINE SUPERIORE (INFERIORE) DI g SE $f = o(g)$ $\quad x\to x_0$
- f È UN INFINITESIMO (INFINITO) DI ORDINE INFERIORE (SUPERIORE) DI g SE $g = o(f)$ $\quad x\to x_0$
- f E g HANNO LO STESSO ORDINE SE $\lim_{x\to x_0} \frac{f}{g} = l \quad l\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$
- ALTRIMENTI $f(x)$ E $g(x)$ NON SONO CONFRONTABILI PER $x\to x_0$

PARTE PRINCIPALE

SE $\varphi(x)$ È UN INFINITESIMO INTORNO A x_0 $(x\to x_0)$ $\varphi(x)\neq 0$ $x\neq x_0$. SI DICE CHE f È UN INFINITESIMO DI ORDINE α RISPETTO ALL'INFINITESIMO CAMPIONE φ SE $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)^\alpha} = l$ CON $l\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

- $l\cdot\varphi(x)^\alpha$ SI CHIAMERÀ LA PARTE PRINCIPALE DI f, PER $x\to x_0$, RISPETTO AL CAMPIONE $\varphi(x)$, OVVIAMENTE $\varphi(x)^\alpha$ È BEN DEFINITA IN $\overset{\circ}{I}_{x_0}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 29 di 67

Esercizio

$f(x) = x + (x+1)\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\frac{x+1}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1} \qquad \lim_{x\to+\infty} x + (x-1)\left[\frac{2}{x+1} + o\left(\frac{1}{x-1}\right)\right] =$

$= \lim_{x\to+\infty} x + 2 + o(1) \Rightarrow y = x+2$ è asintoto obliquo

Verifica di m: $\lim_{x\to+\infty} \frac{x + (x-1)\ln\left(1 + \frac{2}{x-1}\right)}{x} =$

$= \lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{(x-1)\left(\frac{2}{x-1} + o\left(\frac{1}{x-1}\right)\right)}{x}\right) =$

$= 1 + \lim_{x\to+\infty} \frac{2 + o(1)}{x} = 1 + 0 = 1$

Verifica di q: $\lim_{+\infty} \left[x + (x-1)\ln\left(1 + \frac{2}{x-1}\right) - x\right] =$

$= \lim_{x\to+\infty} \left[(x-1)\ln\left(1 + \frac{2}{x-1}\right)\right] = 2$ (passaggi già fatti prima)

Esercizio

$f(x) = \sqrt{4x^2+5} = |2x|\sqrt{1 + \frac{5}{4x^2}} \qquad x\to+\infty \quad f(x) = 2x\sqrt{1 + \frac{5}{4x^2}} =$

Ricorda $(1+t)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}t + o(t) \quad t\to 0 \qquad \frac{5}{4x^2} = t$

$f(x) = 2x\left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{4x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = 2x + \underbrace{\frac{5}{4x} + o\left(\frac{1}{x}\right)}_{o(1)}$

$\Rightarrow y = 2x$ asintoto di $f(x)$

Derivate

Definizione: sia $x_0 \in \mathbb{R}$ e $f(x)$ definita $I(x_0)$.
Allora f si dice derivabile in x_0 se esiste un numero (la derivata in x_0) $f'(x_0)$ / $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) + o(x-x_0)$ per $x\to x_0$

Retta tangente al grafico di $f(x)$ in $(x_0, f(x_0))$

Significato: la funzione $y(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0)$ è una retta (passante per $(x_0, f(x_0))$, $m = f'(x_0)$) e la condizione $f(x) = y(x) + o(x-x_0)$ per $x\to x_0$ dice che $f(x)$ è approssimabile con la retta $y(x)$, con un errore trascurabile rispetto a $x-x_0$, quando $x\to x_0$. Derivabilità implica continuità.

Osservazione: f è derivabile in $x_0 \iff f(x) = y(x) + o(x-x_0)$

$\iff f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0) = o(x-x_0)$ per $x\to x_0$

$\iff \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0)}{x-x_0} = 0 \iff$

$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) = 0 \Rightarrow f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

Osservazione: se $\exists\, m \in \mathbb{R}$ / $f(x) = f(x_0) + m(x-x_0) + o(x-x_0)$ per $x\to x_0^+$ allora si dice che $f(x)$ è derivabile a destra per x_0^+ e m si chiama derivata destra.

Se f ha derivata sinistra m_1 allora se:

1) $m_1 = m$ allora f è derivabile e $f'(x_0) = m = m_1$
2) $m_1 \neq m$ allora f non è derivabile in x_0

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 31 di 67

DERIVATA POTENZA

$f(x) = x^\alpha$ È DERIVABILE $\forall x$

SE $\alpha = 0$ $\quad f(x) = 1 \quad f'(x) = 0$

SE $\alpha = 1$ $\quad f(x) = x \quad f'(x) = 1$

SE $\alpha = 2$ $\quad f(x) = x^2 = x \cdot x \quad f'(x) = 2x$

SE $\alpha = 3$ $\quad f(x) = x^3 = x^2 \cdot x \quad f' = \cancel{}\, x^2 + 2x \cdot x = 3x^2$

$\Rightarrow \quad f(x) = x^\alpha \qquad f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$

DERIVATA FUNZIONE COMPOSTA

FUNZIONE: $f(g(x))$ SE g È DERIVABILE IN x_0 E f È DERIVABILE IN $g(x_0)$, ALLORA $f(g(x_0))$ È DERIVABILE IN x_0 E $\left(f(g(x))\right)' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

DIMOSTRAZIONE:

$f(g(x)) = f\left(g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)\right)$ ← DEVO OTTENERLO

IL FATTO CHE f SIA DERIVABILE IN $g(x_0)$ SI PUÒ SCRIVERE COME: $f(g(x_0) + h) = f(g(x_0)) +$

$+ f'(g(x_0)) \cdot h + o(h) \qquad h = g'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \quad h \to 0 \;\; x \to x_0$

$\Rightarrow = f(g(x_0)) + f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) + o(h)$

$o(x - x_0)$

$\Downarrow$

$\left[f(g(x))\right]' = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$

ESERCIZIO

$f(x) = e^{\sin x} \qquad f'(x) = e^{\sin x} \cdot \cos x$

ESERCIZIO

$f(x) = \frac{1}{x} \qquad f(x) = x^{-1} \qquad f'(x) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

DERIVATA FUNZIONE INVERSA

f DERIVABILE E CONTINUA IN x_0 $\quad f'(x_0) \neq 0$

f INVERTIBILE IN $I(x_0)$ $\Rightarrow f^{-1}$ È DERIVABILE

E $\left(f^{-1}(y_0)\right)' = \frac{1}{f'(x_0)}$ CON $y_0 = f(x_0)$

DIMOSTRAZIONE:

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

$y_0 = f(x_0) \iff x_0 = f^{-1}(y_0)$

$y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$

ESEMPIO: $f(x) = a^x \qquad f^{-1}(x) = \log_a x$

$$\left(f^{-1}(y)\right)' = \frac{1}{a^x \log a} = \frac{1}{y_0 \log a}$$

$$\Rightarrow (\log_a x)' = \frac{1}{x \log a}$$

MASSIMI E MINIMI (PUNTI ESTREMI) $f'(x_0)=0$

- MASSIMO LOCALE: x_0 SI DICE MASSIMO LOCALE PER f SE $\exists\ I(x_0) \ / \ \forall x \in I(x_0) \cap \text{DOM} f,\ f(x) \leq f(x_0)$
- MASSIMO ASSOLUTO: x_0 SI DICE MASSIMO ASSOLUTO PER f SE $\forall x \in \text{DOM} f,\ f(x) \leq f(x_0)$
- MINIMO LOCALE: x_0 SI DICE MINIMO LOCALE PER f SE $\exists\ I(x_0) \ / \ \forall x \in I(x_0) \cap \text{DOM} f,\ f(x) \geq f(x_0)$
- MINIMO ASSOLUTO: x_0 SI DICE MINIMO ASSOLUTO PER f SE $\forall x \in \text{DOM} f,\ f(x) \geq f(x_0)$

PUNTO CRITICO (O STAZIONARIO) $f'(x_0)=0$

x_0 È UN PUNTO CRITICO DI f SE f È DERIVABILE IN x_0 E $f'(x_0) = 0$

UN PUNTO CRITICO È UN PUNTO A TANGENTE ORIZZONTALE

OGNI PUNTO ESTREMO DERIVABILE È ANCHE UN PUNTO CRITICO!

↓

$\boxed{\text{TEOREMA DI FERMAT}}$

DA RICORDARE

DIMOSTRAZIONE: SUPPONIAMO x_0 PUNTO DI MASSIMO LOCALE DI f IN $I(x_0)$ IN TALE INTORNO $f(x) \leq f(x_0) \Rightarrow f(x) - f(x_0) \leq 0$

SE $x > x_0 \Rightarrow x - x_0 > 0$, RAPPORTO INCREMENTALE $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$

SE $x < x_0 \Rightarrow x - x_0 < 0$, RAPPORTO INCREMENTALE ≥ 0

MA $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \underbrace{\left(\frac{\Delta f}{\Delta x} \leq 0\right)}_{\text{NEGATIVO O } 0} = \lim_{x \to x_0^-} \underbrace{\left(\frac{\Delta f}{\Delta x} \geq 0\right)}_{\text{POSITIVO O } 0} \Rightarrow f'(x_0) = 0$

TEOREMA DI DE L'HOPITAL

SUPPONIAMO $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$ (OPPURE CIASCUNO $= +\infty$ O $-\infty$). SE $\exists\ l = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ CON $l \in \overline{\mathbb{R}}$ ALLORA ANCHE $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$

ESEMPIO: $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^a} \neq \cancel{\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{a x^{a-1}}}$

SBAGLIATO, PRIMA DEVO STUDIARE $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{a x^{a-1}}$

ESEMPIO: $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^{3/2}} \to \frac{+\infty}{+\infty}$

STUDIO IL LIMITE: $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{\frac{3}{2}\sqrt{x}} \to \frac{+\infty}{+\infty}$

STUDIO IL LIMITE: $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{\frac{3}{4}\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{4 e^x \sqrt{x}}{3} = +\infty$

$\overset{\text{DH}}{\Rightarrow} \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^{3/2}} = +\infty$

ESEMPIO: $\lim_{x \to 0^+} x \cdot \ln x = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \to \frac{-\infty}{+\infty}$

STUDIO: $\lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} \cdot -x^2 = \lim_{x \to 0^+} -x = 0$

$\overset{\text{DH}}{\Rightarrow} \lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0$

LEGAMI TRA MONOTONIA E DERIVATA

Hp: f DERIVABILE IN UN CERTO INTERVALLO I

1) Ts: f CRESCENTE SU $I \Leftrightarrow f' \geq 0 \quad \forall x \in I$

E ANCHE f DECRESCENTE SU $I \Leftrightarrow f' \leq 0 \quad \forall x \in I$.

NO, SOLO UNA DIREZIONE QUA

2) Ts: $f' > 0 \quad \forall x \in I \Rightarrow f$ STRETTAMENTE CRESCENTE SU I

$f' < 0 \quad \forall x \in I \Rightarrow f$ STRETTAMENTE DECRESCENTE SU I

SONO APPLICAZIONI DEL TEOREMA DI LAGRANGE

DIMOSTRAZIONE: (DA RICORDARE)

SE $x, y \in I$ E $x < y$ ALLORA PER LAGRANGE IN

$[x, y] \Rightarrow \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(c)$ CON $x < c < y$

- SE SO CHE $f' > 0$ DEDUCO $\dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} > 0 \Rightarrow f(x) \leq f(y)$

  E SICCOME $x < y$ $f(x)$ CRESCENTE IN I

- SE SO CHE f È CRESCENTE, $y - x > 0$ PERCHÉ $x < y$

  $f(y) - f(x) > 0$ PERCHÉ f È CRESCENTE

  $\Rightarrow \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} > 0 \Rightarrow f' \geq 0$ PERCHÉ $\lim\limits_{y \to x^+} \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0$

TEOREMA DI CAUCHY

SIANO f E g DEFINITE SU UN INTERVALLO $[a, b]$,

CONTINUE IN $[a, b]$, DERIVABILI IN (a, b), $g' \neq 0$ IN (a, b)

Ts: $\exists c \in (a, b) \;/\; \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$

DIMOSTRAZIONE: (DA RICORDARE)

$g(a) \neq g(b)$ PERCHÉ SENNÓ PER TEOREMA DI ROLLE $g'(x)$ IN ALMENO UN PUNTO $= 0$ IN (a, b)

$h(x) := f(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \left(g(x) - g(a)\right)$ CHE È CONTINUA

E DERIVABILE NELL' INTERVALLO PERCHÉ DIFFERENZA DI DUE FUNZIONI CHE LO SONO PER IPOTESI

$h'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(x)$

$\Rightarrow h(a) = f(a) \;\wedge\; h(b) = f(b)$

$\Rightarrow h$ SODDISFA IL TEOREMA ROLLE

$\Rightarrow \exists c \in (a, b) \;/\; h'(c) = f'(c) - \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c) = 0$

$f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(c)$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 37 di 67

TEOREMA (FORMULA TAYLOR CON RESTO DI PEANO)

HP: $n \geq 0$, f n volte derivabile in x_0

TS: $f(x) = T_n(x) + o((x-x_0)^n) \quad x \to x_0$

TEOREMA (FORMULA TAYLOR CON RESTO DI LAGRANGE)

HP: $n \geq 0$, f n volte derivabile con derivata n-esima continua in x_0; sia f inoltre derivabile $n+1$ volte in $I(x_0)$

TS: $f(x) = T_n(x) + \frac{1}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(\bar{x}) \cdot (x-x_0)^{n+1}$ → RESTO DI LAGRANGE

per un opportuno $\bar{x}$ compreso tra x_0 e x

per $n=0$ $\quad f'(\bar{x}) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

- **OSSERVAZIONE:** se $x_0 = 0$ la formula e il polinomio sono chiamati di MACLAURIN e viene:

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) \cdot x^k$$

SVILUPPI DI MACLAURIN NOTEVOLI

1) ESPONENZIALE: $\quad f(x) = e^x \quad x_0 = 0$

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \underbrace{e^0}_{=1} \cdot x^k \Rightarrow$$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{24} x^4 \dots + \frac{1}{n!} x^n + o(x^n). \quad x \to 0$$

2) $f(x) = \ln(1+x) \quad x_0 = 0 \quad f(0) = 0$

$f'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} \qquad f''(x) = -(1+x)^{-2}$

$f^{(3)}(x) = 2(1+x)^{-3} \qquad f^{(4)} = -6(1+x)^{-4} \qquad f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1} \cdot (k-1)!\,(1+x)^{-k}$

in $x_0 = 0$ $\quad f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0)\, x^k = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} \cdot (k-1)!}{k!} x^k$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \cdot \frac{x^k}{k} \Rightarrow$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

3) $f(x) = \sin x \quad x_0 = 0 \quad f(0) = 0$

$f'(x) = \cos x \qquad f''(x) = -\sin x \qquad f^{(3)}(x) = -\cos x \qquad f^{(4)}(x) = \sin x$

$f'(0) = 1 \qquad f''(0) = 0 \qquad f^{(3)} = -1 \qquad f^{(4)}(0) = 0 \quad \Rightarrow$

la sequenza è: 0 1 0 -1 0 1 0 -1 ...

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n+1}\right)$$

GLI SVILUPPI DI $\sinh x$ E $\cosh x$ SONO UGUALI A QUELLI $\sin x$ E $\cos x$ MA SENZA IL PROBLEMA DEL SEGNO

PRODOTTO DI SVILUPPI $x_0 \to 0$

$f(x) = P_n(x) + o(x^n)$ $\quad g(x) = q_n(x) + o(x^n)$

$$f \cdot g = \left(P_n(x) + o(x^n)\right) \cdot \left(q_n(x) + o(x^n)\right)$$

UTILIZZO LA PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA E PROPRIETÀ DEGLI O PICCOLI $\Rightarrow$

$$f \cdot g = P_x(n) \cdot q_x(n) + o(x^n)$$

DIVISIONE DI SVILUPPI $x_0 \to 0$

ESEMPIO: $\dfrac{e^x}{3 + 2\ln(1+x)}$ $\quad x_0 \to 0$ ORDINE 2

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ $\quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

$$\frac{e^x}{3 + 2\ln(1+x)} = \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{3 + 2x - x^2 + o(x^2)} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9}x + \frac{11}{54}x^2 + o(x^2)$$

$$\begin{array}{l|l}
1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) & 3 + 2x - x^2 + o(x^2) \\ \hline
1 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}x^2 + o(x^2) & \frac{1}{3} + \frac{1}{9}x + \frac{11}{54}x^2 + o(x^2) \\
0 \quad \frac{1}{3}x + \frac{5}{6}x^2 + o(x^2) & \\
\quad \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}x^2 + o(x^2) & \\
0 + \frac{11}{18}x^2 + o(x^2) &
\end{array}$$

ESERCIZIO (SVILUPPO TANGENTE)

$x_0 \to 0$ ORDINE 4 $\quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)$

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$ $\quad \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

$$\frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)} = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^4)$$

$$\begin{array}{l|l}
x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) & 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \\ \hline
x - \frac{x^3}{2} + o(x^4) & x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^4) \\
0 \quad \frac{1}{3}x^3 + o(x^4) & \\
\quad -\frac{1}{3}x^3 + o(x)^4 &
\end{array}$$

$$\Longrightarrow \tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^4) \quad x_0 \to 0 \text{ ORDINE 4}$$

FUNZIONE COMPOSTA SVILUPPO

f continua in 0

$x_0 \to 0$ $\quad f(x)$ INFINITESIMA, CIOÈ $\lim_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$

$f(x) = a_1 x + a_2 x^2 + a_n x^n + o(x^n)$ $\quad g(y) = b_0 + b_1 y + b_2 y^2 + \dots b_n y^n + o(y^n)$ $\quad y \to 0$

$y = f(x)$. SVILUPPO DI $g(f(x)) = b_0 + b_1(f(x)) + \dots + b_n(f(x))^n + o(x^n)$

ESEMPIO: $h(x) = e^{\sqrt{1+x}-1}$ $\quad x \xrightarrow{f} \underbrace{\sqrt{1+x} - 1}_{y} \xrightarrow{g} e^y$

PASSO 2: $\sqrt{1+x} - 1 = (1+x)^{\frac{1}{2}} - 1 = \cancel{1} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2) \cancel{-1} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 41 di 67

COROLLARIO: f DERIVABILE IN $I_{(x_0)}$ ED ESISTE $f''(x_0)$

$f''(x_0) > 0 \Rightarrow f$ È STRETTAMENTE CONVESSA IN x_0

$f''(x_0) < 0 \Rightarrow f$ È STRETTAMENTE CONCAVA IN x_0

f CONVESSA IN $x_0 \Rightarrow f''(x_0) \geq 0$

f CONCAVA IN $x_0 \Rightarrow f''(x_0) \leq 0$

f POSSIEDE UN FLESSO IN $x_0 \Rightarrow f''(x_0) = 0$

ESERCIZIO

$x_0 = 1 \quad f(x) = 2 - 15(x-1)^4 + 20(x-1)^5 + o((x-1)^5) \quad f(1) = 2 \quad f'(1) = f''(1) = f^{(3)}(1) = 0$

$\frac{f^{(IV)}(1)}{4!} = -15 \quad f^{(IV)}(1) = 24 \cdot (-15) = -360 \Rightarrow x_0 = 1$ MASSIMO RELATIVO

PARTE PRINCIPALE: $f(x) = \underbrace{a_k (x-x_0)^k}_{P.P.} + o((x-x_0)^k)$

$f(x) \sim a_k (x-x_0)^k \quad x \to x_0 \quad k$ È L'ORDINE

ESERCIZIO

CALCOLA LA P.P. RISPETTO ALL'INFINITESIMO CAMPIONE $\mu(x) = x$

$x \to 0$ DI $f(x) = \ln(2x+e) - 2e^{x-1} + \frac{2-e}{e}$

$f(x) = \ln e\left(1 + \frac{2x}{e}\right) - \frac{2e^x}{e} + \frac{2}{e} - 1 =$

$= \cancel{1} + \ln\left(1 + \frac{2}{e}x\right) - \frac{2}{e} \cdot e^x + \frac{2}{e} - \cancel{1}$

ORDINE 2: $= \frac{2}{e}x - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{e}x\right)^2 + o(x^2) - \frac{2}{e}\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) + \frac{2}{e} =$

$= \cancel{\frac{2}{e}x} - \frac{2}{e^2}x^2 - \cancel{\frac{2}{e}} - \cancel{\frac{2x}{e}} - \frac{x^2}{e} + \cancel{\frac{2}{e}} + o(x^2) = -x^2\left(\frac{2}{e^2} + \frac{1}{e}\right) + o(x^2)$

$\Rightarrow$ P.P. $= -x^2\left(\frac{2}{e^2} + \frac{1}{e}\right)$

ESERCIZIO

$$\lim_{x\to 0} (1+x^6)^{\frac{1}{x^4 \cdot \sin^2 3x}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^4 \cdot \sin^2 3x} \ln(1+x^6)} =$$

$$= e^{\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^4 \cdot \sin^2 3x} \ln(1+x^6)}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x^6)}{x^4 \cdot \sin^2 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^6 + o(x^6)}{x^4 \cdot \left(3x - \frac{(3x)^3}{6} + o(x^3)\right)^2} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^6 + o(x^6)}{x^4 \cdot (9x^2 + o(x^2))} =$$

NON MI SERVE ALTRO PERCHÉ PER x^4 SUPERO x^6

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^6 + o(x^6)}{9x^6 + o(x^6)} = \frac{1}{9} \Rightarrow \lim_{x\to 0} (1+x^6)^{\frac{1}{x^4 \cdot \sin^2 3x}} = e^{1/9}$$

ESERCIZIO

$$\lim_{x\to +\infty} \left[x - x^2 \ln\left(1 + \sin\frac{1}{x}\right)\right] \quad t = \frac{1}{x} \quad t \to 0 \text{ SE } x \to +\infty$$

$$\lim_{t\to 0^+} \left[\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} \ln(1+\sin t)\right] = \lim_{t\to 0^+} \frac{t - \ln(1+\sin t)}{t^2} =$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{t - \sin t + \frac{\sin^2 t}{2} + o(\sin^2 t)}{t^2} =$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{t - t + \frac{t^3}{6} + o(t^3) - \frac{1}{2}\left(t - \frac{t^3}{6} + o\right)^2}{t^2} =$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{\cancel{\frac{t^3}{6}} - \frac{1}{2}t^2 + o(t^2)}{t^2} = -\frac{1}{2}$$

ESERCIZIO

$f(x)=\sqrt[3]{e^{-x}+x}$ $\quad x\to 0$ ORDINE 4 $\quad f(x)=\sqrt[3]{e^{-x}+x-1+1}$

$e^{-x}+x-1$

$= 1+\frac{1}{3}(e^{-x}+x-1)+\frac{-2/9}{2}(e^{-x}+x-1)^2+o((e^{-x}+x-1)^2)$ $\quad x\to 0$

$= 1+\frac{1}{3}\left(\cancel{1}\cancel{-x}+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\cancel{+x}\cancel{-1}\right)-\frac{1}{9}\left(\cancel{1}\cancel{-x}+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}\right.$

$\left.+o(x^4)\cancel{+x}\cancel{-1}\right)^2+o(x^4)$

$-\frac{1}{9}\left(\frac{x^4}{4}\right)+o(x^4)$

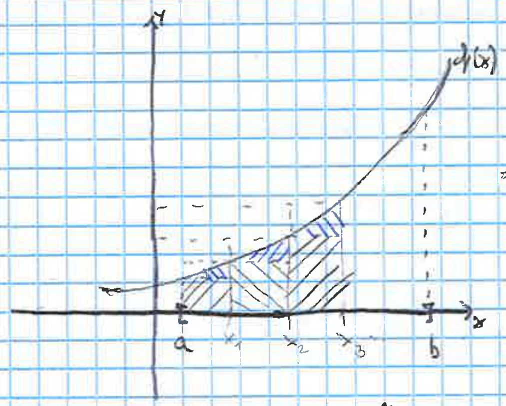
$e^{-x}+x-1= 1+\frac{x^2}{6}-\frac{x^3}{18}+\frac{x^4}{72}+o(x^4)$

$e^{-x}+x-1 = 1+\frac{x^2}{6}-\frac{x^3}{18}-\frac{x^4}{72}+o(x^4)$

ESERCIZIO

$\lim_{x\to 0}\left(e^{x^7}+\sin^2 x-\sinh^2 x\right)^{1/x^4}$

CALCOLO INTEGRALE



$T=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} \,/\, a\le x\le b,\ 0\le y\le f(x)\}$

$\mathcal{P}$: CON AREE DI PICCOLI RETTANGOLI PERDO SEMPRE UN PO' DI AREA !!!

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

NON x_i DIVERSE

SOMMA INFERIORE: $s(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} m_i\,\Delta x_i$

$\exists\ m, M\in\mathbb{R} \,/\, m\le f(x)\le M$ SE f LIMITATA $\quad m_i := \inf f(x)\ \ x\in[x_{i-1},x_i]$

SOMMA SUPERIORE: $S(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} M_i\,\Delta x_i$

$s(\mathcal{P})\le S(\mathcal{P})$ SE PRENDO $\mathcal{P}_1$ E $\mathcal{P}_2$:

$s(\mathcal{P}_1)\le s(\mathcal{P}_1\cup\mathcal{P}_2)\le S(\mathcal{P}_1\cup\mathcal{P}_2)\le S(\mathcal{P}_2)$

__DEFINIZIONE:__ f SI DICE INTEGRALE SU $[a,b]$ SE $s=S$

NOTAZIONE: $s=S=\int_a^b f(x)\,dx$

UNA FUNZIONE $F: I\to\mathbb{R}$ DERIVABILE $/\ F'(x)=f(x),\ \forall x\in I$

SI DICE __PRIMITIVA__ DI f SU I SE $f: I\to\mathbb{R}$

ES: $f(x)=x$ $\quad F(x)?$ $\quad F(x)=\frac{1}{2}x^2+\begin{matrix}0\\5\\321\\-20\end{matrix}$ $\Rightarrow F'(x)=c$

$\Rightarrow$ SE $\exists$ UNA PRIMITIVA DI f $\Rightarrow$ $G(x)=F(x)+c$ È ANCORA UNA PRIMITIVA DI f. LA GENERICA PRIMITIVA SI INDICA CON $\int f(x)\,dx$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 45 di 67

$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \to 0} f(c_h)$

SE $h \to 0$ $\quad c_h \to x \quad \lim_{h \to 0} f(c_h) = f(x)$

$\Rightarrow F'(x) = f(x) \Rightarrow F(x)$ È UNA PRIMITIVA DI $f(x)$ SU I

COROLLARIO (CALCOLO DELL'INTEGRALE)

Hp: I INTERVALLO, $f \in C^0(I)$ (CONTINUA), $a, b \in I$, G UNA PRIMITIVA DI f SU I

Ts: $\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a) = G(x)\Big|_a^b$

DIMOSTRAZIONE:

SO CHE $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ È UNA PRIMITIVA DI f

(SE CONOSCESSI $F(x)$, AVREI $\int_a^b f(t)dt = F(b)$).

G È UN'ALTRA PRIMITIVA CHE CONOSCO.

QUINDI $F(x) = G(x) + c$ SU I. $\Rightarrow F(a) = 0$

$\int_a^b f(t)dt = F(b) = F(b) - F(a) = G(b) + \cancel{c} - G(a) - \cancel{c} = G(b) - G(a)$

ESERCIZIO

$\int_2^4 \sin x\, dx$ CERCO UNA PRIMITIVA DI $\sin x$ SU $\mathbb{R}$

$\int \sin x\, dx = -\cos x + c \qquad \int_2^4 \sin x\, dx = (-\cos 4) - (-\cos 2) =$

$\cos 2 - \cos 4 \qquad \int_2^4 \sin x\, dx = -\cos x \Big|_2^4$

$\tilde{F}(x) = \int_x^{x^2} f(t)dt = \int_a^{x^2} f(t)dt - \int_a^x f(t)\,dt$

$F(x) = \int_a^x f(t)dt = \cancel{\ }\quad F'(x) = f(x)$

$F(x) = \int_a^{x^2} f(t)dt \qquad F'(x) = f(x^2) \cdot 2x$

PRIMITIVE FONDAMENTALI

$f(x)$	$\int f(x)dx$
• $\sin x$	• $-\cos x + c$ SU $\mathbb{R}$
• $\cos x$	• $\sin x + c$ SU $\mathbb{R}$
• $tg\, x$	• $-\ln\lvert\cos x\rvert + c$ DOVE tg CONTINUA
• e^x	• $e^x + c$ SU $\mathbb{R}$
• $\ln x$	• $x(\ln x - 1) + c$ $\quad x>0$
• $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	• $\arcsin x + c$ SU $(-1;1)$ • $-\arccos x + c$
• x^n	• $\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ CON $n \neq -1$
• $\frac{1}{x}$	• $\ln x + c$ SU $(0;+\infty)$ $\ln -x + c$ SU $(-\infty;0)$
• $arctg\, x$	• $x\, arctg\, x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + c$
• $\sinh x$ • $\cosh x$	• $\cosh x + c$ • $\sinh x + c$

ESERCIZIO

$F(x) = \int_0^x \frac{e^t}{t^2+1}\, dt$ STUDIA MONOTONIA E VERIFICARE CHE È INVERTIBILE NEI REALI.

$(F^{-1})'(0)$? $F'(x) = \frac{e^x}{x^2+1}$ $e^t > 0 \ \forall t \in \mathbb{R}$

$t^2+1 > 0 \quad t^2 \neq -1 \quad \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow F(x)$ SEMPRE STRETTAMENTE CRESCENTE (MONOTONA)

$\Rightarrow F$ È INVERTIBILE.

$F(0) = \int_0^0 \frac{e^t}{t^2+1} = 0 \quad (F^{-1})'(0) = \frac{1}{F'(0)} = \frac{1}{\frac{e^x}{x^2+1} \to x=0} = \frac{1}{\frac{1}{1}} = 1$

SE FOSSE STATO: $F(x) = \int_2^x \frac{e^t}{t^2+1}\, dt \quad F(2) = 0 \quad F^{-1}(0) = 2$

ESERCIZIO

f FUNZIONE LIMITATA ED INTEGRABILE IN $[0;5]$ / $\int_0^5 f(x)dx = 10$

DIMOSTRA CHE:

a) $\exists\, x_0 \in [0;5] \,/\, f(x) < 3$

b) SE f È CONTINUA IN $[0;5] \Rightarrow \exists\, x_0 \in [0;5] \,/\, f(x_0) = 2$

c) SE f È STRETT. MONOTONA IN $[0;5] \Rightarrow \exists\, x_0 \in [0;5] \,/\, f(x_0) < 2$

a) SUPPONIAMO $f(x) \geq 3,\ \forall x \in [0;5] \Rightarrow \int_0^5 f(x)dx \geq \int_0^5 3\, dx$

$\int_0^5 f(x)\,dx \geq 3x\Big|_0^5 \qquad \int_0^5 f(x)dx \geq 15 \Rightarrow > 10 \Rightarrow$ FALSO

PERCIÒ $f(x) < 3$

b) ESSENDO f CONTINUA, PER IL TEOREMA DELLA MEDIA:

$\exists\, x_0 \in [0;5] \,/\, \frac{1}{5-0}\int_0^5 f(x)dx = f(x_0)$

$\int_0^5 f(x)dx = 5 f(x_0) \qquad 5 f(x_0) = 10 \qquad f(x_0) = 2$

c) SUPPONIAMO $\forall x \in [0;5]\ f(x) \geq 2$ SE $f(x) = 2 \quad \forall x \in [0;5]$

SAREBBE UNA CONTRADDIZIONE, NON SAREBBE STRETT. MONOTONA.

SCEGLIAMO $x_1 \in (0;5)$, $f(x) > f(x_1) \Leftrightarrow f(0) \geq 2 \quad x \in (x_1;5)$

ALLORA $\int_0^5 f(x)dx = \int_0^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^5 f(x)dx$

$\int_0^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^5 f(x)dx > \int_0^{x_1} 2\,dx + \int_{x_1}^5 f(x_1)dx =$

$= 2x_1 + (5-x_1) f(x_1)$ SICCOME $f(x) \geq 2$

$2x_1 + (5-x_1) f(x)_1 \geq 2x_1 + (5-x_1)2 = \cancel{2x_1} + 10 - \cancel{2x_1}$

$\Rightarrow \int_0^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^5 f(x)dx > 10 \Rightarrow$ ASSURDO $\Rightarrow f(x) < 2$

ESERCIZIO

$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{x^2} \sqrt{1+t\sin t}\, dt}{1-\cos x} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x^2\sin x^2} \cdot 2x}{\sin x}$

$\sin x \sim x \quad x \to 0 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{2x\sqrt{1-x^2\sin^2 x^2}}{x} = 2 \cdot 1 = 2$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 49 di 67