NUMERO: **2482A** ANNO: 2020

A P P U N T I

STUDENTE: Riberi Matteo

MATERIA: Riberi Matteo - ANALISI 2 - Prof. Morandotti

SERIE NUMERICHE

Sia $\{a_n\}$ una successione. Definisco un'altra successione S_n:

$S_1 = a_1$; $S_2 = a_1 + a_2$; $S_3 = a_1 + a_2 + a_3$

→ in generale $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

Def: L'operazione che fa passare da $\{a_n\}$ a $\{S_n\}$ si chiama SERIE NUMERICA e si indica con:

$$\sum_{\underbrace{n=1}_{\text{INDICE}}}^{\infty} \underbrace{a_n}_{\text{TERMINE GENERALE}}$$

L'INDICE è un contatore, quindi è un indice MUTO

Def: •) Se $\{S_n\}$ ha limite per $n \to +\infty$: $\lim_{n\to+\infty} S_n = S \in \mathbb{R}$ si dice che la serie CONVERGE

•) Se $\lim_{n\to+\infty} S_n = \pm\infty$ la serie DIVERGE (positivamente o negati)

•) Se $\nexists \lim_{n\to+\infty} S_n$ la serie si dice INDETERMINATA

Def: L'elemento generico della successione $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, cioè la somma dei primi n termini della successione prende il nome di SOMMA PARZIALE o RIDOTTA di ordine N

es] $a_n = n$ $\quad \sum_{n=1}^{\infty} n$

→ considero le somme parziali $S_n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ — formula di Gauss

→ $\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n(n+1)}{2} = +\infty$

⇒ la serie DIVERGE POSITIVAMENTE

es] $a_n = (-1)^n$ $\quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$

→ studio le somme parziali:

$S_1 = a_1 = -1$; $S_2 = a_1 + a_2 = -1+1 = 0$; $S_3 = S_2 + a_3 = -1$; $S_4 = S_3 + a_4 = 0$ ...

$S_n = \begin{cases} -1 & \text{se } n \text{ è dispari} \\ 0 & \text{se } n \text{ è pari} \end{cases}$ ⇒ $\nexists \lim_{n\to+\infty} S_n$ ⇒ INDETERMINATA

$$\Rightarrow \boxed{S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{k=0}^{\infty} r^k = \begin{cases} \frac{1}{1-r} & \text{se } |r|<1 \\ +\infty & \\ \nexists & \text{se } r \le -1 \end{cases}}$$

es) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ $\quad a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ $\quad \nabla_0\ a_n \sim \frac{1}{n^2} \quad n\to+\infty$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

→ A due a due si semplificano tutti i termini e rimane solo più che $S_n = 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

⇒ la serie CONVERGE

Def: Una serie in cui il termine generale è la differenza di due quantità che si cancellano sommando, si chiama TELESCOPICA

Def: Dato $\lambda > 0$, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\lambda}$ prende il nome di ARMONICA GENERALIZZATA

CARATTERE di UNA SERIE

Teorema: Il carattere di una serie si conserva alterando un numero finito di termini.
In caso di convergenza, la somma della serie viene modificata di conseguenza.

dimostrazione: $\{a_n\} \to$ costruisco $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

→ scelgo un numero ν e altero i primi ν termini

→ definisco una nuova successione a'_n definita dai seguenti valori: $\underbrace{(b_1, b_2, \dots b_\nu)}_{\text{nuovi valori della successione}}, a_{\nu+1}, a_{\nu+2}, \dots$

→ associo a $\{a'_n\}$ una nuova serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a'_n$ e voglio dimostrare che questa serie ha lo stesso carattere della precedente

→ considero le somme parziali fino a un valore $n > \nu$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \quad , \quad S'_n = \sum_{k=1}^{n} a'_k$$

→ scegliendo $m>n$ e $p=m-n$ ho che le due condizioni sono identiche

⇒ Il CRITERIO DI CONVERGENZA dice che la serie converge se e solo se la successione $\{S_n\}$ è una SUCCESSIONE di CAUCHY

Corollario Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge allora il termine generale a_n è INFINITESIMA.

dimostrazione

→ applico il criterio generale di convergenza con $p=1$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+1} a_k\right| = |a_{n+1}| < \varepsilon$$

⇒ Se un numero può essere zero più piccolo di $\forall \varepsilon$, questo numero deve essere uguale a zero.

⚠ Qualsiasi successione $\overset{NON}{\vee}$ INFINITESIMA forma una serie $\overset{NON}{\vee}$ CONVERGENTE.

Ci sono dei casi in cui una successione infinitesima forma una serie non convergente

es) la serie armonica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ $\quad a_n = \frac{1}{n} \to 0$

→ applico il criterio con $p=n$

$$\sum_{k=n+1}^{n+n} \frac{1}{n} = \sum_{n+1}^{2n} \frac{1}{n} = \underbrace{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}}_{\text{questa somma è composta da } n \text{ termini}}$$

→ osservo che qualsiasi termine è maggiore di $\frac{1}{2n}$ eccetto l'ultimo

$$\to \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n}}_{n \text{ volte}}$$

$$\to \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

⇒ ho dimostrato che $\forall n$ la serie sarà sempre maggiore di $\frac{1}{2}$ e se quindi pongo $\varepsilon = \frac{1}{4}$ il criterio di convergenza non è verificato dimostrazione:

→ definisco $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ e $T_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$

→ se $a_k \leq b_k \quad \forall k \in [1, n] \Rightarrow S_n \leq T_n$

→ da questa relazione considero i limiti

Teorema: Siano $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ due serie a termini positivi

Se $\exists\, h, k$ tali che: $h \leq \frac{a_n}{b_n} \leq k \quad \forall n \quad (b_n \neq 0 \ \forall n)$

Allora le due serie hanno lo stesso carattere

Teorema Considero le due serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Se $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ FINITO $\neq 0 \Rightarrow$ le serie hanno lo stesso carattere

es) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\underbrace{n(n+1)}_{a_n}}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\underbrace{n^2}_{b_n}}$

$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n^2}{n(n+1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \Rightarrow$ hanno lo stesso comportamento

⇒ avendo già dimostrato prima che $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge a 1, possiamo dire che $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge ad un numero finito $\left(= \frac{\pi^2}{6}\right)$

es) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\lambda}$ con $\lambda < 1$?

$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^\lambda} \quad \forall n$ → 1° criterio del confronto

⇒ se diverge $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, diverge anche $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\lambda}$

es) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}\right)$

razionalizzo

$a_n = \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}\right) \cdot \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} = \frac{n+1-n+1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} = \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}}$

$a_n = \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$ per $n \to \infty$

↳ lo considero b_n

→ $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} = 1$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 9 di 146

•) $l = 1$ → si forniscono due serie con limite uguale a uno, una che diverge ed una che converge

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ $\quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} n^{-\frac{1}{n}} = 1$ DIVERGE

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ $\quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1$ CONVERGE

3) Criterio di convergenza del rapporto

Sia $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a termini strettamente positivi e sia $h \in (0,1)$ tale $\forall n \in \mathbb{N}$ si abbia: $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq h$

Allora la serie CONVERGE

•) Se $\forall n \in \mathbb{N}$ si ha che $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ la serie DIVERGE POSITIVAMENTE

dimostrazione:

•) $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq h \iff a_{n+1} \leq h \cdot a_n$ → posso farlo perché $a_n \neq 0$

→ questa condizione deve valere per $\forall n$ quindi posso dire che:

$a_n \leq h\, a_{n-1} \iff a_{n+1} \leq h \cdot a_n \leq h \cdot \underbrace{h \cdot a_{n-1}}_{a_n} = h^2 \cdot a_{n-1}$

→ lo applico ancora una volta:

$h^2 \cdot a_{n-1} \leq h^3 \cdot a_{n-2} \leq \dots \leq h^n \cdot a_1$

→ ho ottenuto che $a_{n+1} \leq h^n \cdot a_1$

h^n è il termine generale di una serie geometrica, $h \in (0,1)$

→ $\sum_{n=1}^{\infty} h^n$ CONVERGE $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ CONVERGE per confronto

•) $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \iff a_{n+1} \geq a_n$

→ posso applicarlo per $\forall n$ $\quad a_{n+1} \geq a_n \geq a_{n-1} \geq a_{n-2} \geq \dots \geq a_1 > 0$

→ Questo non rispetta la condizione necessaria ($a_n \to 0$ se la serie converge)

⇒ la serie diverge

Corollario: Sia $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie a termini strettamente positivi e sia:

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$ Allora:

→ considerando la somma fino ad un indice $N \in \mathbb{N}$, $N > n_0$ si ha:

$$\sum_{n=n_0+1}^{N+1} f(n) = \sum_{n=n_0}^{N} f(n+1) \leq \int_{n_0}^{N} f(x)dx \leq \sum_{n=n_0}^{N} f(n)$$

⇒ la tesi segue prendendo il limite per $N \to +\infty$ e usando la continuità di f.

→ ora suppongo che $\sum_{n=n_0}^{\infty} f(n)$ converga ad $S \in \mathbb{R}$

$$R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k) \leq \int_{n}^{+\infty} f(x)dx$$

↳ dalla disuguaglianza dimostrata sopra

→ allo stesso modo ottengo che $\int_{n+1}^{+\infty} f(x)\,dx \leq R_n$

$$\Rightarrow \int_{n+1}^{+\infty} f(x)\,dx \leq R_n \leq \int_{n}^{+\infty} f(x)\,dx$$

es) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(\log n)^n}$, $x \geq 0$ parametro fisso

→ uso il corollario del criterio della radice, studio $\sqrt[n]{a_n}$

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{x^n}{(\log n)^n}} = \frac{x}{\log n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad \ell < 1$$

⇒ la serie CONVERGE per il criterio della radice $\forall x \geq 0$

es) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ → uso il criterio del rapporto

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{1}{(n+1)!}\right) : \frac{1}{n!} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{\cancel{n!}}{(n+1)\cancel{n!}} = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad \ell < 1$$

⇒ la serie CONVERGE per il criterio del rapporto

es) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n}$ → criterio del rapporto

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+1} \cdot (n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{3^n \cdot n!} = \frac{3 \cdot \cancel{3^n} \cdot \cancel{(n+1)} \cdot \cancel{n!}}{\cancel{(n+1)} \cdot (n+1)^n} \cdot \frac{n^n}{\cancel{3^n} \cdot \cancel{n!}} = 3\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$$= 3\left(\frac{n-1+1}{n+1}\right)^n = 3\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{3}{e} \qquad \ell > 1$$

⇒ la serie DIVERGE per il criterio del rapporto

↳ Potevo usare il criterio della radice, con questa formula

FORMULA DI STIRLING $\boxed{n! \approx n^n \cdot e^{-n} \sqrt{2\pi n}}$, $n \gg 1$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 13 di 146

dimostrazione:

→ si studiano prima le somme parziali, di ordine dispari e di ordine pari:

$$S_{2n+3} = S_{2n+1} \underbrace{- a_{2n+2} + a_{2n+3}}_{\leq 0 \text{ perché } a_n \text{ non è crescente}} \leq S_{2n+1} \qquad \text{ordine DISPARI}$$

$$S_{2n+2} = S_{2n} \underbrace{+ a_{2n+1} - a_{2n+2}}_{\geq 0 \text{ per la monotonia della successione}} \geq S_{2n} \qquad \text{ordine PARI}$$

$$S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1} \geq S_{2n}$$

→ ho ottenuto 3 disuguaglianze: $\begin{cases} S_{2n+3} \leq S_{2n+1} & (1) \\ S_{2n+2} \geq S_{2n} & (2) \\ S_{2n+1} \geq S_{2n} & (3) \end{cases}$

•) $\{S_{2n+1}\}$ è non crescente per (1) e per la (3) è limitata dal basso

⇒ Una successione monotona e limitata dal basso ammette limite:

$$\exists S' = \lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \{S_{2n+1}\} \to \text{perché non è crescente}$$

•) $\{S_{2n}\}$ è non decrescente per (2) e per la (3) è limitata dall'alto

$$\Rightarrow \exists S'' = \lim_{n\to\infty} S_{2n} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \{S_{2n}\}$$

→ Consideriamo i limiti della disuguaglianza (3)

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} S_{2n} + \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} \quad \text{perché } a_n \text{ è infinitesima}$$

$$S' = S'' + 0$$

$$\Rightarrow \underline{S' = S''}$$

Teorema: Sia $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ tale che $\{a_n\}$ è non crescente e infinitesima e $\{b_n\}$ è una successione tale che l'insieme delle ridotte $\{t_n = \sum_{k=1}^{n} b_k\}$ sia limitato

Allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ CONVERGE

① Proprietà associativa e commutativa

Dati $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$; $\{n_K\}$ $K \mapsto n_K$ monotona crescente e $\lim_{K\to\infty} n_K = +\infty$

→ costruisco le seguenti successioni:

$b_1 = a_1 + a_2 + \dots + a_{n_1}$ → n_1 è un indice che ho scelto

$b_2 = a_{n_1+1} + a_{n_1+2} + \dots + a_{n_2}$ → n_2 secondo indice

In generale: $b_K = a_{n_{K-1}+1} + \dots a_K$

→ Definisco questa quantità, usando un indice muto j

$K_n = \sum_{j=1}^{n} b_j$ → successione ESTRATTA di $\{S_n\}$

Teorema •) Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, Allora $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ CONVERGE

•) Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ DIVERGE nello stesso modo

dimostrazione: basta richiamare la proprietà associativa

② Proprietà commutativa

→ definisco una applicazione biiettiva $i: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

Def: data la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ si definisce RIORDINAMENTO se $\forall n \in \mathbb{N}$ ho che $b_n = a_{i(n)}$

es) $i(1) = 17$ $b_1 = a_{17}$

$i(2) = 5$ $b_2 = a_5$

NB Visto che $i(n)$ è biiettiva ho preso tutti i valori che compongono la successione a_n, ma gli ho messi in un posto diverso di b_n

⇒ essendo $i(n)$ biettiva posso parlare anche di funzione inversa, quindi se b_n è un RIORDINAMENTO di a_n, anche a_n è riordinamento di b_n

Teorema Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è a termini positivi, Allora:

•) Se la converge, anche il riordinamento $\sum b$ CONVERGE

•) Se $\sum a_n$ diverge, anche $\sum b_n$ DIVERGE (positivamente)

dimostrazione

•) → considero $S_n = \sum_{K=1}^{n} a_K$ e $t_n = \sum_{K=1}^{n} b_K$ e devo dimostrare che

$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} t_n = S \in \mathbb{R}$

Teorema Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è a termini di segno qualunque e converge assolutamente, allora $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge assolutamente e ha la stessa somma

dimostrazione:

→ considero $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ che è un riordinamento di $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ (che so che converge dalle ipotesi iniziale)

⇒ Per il teorema precedente anche $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ converge allo stesso valore di $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$

⇒ converge anche $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

→ ho ottenuto che $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = T$, devo dimostrare che $S = T$

→ considero $j(n) = \max\{i(1) \longmapsto i(n)\}$. Osservo che $j(n) \geq n$ quindi $\lim_{n\to\infty} j(n) = +\infty$ per confronto

→ $T_n = \sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n} a_{i(k)} = \sum_{k=1}^{j(n)} a_k - \sum_{\substack{k=1 \text{ e} \\ * \; k \neq \{i(1) \longmapsto i(n)\}}}^{j(n)} a_k = S_{j(n)} - \sum_{*}^{j(n)} a_k$

* sto facendo la somma di tutti i termini di a_k fino $a_{j(n)}$ e poi tolgo tutti quelli che non appartengono all'immagine di $i(n)$, ovvero i valori di a_n che non ho ancora "posizionato" in b_n

→ sposto a sinistra $S_{j(n)}$ e ottengo:

$$T_n - S_{j(n)} = - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq \{i(1) \longmapsto i(n)\}}}^{\infty} a_k$$

→ se considero i moduli, applico la disuguaglianza triangolare:

$$|T_n - S_{j(n)}| \leq \sum_{*}^{j(n)} |a_k|$$

→ $\sum_{*}^{j(n)} |a_k| \leq \sum_{k \neq \{i(1) \longmapsto i(n)\}}^{\infty} |a_k|$ → faccio andare l'indice k fino a infinito

→ $\sum_{k \neq \{i(1) \longmapsto i(n)\}}^{\infty} |a_k| = \sum_{k=n+1}^{\infty} |b_k|$ questa serie è la coda di $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, che so che converge

→ la coda di una serie che converge è uguale a 0 quindi:

$$|T_n - S_{j(n)}| \leq 0$$

→ considerando a $n \to \infty$ ottengo $|T - S| \leq 0$ quindi $T = S$

Def: Se l'indice ν NON DIPENDE DA x, si parla di CONVERGENZA UNIFORME

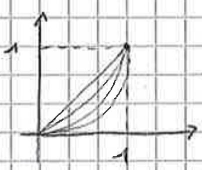
$\rightarrow$ $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu_\varepsilon > 0 : \forall n > \nu_\varepsilon, \boxed{\forall x \in I} \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

!! Rispetto alla definizione di prima è cambiata la posizione del quantificatore numerico x

Convergenza UNIFORME $\Rightarrow$ $\cancel{\Leftarrow}$ NO Convergenza PUNTUALE

es) $f_n(x) = x^n \quad \forall n, \; I = [0,1]$

$\rightarrow$ qualsiasi sia il valore di n, nel punto 1 la funzione varrà sempre 1



$\Rightarrow f_n(x) \xrightarrow{P} f, \; f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0,1) \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$

la successione di funzioni converge PUNTUALMENTE a f

$\Rightarrow f_n \not\xrightarrow{U} f \quad f_n$ non converge uniformemente a f

$f_n \xrightarrow{P} 0 \quad$ in $I_\delta = [0, 1-\delta] \quad \forall \delta \in (0,1)$

$f_n \xrightarrow{U} 0$

Teorema: Condizione necessaria e sufficiente affinché $\{f_n\}$ converga uniformemente in I è che:

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu_\varepsilon > 0 : \forall n, m > \nu_\varepsilon, \; \forall x \in I \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad ☆$

dimostrazione: •) convergenza uniforme $\Rightarrow$ ☆

$\rightarrow |f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)|$ disuguaglianza Δ

$\rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ perché so che $f_n(x)$ CONVERGE

$\rightarrow |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < \varepsilon + \varepsilon$

$\Rightarrow |f_n(x) - f_m(x)| < 2\varepsilon$

•) ☆ $\Rightarrow$ convergenza uniforme

$\rightarrow$ Se ☆ vale implica che $\{f_n(x)\}$ converge a $f(x) \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}$ (è un numero!)

$\rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu_\varepsilon > 0 : \forall n, m > \nu_\varepsilon \quad \forall x \in I \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$

fisso n e passo al limite per $m \to \infty$, quindi $f_m(x) \to f(x)$

$\rightarrow$ ottengo $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, che è la condizione per la convergenza uniforme

$$p_n(h) := \begin{cases} f_n'(x) & h = 0 \\ \dfrac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} & h \neq 0 \end{cases}$$

→ p_n sono definite per $h \in (a-x, b-x)$ perché devo fare in modo che la funzione stia nell'intervallo (a,b)

→ Studiamo $|p_m(h) - p_n(h)|$

Se $h=0$ dalla def. $|p_m(0) - p_n(0)| = |f_m'(x) - f_n'(x)|$

Se $h \neq 0$ $|p_m(h) - p_n(h)| = \left| \dfrac{f_m(x+h) - f_m(x)}{h} - \dfrac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} \right| =$

$= \left| \dfrac{(f_m(x+h) - f_n(x+h)) - (f_m(x) - f_n(x))}{h} \right|$

→ Applico il teorema di Lagrange alla funzione $[f_m - f_n]$ nell'intervallo tra x e $x+h$

quindi ottengo: $= |f_m'(x+\theta h) - f_n'(x+\theta h)|$ $\quad \theta = \theta_{m,n} \in (0,1)$

→ essendo uniformemente convergente per ipotesi:

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu_\varepsilon > 0 : \forall m, n > \nu_\varepsilon \quad \forall x \in (a,b) \quad |f_m'(x) - f_n'(x)| < \varepsilon$

⇒ di conseguenza vale anche per la funzione $p_n(x)$:

se $m, n > \nu_\varepsilon \quad \forall h \in (a-x, b-x) \quad |p_m(h) - p_n(h)| < \varepsilon$

⇒ $\{p_n\}$ converge uniformemente in $(a-x, b-x)$ quindi, visto che le p_n sono continue, per il teorema precedente si ottiene che il limite uniforme delle p_n è CONTINUO in $(a-x, b-x)$

→ fisso un valore di h e studio il limite

$\lim\limits_{n\to\infty} p_n(h) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} = \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

→ $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \underline{f'(x)} = \lim\limits_{h\to 0} \left(\lim\limits_{n\to\infty} p_n(h) \right)$ posso scambiare i limiti: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\lim\limits_{h\to 0} p_n(h) \right) = \underline{\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)}$

∇ Posso scambiare i limiti perché $p_n(h)$ è uniformemente continua in h e converge uniformemente in n

Teorema (passaggio al limite sotto il segno di integrale)

Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni continue in $[a,b]$ che convergono uniformemente a $f : [a,b] \to \mathbb{R}$

Si dice che $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente a $f: I \to \mathbb{R}$ se la successione di funzioni $\{S_n\}$ a valori reali converge uniformemente in I ad f.
In questo caso f è la SOMMA della SERIE:

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

Def: Si definisce, di nuovo, RESTO o CODA della SERIE il seguente termine:

$$R_n(x) = f(x) - S_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)$$

Possiamo così definire la convergenza uniforme di $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ ad f:

$\Rightarrow$ $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu_\varepsilon > 0 : \forall n > \nu_\varepsilon \quad |R_n(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in I$

Teorema: Condizione necessaria e sufficiente affinché $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converga uniformemente in I è che:

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu_\varepsilon > 0 : \forall n > \nu_\varepsilon, \ \forall p \in \mathbb{N} \quad |R_{n,p}(x)| < \varepsilon$

dove $R_{n,p}(x) = f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \dots + f_{n+p}(x) = S_{n+p} - S_n$

$\rightarrow$ Suppongo $f: I \to \mathbb{R}$ e definisco $M = \sup\{|f(x)| : \forall x \in I\}$. Questa quantità rappresenta il valore massimo assunto dalla f e sarà minore di $+\infty$ se f è limitata

$\rightarrow$ Suppongo f_n limitate $\forall n$ e definisco $M_n = \sup\{|f_n(x)| \ \forall x \in I\}$

Def: Si dice che $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ CONVERGE TOTALMENTE se $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge.

Teorema: Se $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge totalmente in I, allora essa converge uniformemente in I e assolutamente $\forall x \in I$.

dimostrazione:

$\rightarrow$ Fisso $x \in I$, $\forall n \in \mathbb{N} \quad f_n(x) \le |f_n(x)| \le M_n(x)$

$\Rightarrow$ per il teorema del confronto, se converge $M_n(x)$ converge anche $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$, quindi la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge assolutamente

$\rightarrow$ $\forall x \in I$ ho $|R_{n,p}(x)| = |f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \dots + f_{n+p}(x)|$

→ ora considero la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1+n)} \sim \frac{1}{n^2} \quad \underline{\text{CONVERGE}}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1+nx^2)} \quad \text{CONVERGE TOTALMENTE in } [1,+\infty)$$

② $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(x\cdot\sqrt{n})}{n^2} \qquad x\in\mathbb{R}$

$$M_n = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left\{ \left| \frac{\operatorname{arctg}(x\sqrt{n})}{n^2} \right| \right\} \leq \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{n^2}$$

$$\rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} M_n = \frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \quad \text{converge}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(x\sqrt{n})}{n^2} \quad \text{converge totalmente su tutto } \mathbb{R}$$

③ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\cdot x^n \quad \text{con } x\in[-1,1]$

•) $f_n(x) = (-x)^n \Rightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\cdot x^n = \sum_{n=1}^{\infty}(-x)^n$ per $x\in[-1,1]$

→ ho ottenuto una serie geometrica di ragione $-x$

Sappiamo che converge se $|-x|<1$, ovvero $\forall x\in(-1,1)$.

La somma è $S_n = \dfrac{1}{1+x}$

→ studiamo la convergenza assoluta:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(-x)|^n = \sum_{n=1}^{\infty} |x|^n \quad \text{converge a } T(x) = \frac{1}{1-|x|} \quad \forall x\in(-1,1)$$

•) se $x=-1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\cdot(-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} 1 \quad \text{è DIVERGE}$$

•) se $x=1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\cdot(1)^n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \quad \text{INDETERMINATA}$$

•) $M_n = \sup_{x\in[-1,1]} |x|^n = 1 \rightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} M_n = \sum_{n=1}^{\infty} 1$ diverge

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\cdot(x)^n \quad \text{non converge totalmente}$$

∇ $S(x) = \dfrac{1}{1+x}$ non è limitata in $(-1,1) \Rightarrow$ non ho conv. uniforme

→ ottengo la seguente stima:

$$\left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} \right| \leq \frac{M \cdot L^{n+1}}{(n+1)!} \cdot h^{n+1} = M \cdot \frac{(L\,h)^{n+1}}{(n+1)!}$$

→ CNES per la sviluppabilità è che $R_{n,x_0} \to 0$ per $n \to \infty$

$$\lim_{n \to \infty} M \cdot \frac{(L\,h)^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

⇒ per confronto anche $R_{n,x_0} \to 0$

es) $e^x \in C^\infty(\mathbb{R})$ $\quad M, L?$ $\quad |f^{(n)}(x)| \leq M \cdot L^n$

→ $(e^x)^{(n)} = e^x \quad \forall n$

$|(e^x)^{(n)}| = |e^x| = \max\{e^x : x \in [a,b]\} \quad \forall [a,b]$ int. chiuso

→ Se io scelgo $M = 1$ e $L = \max\{e^x : x \in [a,b]\}$ ottengo

$$|(e^x)^{(n)}| \leq M \cdot L^n$$

⇒ e^x è sviluppabile in serie di Taylor

es) $\operatorname{sen} x, \cos x \in C^\infty(\mathbb{R})$ $\quad M, L?$

→ Le derivate n-esime di seno e coseno sono sempre seno e coseno

⇒ $|f^{(n)}(x_0)| \leq M \cdot L^n = 1$ prendo $M = 1$ e $L = 1$ ed è rispettata la condizione

es) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ → MACLAURIN $\qquad f(x) = e^x$

→ $n = 0 \quad f(0) = 1$

→ $n = 1 \quad f'(0) = 1 = f(0) \quad \dots \quad \forall n \; f^{(n)}(0) = e^0 = 1$

⇒ $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$

es) $x_0 = 0 \quad f(x) = \operatorname{sen} x$

$f(0) = 0 \; ; \; f'(0) = \cos(0) = 1 \; ; \; f''(0) = -\operatorname{sen} 0 = 0 \; ; \; f'''(0) = -\cos(0) = -1 \; \dots$

⇒ $\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

⇒ $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

massimo è assunto nel valore massimo dell'intervallo $[-h, h]$, ovvero proprio h

→ moltiplico e divido per t_0^n

$= |a_n t_0^n| \cdot \left|\frac{h}{t_0}\right|^n \leq H \cdot \left|\frac{h}{t_0}\right|^n \to < 1$

→ ho ottenuto che $M_n \leq H \cdot \left|\frac{h}{t_0}\right|^n$

→ la serie $H \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{h}{t_0}\right|^n$ CONVERGE perché $\frac{h}{t_0} < 1$

⇒ M_n converge per confronto, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ CONVERGE TOTALMENTE

Teorema (raggio di convergenza): Data una serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ si possono avere solo uno di questi tre casi

1) la serie converge ASSOLUTAMENTE $\forall t \in \mathbb{R}$

2) $\exists \rho > 0$ tale che la serie:
   - ·) CONVERGE $\forall t : |t| < \rho$
   - ·) DIVERGE $\forall t : |t| > \rho$

3) la serie CONVERGE solo per $t = 0$

→ Possiamo dire che $\forall h \in \mathbb{R}$ (caso ①) e $\forall h \in (0, \rho)$ (caso ②) la serie converge TOTALMENTE in $[-h, h]$

dimostrazione

→ so che la serie converge da qualche parte, studio l'insieme dove la serie converge: $S = \{t \in \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \text{ converge}\}$

→ $0 \in S$ perché $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot 0^n = 1$ CONVERGE

⇒ Se $S = \{0\}$ ci troviamo nel caso ③

→ Altrimenti $S \neq \{0\}$ → S è un insieme ILLIMITATO; → S è limitato

→ Se S è illimitato → $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\exists t_0 \in S$ tale che $t_0 > \alpha$

se $t_0 \in S \iff$ la serie converge in t_0

→ Per il teorema di prima converge anche in $t = \alpha$ perché $|\alpha| < t_0$

→ Visto che α è arbitrario posso scegliere $\forall$ valore per far convergere

⇒ Verificato il caso ①

→ Se S è limitato definisco $\rho = \sup |t|$, $t \in S$

→ sicuramente ρ è maggiore di zero perché S contiene almeno

2) **Teorema**: Data la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$, se esiste il limite:

$$\underbrace{\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \ell \in \overline{\mathbb{R}}}\ \Rightarrow \rho = \ell$$

! Questo teorema si dimostra con il corollario del criterio del rapporto. Se voglio usare la stessa formula del limite:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ell$$

devo ricordare che $\rho = \frac{1}{\ell}$. Se invece ribalto la frazione nel limite, avrò già che $\rho = \ell$

es) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{4^n} (x+3)^n$ studiare il raggio di convergenza

$x+3 = t \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{4^n} \cdot t^n$ con $a_n = \frac{(-1)^n \cdot n}{4^n}$

→ uso il criterio del rapporto

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n}{4^n} \cdot \frac{4^{n+1}}{n+1}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\overset{1}{\frac{n}{n+1}} \cdot \frac{\cancel{4^n} \cdot 4}{\cancel{4^n}}\right| = 4$$

$\Rightarrow \rho = 4$, la serie converge $\forall x$ tale che $|x+3| < 4$

quindi $-4 < x+3 < 4 \iff -7 < x < 1$ converge

! Il raggio di convergenza dà informazioni sugli intervalli, ma non sui punti -7 e 1, quindi devo calcolare in quei punti cosa succede

•) $x = -7 \to \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{4^n} \cdot (-7+3)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{4^n} \cdot (-4)^n =$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cancel{4^n} \cdot n}{\cancel{4^n}} = \sum_{n=0}^{\infty} n$ DIVERGE

•) $x = 1 \to \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{\cancel{4^n}} \cdot \cancel{4^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot n$ NON DETERMINATA

es) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ $a_n = \frac{1}{n!}$

→ criterio del rapporto

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{n!} \cdot (n+1)!\right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\cancel{n!}} \cdot \cancel{n!}(n+1)\right) = +\infty$$

$\Rightarrow \rho = +\infty$

altri esercizi → video lezione 16/03 parte 2 integrazione termine a termine:

$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$

$\Rightarrow$ questo sviluppo vale per $|x| < 1$

∇_0 Siccome la serie dei coefficienti $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ è convergente (Leibniz).

posso applicare il teorema di Abel:

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} [\log(1+x)] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \iff \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \log 2$

② sostituisco x con $-x^2$

$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$

$\rightarrow$ integro a destra e a sinistra tra 0 e x $(|x|<1)$

$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$

$\rightarrow$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{2n+1}$ converge, quindi applico Abel

$\lim_{x\to 1^-} (\operatorname{arctg} x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{2n+1} \iff \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$

③ sostituisco x con x^2

$\frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = 1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{2n} + \dots$

$\rightarrow$ integro tra 0 e x (per $|x|<1$)

$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} = \frac{1-\cancel{x}+1+\cancel{x}}{(1+x)(1-x)} = \frac{2}{1-x^2}$

$\rightarrow$ moltiplico per 2 a destra e a sinistra

$\frac{2}{1-x^2} = 2\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$

$\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$

$\rightarrow$ integrando ottengo:

$\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ $\Rightarrow$ questa serie diverge sia in 1 che -1

COEFFICIENTE BINOMIALE GENERALIZZATO

Dati $n, k \in \mathbb{N}$ con $k \leq n$ si definisce:

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)\cancel{(n-k)!}}{k!\cancel{(n-k)!}} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$

$$\frac{(1+x)^{\alpha-1}\left(f'(x)(1+x)-f(x)\right)}{(1+x)^{2\alpha}} = (1+x)^{\alpha-1-2\alpha} \;\_\_\_\_ = \frac{f'(x)(1+x)-f(x)}{(1+x)^{\alpha+1}}$$

→ Nell'intervallo di convergenza posso derivare termine a termine

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\binom{\alpha}{k}\cdot k}_{=\alpha\binom{\alpha-1}{k-1}} \cdot x^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha \binom{\alpha-1}{\boxed{k-1}} x^{\boxed{k-1}}$$

ho ottenuto che il pezzo sotto del binomiale è uguale all'esponente della x, come nella serie di $f(x)$

→ divido tutto per α

$$\frac{f'(x)}{\alpha} = \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\alpha-1}{k-1} x^{k-1}$$

→ moltiplico per $(1+x)$

$$\frac{f'(x)}{\alpha}(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\alpha-1}{k-1} x^{k-1}(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[\binom{\alpha-1}{k-1}x^{k-1} + \binom{\alpha-1}{k-1}x^{k}\right]$$

→ Faccio diventare i due $k-1$ come k, così la sommatoria posso farla partire da zero

$$\sum_{k=0}^{\infty}\Bigg[\underbrace{\binom{\alpha-1}{k}+\binom{\alpha-1}{k-1}}_{=\binom{\alpha}{k}}\Bigg] x^{k} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^{k} = f(x)$$

⇒ Abbiamo dimostrato che $\frac{f'(x)}{\alpha}(1+x) = f(x)$ (1)

→ Affermo che $\frac{f(x)}{(1+x)^{\alpha}}$ è COSTANTE, perché se riesco a dimostrarlo so che $f(x) = c(1+x)^{\alpha}$, con $c \in \mathbb{R}$. Se poi, calcolando la costante c, ottengo che essa vale proprio 1, ottengo che $f(x)=(1+x)^{\alpha}$

$$\left[\frac{f(x)}{(1+x)^{\alpha}}\right]' = \frac{f'(x)(1+x)^{\alpha} - f(x)\cdot\alpha(1+x)^{\alpha-1}}{(1+x)^{2\alpha}} = \frac{f'(x)(1+x)-\alpha f(x)}{(1+x)^{\alpha+1}} = \frac{0}{(1+x)^{\alpha+1}} = 0$$

$\underset{0}{\nabla}$ $f'(x)(1+x) - \alpha f(x) = 0$ per la relazione (1)

→ ho ottenuto che la derivata prima è 0, quindi $\frac{f(x)}{(1+x)^{\alpha}}$ è costante

$$\forall x: |x|<1 \quad \frac{f(x)}{(1+x)^{\alpha}} = \frac{f(0)}{(1+0)^{\alpha}} = \frac{f(0)}{1} = f(0)$$

$$f(0) = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}\cdot 0^{k} = 1 \quad\Rightarrow\quad \frac{f(x)}{(1+x)^{\alpha}} = 1 \quad\Rightarrow\quad \boxed{f(x)=(1+x)^{\alpha}}$$

→ se $\alpha = -\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-1/2}{k}x^{k} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}x^{2} + \ldots + (-1)^{k}\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2k-1}{2k}\cdot x^{k}$$

Def: La serie $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen}(nx))$ è detta **SERIE DI FOURIER**

! Valgono le seguenti relazioni:

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen}(nx) \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen}(nx)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| + |b_n|$$

Def: Se $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| + |b_n| < +\infty$ la serie di Fourier corrispondente **CONVERGE ASSOLUTAMENTE** $\forall x \in \mathbb{R}$

Def: La serie di Fourier $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx) = F(x)$ si dice **ASSOCIATA** a $f(x)$ se:

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \\ a_m = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(mx)\,dx \\ b_m = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(mx)\,dx \end{cases}$$

dimostrazione: $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)$

→ moltiplico a destra e a sinistra per $\cos(mx)$

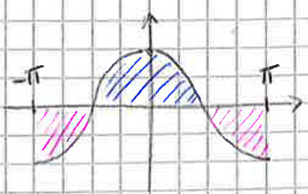
$$f(x) \cdot \cos(mx) = a_0 \cos(mx) + \sum_n a_n \cos(mx)\cos(nx) + b_n \cos(mx)\operatorname{sen}(nx)$$

→ integro a destra e a sinistra tra $-\pi$ e π

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(mx)\,dx = a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\,dx + \sum_n a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)\,dx +$$
$$+ b_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \operatorname{sen}(nx)\,dx$$

→ dimostro i seguenti risultati

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq 0 \\ 2\pi & \text{se } m = 0 \end{cases}$$ perché



$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cdot \cos(nx)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq m \\ \pi & \text{se } n = m \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(nx) \cos(mx)\,dx = 0 \quad \forall m$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(nx) \operatorname{sen}(mx) = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq m \\ \pi & \text{se } n = m \end{cases}$$

→ ricavo a_0 ponendo $m = 0$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = a_0 \int_{-\pi}^{\pi} 1\,dx + \sum_n a_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,dx}_{0} + b_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx\,dx}_{0}$$

$$\int \underbrace{(x-\pi)^2}_{f} \underbrace{\cos nx}_{g'} \, dx = \frac{1}{n}(x-\pi)^2 \operatorname{sen}(nx) - \frac{2}{n}\int \underbrace{(x-\pi)}_{f} \underbrace{\operatorname{sen}(nx)}_{g'} \, dx =$$

$$= \frac{1}{n}(x-\pi)^2 \operatorname{sen}(nx) - \frac{2}{n}\left[-\frac{1}{n}(x-\pi)\cos nx + \frac{1}{n}\int \cos nx \, dx \right] =$$

$$= \frac{1}{n}(x-\pi)^2 \operatorname{sen}(nx) + \frac{2}{n^2}(x-\pi)\cos nx - \frac{2}{n^2}\cdot\frac{\operatorname{sen} nx}{n} + c$$

$\underline{x=2\pi} \rightarrow \frac{2}{n^2}(2\pi-\pi)\cos(2n\pi) = \frac{2}{n^2}\pi$

$\underline{x=0} \rightarrow \frac{2}{n^2}(0-\pi)\cos 0 = -\frac{2}{n^2}\pi$

$\Rightarrow a_n = \frac{1}{\pi}\cdot\left(\frac{2}{n^2}\pi + \frac{2}{n^2}\pi\right) = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{4\pi}{n^2} = \frac{4}{n^2}$

$\Rightarrow F(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}\cos nx$

CONVERGENZE DELLA SERIE DI FOURIER

Def: Sia $f\ [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$. Si dice che $f(x)$ è CONTINUA A TRATTI se $f(x)$ è continua ovunque in $[a,b]$ eccetto un numero FINITO di punti $\{x_i\}_{i=1,N}$ in cui presenta una discontinuità di prima specie (di tipo salto)

∇ $f(x)$ continua a tratti $\Rightarrow$ $f(x)$ è integrabile

$\Rightarrow a_0, a_n$ e b_n esistono finiti

Teorema di convergenza quadratica

Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periodica di periodo 2π e continua a tratti in $(-\pi,\pi)$

Allora:

① Tra tutti i polinomi trigonometrici di ordine N quello che minimizza:
$$\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - P_N(x)|^2 \, dx} \quad (\text{norma } L_2 \text{ o QUADRATICA})$$
è proprio quello di Fourier $P_N(x) = F_N(x)$

② $\lim_{N\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - F_N(x)|^2 dx = 0 \qquad (F_N(x) \rightarrow F(x) \text{ con } x \rightarrow +\infty)$

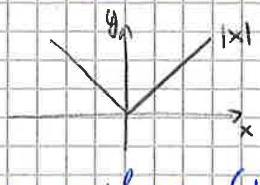
$\Rightarrow F(x)$ converge QUADRATICAMENTE (in MEDIA) a $f(x)$

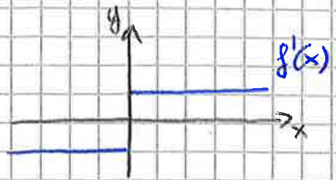
∇ Mettere o non mettere il segno di radice in queste formule è indifferente poiché la radice è una funzione monotona e

Def: Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$. $f(x)$ si dice di CLASSE C^1 A TRATTI se è CONTINUA e derivabile con derivata 1ª continua ovunque tranne in un numero finito di punti $\{x_i\}_{i=1}^{N}$ per cui esistono (finiti) però i limiti:

$$\lim_{x \to x_i^-} f'(x) \quad e \quad \lim_{x \to x_i^+} f'(x)$$

es) $f(x) = |x|$





__Teorema di convergenza uniforme (1ª parte)__

Sia $f(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodica di periodo 2π e di classe C^1 a tratti in $(-\pi, \pi]$ allora la serie di Fourier $F(x)$ converge uniformemente a $f(x)$ in $\mathbb{R}$

! convergenza uniforme $\overset{\Rightarrow}{\cancel{\Leftarrow}}$ convergenza puntuale

__Teorema di convergenza uniforme (2ª parte)__

Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodica di periodo 2π continua a tratti in $[-\pi, \pi]$ e di classe C^1 a tratti in $(a,b) \subset [-\pi, \pi]$

Allora la serie di Fourier $F(x)$ CONVERGE UNIFORMEMENTE a $f(x)$ in qualunque insieme chiuso contenuto in (a,b)

! $f(x) = F(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)$

$\downarrow$ derivo

•) $f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = 0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\underbrace{\boxed{-n\, a_n}}_{b_n'} \operatorname{sen} nx + \underbrace{\boxed{n\, b_n}}_{a_n'} \cos nx)$

•) $\int_{x_0}^{x} f(t)\, dt = a_0 (x - x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} (a_n \cos nt + b_n \operatorname{sen} nt)\, dt$

__FUNZIONI CON PERIODI DIVERSI DA 2π__

es) $\cos 2x = \cos\left(\frac{2\pi}{\pi} x\right) \to$ ha periodo π

__In generale__ $\quad \cos\left(\frac{2\pi}{T} n x\right), \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{T} n x\right)$ __T periodo__

→ ∃ l'OPPOSTO $\Rightarrow \forall \underline{v} \in \mathbb{R}^n \ \exists \underline{\tilde{v}} \in \mathbb{R}^n : \underline{v} + \underline{\tilde{v}} = 0 \Rightarrow \underline{\tilde{v}} = -\underline{v} = (-v_1, \dots, -v_n)$

→ vale la proprietà COMMUTATIVA $\underline{v} + \underline{w} = \underline{w} + \underline{v}$

•) PRODOTTO PER SCALARE : $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$(\alpha, \underline{v}) \longmapsto \underline{z} = \alpha \cdot \underline{v}$$

$$\underline{z} = \alpha \cdot \underline{v} = (\alpha \cdot v_1, \alpha \cdot v_2, \dots, \alpha \cdot v_n) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha \cdot v_i) \underline{e_i}$$

$\underline{\nabla}$ Due VETTORI si dicono PARALLELI se $\exists \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tale che:
$\underline{v} = \alpha \cdot \underline{w}$, in simboli $\underline{v} \parallel \underline{w}$

Def: Dati $\underline{v_1}, \underline{v_2}, \dots, \underline{v_n} \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, la combinazione LINEARE dei vettori $\underline{v_m}$ di coefficienti α_m è il vettore:

$$\sum_{m=1}^{n} \underline{v_m} \cdot \alpha_m = \alpha_1 \cdot \underline{v_1} + \alpha_2 \underline{v_2} + \dots + \alpha_n \underline{v_n}$$

Se una combinazione lineare di vettori è nulla se e solo se i coefficienti α_m sono nulli, allora i vettori $v_1, \dots, v_n$ si dicono LINEARMENTE INDIPENDENTI. Un insieme di n vettori indipendenti in $\mathbb{R}^n$ si dice BASE.

•) PRODOTTO SCALARE $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$(\underline{v}, \underline{w}) \mapsto \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i \cdot w_i \in \mathbb{R}$$

Proprietà

→ $\forall \underline{v} \in \mathbb{R}^n \quad \langle \underline{v}, \underline{v} \rangle \geq 0$ e vale zero se e solo se $\underline{v} = 0$

→ LINEARITÀ $\forall \underline{v}, \underline{w}, \underline{z} \in \mathbb{R}^n$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ vale:

$$\langle \alpha \cdot \underline{v} + \beta \cdot \underline{w}, \underline{z} \rangle = \alpha \cdot \langle \underline{v}, \underline{z} \rangle + \beta \langle \underline{w}, \underline{z} \rangle$$

→ SIMMETRIA $\forall \underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle = \langle \underline{w}, \underline{v} \rangle$

⇒ il prodotto scalare è una forma BILINEARE SIMMETRICA definita POSITIVA

Def: È definita una funzione $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty)$, detta NORMA, che associa ad ogni vettore $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ lo scalare $\|v\| \in [0, +\infty)$ definito come:

$$\|v\| = \sqrt{\langle \underline{v}, \underline{v} \rangle} = \sqrt{\underline{v} \cdot \underline{v}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}$$

$$\sum_{i=1}^{m}(v_i+w_i)^2 = \sum_{i=1}^{m} v_i^2 + \sum_{i=1}^{m} w_i^2 + 2\sum_{i=1}^{m} v_i w_i = \|\underline{v}\|^2+\|\underline{w}\|^2+2\langle \underline{v},\underline{w}\rangle$$

$$\|\underline{v}+\underline{w}\|^2 = \|\underline{v}\|^2+\|\underline{w}\|^2+2\langle \underline{v},\underline{w}\rangle \leq \|v\|^2+\|w\|^2+2\cdot\|v\|\,\|w\| = (\|\underline{v}\|+\|w\|)^2$$

per la disuguaglianza di Schwarz

Identità di polarizzazione: Sia $\|\cdot\|:\mathbb{R}^n\to[0,+\infty)$ definita dal prodotto scalare. Allora per $\underline{v},\underline{w}\in\mathbb{R}^n$ vale:

$$\langle \underline{v},\underline{w}\rangle = \frac{1}{4}\left(\|\underline{v}+\underline{w}\|^2-\|\underline{v}-\underline{w}\|^2\right)$$

Proprietà: Dati $\underline{v}$, $\underline{w}$ in $\mathbb{R}^n$, l'angolo θ compreso tra $\underline{v}$ e $\underline{w}$ è determinato da:

$$\cos\theta = \frac{\langle \underline{v},\underline{w}\rangle}{\|\underline{v}\|\,\|\underline{w}\|} \iff \theta = \arccos\left(\frac{\langle \underline{v},\underline{w}\rangle}{\|\underline{v}\|\cdot\|\underline{w}\|}\right)$$

dimostrazione

→ due vettori individuano SEMPRE un piano, quindi basta studiare il caso $m=2$

$$\underline{v}=(\underbrace{\|v\|\cos\theta_v}_{v_1},\underbrace{\|w\|\,\mathrm{sen}\,\theta_v}_{v_2}) \quad , \quad \underline{w}=(\underbrace{\|w\|\cos\theta_w}_{w_1},\underbrace{\|w\|\,\mathrm{sen}\,\theta_w}_{w_2})$$

$$\langle \underline{v},\underline{w}\rangle = v_1w_1+v_2w_2 = \|v\|\cos\theta_v\,\|w\|\cos\theta_w+\|v\|\,\mathrm{sen}\,\theta_v\,\|w\|\,\mathrm{sen}\,\theta_w$$

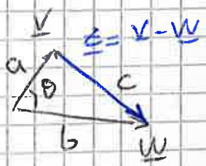
→ raccolgo $\|v\|\cdot\|w\|$ → angolo θ tra i due vettori

$$\langle \underline{v},\underline{w}\rangle = \|v\|\cdot\|w\|\left(\cos(\overbrace{\theta_v-\theta_w}^{})\right)$$

Def: Si definiscono $\underline{v}$ e $\underline{w}$ in $\mathbb{R}^n$ ORTOGONALI se $\langle \underline{v},\underline{w}\rangle=0 \iff$ $\iff \cos\theta=0$

TEOREMA DEL COSENO O DI CARNOT

$\forall \underline{v},\underline{w},\underline{z}\in\mathbb{R}^n$ tali che $\underline{z}=\underline{v}-\underline{w}$ vale:



$$\|z\|^2=\|v\|^2+\|w\|^2-2\|v\|\cdot\|w\|\cos\theta$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta$$

dimostrazione:

$$\|z\|^2=\|v-w\|^2=\langle \underline{v}-\underline{w},\underline{v}-\underline{w}\rangle=\|v\|^2+\|w\|^2-2\langle \underline{v},\underline{w}\rangle =$$
$$=\|v\|^2+\|w\|^2-2\|v\|\cdot\|w\|\cos\theta$$

Corollario - Teorema di Pitagora

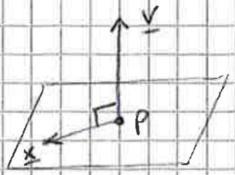
se $\underline{v}\perp\underline{w}$ $(\cos\theta=0)$ $\Rightarrow$ $\|z\|^2=\|\underline{v}\|^2+\|\underline{w}\|^2$

PIANI e RETTE in $\mathbb{R}^3$

es) determinare un PIANO in $\mathbb{R}^3$

→ assegno un punto $P = (P_1, P_2, P_3)$ e un vettore $\underline{v} \in \mathbb{R}^3$

→ voglio determinare un piano che passi per P e sia perpendicolare al vettore $\underline{v}$



$\underline{x} = (x, y, z)$

→ Scelgo un punto $\underline{x}$ nel piano e determino il vettore $\vec{PX}$

$\langle (\underline{x} - P), \underline{v} \rangle = 0 \qquad \langle \underline{x}, \underline{v} \rangle - \langle P, \underline{v} \rangle = 0$

$\Rightarrow v_1 x + v_2 y + v_3 z - P_1 v_1 - P_2 v_2 - P_3 v_3 = 0$

ho ottenuto l'equazione cartesiana del piano passante per P e $\perp$ a $\underline{v}$

$\boxed{ax + by + cz + d = 0}$ generico piano in $\mathbb{R}^3$

→ sappiamo che è il piano perpendicolare a $\underline{v} = (a, b, c)$

NB Se $d = 0$ il piano passa per l'ORIGINE

equazione parametrica $P \in \mathbb{R}^3$, $\underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^3$ (individuano il piano)

$\boxed{\underline{x} = P + s\underline{v} + t\underline{w}}$ con $s, t \in \mathbb{R}$

$$\underline{x} = \begin{cases} x = P_1 + s v_1 + t w_1 \\ y = P_2 + s v_2 + t w_2 \\ z = P_3 + s v_3 + t w_3 \end{cases}$$

NB •) Dall'equazione parametrica, eliminando s e t si arriva alla forma cartesiana

•) Dall'equazione cartesiana passo a quella parametrica ponendo $y = s$, $z = t$ e ricavando

es) $ax + by + cz + d$

→ pongo $y = s$ e $z = t$ $\Rightarrow$ ricavo $x = -\dfrac{bs + ct + d}{a}$

$\Rightarrow$ ricavo il vettore $\underline{x}$

$$\underline{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} -d/a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{P} + \underbrace{\begin{pmatrix} -b/a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\underline{v}} s + \underbrace{\begin{pmatrix} -c/a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\underline{w}} t$$

CURVE PARAMETRICHE in $\mathbb{R}^n$

Def: Una CURVA PARAMETRICA è una funzione vettoriale continua definita su un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$, ovvero una funzione $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ tale che:

$$I \ni t \longmapsto \gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_n(t))$$

dove $\gamma_i : I \to \mathbb{R}$ $(i = 1, \dots, n)$ sono FUNZIONI CONTINUE.
L'insieme $\gamma(I) = \{\gamma(t) : t \in I\} \subset \mathbb{R}^n$ si dice SOSTEGNO della curva e le equazioni $x = \gamma(t)$ si dicono EQUAZIONI PARAMETRICHE della curva.

$\gamma' \times \gamma'' \cdot \gamma''' = 0$

Def: La curva parametrica $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ si dice curva PIANA se il suo sostegno $\gamma(I)$ è contenuto in un piano. π: $\underline{b}(t_0) \cdot [P - \gamma(t_0)] = 0$

Una curva parametrica piana $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ della forma $\gamma(t) = (t, f(t))$, con $f : I \to \mathbb{R}$ continua, si dice in FORMA CARTESIANA

es)

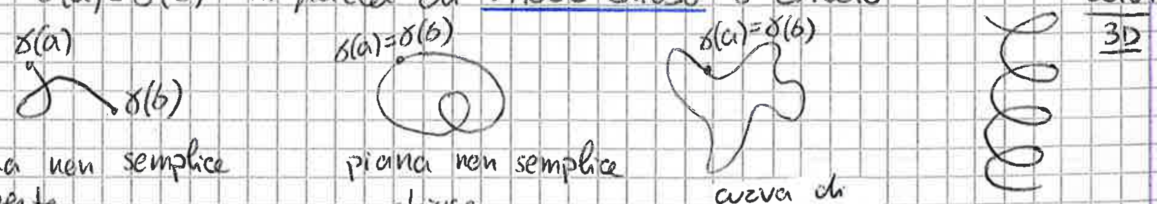
curva cartesiana — curve non cartesiane

Def: Una curva γ si dice SEMPLICE se la funzione γ è iniettiva, ovvero se per ogni coppia $t_1, t_2 \in I$, $t_1 \neq t_2 \Rightarrow \gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$

Def: Se $I = [a, b]$ è un intervallo chiuso, la curva $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ si chiama ARCO.

Se $\gamma(a) = \gamma(b)$ si parla di ARCO CHIUSO o LACCIO

es)



piana non semplice aperta — piana non semplice chiusa — curva di JORDAN — non piana semplice, non chiusa

Def: Siano $I, J \subseteq \mathbb{R}$ e sia $p : J \to I$ una funzione derivabile e strettamente monotona. La curva $\tilde{\gamma} : J \to \mathbb{R}^n$ si dice RIPARAMETRIZZAZIONE della curva $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ se:

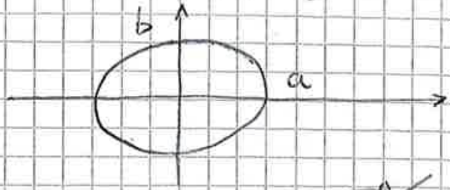
$$\tilde{\gamma} = \gamma \circ p$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 51 di 146

es) $\underline{\gamma}(t) = (a\cos t, b\,\text{sen}\, t)$ $\quad a, b > 0 \quad t \in [0, 2\pi]$

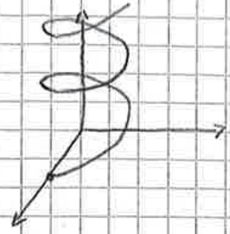
↓

ELLISSE



piana, semplice, chiusa

es) $\underline{\gamma}(t) = (a\cos t, b\,\text{sen}\, t, ct) \in \mathbb{R}^3$



→ $a \neq b$ ELICA a sezione ellittica

→ $a = b$ ELICA a sezione circolare

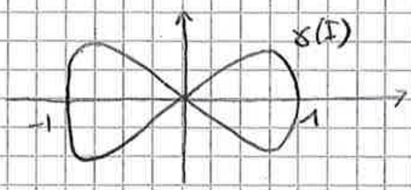
→ $|c|$ distanza tra una spirale e l'altra

→ se $c < 0$ l'elica va verso il basso

es) $\underline{\gamma}(t) = (\cos t, \frac{1}{2}\text{sen}\, 2t)$ $\quad t \in [0, 2\pi]$ → LEMNISCATA

↓

$\gamma(I) = \{x^4 - x^2 + y^2 = 0\}$



caso di curva di Lissajous

curva piana, non semplice, chiusa

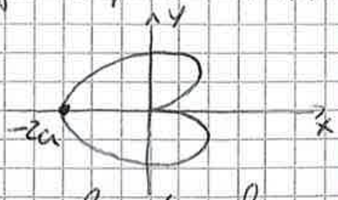
Def: $\underline{\gamma} : I \to \mathbb{R}^2$ si dice in FORMA POLARE se è definita da $r: I \to [0, +\infty)$ (funzione raggio) tramite la forma:

$$\gamma(t) = (r(t)\cos t, r(t)\,\text{sen}\, t)$$

⇒ La circonferenza di raggio 1 è una curva in forma polare con $r(t) = 1$

es) CARDIOIDE $\quad r(t) = 2a(1 - \cos t) \quad t \in [0, 2\pi]$

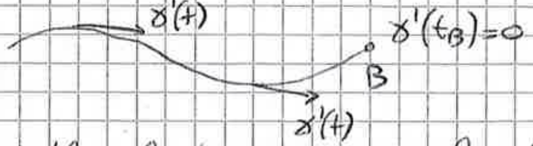
$\underline{\gamma}(t) = \left(2a(1-\cos t)\cos t, 2a(1-\cos t)\,\text{sen}\, t\right)$



Def: $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ si dice DERIVABILE se lo sono le γ_i che definiscono la curva. Inoltre si dice REGOLARE se $\gamma_i'(t) \neq 0 \ \forall t$

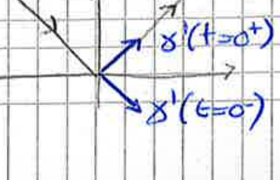
$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)) \Longrightarrow \gamma'(t) = (\gamma_1'(t), \dots, \gamma_n'(t))$$

! Se $\gamma'(t_B) = 0$ vuol dire che il corpo in quel punto si ferma

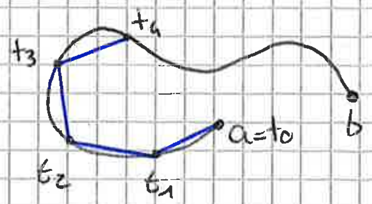


⇒ Per fare violenti/bruschi/repentini cambi di direzione la velocità γ' deve essere DISCONTINUA

es) $\gamma(t) = (t, |t|)$



γ La lunghezza di una curva è calcolata considerando una partizione $P = \{a = t_0, t_1, \dots, t_N = b\}$ di (a,b) e calcolando la somma di tutti i segmenti consecutivi $\overline{\gamma(t_{i-1})\gamma(t_i)}$, $i = 1, 2, \dots, N$



$$L(\gamma; P) = \sum_{i=1}^{N} \| \underline{\gamma}(t_i) - \underline{\gamma}(t_{i-1}) \|$$

Proprietà: La lunghezza di una curva è una proprietà intrinseca della curva stessa e pertanto non dipende dalla parametrizzazione

$\Rightarrow$ Due curve congruenti hanno la stessa lunghezza

dimostrazione

$\rightarrow \tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi = \gamma(\varphi) \Rightarrow \gamma'(t) = \gamma'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$

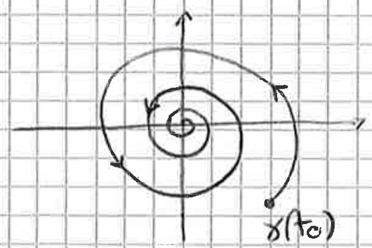
$\rightarrow \underline{L(\tilde{\gamma})} = \int_c^d \| \tilde{\gamma}(t) \| \, dt = \int_c^d \| \underline{\gamma}'(\varphi(t)) \| \, |\varphi(t)| \, dt = \int_a^b \| \underline{\gamma}'(t) \| \, dt = \underline{L(\gamma)}$

es) $\underline{x} = \underline{\gamma}(t) = (a \cdot e^{bt} \cos t, \; a \cdot e^{bt} \operatorname{sen} t) \quad a > 0, \; b < 0, \; t \in \mathbb{R}$

$\rightarrow$ SPIRALE LOGARITMICA

$\rightarrow$ FORMA POLARE $\Rightarrow r(t) = a \cdot e^{bt}$

$\rightarrow \lim_{t \to \infty} (a e^{bt} \cos t, a e^{bt} \operatorname{sen} t) = (0,0) = \underline{0}$



$\underline{\gamma}'(t) = \left(a e^{bt} [b \cos t - \operatorname{sen} t], \; a e^{bt} [b \operatorname{sen} t + \cos t] \right)$

$\| \gamma'(t) \| = a \cdot e^{bt} \cdot \sqrt{(b \cos t - \operatorname{sen} t)^2 + (b \operatorname{sen} t + \cos t)^2} = a e^{bt} \sqrt{b^2 + 1} \neq 0 \; \forall t \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \gamma$ è derivabile e regolare

$L(\gamma) = \int_{t_0}^{+\infty} \| \gamma'(t) \| \, dt = \int_{t_0}^{+\infty} \left(a e^{bt} \cdot \sqrt{b^2+1} \right) dt = \frac{a\sqrt{b^2+1}}{b} \int_{t_0}^{+\infty} b e^{bt} \, dt =$

$= \frac{a\sqrt{b^2+1}}{b} \left[e^{bt} \right]_{t_0}^{+\infty} = \frac{a \cdot \sqrt{b^2+1}}{b} \cdot \left[0 - e^{bt_0} \right] = - \frac{a \cdot \sqrt{b^2+1}}{b} \cdot e^{bt_0} > 0$

$\rightarrow$ ho ottenuto una lunghezza positiva perché b è negativo quindi annulla il meno che ho davanti

es) $\underline{x} = \underline{\gamma}(t) = \begin{cases} (t, t \operatorname{sen}(\frac{\pi}{t})) & t \neq 0 \\ \underline{0} & t = 0 \end{cases} \qquad t \in [0, 1]$

$\lim_{t \to 0^+} \left(t, t \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{t}\right) \right) = (0, 0) = \underline{0} \Rightarrow \gamma$ è di classe C^0

$\Rightarrow$ Abbiamo ottenuto che la lunghezza $L(\underline{\gamma})$ è infinita

Integrali curvilinei di I specie

In $\mathbb{R}$

$$Area = \int_a^b f(x)\,dx = \int_{I=[a,b]} f$$

$\rightarrow$ Ho calcolato l'area della funzione $f(x)$ definita nel segmento $[a,b]$
Posso generalizzare ad una funzione definita su una curva?
Cioè calcolare $Area(f) = \int_\gamma f$?

Def: Data una curva regolare $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ e data una funzione continua $f: D \to \mathbb{R}$, si definisce INTEGRALE CURVILINEO DI I SPECIE di f su γ il numero:

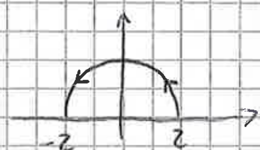
$$\int_\gamma f := \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\|\,dt$$

$f(\gamma(t)) = f \circ \gamma(t) : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e passa attraverso un vettore

cioè: $t \in I \mapsto \gamma(t) \in \mathbb{R}^n \mapsto f(\gamma(t)) \in \mathbb{R}$

es) $f(x,y) = x^2 y$ $\quad \gamma(t) = (2\cos t, 2\sin t)$ $\quad t \in [0,\pi]$

$\int_\gamma f$? $\quad \int_\gamma := \int_0^\pi f(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\|\,dt$



$$f(\gamma(t)) = f(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) = \gamma_1^2(t)\cdot\gamma_2(t) = (2\cos t)^2 2\sin t = 8\cos^2 t \cdot \sin t$$

$$\|\gamma'(t)\| = \|(-2\sin t, 2\cos t)\| = \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t} = 2$$

$$\Rightarrow \int_\gamma f = \int_0^\pi 16\cos^2 t \sin t\,dt = 16\left[-\frac{\cos^3 t}{3}\right]_0^\pi = 16\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right) = \frac{32}{3}$$

Geometria differenziale delle curve in $\mathbb{R}^3$

Considero una curva parametrizzata in parametro d'arco $\underline{\gamma}(s)$
La studiamo in $\mathbb{R}^3$, sapendo che $\|\gamma'(s)\| = 1$ $\forall s$ per def.

•) Chiamo $\underline{\gamma}'(s) = \underline{t}(s)$ VETTORE TANGENTE

•) Derivo $(1 = \|\gamma'(s)\|^2)$ rispetto a s

$$0 = \frac{d}{ds}\|\gamma'(s)\|^2 = \frac{d}{ds}\langle\gamma'(s), \gamma'(s)\rangle = 2\langle\gamma'(s), \gamma''(s)\rangle \Rightarrow \gamma''(s) \perp \gamma'(s)$$

$\rightarrow$ ho ottenuto che il prodotto scalare fra $\gamma'(s)$ e la sua derivata è nullo, quindi i due vettori sono perpendicolari

Se $\gamma''(s) \neq 0$ $\quad \underline{\gamma}''(s) = \underbrace{\boxed{\|\gamma''(s)\|}}_{\text{SCALARE}} \cdot \underbrace{\frac{\gamma''(s)}{\|\gamma''(s)\|}}_{\text{VERSORE}}$

INSIEMI in $\mathbb{R}^n$ e FUNZIONI A PIÚ VARIABILI

Per definire gli intervalli curvilinei abbiamo considerato una funzione $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, detta funzione A PIÚ VARIABILI.

Def: Definiamo l'INTORNO di raggio $r>0$ di un punto $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ come:

$$\boxed{B_r(\underline{x}_0) := \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : \|\underline{x} - \underline{x}_0\| < r\}}$$

- il disco aperto di centro $\underline{x}_0$ e raggio r (nel caso di $n=2$)
- la palla o sfera aperta di centro $\underline{x}_0$ e raggio r ($n \geq 3$)

Es $B_r(\underline{x}_0) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}: \|\underline{x} - \underline{x}_0\| < r\} \Rightarrow \sqrt{(x_1 - x_{0,1})^2 + (x_2 + x_{0,2})^2 + \dots} < r$

Def: Si definisce NORMA EQUIVALENTE p di un punto $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$:

$$(\|\underline{x}\|_p)^p = \sum_{i=1}^{N} (x_i)^p \qquad \forall p \in [1; +\infty)$$

Es $\|\underline{x}\|_\infty := \max_{i=1,\dots,n} |x_i|$

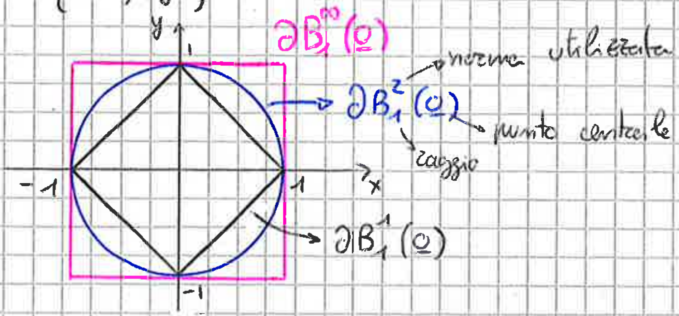
Es $\|\underline{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \quad , (\|\underline{x}\|_2)^2 = \sum_{i=2}^{n} |x_i|^2$

→ Disegniamo gli intorni unitari ($r=1$) rispetto alle varie norme (in $\mathbb{R}^2$)

$\|\underline{x}\|_1 = 1 \Rightarrow |x| + |y| = 1$ retta

$\|\underline{x}\|_2 = 1 \Rightarrow y^2 + x^2 = 1$ cerchio di raggio 1

$\|\underline{x}\|_\infty = 1 \Rightarrow \max\{|x|, |y|\}$



⇒ Una qualsiasi $\|\underline{x}\|_p$ generica si trova tra $\|\underline{x}\|_2$ e $\|\underline{x}\|_\infty$ e al crescere di p il cerchio tende ad espandersi fino a sovrapporsi al quadrato

Oss Ogni punto $\underline{x}_0$ ha infiniti intorni di raggio r, con forme diverse, l'uno incluso dentro l'altro

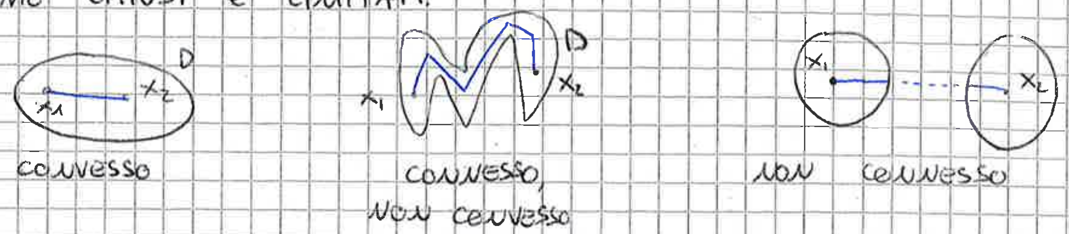
$$B_r^1(\underline{x}_0) \subseteq B_r^2(\underline{x}_0) \subseteq B_r^3(\underline{x}_0) \subseteq \dots \subseteq B_r^\infty(\underline{x}_0)$$

Def: Un insieme $D \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice APERTO se è vuoto oppure se è l'unione di palle aperte

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 59 di 146

Caratterizzazione (teorema di Heine-Borel): Tutti e soli i compatti di $\mathbb{R}^n$ sono CHIUSI e LIMITATI.

es)



Teorema di Jordan: Sia $\gamma: [0,1] \to \mathbb{R}^2$ e sia $\Gamma = \gamma([0,1]) \subset \mathbb{R}^2$ il suo sostegno. Allora il complementare di Γ, $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$, consiste esattamente di due componenti connesse. Una di queste (quella interna a Γ) è limitata, l'altra (quella esterna a Γ) è illimitata e Γ è la frontiera di entrambe le componenti.

Teorema di Bolzano-Weierstrass in $\mathbb{R}^n$: Ogni sottoinsieme infinito e limitato di $\mathbb{R}^n$ ammette un punto di accumulazione in $\mathbb{R}^n$.

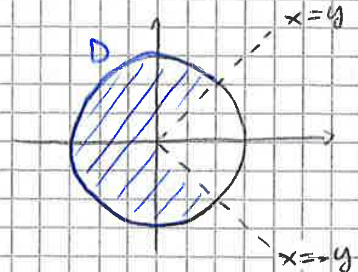
Esempi

1) $D = \{ \underline{x} = (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \|\underline{x}\|_2 \leq 1 \wedge x < |y| \}$

$\to \|\underline{x}\|_2 \leq 1$ circonferenza di raggio 1

$\to x = |y|$ bisettrici 1° e 4° quadrante

$\Rightarrow D$ è limitato, connesso, non convesso

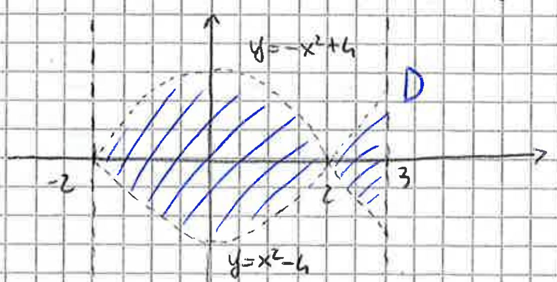


2) $D = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^2 : [(4-x^2)^2 - y^2]^+ (x^2-x-6)^- \neq 0 \}$

$\Rightarrow D = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) \geq 0 \}$ perché:

NB $x^+ = \max\{x, 0\}$; $x^- = \max\{-x, 0\}$

$\Rightarrow \begin{cases} (4-x^2)^2 - y^2 > 0 \\ (x^2-x-6) < 0 \end{cases}$, $-2 < x < 3$ $\begin{cases} |y| < |4-x^2| \\ -2 < x < 3 \end{cases}$



RICERCA DEL DOMINIO PER FUNZIONI $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$\operatorname{dom} f = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n$ dove ha senso calcolare $f(\underline{x}) \}$

es) $f(x,y,z) = \dfrac{x}{y+z}$ $\quad \operatorname{dom} f = \{ x,y,z \in \mathbb{R}^3 : y+z \neq 0 \}$

LIMITI E CONTINUITÀ PER FUNZIONI $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Def: Sia $f: D \to \mathbb{R}$ e sia $\underline{x}_0 \in D$. La funzione f si dice CONTINUA in $\underline{x}_0$ se:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 : \underline{x} \in B_{\delta_\varepsilon}(\underline{x}_0) \cap D \Rightarrow |f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0)| < \varepsilon$$

La funzione f è continua in D se lo è $\forall \underline{x}_0 \in D$

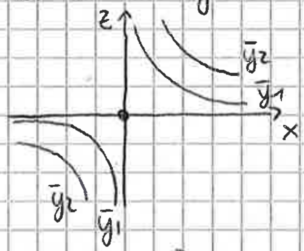
Continuano a valere i teoremi per la continuità (Analisi I)

- → teoremi algebrici
- → continuità della funzione composta
- → teorema della permanenza del segno
- → teorema dei valori intermedi
- → teorema di Weierstrass

e) $f(x,y) = \begin{cases} y/x & x \neq 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}$ $\quad \text{dom} f = \mathbb{R}^2$

→ se $x \neq 0$ $f(x,y)$ è CONTINUA

→ fissiamo un $\bar{y} \in \mathbb{R}$ e studiamo $f(x,\bar{y}) = \begin{cases} \bar{y}/x & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$



→ al variare di $\bar{y}$ l'iperbole si sposta

⇒ f è discontinua in $\{x=0\}$

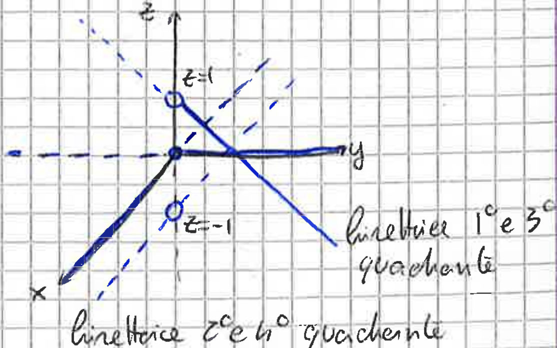
e) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ $\quad \text{dom} f = \mathbb{R}^2$

→ $\bar{x} = 0$ $\quad z = f(0,y) = 0$
→ $\bar{y} = 0$ $\quad z = f(x,0) = 0$
} lungo gli assi la f assume valore 0

→ $f(x,x) = \dfrac{2x^2}{x^2+x^2} = \dfrac{2x^2}{2x^2} = 1$

→ $f(x,-x) = -\dfrac{2x^2}{x^2+x^2} = -1$

⇒ f non è continua in $(0,0)$



•) utilizzo dei metodi del confronto

es) $f(x,y) = e^y (x-1) \operatorname{sen}\left(\frac{y}{(x-1)^2+y}\right)$ $\qquad \operatorname{dom} f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\}$

$\lim_{\underline{x}\to(1,0)} f(x,y)$? $\qquad$! $(1,0)$ è punto di accumulazione, quindi ha senso fare il limite

→ considero il modulo della funzione

$$0 \le \left| e^y (x-1) \operatorname{sen}\left(\frac{y}{(x-1)^2+y}\right) \right| \le e^y |x-1| \le 2|x-1|$$

il |sen| è sempre compreso tra 0 e 1

scelgo un valore a caso sicuramente più grande di e^y per $y \to 0$

$$\to \underbrace{0}_{\downarrow\, 0} \le \underbrace{\left| e^y (x-1) \operatorname{sen}\left(\frac{y}{(x-1)^2+y}\right) \right|}_{\downarrow\, \underline{x}\to(1,0)\ \ 0} \le \underbrace{2|x-1|}_{\downarrow\, 0}$$

per il teorema dei due carabinieri

$\Rightarrow \lim_{\underline{x}\to(1,0)} f(x,y)$ esiste e vale zero

•) Se lungo tutti i cammini possibili che terminano in $\underline{x}_0$ si ottiene lo stesso valore $\ell \in \mathbb{R}$, allora il limite esiste e vale ℓ

! Non si considera la traiettoria con cui $\underline{x} \to \underline{x}_0$, ma la distanza tra i due punti, cioè $\|\underline{x} - \underline{x}_0\|$

Proposizione: Sia $f: \mathbb{R}^n \supseteq D \to \mathbb{R}$ e sia $\underline{x}_0$ un punto di accumulazione per D. Se esistono $\ell \in \mathbb{R}$ e una funzione $\omega: [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ tali che $\omega(r) \to 0$ per $r \to 0^+$ e

$$|f(\underline{x}) - \ell| \le \omega(\|\underline{x} - \underline{x}_0\|), \quad (*)$$

Allora il limite esiste e si ha $\lim_{\underline{x}\to\underline{x}_0} f(\underline{x}) = \ell$

! Facendo un cambio di variabile $\underline{x} \mapsto \underline{X} := \underline{x} - \underline{x}_0$ si può riscrivere:

$$(*)\ |f(\underline{x}_0 + \underline{X}) - \ell| \le \omega(\|\underline{X}\|)$$

dove, passando alle coordinate polari, si ha $\underline{X} = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$

Corollario: Sia $f: \mathbb{R}^2 \supseteq D \to \mathbb{R}$ e sia $\underline{x}_0$ punto di accumulazione per D. Se esistono $\ell \in \mathbb{R}$ e una funzione $\omega: [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ tali che $\omega(r) \to 0$ per $r \to 0^+$ e:

$$|f(x_0 + r\cos\theta,\ y_0 + r\operatorname{sen}\theta) - \ell| \le \omega(r)$$

allora il limite esiste e si ha $\lim_{\underline{x}\to\underline{x}_0} f(\underline{x}) = \ell$

$\exists \lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} \underline{f}(\underline{x}) = \underline{\ell} \iff \lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} f_i(\underline{x}) = \ell_i \in \mathbb{R} \quad \forall i \in [1, m]$

Def: La funzione $\underline{f}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ si dice CONTINUA in $\underline{x}_0$ se e solo se $\underline{f}(\underline{x}_0) = \lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} \underline{f}(\underline{x})$

CALCOLO DIFFERENZIALE

•) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \leadsto f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ se il limite $\exists$ finito, ed ottengo la RETTA TANGENTE

•) $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \leadsto$ lavoro con delle superfici, quindi otterò un PIANO tangente al punto $\underline{x}_0$.

Per ricavarlo devo avvicinarmi al punto da tutte le direzioni possibili, quindi faccio variare una variabile alla volta.

Def: Sia $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ e $f: B_r(\underline{x}_0) \to \mathbb{R}$ con $r>0$. Se esiste finito:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(\bar{x}_{0,1}, \dots, \bar{x}_{0,i-1}, x_0 + h, \bar{x}_{0,i+1}, \dots, \bar{x}_{0,n}) - f(\underline{x}_0)}{h}$$

esso si chiama DERIVATA PARZIALE rispetto a x_i di f.

NOTAZIONE: $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x}_0)$, $\partial_{x_i} f(\underline{x}_0)$, $f_{x_i}(\underline{x}_0)$, $D_{x_i} f(\underline{x}_0)$

$\underline{\wedge}$ Per ottenerla abbiamo fissato ad un valore $\bar{x}_{0,j}$ tutte le variabili della funzione, eccetto quella per cui volevamo calcolare la derivata $\to$ queste quindi sono tutte delle COSTANTI

Dopodiché abbiamo considerato la variazione h della variabile x_i

Def: Data $f: D \to \mathbb{R}$, $\underline{x}_0 \in D: \exists B_r(\underline{x}_0) \subseteq D$. La funzione f si dice DERIVABILE in $\underline{x}_0$ se esistono tutte le derivate parziali $\partial_{x_i} f(\underline{x}_0) \quad \forall i = 1 \mapsto n$

Il vettore delle derivate parziali si chiama GRADIENTE di f in $\underline{x}_0$:

$$\nabla f(\underline{x}_0) = \text{grad } f(\underline{x}_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{x}_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\underline{x}_0) \right)$$

che ha come componente i-esima la derivata parziale di f in x_i

Eg) $f(x,y) = x^y$

$\to \frac{\partial f}{\partial x} f(x,y) = y \cdot x^{y-1}$

$\to \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = x^y \cdot \log x \quad \Rightarrow \nabla f(x,y) = (y \cdot x^{y-1}, x^y \cdot \log x)$

Per trovare la condizione che garantisca la continuità di una funzione $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è necessario definire il DIFFERENZIALE di f.

→ In una dimensione la retta $y = mx + q$ che passa per $(x_0, f(x_0))$ e ha $m = f'(x_0)$ fornisce la migliore approssimazione lineare (PIATTA) del grafico in un intorno di x_0

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \underbrace{o(|x - x_0|)}_{\text{indica l'approssimazione}} \quad \text{per } x \to x_0$$

$$\Updownarrow$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = 0$$

Questa formula può essere generalizzata per funzioni a più variabili:

Def: Sia $f: \mathbb{R}^n \supseteq D \to \mathbb{R}$ e sia $\underline{x}_0 \in D : B_r(\underline{x}_0) \subset D$. La funzione f si dice DIFFERENZIABILE in $\underline{x}_0$ se è derivabile in $\underline{x}_0$ e:

$$\lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} \frac{f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0) - \langle \nabla f(\underline{x}_0), (\underline{x} - \underline{x}_0) \rangle}{\|(\underline{x} - \underline{x}_0)\|} = 0 \quad (*)$$

L'applicazione lineare $df_{\underline{x}_0} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definita come:

$$df_{\underline{x}_0}(\underline{v}) = \langle \nabla f(\underline{x}_0), \underline{v} \rangle$$

si chiama DIFFERENZIALE di f in $\underline{x}_0$

Il fatto che il limite (*) valga zero significa che il numeratore è o del denominatore:

$$f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0) - \langle \nabla f(\underline{x}_0), (\underline{x} - \underline{x}_0) \rangle = o(\|\underline{x} - \underline{x}_0\|)$$

$$f(\underline{x}) = f(\underline{x}_0) + \underbrace{\langle \nabla f(\underline{x}_0), (\underline{x} - \underline{x}_0) \rangle} + o(\|\underline{x} - \underline{x}_0\|)$$

$$f(\underline{x}) = f(\underline{x}_0) + df_{\underline{x}_0}(\underline{x} - \underline{x}_0) + o(\|\underline{x} - \underline{x}_0\|)$$

⇒ Questa formula indica che il differenziale è lo strumento che fornisce la miglior APPROSSIMAZIONE LINEARE del grafico di f nel punto $P_0 = (\underline{x}_0, f(\underline{x}_0))$.

Lineare in questo contesto ($\mathbb{R}^n$) indica il piano (o iperpiano) che si adagia sul grafico della funzione in P_0

dimostrazione

→ definisco il valore $x_{n+1} \in \mathbb{R}$ in questo modo:

$$x_{n+1} = f(\underline{x}_0) + \langle \nabla f(\underline{x}_0), (\underline{x} - \underline{x}_0) \rangle_{\mathbb{R}^n}$$

→ porto tutti i termini a destra dell'uguale

$$\langle \nabla f(\underline{x}_0), (\underline{x} - \underline{x}_0) \rangle \boxed{-} (x_{n+1} - f(\underline{x}_0)) = 0$$

$f(h,k) = |h| \log(1+k) \Rightarrow f(0,0) = 0$

$\frac{\partial f}{\partial x}(h,0) = 0 \qquad \frac{\partial}{\partial y} f(0,k) = 0$

$\rightarrow \nabla f(\underline{0}) = \left(\frac{\partial}{\partial x} f(0,0), \frac{\partial}{\partial y} f(0,0)\right) = (0,0)$

$\rightarrow$ calcolo il limite del rapporto incrementale

$$\lim_{\|(h,k)\|\to 0} \frac{f(h,k) - f(0,0) - \langle \nabla f(\underline{0}), \underline{x} \rangle}{\|(h,k)\|} = \frac{f(h,k) - f(0,0) - \langle (0,0), (h,k) \rangle}{\|(h,k)\|} =$$

$$= \frac{|h| \cdot \log(1+k)}{\|(h,k)\|} = \lim_{\|(h,k)\|\to 0} \frac{|h| \cdot \log(1+k)}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$\rightarrow$ passo in coordinate polari: $(h,k) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$

$$\lim_{\|(h,k)\|\to 0} \frac{\rho \cdot |\cos\theta| \cdot \rho \cdot \sin\theta}{\rho} = \lim_{\|(h,k)\|\to 0} \rho|\cos\theta| \cdot \sin\theta$$

$$\rho|\cos\theta| \cdot \sin\theta \leq \rho|\cos\theta| \, |\sin\theta| \leq \underset{\downarrow\, 0}{\rho} = \omega(\rho)$$

$\rightarrow$ Per il corollario dei teoremi sui limiti ho che $\rho|\cos\theta| \cdot \sin\theta \to 0$

$\Rightarrow f(x,y)$ è DIFFERENZIABILE in $\underline{x}_0 = (0,0)$

<u>Lemma</u>: Sia f differenziabile in $\underline{x}_0 \Rightarrow d f_{\underline{x}_0}$ è <u>UNICO</u>

<u>dimostrazione</u>: per ASSURDO

$\rightarrow$ Supponiamo che esistano L_1, L_2 che diano la migliore approssimazione

$f(\underline{x}) = f(\underline{x}_0) + L_i(\underline{x} - \underline{x}_0) + o(\|\underline{x} - \underline{x}_0\|)$

$\rightarrow$ considero la differenza fra le due

$(L_1 - L_2)(\underline{x} - \underline{x}_0) = \|\underline{x} - \underline{x}_0\| \, \alpha_2(\underline{x} - \underline{x}_0) - \|\underline{x} - \underline{x}_0\| \, \alpha_1(\underline{x} - \underline{x}_0)$

dove α_1 e α_2 sono due funzioni infinitesime che rappresentano i due diversi o piccoli

$\rightarrow$ pongo $L = L_1 - L_2$, $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$

$L(\underline{x} - \underline{x}_0) = -\|\underline{x} - \underline{x}_0\| \, \alpha(\underline{x} - \underline{x}_0)$

$\rightarrow$ chiamo quindi $\underline{x} - \underline{x}_0 = \underline{h}$ che sarà un vettore del tipo $\underline{h} = s\,\hat{\underline{v}}$

$L(s \cdot \hat{\underline{v}}) = -\|s \cdot \hat{\underline{v}}\| \cdot \alpha(s \cdot \hat{\underline{v}})$

$\rightarrow$ essendo il differenziale un'operazione lineare posso portare fuori la costante s

$s \cdot L(\hat{\underline{v}}) = -|s| \, \|\hat{\underline{v}}\| \cdot \alpha(s \cdot \hat{\underline{v}})$

dimostrazione

→ Se f è differenziabile vale la seguente condizione:

$$f(\underline{x}_0 + h\hat{\underline{v}}) - f(\underline{x}_0) = df_{\underline{x}_0}(h \cdot \hat{\underline{v}}) + \|h \cdot \hat{\underline{v}}\| \cdot \alpha(h\hat{\underline{v}})$$

→ faccio il limite per $h \to 0$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(\underline{x}_0 + h\hat{\underline{v}}) - f(\underline{x}_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{df_{\underline{x}_0}(h\hat{\underline{v}}) + \|h\cdot\hat{\underline{v}}\| \cdot \alpha(h\cdot\hat{\underline{v}})}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{\cancel{h}\cdot df_{\underline{x}_0}(\hat{\underline{v}})}{\cancel{h}} + \frac{|h|\cdot\|\hat{\underline{v}}\|\cdot\alpha(h\cdot\hat{\underline{v}})}{h}\right) =$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(df_{\underline{x}_0}(\hat{\underline{v}}) + \frac{|h|}{h}\underbrace{\|\hat{\underline{v}}\|}_{=1}\cdot\underbrace{\alpha(h\cdot\hat{\underline{v}})}_{=0}\right) = df_{\underline{x}_0}(\hat{\underline{v}})$$

→ $df_{\underline{x}_0}(\hat{\underline{v}}) = \langle \nabla f(\underline{x}_0), \hat{\underline{v}} \rangle$, quindi posso calcolare il limite solo se $\hat{\underline{v}}$ è effettivamente un versore e quindi $\|\hat{\underline{v}}\| = 1$

! Se esistono le derivate direzionali, esistono anche le derivate PARZIALI

Def: Sia $D \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto e sia $f\colon D \to \mathbb{R}$. La funzione f si dice di CLASSE C^1 in D se è derivabile e tutte le derivate parziali sono funzioni continue in D

Teorema del differenziale totale: Sia $D \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto e sia $f\colon D \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^1(D)$. Allora f è DIFFERENZIABILE in ogni punto di D.

! Derivabile $\not\Rightarrow$ differenziabile

Derivabile, con le derivate continue $\Rightarrow$ differenziabile

dimostrazione

$$\frac{f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0) - \langle \nabla f(\underline{x}_0), (\underline{x} - \underline{x}_0) \rangle}{\|\underline{x} - \underline{x}_0\|} \xrightarrow[\underline{x}\to\underline{x}_0]{} 0 \quad ?$$

→ $f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0) = f(x_1, \ldots, x_n) - f(x_{0,1}, \ldots, x_{0,n}) \pm f(x_{0,1}, x_2, \ldots, x_n)$ (*)

→ Ho aggiunto e tolto una funzione in $\mathbb{R}^n$ che nel primo posto è calcolata nel punto $x_{0,1}$, mentre in tutti gli altri nel generico punto x_i

→ $f(x_1, \ldots, x_n) - f(x_{0,1}, x_2, \ldots, x_n) \Rightarrow$ applico il teorema di Lagrange

DERIVATE DI ORDINE SUPERIORE

→ Per funzioni $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ esistono n derivate parziali

→ $\forall i = 1, \dots, n$, $\partial_{x_i} f(\underline{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

→ Su $\partial_{x_i} f$ posso fare n derivate parziali seconde:

$$\partial_{x_j} (\partial_{x_i} f(\underline{x})) \rightsquigarrow n^2 \text{ derivate seconde}$$

! CONVENZIONE: agire sempre prima la derivata rispetto alla variabile più vicina al simbolo della funzione f

Def: Si definisce DERIVATA SECONDA MISTA la derivata

$$\partial_{x_j} \partial_{x_i} f(\underline{x})$$

se $i \neq j$.

Se $i = j$ si definisce DERIVATA SECONDA PURA

es) $f(x,y) = xy \cdot e^x$ calcolare le derivate seconde

→ calcolo le derivate prime

$\partial_x f(x,y) = y(e^x + x e^x) = y e^x (1+x)$

$\partial_y f(x,y) = x \cdot e^x$

→ calcolo le derivate seconde $\partial^2_{xx} f$, $\partial^2_{yy} f$, $\partial^2_{xy} f$, $\partial^2_{yx} f$

$\partial^2_{xx} f = \partial_x (\partial_x f(x,y)) = \partial_x (y e^x (1+x)) = y e^x (x+1+1)$

$\partial^2_{xy} f = \partial_x (\partial_y f(x,y)) = \partial_x (x \cdot e^x) = e^x + x e^x = e^x (1+x)$

$\partial^2_{yx} f = \partial_y (\partial_x f(x,y)) = \partial_y (y e^x (1+x)) = e^x (1+x)$

$\partial^2_{yy} f = \partial_y (\partial_y f(x,y)) = \partial_y (x \cdot e^x) = 0$

! $\partial^2_{xy} f = \partial^2_{yx} f$ NON VALE SEMPRE

Per trovare esempi in cui $\partial^2_{xy} \neq \partial^2_{yx}$ devo costruire funzioni "a pezzi"

es) $f(x,y) = \begin{cases} xy \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq 0 \\ 0 & \text{se } (x,y) = 0 \end{cases}$ $\quad \partial_{xy} f$, $\partial_{yx} f$ in $(0,0)$?

→ Per calcolare le derivate prime nell'origine applico la definizione

$\partial_x f(0,y) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(h,y) - f(0,y)}{h} = \lim_{h \to 0} \dfrac{1}{h} \cdot \left(hy \dfrac{h^2-y^2}{h^2+y^2} - \cancel{0 \cdot y \dfrac{0^2-y^2}{0^2+y^2}} \right) = \lim_{h \to 0} y \dfrac{h^2-y^2}{h^2+y^2} = -y$

$\partial_y f(x,0) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x,h) - f(x,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \dfrac{1}{h} \left(x \cdot h \dfrac{x^2-h^2}{x^2+h^2} - \cancel{x \cdot 0 \dfrac{x^2-0^2}{x^2+0^2}} \right) = \lim_{h \to 0} x \dfrac{x^2-h^2}{x^2+h^2} = x$

→ calcolo le derivate seconde miste

$\partial_y (\partial_x f(0,0)) = \partial_y (\partial_x f(0,y))|_{y=0} = \partial_y (-y)|_{y=0} = -1$

$\partial_x (\partial_y f(0,0)) = \partial_x (\partial_y f(x,0))|_{x=0} = \partial_x (x)|_{x=0} = 1$

$\Rightarrow \partial_{yx} f(0,0) \neq \partial_{xy} f(0,0)$

$\rightarrow$ Pongo $\Psi(s) = \partial_y f(s\delta, \tau\delta)$

$\Rightarrow R = \frac{1}{\delta}(\Psi(1) - \Psi(0))$ e posso riapplicare Lagrange:

$\exists\, \sigma \in (0,1)$ tale che $\Psi(1) - \Psi(0) = \Psi'(\sigma)$

$\rightarrow R = \frac{1}{\delta}\Psi'(\sigma) = \frac{1}{\delta}(\Psi'(s))\Big|_{s=\sigma} = \frac{1}{\cancel{\delta}} \cdot \cancel{\delta} \cdot \partial_x \partial_y f(s\delta, \delta\tau)\Big|_{s=\sigma} = \partial_x \partial_y f(\sigma\delta, \delta\tau)$

$\rightarrow$ Noto che il punto $(\sigma\delta, \tau\delta) \in Q_\delta(\underline{0}) \subseteq Q_{\delta_\varepsilon}$ perché $\sigma, \tau \in [0,1]$

$\rightarrow$ Quindi il punto $R = \partial_x \partial_y f(\sigma\delta, \tau\delta)$ è un possibile punto che posso studiare perché appartiene all'interno Q_{δ_ε}, trovato grazie alla continuità delle derivate seconde

$\Rightarrow |R - \partial_x \partial_y f(\underline{0})| = |\partial_x \partial_y f(\sigma\delta, \tau\delta) - \partial_x \partial_y f(\underline{0})| < \varepsilon$

$\rightarrow$ Rifacendo tutto invertendo i ruoli di x ed y ottengo che:

$|R - \partial_y \partial_x f(\underline{0})| = |\partial_y \partial_x f(\tau\delta, \sigma\delta) - \partial_y \partial_x f(\underline{0})| < \varepsilon$

$\rightarrow$ Se riprendo la condizione da dimostrare:

$$|\partial_{xy} f(\underline{0}) - \partial_{yx} f(\underline{0})| = |\partial_x \partial_y f(\underline{0}) + R - R - \partial_y \partial_x f(\underline{0})| \overset{\text{DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE}}{\leq} \underbrace{|R - \partial_x \partial_y f(\underline{0})|}_{<\varepsilon} + \underbrace{|R - \partial_y \partial_x f(\underline{0})|}_{<\varepsilon}$$

$\Rightarrow |\partial_x \partial_y f(\underline{0}) - \partial_y \partial_x f(\underline{0})| < 2\varepsilon \quad, \forall \varepsilon > 0$

Def: Sia $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ e sia $f: B_r(\underline{x}_0) \to \mathbb{R}$ (per un certo $r>0$) una funzione che ammette tutte le derivate seconde in $\underline{x}_0$. Si definisce MATRICE HESSIANA di f in $\underline{x}_0$ la matrice:

$$Hf(\underline{x}_0) = D^2 f(\underline{x}_0) = \begin{pmatrix} \partial^2_{x_1 x_1} f(\underline{x}_0) & \partial^2_{x_1 x_2} f(\underline{x}_0) & \cdots & \partial^2_{x_1 x_n} f(\underline{x}_0) \\ \partial^2_{x_2 x_1} f(\underline{x}_0) & \partial^2_{x_2 x_2} f(\underline{x}_0) & \cdots & \partial^2_{x_2 x_n} f(\underline{x}_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial^2_{x_n x_1} f(\underline{x}_0) & \partial^2_{x_n x_2} f(\underline{x}_0) & \cdots & \partial^2_{x_n x_n} f(\underline{x}_0) \end{pmatrix}$$

∇ Se $f \in C^2(D)$ il teorema di Schwarz garantisce che $Hf(\underline{x})$ è SIMMETRICA

Es) $f(x,y) = x^2 y + \cos y \qquad Hf(x,y) = ?$

$\rightarrow$ derivate prime

$\partial_x f(x,y) = 2xy \qquad \partial_y f(x,y) = x^2 - \operatorname{sen} y$

$\rightarrow$ derivate seconde

$\partial_x \partial_x f(x,y) = \partial_x(2xy) = 2y \qquad \partial_x \partial_y f(x,y) \overset{f \in C^2}{=} \partial_y \partial_x f(x,y) = 2x$

$\partial_y \partial_y f(x,y) = \partial_y(x^2 - \operatorname{sen} y) = -\cos y$

$\Rightarrow Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2y & 2x \\ 2x & -\cos y \end{pmatrix}$

Def: Una FORMA QUADRATICA $q: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è una funzione tale che:

$$q(t\underline{x}) = t^2 \cdot q(\underline{x}) \quad , \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n, \forall t \in \mathbb{R}$$

Data una matrice reale quadrata $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, la forma quadratica associata

Teorema Siano $D \subset \mathbb{R}^n$ un aperto, $f \in C^2(D)$ e $\underline{x}_0 \in D$. Vale la seguente formula, detta FORMULA DI TAYLOR con RESTO DI PEANO per $\underline{x} \to \underline{x}_0$

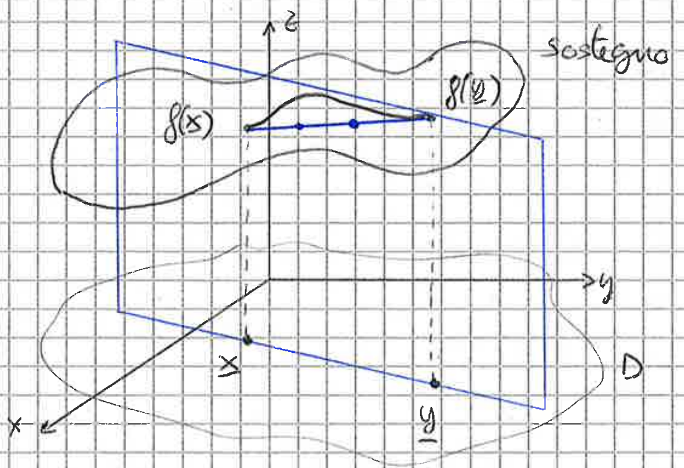
$$f(\underline{x}) = f(\underline{x}_0) + \langle \nabla f(\underline{x}_0), (\underline{x}-\underline{x}_0) \rangle + \frac{1}{2} \langle Hf(\underline{x}_0)(\underline{x}-\underline{x}_0), (\underline{x}-\underline{x}_0) \rangle + o(\|\underline{x}-\underline{x}_0\|^2)$$

! **Metodi per lo sviluppo:**

1) CALCOLO TRAMITE LA DEFINIZIONE
2) PROPRIETÀ DI UNICITÀ DEI POLINOMI (2° MODO)

Teorema di Lagrange Sia $D \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme convesso, $f: D \to \mathbb{R}$ differenziabile. Qualsiasi punto $\underline{x}, \underline{y} \in D$ esiste $\underline{\xi}$ appartenente al segmento che unisce $\underline{x}$ e $\underline{y}$ tale che:

$$f(\underline{y}) - f(\underline{x}) = \langle \nabla f(\underline{\xi}), (\underline{y}-\underline{x}) \rangle$$



dimostrazione

→ Ipotizzando un piano che passa per i punti $\underline{x}$, $\underline{y}$, $f(\underline{x})$ e $f(\underline{y})$ e taglia il grafico della curva si ottiene un grafico in una dimensione

→ Applico il teorema di Lagrange in una dimensione alla funzione

$g(t) = f(\underline{x} + t(\underline{y}-\underline{x}))$ con $g: [0,1] \to \mathbb{R}$

$g(0) = f(\underline{x})$

$g(1) = f(\underline{y})$ $\iff g(1) - g(0) = g'(\tau)$ con $\tau \in (0,1)$

$$\to f(\underline{y}) - f(\underline{x}) = \langle \nabla f(\underline{x} + t(\underline{y}-\underline{x}))\big|_{t=\tau}, (\underline{y}-\underline{x}) \rangle = \langle \nabla f(\underbrace{\underline{x} + \tau(\underline{y}-\underline{x})}_{\underline{\xi}}), (\underline{y}-\underline{x}) \rangle$$

$$\Rightarrow f(\underline{y}) - f(\underline{x}) = \langle \nabla f(\underline{\xi}), (\underline{y}-\underline{x}) \rangle$$

! Non esiste un teorema analogo per funzioni vettoriali $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, ma esiste un teorema della media in "forma debole" che rappresenta il differenziale di funzioni vettoriali:

$$d\underline{f}_{x_0}(\underline{v}) = J\underline{f}_{x_0} \cdot \underline{v}$$

$\underline{\nabla}$ $d\underline{f}_{x_0}$ è un'applicazione lineare da $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ perché prende $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ e restituisce un vettore in $\mathbb{R}^m$

$$d\underline{f}_{x_0} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$
$$\underline{v} \to J\underline{f}_{x_0} \cdot \underline{v}$$

Teorema di derivazione delle funzioni composte

Siano $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\underline{f} : B_r(x_0) \to \mathbb{R}^m$ differenziabile e $\underline{y}_0 = \underline{f}(x_0)$. Sia inoltre $\underline{g} : B_R(\underline{y}_0) \to \mathbb{R}^p$ differenziabile in $\underline{y}_0 = \underline{f}(x_0)$ e si supponga che $\underline{f}(B_r(x_0)) \subseteq B_R(\underline{y}_0)$. Allora la funzione composta $\underline{g} \circ \underline{f} : B_r(x_0) \to \mathbb{R}^p$ è differenziabile in x_0 e valgono:

$$d(\underline{g} \circ \underline{f})_{x_0} = d\underline{g}_{\underline{y}_0} \circ d\underline{f}_{x_0} = d\underline{g}_{\underline{f}(x_0)} \circ d\underline{f}_{(x_0)} \quad \text{composizione}$$

$$J(\underline{g} \circ \underline{f})(x_0) = J\underline{g}(\underline{y}_0) \cdot J\underline{f}(x_0) = J\underline{g}(\underline{f}(x_0)) \cdot J\underline{f}(x_0) \quad \text{prodotto di matrici}$$

(3) $\underline{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad \underline{f}(x,y) = (xy, \frac{x}{y})$

$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad g(x,y) = 2x^2 + 3y^2$

→ Calcolare ∂_x, ∂_y di $g \circ \underline{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ in $x_0 = (1,2)$

MODO 1: TEOREMA DELLE DERIVAZIONI COMPOSTE

$$J(g \circ \underline{f})(x_0) = Jg(\underline{f}(x_0)) \cdot J\underline{f}(x_0)$$
$$\downarrow$$
$$\nabla(g \circ \underline{f})(x_0) = \nabla g(\underline{y}_0) \cdot J\underline{f}(x_0) \qquad \underline{y}_0 = \underline{f}(x_0) = \underline{f}(1,2) = (2, \tfrac{1}{2})$$

$$J\underline{f}(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f_1 & \partial_{x_2} f_1 \\ \partial_{x_1} f_2 & \partial_{x_2} f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x \\ \frac{1}{y} & -\frac{x}{y^2} \end{pmatrix} \Rightarrow J\underline{f}(1,2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$\nabla g(x,y) = (\partial_x g, \partial_y g) = (4x, 6y) \Rightarrow \nabla g(\underline{y}_0) = \nabla g(2, \tfrac{1}{2}) = (8, 3)$$

$$\nabla(g \circ \underline{f})(x_0) = (8, 3)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \cdot 2 & +3 \cdot \frac{1}{2} \\ 8 \cdot 1 & -3 \cdot \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \left(16 + \frac{3}{2}, 8 - \frac{3}{4}\right) = \left(\frac{35}{2}, \frac{29}{4}\right)$$

MODO 2: CALCOLO LA FUNZIONE COMPOSTA E POI DERIVO

$$(g \circ \underline{f})(x,y) = 2(xy)^2 + 3\left(\frac{x}{y}\right)^2 = 2x^2y^2 + 3\frac{x^2}{y^2}$$

$$\nabla(g \circ \underline{f})(x,y) = (\partial_x(g \circ \underline{f}), \partial_y(g \circ \underline{f})) = \left(4xy^2 + 6\frac{x}{y^2}, 4x^2y - 6\frac{x^2}{y^3}\right)$$

$$\nabla(g \circ \underline{f})(1,2) = \left(4 \cdot 1 \cdot 2^2 + 6 \cdot \frac{1}{2^2}, 4 \cdot 1^2 \cdot 2 - 6 \frac{1^2}{2^3}\right) = \left(\frac{35}{2}, \frac{29}{4}\right)$$

OPERATORI DIFFERENZIALI - SECONDO ORDINE

Def: Definiamo LAPLACIANO di una funzione $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ come:

$$\Delta f(x_0) = \operatorname{div}(\nabla f(x_0)) = \nabla \cdot \nabla f(x_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i} f$$

$\Rightarrow$ È la somma delle derivate seconde pure, ovvero la traccia della matrice Hessiana

Def: Una funzione $f: \mathbb{R}^n \supseteq D \to \mathbb{R}$ derivabile due volte in D tale che $\Delta f = 0$ in D si dice ARMONICA in D°

Una funzione vettoriale $\underline{f}: \mathbb{R}^n \supseteq D \to \mathbb{R}^m$ si dice armonica se lo sono tutte le sue componenti

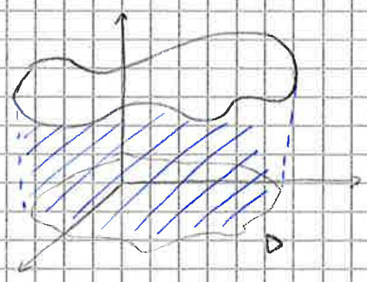
Proposizione Dato un campo vettoriale $\underline{f}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vale la seguente relazione

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \underline{f}) = \nabla(\operatorname{div} \underline{f}) - \Delta \underline{f}$$

Per la dimostrazione è sufficiente sviluppare i conti

INTEGRAZIONE A PIÙ VARIABILI

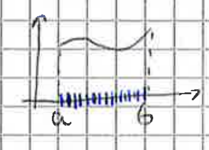
$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \Rightarrow \operatorname{graph}(f) \in \mathbb{R}^{n+1}$



$$\int_D f(x)\,dx = \text{Volume}(///)$$

La prima cosa necessaria per calcolare l'integrale è stabilire come effettuare la partizione di un dominio in N dimensioni:

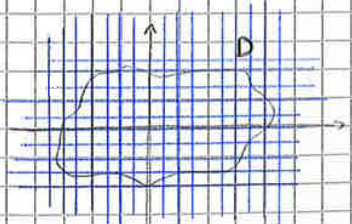
•) 1 DIM.



$\operatorname{mis}([a,b]) = b - a \to$ lunghezza

$\int_a^b c\,dx = c(b-a)$

•) 2 DIM.



$\operatorname{mis}(D) =$ area in $\mathbb{R}^2$

$\to$ Considero 2 misure:

•) insieme di tutti i quadretti esattamente contenuti in D (stima per DIFETTO)

•) insieme dei quadretti esattamente contenenti l'insieme D (stima per eccesso)

$\to$ Affinando la divisione del piano (riducendo la grandezza dei quadretti) restituisce una stima dell'area di D sempre migliore

L'insieme delle regole per la partizione di domini secondo Riemann in N dimensioni prende il nome di TEORIA DELLA MISURA DI PEANO - JORDAN

Teorema Valgono le seguenti proprietà:

- Se $\mathcal{P}$ è una partizione di I si ha:

$$m_e = \sum_{k=1}^{K} m_e(J_k) \qquad \text{con } \mathcal{P} = \{J_1, \dots, J_K\}$$

- Dati due intervalli I e I' tali che $I' \subseteq I$ vale:

$$m_e(I') \leq m_e(I) \rightarrow \text{MONOTONIA rispetto all'inclusione}$$

- Dato un intervallo I chiuso, $m_e(I) = 0$ se e solo se esiste $i = 1, \dots, n$ tale che $a_i = b_i$

es) in $\mathbb{R}^2$ $m_e(\text{segmento}) = 0$
in $\mathbb{R}^3$ $m_e(\text{piano}) = 0$, $m_e(\text{segmento}) = 0$

- Dato I intervallo chiuso e $\underline{v_0} \in \mathbb{R}^n$, posto $\underline{v}_0 + I := \{\underline{y} \in \mathbb{R}^n : \underline{y} = \underline{v}_0 + \underline{x}, \ \underline{x} \in I\}$, si ha che $\underline{v}_0 + I$ è l'intervallo n-dimensionale chiuso:

$$\underline{v}_0 + I = \times_{i=1}^{n} [a_i + v_{0,i} ; b_i + v_{0,i}]$$

Inoltre m_e è INVARIANTE per traslazioni:

$$m_e(I) = m_e(I + \underline{v}_0)$$

- Se I è un intervallo chiuso di $\mathbb{R}^n$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intervallo n-dimensionale chiuso J tale che: $I \subseteq \text{int}(J)$, $m_e(J) < m_e(I) + \varepsilon$

INTEGRALE DI RIEMANN Siano $I = [\underline{a}, \underline{b}] \subseteq \mathbb{R}^n$ un intervallo n-dimensionale chiuso, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione limitata su I e $\mathcal{P} = \{J_1, \dots, J_K\}$ una partizione di I in intervalli n-dimensionali chiusi

- Definiamo le SOMME INFERIORI e SUPERIORI di f su I associate a $\mathcal{P}$

$$s(f, I, \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{K} \inf_{\underline{x} \in J_k} \{f(\underline{x})\} \cdot m_e(J_k) \qquad \text{Somma INFERIORE}$$

$$S(f, I, \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{K} \sup_{\underline{x} \in J_k} \{f(\underline{x})\} \cdot m_e(J_k) \qquad \text{Somma SUPERIORE}$$

→ La limitatezza garantisce che sia $\inf f(\underline{x})$ che $\sup f(\underline{x})$ appartengano a $\mathbb{R}$ $\forall k = 1, \dots, n$

- Definiamo gli integrali inferiore e superiore di f in I

$$s(f, I) = \sup \{ s(f, I, \mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ è partizione di } I \} \qquad \text{integrale INFERIORE}$$

$$S(f, I) = \inf \{ S(f, I, \mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ è partizione di } I \} \qquad \text{integrale SUPERIORE}$$

Def: Una funzione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ si dice INTEGRABILE secondo Riemann in I se l'integrale superiore e quello inferiore coincidono; il loro valore comune si denota con:

$$\int_I f(\underline{x})\, d\underline{x} = S(f, I) = s(f, I)$$

$$\rightarrow \int_I f(\underline{x})\, d\underline{x} = \int_{[a,b] \times [c,d]} f(\underline{x})\, dx\, dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dx\, dy$$

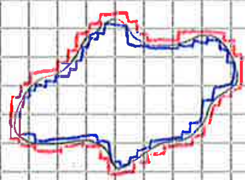
Teorema: Siano I un intervallo n-dimensionale chiuso di $\mathbb{R}^n$, $A \subseteq I$ e $f: I \to \mathbb{R}$ una funzione limitata in I e continua in $I \setminus A$. Allora se A ha misura n-dimensionale nulla secondo Peano-Jordan, f è integrabile su I e il valore dell'integrale non dipende dai valori che f assume su A

INTEGRALE SU INSIEMI LIMITATI

Dato un generico intervallo $D \in \mathcal{J}(\mathbb{R})$ (= misurabile secondo Peano-Jordan) voglio definire l'integrale

$$\int_D f(x)\,dx \;?$$

Def: Un insieme limitato $D \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice <u>MISURABILE</u> secondo Peano-Jordan se esiste una partizione tale che:



$$\forall \varepsilon > 0: \quad \xi - \xi < \varepsilon$$

→ Se D è un insieme limitato $\Rightarrow \exists I \subseteq \mathbb{R}^n$ tale che $D \subseteq \mathbb{R}^n$

→ Estendo $f(x)$ all'intervallo D tramite la funzione caratteristica di D χ_D:

$$\chi_D = \begin{cases} 1 & x \in D \\ 0 & x \in I \setminus D \end{cases} \quad \leadsto \tilde{f}(x) = f(x) \cdot \chi_D \quad \forall x \in I$$

→ Se D è misurabile $\Rightarrow$ bordo di D ha misura nulla

→ $\tilde{f}(x)$ è quindi una funzione continua a tratti definita su I ed è integrabile su questo intervallo e vale:

$$\int_I \tilde{f}(x)\,dx = \int_D f(x)\,dx$$

Criterio di integrabilità: Sia $D \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ e sia $f: D \to \mathbb{R}$. Se f è limitata e continua allora è integrabile su D

Se D è chiuso è sufficiente richiedere che $f: D \to \mathbb{R}$ sia continua, poiché per il teorema di Weierstrass (l'immagine di un compatto è un compatto) sarà necessariamente limitata

Proprietà → Valgono tutte le proprietà viste in precedenza

Teorema della media: Siano $D \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, $f: D \to \mathbb{R}$ una funzione limitata ed integrabile su D e $m, M \in \mathbb{R}$ tali che $m \le f(x) \le M$ $\forall x \in D$. Allora:

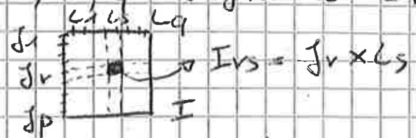
$$m \cdot \text{mis}(D) \le \int_D f(x)\,dx \le M\,\text{mis}(D)$$

Se D è compatto e connesso, e se $f: D \to \mathbb{R}$ è continua, allora $\exists \xi \in D$ tale che:

$$\int_D f(x)\,dx = f(\xi)\,\text{mis}(D)$$

→ Considero P partizione di I: $J_1, \dots, J_p \subseteq \mathbb{R}^d$ e $L_1, \dots, L_q \subseteq \mathbb{R}^k$

→ $\forall r = 1, \dots, p$ e $\forall s = 1, \dots, q$ definisco $I_{rs} := J_r \times L_s$



→ Definisco la funzione $f(\underline{x}) = \sum_{r,s} \alpha_{rs} \chi_{rs}(\underline{x})$, $\alpha_{rs} \in \mathbb{R}$

(f è una combinazione lineare di funzioni caratteristiche, quindi sarà continua e costante in ogni intervallino I_{rs})

→ Per le proprietà di additività e linearità vale la tesi

③ GENERALE → f generica, integrabile su I

→ Definiamo P come sopra $P = \{ I_{rs} \}_{r,s}$

→ Mettiamo in relazione l'integrabilità di f con le sue somme inferiori e superiori

(a) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists P : S(f, I, P) - s(f, I, P) = \sum_{r,s} (\Lambda_{rs} - \lambda_{rs}) \operatorname{mis}(I_{rs}) < \varepsilon$

$\Lambda_{rs} = \sup \{ f(\underline{x}) : \underline{x} \in I_{rs} \}$ $\lambda_{rs} = \inf \{ f(\underline{x}) : \underline{x} \in I_{rs} \}$

(b) $s(f, I, P) \leq \int_I f \leq S(f, I, P)$

→ Costruisco due funzioni a scala che approssimino $f(\underline{x})$ per difetto, $\phi(\underline{x})$, e per eccesso, $\psi(\underline{x})$

$$\phi(\underline{x}) = \sum_{r,s} \lambda_{rs} \chi_{rs}(\underline{x}) \xrightarrow{\text{INTEGRO}} \Phi(\underline{y}) = \int_L \phi(\underline{y}, \underline{z})\, d\underline{z}$$

$$\psi(\underline{x}) = \sum_{r,s} \Lambda_{rs} \chi_{rs}(\underline{x}) \longrightarrow \Psi(\underline{y}) = \int_L \psi(\underline{y}, \underline{z})\, d\underline{z}$$

→ integro ancora su J e definisco le somme parziali

$$\int_J \Phi(\underline{y})\, d\underline{y} = \int_I \phi(\underline{x})\, d\underline{x} = \sum_{r,s} \lambda_{rs} \operatorname{mis}_n(I_{rs}) = s(f, I, P)$$

$$\int_J \Psi(\underline{y})\, d\underline{y} = \int_I \psi(\underline{x})\, d\underline{x} = \sum_{r,s} \Lambda_{rs} \operatorname{mis}_n(I_{rs}) = S(f, I, P)$$

→ Contando due liceali posso dire che $\phi \leq f(\underline{y}, \underline{z}) \leq \psi$

→ Integrando rispetto a L ottengo la seguente catena di disuguaglianze

(b) $\Phi(\underline{y}) \leq \int_L f(\underline{z}, \underline{y})\, d\underline{z} \leq \Psi(\underline{y}) \Rightarrow F(\underline{y})$ INTEGRABILE

→ Se integro ancora rispetto a J posso concludere la dimostrazione

$$\int_J \Phi(\underline{y}) \leq \int_J \left(\int_L f(\underline{y}, \underline{z})\, d\underline{z} \right) d\underline{y} \leq \int_J \Psi(\underline{y})\, d\underline{y}$$

$$\Rightarrow \left| \int_I f(\underline{x})\, d\underline{x} - \int_J \left(\int_L f(\underline{z}, \underline{y})\, d\underline{z} \right) d\underline{y} \right| \leq S(f, I, P) - s(f, I, P) \leq \varepsilon$$

<u>Corollario</u> Siano $g: J \to \mathbb{R}$, $h: L \to \mathbb{R}$, $f: J \times L = I \to \mathbb{R}$ tali che

$$f(\underline{x}) = h(\underline{z}) \cdot g(\underline{y}) \qquad \forall \underline{x} \in I$$

Allora, se g e h sono integrabili nei loro domini, f risulta integrabile e vale:

$$\int_I f(\underline{x})\, d\underline{x} = \left(\int_J g(\underline{y})\, d\underline{y} \right) \left(\int_L h(\underline{z})\, d\underline{z} \right)$$

$\Omega \begin{cases} \nearrow \psi(x) = x^2 \\ \searrow \varphi(x) = \sqrt{1-x^2} \end{cases} \Rightarrow \Omega = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-a,a],\ \psi(x) \le y \le \varphi(x) \right\}$

→ ricavo a

$\begin{cases} y = x^2 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \rightsquigarrow a = \sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}$

$$\int_\Omega f(x,y)\,dxdy = \int_{-a}^{a} \left(\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(x,y)\,dy \right) dx = \int_{-a}^{a} \left(\int_{x^2}^{\sqrt{1-x^2}} 2xy\,dy \right) dx =$$

$$\int_{-a}^{a} \left[xy^2 \right]_{y=x^2}^{y=\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{-a}^{a} \left(x(1-x^2) - x^5 \right) dx = \int_{-a}^{a} (x - x^3 - x^5)\,dx =$$

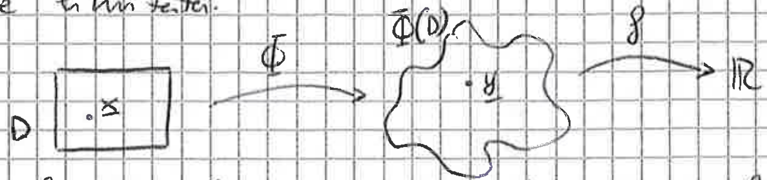
$$= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{6} \right]_{-a}^{a} = 0$$

NB f è dispari rispetto all'asse x quindi potevamo già concludere che $\int_{-a}^{a} = 0$

Def: Una funzione $\Phi : D \to \mathbb{R}^n$ si dice <u>CAMBIAMENTO REGOLARE DI COORDINATE</u> in $\mathbb{R}^n$ se $\Phi \in C^1(D)$, è iniettiva e se $J\Phi(\underline{x})$ è invertibile $\forall \underline{x} \in D$, ovvero il suo determinante è diverso da zero.

In questo caso, il determinante prende il nome di <u>DETERMINANTE JACOBIANO</u>

<u>Teorema del cambiamento di variabile:</u> Sia $\Phi : I \to \mathbb{R}^n$ un cambiamento regolare di coordinate, $D \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n) : D \subseteq I$ e sia $f : \Omega := \Phi(D) \to \mathbb{R}$ continua e limitata.

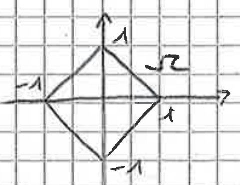


Allora vale la formula di cambiamento di variabile:

$$\int_\Omega f(\underline{y})\,d\underline{y} = \int_{\Phi(D)} f(\underline{y})\,d\underline{y} = \int_D (f \circ \Phi)(\underline{x}) \cdot \left| \det J\Phi(\underline{x}) \right| d\underline{x}$$

dove il determinante jacobiano rappresenta il fattore di trasformazione tra le misure $d\underline{x}$ e $d\underline{y}$

es)



$$\iint_\Omega (x-y)\,dxdy \ ?$$

$(x,y) \in \Omega \rightsquigarrow (u,v) \in D$

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(u+v) \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(u-v) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}}^{\text{matrice di ROTAZIONE } 45^\circ} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

→ calcolo il determinante

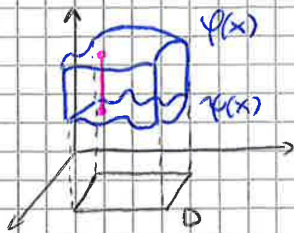
$$\det \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1$$

$$\iiint_I f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_{[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]} \left(\int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)\,dz\right)dx\,dy$$

Se devo integrare su un dominio normale N_z^φ:

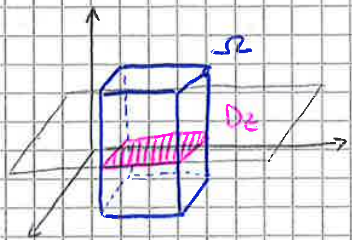
$$\iiint_{N_z^\varphi} f = \iint_D \left(\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(x,y,z)\,dz\right)dx\,dy$$

⇒ Fare l'integrale in questo ordine significa prendere il dominio "a fili" verticali e analizzare la f in quel "filo"



→ Posso anche seguire un altro ordine di integrazione:

$\underline{x} = (\underbrace{x,\ y}_{\underline{z}},\ \underbrace{z}_{\underline{y}})$ ⇒ $\int_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_{a_3}^{b_3}\left(\iint_{[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]} f(x,y,z)\,dx\,dy\right)dz$



→ Fisso z e considero il dominio piano D_z a quella coordinata

→ Faccio scorrere z dal valore minimo a a quello massimo b

⇒ $\Omega = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z\in[a,b],\ (x,y)\in D_z\ \forall z\}$

⇒ $\int_a^b\left(\iint_{D_z} f(x,y,z)\,dx\,dy\right)dz$

APPLICAZIONI DEL CALCOLO INTEGRALE

Integrali non elementari

Es) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx$ → integrale IMPROPRIO

→ e^{-x^2} tende a zero più velocemente di $\frac{1}{x^\alpha}$ ⇒ per confronto è INTEGRABILE

→ Considero $f(\underline{x}) = g(\underline{y})\,h(\underline{z})$

→ perché la variabile è muta

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\right)^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\right) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}dy\right) =$$

$$= \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}dx\,dy$$

→ cambio coordinate: $\mathbb{R}^2 \rightsquigarrow \overbrace{[0,+\infty)}^{\rho}\times\overbrace{[0,2\pi]}^{\theta}$

! Questo cambio di variabile viola l'iniettività

⇒ $[\varepsilon,+\infty)\times[\varepsilon,2\pi-\varepsilon]$ $\quad \varepsilon\to0$

→ Per evitare il limite considero l'intervallo aperto

$$(0,+\infty)\times[0,2\pi)$$

•) **MOMENTO DI INERZIA** → opposizione alla rotazione lungo un'asse $\hat{n}$

Distribuzione finita di punti $\{x_j\}_{j=1}^{N}$, e masse $\{m_j\}_{j=1}^{N}$

$$I_{\hat{n}} = \sum_{j=1}^{N} m_j \cdot r_j^2$$

→ $r_j = \text{dist}(x_j, \hat{n})$

⇓ $I_{\hat{n}}$ aumenta all'aumentare della distanza x_j a $\hat{n}$

→ Conta distribuire la massa dell'oggetto lontano dall'asse di rotazione

→ Il momento di inerzia può anche essere visto come la proiezione sull'asse di rotazione $\hat{n}$ della matrice, detta TENSORE DI INERZIA, applicata all'asse $\hat{n}$

$$I_{\hat{n}} = \langle \hat{n}, I_O \cdot \hat{n} \rangle$$

→ I_O contiene tutte le informazioni sulla rotazione del corpo rispetto a tutti i possibili assi

$$I_O = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & \cdot \\ \cdot & I_{yy} & \cdot \\ \cdot & \cdot & I_{zz} \end{pmatrix}$$

→ rotazione rispetto agli assi misti

→ rotazione sugli assi COORDINATI

Dato un corpo rigido esteso Ω, definisco i momenti di inerzia lungo gli assi coordinati come il momento secondo della distanza dall'asse:

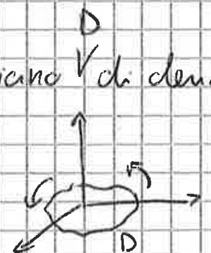
$$I_x = \int_\Omega \rho(x,y,z)\, \underbrace{(y^2+z^2)}_{\text{distanza dall'asse } x}\, dx\,dy\,dz$$

$$I_y = \int_\Omega \rho(x,y,z) \cdot (x^2+z^2)\, dx\,dy\,dz$$

$$I_z = \int_\Omega \rho(x,y,z) \cdot (x^2+y^2)\, dx\,dy\,dz$$

Teorema degli assi perpendicolari: Dato un corpo piano D di densità $\rho(x,y)$, la rotazione rispetto all'asse z vale:

$$I_z = I_y + I_x$$



$$I_x = \int_D \rho(x,y) \cdot y^2\, dx\,dy$$

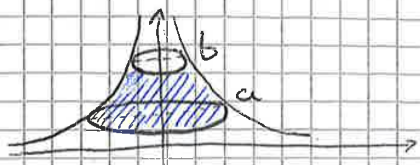
$$I_y = \int_D \rho(x,y)\, x^2\, dx\,dy$$

$$\Rightarrow I_z = \int_D \rho(x,y)(x^2+y^2)\, dx\,dy = \underbrace{\int_D x^2 \rho(x,y)}_{I_y} + \underbrace{\int_D y^2 \rho(x,y)}_{I_x}$$

Teorema di Huygens-Steiner: Il momento di inerzia rispetto ad un asse generico $I_{\hat{n}}$ parallelo ad un'asse di rotazione I_{cm}, passante per il centro di massa, e posto a distanza R da esso è pari a:

$$I_{\hat{n}} = I_{cm} + \text{massa}(\Omega) \cdot R^2$$

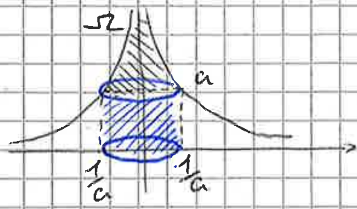
e) Volume dell'iperboloide di rotazione $\to f(z) = \frac{1}{z}$



$$Vol(\Omega) = \pi \int_a^b f^2(z)\, dz = \pi \int_a^b \frac{1}{z^2}\, dz = \pi \left[-\frac{1}{z} \right]_a^b = \pi \left[\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right]$$

$\to$ Se mando $b \to +\infty$ ottengo $Vol(\Omega_a^\infty) = \pi \cdot \frac{1}{a} < \infty$!

! Ho ammassato una quantità di volume finito in uno spazio infinito



$\to$ Ho inoltre ottenuto che il volume del corpo Ω è lo stesso del cilindro di altezza a e raggio $\frac{1}{a}$ situato sotto a Ω!

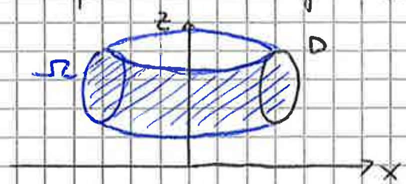
Teorema di Pappo-Guldino Sia $D \in f(\mathbb{R}^2)$ un insieme contenuto nel semipiano $(x, z) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$. Il volume del solido:

$$\Omega = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{x^2+y^2}, z) \in D \}$$

ottenuto ruotando D attorno all'asse z è dato da:

$$Vol(\Omega) = 2\pi \iint_D x\, dx dy = 2\pi x_G \, Area(D).$$

(= prodotto dell'area di D per la circonferenza descritta dal baricentro)



INTEGRALE CURVILINEO DI 2ª SPECIE e FORME DIFFERENZIALI

Richiamo: l'integrale di 1ª specie definiva l'integrazione su una curva γ di una funzione scalare $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

$$\int_\gamma f(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\|\, dt$$

$\to$ L'integrale di seconda specie definisce invece l'integrazione lungo γ di un campo vettoriale $f: \mathbb{R}^n \supseteq D \to \mathbb{R}^n$ ed ha un significato fisico fondamentale.

Def: Siano $\gamma: [a, b] \to \mathbb{R}^n$ una curva regolare, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ tale che $\gamma([a,b]) \subseteq D$ e $\underline{f} \in C^0(D)$ un campo vettoriale. Si definisce INTEGRALE CURVILINEO DI 2ª SPECIE del campo vettoriale $\underline{f}$ lungo γ la quantità:

$$\mathcal{L}(\underline{f}, \gamma) = \int_\gamma \underline{f} \cdot d\gamma = \int_a^b \langle \underline{f}(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \, dt$$

che misura il LAVORO della forza $\underline{f}$ lungo γ.