NUMERO: **2481A** ANNO: 2020

A P P U N T I

STUDENTE: Riberi Matteo

MATERIA: Riberi Matteo - ANALISI 1 (no equazioni differenziali) - Prof. Zanini

ELEMENTI DI LOGICA

PREPOSIZIONE LOGICA:

è una frase a cui si può sempre associare un valore di verità (si può sempre stabilire se è vera o falsa)

ex. "Il quadrato di 45 è 2025" VERA

$45^2 = (40+5)^2 = (4 \cdot 10 + 5)^2 = 4^2 \cdot 100 + 4 \cdot \overbrace{10 \cdot 5 \cdot 2}^{10} + 5^2 =$

$= 16 \cdot 100 + 4 \cdot 100 + 25 = 100 \cdot (16+4) + 25 = 100 \cdot (4^2+4) + 25$

$= 100 \cdot 4 (4+1) + 25$

! in generale

$m^2 = 100 \cdot x \cdot (x+1) + 5^2$ prima cifra del numero

↳ dove m è un qualsiasi multiplo di 5 $(m = x5)$

PREDICATO:

enunciato matematico che dipende da una o più variabili (è vero o falso solo dopo che si fissa il valore delle variabili)

es. $p(n)$ = "n è il quadrato di un numero naturale"

$p(4)$ = "4 è il quadrato di un numero naturale" VERA

$p(3)$ = "3 " " " " " " FALSA

CONNETTIVI LOGICI: (siano p e q due proposizioni)

- NEGAZIONE: $\neg$ "non" $\neg p$ [leggo "non p"]

$\neg p$ ha il valore di verità opposto rispetto a p

p	$\neg p$
V	F
F	V

TABELLA DI VERITÀ che definisce $\neg p$

- CONGIUNZIONE: $\wedge$ "e" $p \wedge q$ [leggo "p e q"]

$p \wedge q$ è VERA solo se p e q sono entrambe vere

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

QUANTIFICATORI

• QUANTIFICATORE UNIVERSALE: $\forall$ "per ogni"

Se $p(x)$ è un predicato che dipende dalla variabile x si definisce la proposizione logica $\forall x, p(x)$ [leggo "per ogni x, vale $p(x)$"]

! devo chiarire l'insieme in cui si trova x

• QUANTIFICATORE ESISTENZIALE: $\exists$ "esiste"

$\exists!$ "esiste unico" o "esiste solamente uno"

$\exists x : p(x)$ ["esiste x tale che vale $p(x)$"]

ex. $p(x)$: "$\frac{x}{3}$ è un numero naturale" PREDICATO

$\exists x \in \mathbb{N} : p(x)$ V ["esiste x appartenente a $\mathbb{N}$ tale che vale $p(x)$"]

! In questo caso per dimostrare che è vera basta fornire un esempio

$p(3) \to \frac{3}{3} = 1$ è un numero naturale

ex. $\exists! x \in \mathbb{N} : p(x)$ F perché non esiste un solo valore

motivo: basta trovare 2 esempi $p(3) = \frac{3}{3} = 1$; $p(6) = \frac{6}{3} = 2$

o Se ho due variabili posso usare due quantificatori insieme

ex. $p(x, y)$ "x è maggiore o uguale a y" con $x, y \in \mathbb{N}$

$\to \forall x, \forall y : p(x,y)$ (F)

$\to \forall x, \exists y : p(x,y)$ (V) basta prendere $y = x$

$\to \exists x : \forall y, p(x,y)$ (F) perché non c'è un numero più grande di tutti gli altri

! l'ordine di comparsa dei quantificatori è IMPORTANTE perché cambia il messaggio

$\forall y, \exists x : p(x,y)$ V

OSSERVAZIONE considero $\forall x, p(x)$

- Per provare che $p(x)$ è VERA non basta fornire un esempio
- Per provare che è falsa, in pratica devo provare che è vera la sua negazione

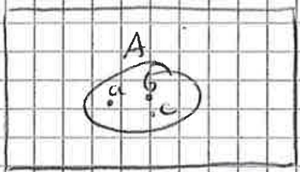
$\neg(\forall x, p(x))$ significa che $\exists x : \neg p(x)$

In questo caso mi basta trovare un controesempio

2) MEDIANTE UNA PROPRIETÀ $\quad A = \{x \in X : p(x)\}$

ex. $A = \{x \in \mathbb{N} : \text{"}n \text{ è dispari"}\}$

3) DIAGRAMMI DI EULERO-VENN



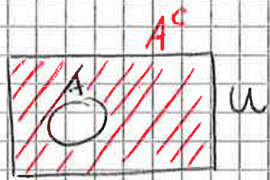
$\mathcal{U} \to$ AMBIENTE UNIVERSALE, racchiude tutto

OPERAZIONI FRA GLI INSIEMI

Considero $\mathcal{U} \neq \emptyset$ e $A, B \subset \mathcal{U}$

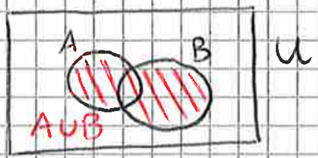
- COMPLEMENTARE DI A: A^c, CA

$A^c \overset{def}{=} \{x \in \mathcal{U} : x \notin A\}$



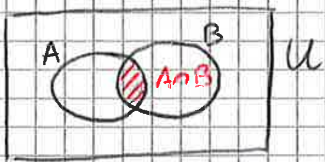
- UNIONE DI 2 INSIEMI: $A \cup B$

$A \cup B \overset{def}{=} \{x \in \mathcal{U} : (x \in A) \vee (x \in B)\}$



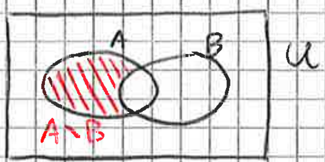
- INTERSEZIONE DI 2 INSIEMI: $A \cap B$

$A \cap B \overset{def}{=} \{x \in \mathcal{U} : (x \in A) \wedge (x \in B)\}$



- DIFFERENZA FRA 2 INSIEMI: $A \setminus B$

$A \setminus B = \{x \in \mathcal{U} : (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$



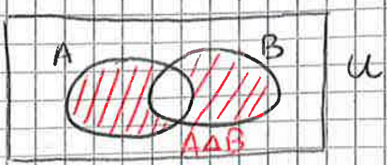
- DIFFERENZA SIMMETRICA: $A \Delta B$

↳ esclude gli elementi in comune fra i due insiemi

$A \Delta B \overset{def}{=} \{x \in \mathcal{U} : (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\}$

$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$



GLI INSIEMI NUMERICI

• NUMERI NATURALI $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

$+, \cdot$ sono operazioni ben definite in $\mathbb{N}$

Invece $5+x=0$ in $\mathbb{N}$ non ha soluzione

• NUMERI INTERI $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

Data l'equazione $a+x=b$ e fissati a e $b \in \mathbb{Z}$, questa operazione è sempre risolvibile in $\mathbb{Z}$

Invece $3x = 1$ non ha soluzione in $\mathbb{Z}$

• NUMERI RAZIONALI $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$

$\Rightarrow$ p e q sono PRIMI FRA LORO, ovvero non hanno divisori in comune

! In $\mathbb{Q}$ sono ben definite le quattro operazioni ed è ben definito un ORDINAMENTO (dati a e $b \in \mathbb{Q}$ si può sempre stabilire se $a \leq b$ o $b \leq a$

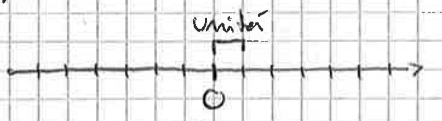
Due numeri razionali si possono sempre confrontare

? Dati a e $b \in \mathbb{Q}$ con $a<b$, esiste un numero razionale compreso tra a e b? V

DIMOSTRAZIONE: $a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2} \in \mathbb{Q}$ e $a < \frac{a+b}{2} < b$

Questa proprietà prende il nome di DENSITÀ dei NUMERI RAZIONALI

Si possono rappresentare i numeri razionali su una retta:



! Non tutti i punti della retta corrispondono ad un numero razionale

• NUMERI REALI $\mathbb{R}$

Questo insieme permette di definire una corrispondenza biunivoca con i punti di una retta

! L'insieme dei numeri reali è COMPLETO

Se $A, B \subseteq \mathbb{R}$ tali che $A \cap B = \emptyset$ (insieme DISGIUNTI) e $A \cup B = \mathbb{R}$

- supponiamo che $\forall a \in A$ e $\forall b \in B$ vale $a < b$

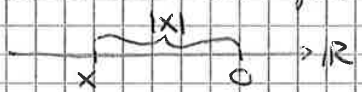
→ Ho costruito due insiemi A e B che soddisfano tutte le condizioni
→ Ho dimostrato che $\exists$ 2 insiemi A e B che non hanno un elemento separatore

VALORE ASSOLUTO

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad x \overset{def}{=} \begin{cases} x & se\ x \geq 0 \\ -x & se\ x < 0 \end{cases}$$

PROPRIETÀ:

- $|x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, $|x| = 0 \iff x = 0$
  $|x|$ corrisponde alla distanza fra la x e lo ϕ



- DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE : $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad |x+y| \leq |x| + |y|$

dimostrazione : 1

- elevo entrambi i membri al quadrato $(|x+y|)^2 \leq (|x|+|y|)^2$
  $\cancel{x^2} + \cancel{2}xy + \cancel{y^2} \leq \cancel{|x|^2} + \cancel{|y|^2} + \cancel{2}|xy|$
  $xy \leq |xy|$ VERO perché se $xy < 0 \Rightarrow xy \leq 0 \leq |xy|$
  se $xy \geq 0 \Rightarrow xy = |xy|$

dimostrazione 2

- $x \leq |x|$ VERA perché se $x < 0 \Rightarrow x < 0 < |x|$
  se $x \geq 0 \Rightarrow x = |x|$
- $y \leq |y|$ VERA per lo stesso motivo
- $x + y \leq |x| + |y|$ VERA perché se x e y sono più piccoli rispettivamente di $|x|$ e $|y|$, allora la loro somma $x+y$ sarà sicuramente più piccola di $|x| + |y|$
- Ora con lo stesso procedimento analizzo valori di x e y negativi:
  $-x \leq |x|$ VERA
  $-y \leq |y|$ VERA $\Rightarrow$ ottengo che $-x-y \leq |x| + |y|$
- Ho ottenuto che
  $\begin{cases} x+y \leq |x| + |y| \\ -x-y \leq |x| + |y| \end{cases} \Rightarrow$ ho dimostrato che il segno non conta quindi posso scrivere $|x+y| \leq |x| + |y|$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 11 di 130

? L'intersezione di due intervalli è un intervallo? Se sì dimostra se no fornisce un controesempio

- Sì <u>dimostro</u>: dati I_1, I_2 intervalli
- se $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ VERO $\Rightarrow$ è un intervallo
- se $I_1 \cap I_2 = \{a\}$ VERO $\Rightarrow$ " " "
- se $\exists\, x_1, x_2$ con $x_1 < x_2$ tali che x_1 e $x_2 \in I_1 \cap I_2$

prendo un punto $z \in \mathbb{R}$ tale che $x_1 < z < x_2$ e provo che questo punto appartiene all'intervallo

- $x_1, x_2 \in I_1 \cap I_2 \Rightarrow x_1, x_2 \in I_1 \Rightarrow z \in I_1$ per la CARATT. degli insiemi
- $x_1, x_2 \in I_1 \cap I_2 \Rightarrow x_1, x_2 \in I_2 \Rightarrow z \in I_2$

$\Rightarrow$ Se ho dimostrato che $z \in$ contemporaneamente a I_1 e a I_2 allora $z \in I_1 \cap I_2$ quindi l'intersezione $I_1 \cap I_2$ è un intervallo perché rispetta la sua caratterizzazione

es) $A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \dfrac{(x+3)e^{x+1}}{x-2} \le 0 \right\}$ $\max A$, $\min A$? insieme dei maggioranti/minoranti?

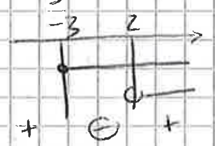
! Per gli intervalli è immediato determinare l'insieme dei maggioranti e minoranti o il massimo e il minimo. Quindi conviene scrivere l'insieme sottoforma di intervalli, risolvendo la disequazione.

$\dfrac{(x+3)e^{x+1}}{x-2} \le 0$ $\rightarrow$ il termine e^{x+1} non influisce sul segno perché è sempre $\oplus$, quindi posso scrivere:

$B \overset{def}{=} \left\{ x \in \mathbb{R} : \dfrac{x+3}{x-2} \le 0 \right\}$ allora $A = B$

se $C \overset{def}{=} \{ x \in \mathbb{R} : (x+3)(x-2) \le 0,\ x \ne 2 \}$ allora $A = B = C$

$(x+3)(x-2) \le 0$ $\quad x \ge -3$ $\quad x \ge 2$



$C = [-3; 2) \Rightarrow A = [-3; 2)$

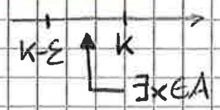
$\min A = -3$; $\nexists \max A$; minoranti $(-\infty, -3]$; maggioranti $[2; +\infty)$

es) $A=\{x\in\mathbb{R} : 4\le x^2\le 9\}$ $\sup A$? $\inf A$?

$A=(-3;-2]\cup[2;3)$ $\sup A = 3$, $\inf A = -3$

! Se l'insieme non è scrivibile sotto forma di intervalli possiamo scrivere sup e inf con la seguente caratterizzazione:

$$\boxed{K=\sup A \iff \begin{array}{l} 1)\ \forall x\in A : x\le K \quad [K \text{ è un maggiorante}] \\ 2)\ \forall \varepsilon>0,\ \exists x\in A : x> K-\varepsilon \end{array}}$$



Nel punto 2 dico che K è il più piccolo dei maggioranti. Infatti se prendo un numero qualsiasi ε e lo tolgo a K dovrò sempre trovare un valore di $x\in A$ maggiore di $K-\varepsilon$

$$\boxed{K=\inf A \iff \begin{array}{l} 1)\ \forall x\in A : x\ge K \quad [K \text{ è un minorante}] \\ 2)\ \forall \varepsilon>0 : \exists x\in A \text{ tale che } x< K+\varepsilon \end{array}}$$

es) $A=\{x\in\mathbb{R} : x = 1-\frac{1}{n} \text{ con } n\in\mathbb{N}, n\neq 0\}$ $\sup A$? $\inf A$?

se $n=1$ $x = 1-\frac{1}{1} = 0 \in A$

" $n=2$ $x = 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \in A$

" $n=3$ $x = 1-\frac{1}{3} = \frac{2}{3} \in A$

$A=\{0;\ \frac{1}{2};\ \frac{2}{3};\ 1-\frac{1}{4};\ 1-\frac{1}{5};\ \dots\}$

- Visto che $1-\frac{1}{n}\ge 0$ $\forall n\neq 0, n\in\mathbb{N}$ $\Rightarrow$ 0 è un MINORANTE

$\left.\begin{array}{l} 0 \text{ è un MINORANTE} \\ 0\in A \text{ perché l'abbiamo calcolato} \end{array}\right\}$ $0=\min A \Rightarrow 0 = \inf A$

$A = [0,1)$

↳ non posso scrivere $A = [0;1)$ perché fra 0 e 1 ci sono sia numeri $\in\mathbb{Q}$ che $\in\mathbb{R}$ ma io calcolando $1-\frac{1}{n}$ otterrò sempre numeri $\in\mathbb{Q}$. Posso invece dire che A è INCLUSO in quell'intervallo perché otterrò sempre valori fra 0 e 1

- Ipotizziamo $\sup A = 1$ e verifichiamo i due punti della caratterizzazione del superiore

1) $x\le K \Rightarrow 1-\frac{1}{n}\le \cancel{1}$ $\quad -\frac{1}{n}\le 0$ VERA per $\forall n\neq 0$, con $n\in\mathbb{N}$

IL FATTORIALE $\boxed{n!}$ "n fattoriale"

$0! \overset{def}{=} 1$; $1! = 1$; $2! = 2 \cdot 1 = 2$; $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

$n \in \mathbb{N} : n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$

con $n \geq 1$ vale la proprietà $n! = (n-1)! \cdot n$ con $n \geq 1$

$\Rightarrow$ $n!$ rappresenta il numero di modi in cui è possibile disporre n elementi distinti

$\boxed{es}$ $3! = 6$ a, b, c

abc, bac, cab, cba, bca, acb

COEFFICIENTE BINOMIALE $\binom{n}{k}$ "n su k"

con $n, k \in \mathbb{N}$ e $0 \leq k \leq n$ $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

$\Rightarrow$ rappresenta il numero di sottoinsiemi di k elementi che si possono ottenere a partire da un insieme di n elementi

$\boxed{es}$ $n = 3$, $k = 2$ $\{a, b, c\}$ $\rightarrow$ insieme di 3 elementi

$\{a, b\}$; $\{b, c\}$; $\{a, c\}$ ho 3 sottoinsiemi possibili di 2 elementi

$\binom{3}{2} = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{6}{2 \cdot 1} = \frac{6}{2} = 3$ VERO

PROPRIETÀ

1) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

$\binom{n}{n-k} \overset{def}{=} \frac{n!}{(n-k)!\underbrace{(n-(n-k))!}_{k!}} = \binom{n}{k}$

2) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ $\rightarrow$ dimostra il TRIANGOLO di TARTAGLIA

3) FORMULA del BINOMIO

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k$$

$\boxed{es}$ $(a+b)^2 = \underbrace{\binom{2}{0} a^{2-0} \cdot b^0}_{k=0} + \underbrace{\binom{2}{1} a^{2-1} \cdot b^1}_{k=1} + \underbrace{\binom{2}{2} a^{2-2} \cdot b^2}_{k=2}$

$= \underbrace{\frac{2!}{0!(2-0)!}}_{1} a^2 + \underbrace{\frac{2!}{1!(2-1)!}}_{2} \cdot a \cdot b + \underbrace{\frac{2!}{2!(2-2)!}}_{1} \cdot b^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Def: Dati $a>0 \wedge a \neq 1$, $b>0$

$x = \log_a b \overset{def.}{\iff} a^x = b$

PROPRIETÀ: dati $x, y > 0$; $a, b > 0$; $a \neq 1$; $b \neq 1$

- $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$
- $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
- $\log_a (x^k) = k \log_a x$
- $\log_b x = (\log_b a)(\log_a x)$

I NUMERI COMPLESSI

Def: un numero complesso è una coppia ordinata di numeri reali

$z = (a, b)$ con $a, b \in \mathbb{R}$

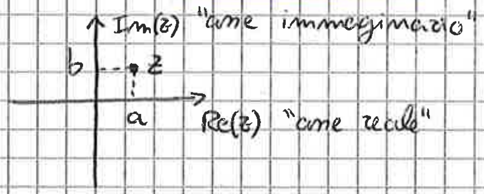
$a \to$ parte REALE $\quad Re(z)$

$b \to$ parte IMMAGINARIA $\quad Im(z)$

l'insieme dei numeri complessi si denota con $\mathbb{C}$

$\Rightarrow$ dalla definizione è naturale identificare $\mathbb{C}$ con il piano $\mathbb{R}^2$

$\mathbb{C} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2 \to$ piano di GAUSS



OPERAZIONI IN $\mathbb{C}$

- SOMMA:

$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) \overset{def.}{=} (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$

- PRODOTTO:

$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) \overset{def.}{=} (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)$

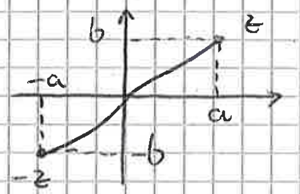
es) $z = (0, 1)$

$(0,1)(0,1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1 \in \mathbb{R}$

! I numeri sull'asse Re si identificano con i numeri reali

Abbiamo ottenuto che $(0,1)(0,1) = (-1,0)$, cioè il numero complesso $z = (0,1)$ risolve il problema $z^2 = -1$

$$\boxed{(0,1) \overset{def}{=} i}$$



RECIPROCO di $z = a+bi$

$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi}$ come si scrive in forma cartesiana?

es) $\frac{1}{2+3i} \cdot \frac{2-3i}{2-3i} = \frac{2-3i}{4+9} = \frac{2-3i}{13} = \underbrace{\frac{2}{13} - \frac{3}{13} i}_{\text{ho ottenuto un numero in forma CARTESIANA}}$

$\downarrow$ COMPLESSO CONIUGATO

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} = \frac{1}{a+bi} \cdot \frac{a-bi}{a-bi} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2} i$$

POTENZE DI I

i

$i^2 = -1$

$i^3 = -1 \cdot i = -i$

$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = 1$

ogni 4 si ripete lo stesso RISULTATO

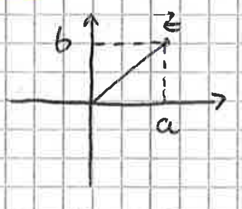
$i^5 = i^4 \cdot i = i$

$i^6 = i^4 \cdot i^2 = -1$

In generale conviene separare i^{4n} che farà sempre 1

es) $i^{2019} = i^{504 \cdot 4} \cdot i^3 = 1 \cdot i^3 = i^3 = -i$

MODULO di $z = (a,b)$



$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$

es) $z = (-1,2)$ $\quad |z| = \sqrt{(-1)^2+2^2} = \sqrt{5}$

PROPRIETÀ del modulo $|z|$

- $|z|$ è sempre un numero $\mathbb{R} \geq 0$
- $|z| = 0 \iff z = (0,0)$
- $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
- $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 21 di 130

es) Per quali numeri complessi si ha che $z^2 \in \mathbb{R}$?

$z = (a + ib)$

$z^2 = (a+ib)^2 = a^2 + 2abi + b^2 i^2 = a^2 - b^2 + 2abi$

$z^2 = a^2 - b^2 + i(2ab) \in \mathbb{R} \iff \cancel{2}ab = 0 \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$

La soluzione comprende tutti i numeri sugli assi cartesiani (tutti i numeri reali e tutti gli immaginari puri)

es) Risolvere $Re(z^2) + i\, Im(\bar{z}(1+2i)) = -3$

$z = a + bi \rightarrow z^2 = a^2 - b^2 + 2abi \rightarrow Re(z^2) = a^2 - b^2$

$\bar{z} = a - bi \rightarrow \bar{z}(1+2i) = (a-bi)(1+2i) = a - bi + 2ai + 2b =$

$= a + 2b + (2a - b)i \rightarrow Im(\bar{z}(1+2i)) = 2a - b$

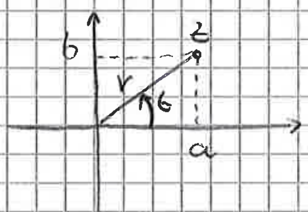
Riscriviamo l'equazione come:

$\underbrace{a^2 - b^2}_{Re} + i\underbrace{(2a - b)}_{Im} = \underbrace{-3}_{Re} + i\underbrace{0}_{Im}$

$\begin{cases} a^2 - b^2 = -3 \\ 2a - b = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a^2 - 4a^2 = -3 \\ b = 2a \end{cases} \quad \begin{cases} \cancel{-}3a^2 = \cancel{-}3 & a = \pm\sqrt{1} = \pm 1 \\ b = 2a = 2(\pm 1) = \pm 2 \end{cases}$

Ho ottenuto due punti come soluzione: $(1, 2)$ e $(-1; -2)$

FORMA TRIGONOMETRICA



$z = \underbrace{r\cos t}_{a} + i\underbrace{r\sin t}_{b}$

Dati r e t possiamo determinare $\begin{cases} a = Re(z) = r\cos t \\ b = Im(z) = r\sin t \end{cases}$

VICEVERSA Dati a e b possiamo determinare

•) $r = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$

•) → se $a = 0$ $\quad t = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{se } b > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{se } b < 0 \end{cases}$

→ se $a \neq 0$: $a > 0 \Rightarrow t = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$

$a < 0 \Rightarrow t = \pi + \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$

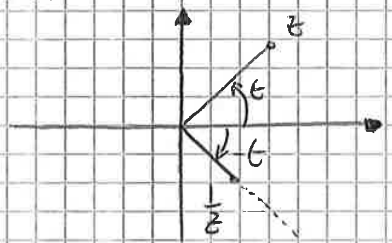
$t = \arg(z)$ ARGOMENTO del numero z

$\operatorname{Arg} z$ = ARGOMENTO PRINCIPALE, è l'unico argomento di z compreso tra $-\pi$ e π

RECIPROCO IN FORMA TRIGONOMETRICA

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{1}{|z|^2} |\bar{z}| \left(\cos(-t) + i \operatorname{sen}(-t)\right) = \frac{1}{|z|}\left(\cos(-t) + i \operatorname{sen}(-t)\right)$$

$\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg z = -t$



$\forall_0$ $\frac{1}{z}$ si trova nella stessa direzione del complesso coniugato, perché hanno lo stesso argomento

POTENZE DI UN NUMERO COMPLESSO IN FORMA TRIGONOMETRICA

$z = |z| (\cos t + i \operatorname{sen} t)$

$z^2 = z \cdot z = |z|^2 (\cos 2t + i \operatorname{sen} 2t)$ ⟹ segue dal prodotto di due numeri in forma trigonometrica

$\forall_0$ l'esponente della potenza, compare ad esponente del modulo e a coefficiente dell'angolo t

$z^3 = z^2 \cdot z = |z|^3 (\cos 3t + i \operatorname{sen} 3t)$

In generale:

$$\boxed{z^n = |z|^n \left(\cos(nt) + i \operatorname{sen}(nt)\right)}$$ formula di DE MOIVRE

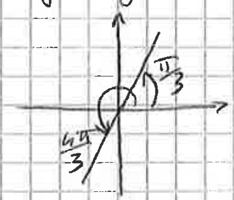
es) $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right)$ $\quad Re(z^{22}) > 0$?

$z^{22} = (\sqrt{2})^{22}\left(\cos\frac{22\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{22\pi}{3}\right)$

$\arg z = \frac{22\pi}{3} = 6\pi + \frac{4\pi}{3}$

↳ multiplo di 2π, quindi è un angolo giro

$\cos\frac{22\pi}{3} = \cos\left(6\pi + \frac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) < 0$



$Re(z^{22}) > 0$ FALSO

FORMA ESPONENZIALE

servono $|z|$, $\arg z$ ⟶ $z = |z| \cdot e^{it}$

$e^{it} = \cos t + i \operatorname{sen} t$

es) $z = -1$ ⟹ in forma esponenziale $z = 1 \cdot e^{i\pi}$

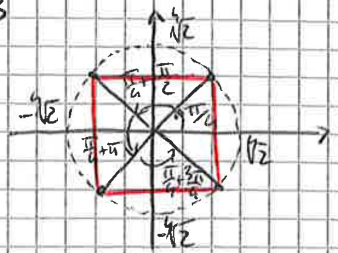
$|z| = 1 \qquad \arg z = \pi$

$z = i$ ⟹ $|z| = 1$, $\arg z = \frac{\pi}{2}$ $\qquad z = 1 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$

es) radici quarte di $z=-2 \longrightarrow w^4=-2$ in $\mathbb{C}$

$|z| = \sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2$, $\arg z = \arg(-2) = \pi$

$w_k = \sqrt[4]{2} \cdot e^{i\left(\frac{\pi+2k\pi}{4}\right)}$ con $k=0,1,2,3$



•) $w_0 = \sqrt[4]{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$ $k=0$

•) $w_1 = \sqrt[4]{2} \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)}$ $k=1$

•) $w_2 = \sqrt[4]{2} \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right)}$ $k=2$

•) $w_3 = \sqrt[4]{2} \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{4}\right)}$ $k=3$

∇ le soluzioni stanno tutte nella circonferenza $\sqrt[4]{2}$ perché hanno tutte lo stesso modulo, cambia solo l'argomento

$\Rightarrow$ Se io congiungo le 4 soluzioni con dei segmenti ottengo un poligono regolare di 4 lati, un QUADRATO

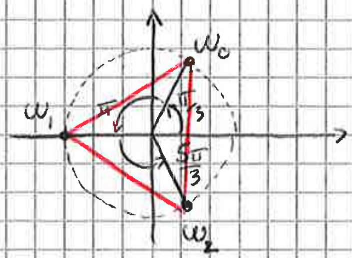
Vale: le radici n-esime di un numero complesso $\neq$ occupano i vertici di un poligono regolare di n lati

es) radici cubiche di $-1 \rightarrow w^3=-1$ in $\mathbb{C}$

$n=3 \rightarrow$ avrò tre soluzioni

∇ Una soluzione sarà sicuramente -1 e otterrò un triangolo rettangolo.

$w_k = \sqrt[3]{1} \cdot e^{i\left(\frac{\pi+2k\pi}{3}\right)}$ con $k=0,1,2$



$w_0 = 1 \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{3}\right)}$

$w_1 = 1 \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)} = e^{i\pi}$

$w_2 = 1 \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{4\pi}{3}\right)} = e^{i\frac{5}{3}\pi}$

POLINOMIO A COEFFICIENTI COMPLESSI

$p(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z^1 + a_0$ con $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{C}$

Teorema fondamentale dell'algebra:

Un polinomio a coefficienti complessi $\underset{p(z)}{\wedge}$ eguagliato a zero ha almeno una soluzione $z \in \mathbb{C}$

Conseguenza:

$p(z)=0$ $a_n z^n + \ldots + a_1 z^1 + a_0 = 0$

$\exists z_1 \in \mathbb{C} : p(z_1)=0$

$\Rightarrow$ possiamo fattorizzare $p(z) = (z-z_1)\, q(z)$, dove $q(z)$ è un polinomio a coefficienti complessi di grado $n-1$

∘) considero il complesso coniugato di z_1

$$\overline{a_n z_1^n} + \dots + \overline{a_1 z_1} + \overline{a_0} = \overline{0}$$

$$\overline{a_n} \cdot \overline{z_1}^n + \dots + \overline{a_1} \cdot \overline{z_1} + \overline{a_0} = \overline{0}$$

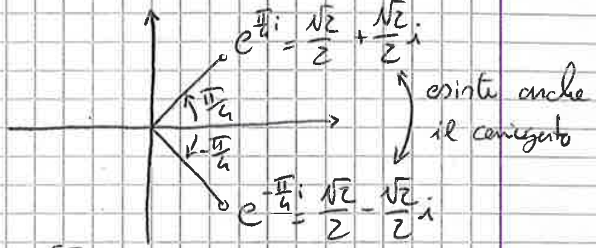
$\Rightarrow$ il coniugato di un numero reale è lo stesso numero, quindi posso riscrivere

$$a_n \overline{z_1}^n + \dots + a_1 \overline{z_1} + a_0 = 0 \qquad \overline{z_1} \text{ risolve l'equazione}$$

$\forall$ Se z_1 è uno zero di un polinomio a coefficienti reali, anche il suo coniugato è uno zero dello stesso polinomio

es) $p(z) = z^4 + 1$

$z^4 + 1 = 0 \rightarrow z^4 = -1 = e^{\pi i}$



$$z^4 + 1 = \left(z - e^{\frac{\pi}{4}i}\right)\left(z - e^{-\frac{\pi}{4}i}\right)\left(z - e^{\frac{3\pi}{4}i}\right)\left(z - e^{\frac{5\pi}{4}i}\right) =$$

$$= \underbrace{\left(z - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}i + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)\left(z - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\right)}_{z^2 - \sqrt{2}z + 1}\underbrace{\left(z - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\right)\left(z - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\right)}_{z^2 + \sqrt{2}z + 1} \quad \text{fattorizzazione in } \mathbb{C}$$

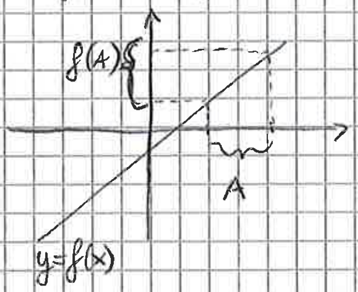
$$z^4 + 1 = \left(z^2 - \sqrt{2}z + 1\right)\left(z^2 + \sqrt{2}z + 1\right) \quad \text{fattorizzazione in } \mathbb{R}$$

$\forall$ Se $p(z)$ è un polinomio di grado 5 (DISPARI) allora $p(z)$ ha ALMENO uno zero in $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ infatti se ha una soluzione che è complessa avrà anche il suo coniugato: le soluzioni complesse sono sempre a coppie

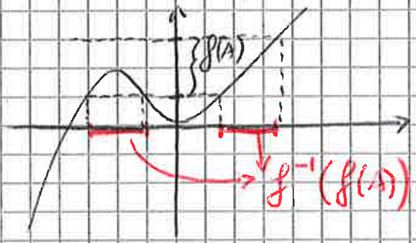
$A \subset X$, $f^{-1}(f(A))$?? data $f: X \to Y$

es)



$f^{-1}(f(A)) = A$

es)



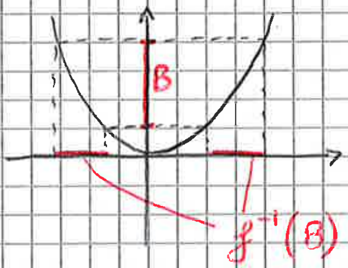
$\boxed{f^{-1}(f(A)) \supseteq A}$

$\Downarrow$

in GENERALE

$B \subset Y$, $f: X \to Y$: $f(f^{-1}(B))$??

es)

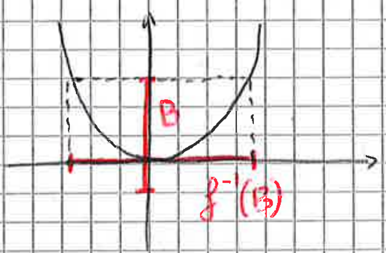


$\boxed{f(f^{-1}(B)) = B}$

$\Downarrow$

solo se $B \subset \operatorname{im} f$

es) $B = [-1; 4]$, $f(x) = x^2$



$f^{-1}(B) = [-2; 2]$

$f(f^{-1}(B)) = [0; 4] \neq B$

$\boxed{f(f^{-1}(B)) \subset B}$

estremo superiore di una funzione:

$\sup f(x) \overset{\text{def}}{=} \sup \operatorname{im} f = \sup \{ f(x) : x \in X \}$

possiamo caratterizzare il superiore di una funzione f:

$S = \sup f(x) \iff$ •) $f(x) \leq S \quad \forall x \in X$ (S è un maggiorante)

•) $\forall \varepsilon > 0 : \exists t \in X : f(t) > S - \varepsilon$

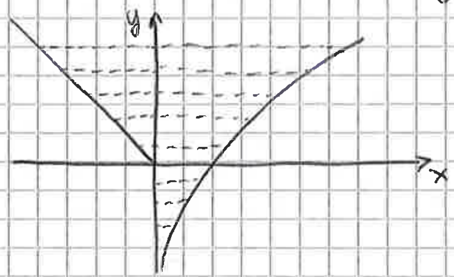
(S è il più piccolo dei maggioranti)

Una funzione si dice SUPERIORMENTE LIMITATA se l'insieme immagine ha almeno un maggiorante, cioè: $\exists M \in \mathbb{R} : f(x) \leq M \quad \forall x \in X$

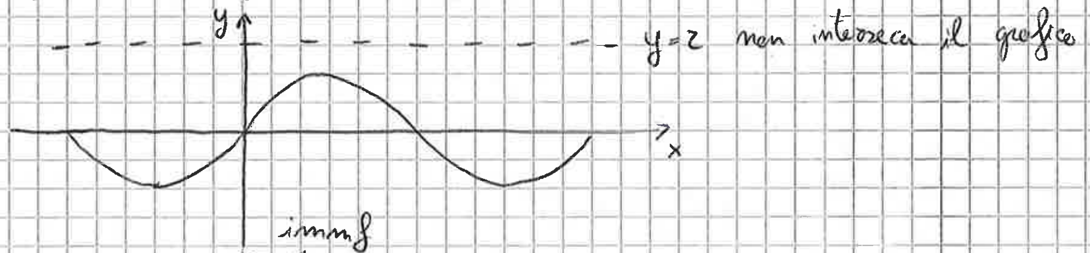
$f: X \to Y \qquad f(x) = y \qquad y \in Y$

Una funzione si dice **SURIETTIVA** quando per $\forall y \in Y$ esiste almeno una $x \in X : f(x) = y$, cioè l'insieme di arrivo (CODOMINIO) coincide con l'insieme immagine

es)



es) $f(x) = \operatorname{sen} x \qquad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ NON È SURIETTIVA



$\operatorname{sen} x : \mathbb{R} \to [-1; 1]$ è SURIETTIVA

∇_0 Trasformando il codominio in insieme immagine, qualsiasi funzione non suriettiva lo diventa

Una funzione si dice **INIETTIVA** se $\forall x_1, x_2 \in X$ e $x_1 \neq x_2$
$\Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, cioè se a due punti distinti dell'insieme X corrispondono due valori diversi

Def. operativa: se $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

es) $f(x) = 3x + 5$ è iniettiva?

$f(x_1) = f(x_2) \qquad \cancel{3}x_1 + \cancel{5} = \cancel{3}x_2 + \cancel{5} \qquad \underline{x_1 = x_2}$

rispetta la definizione operativa

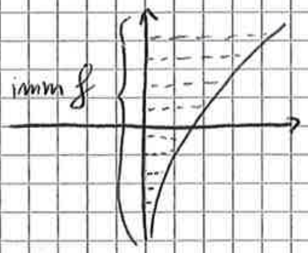
es) $f(x) = x^2$ è iniettiva?

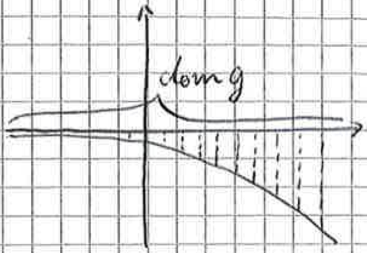
$f(x_1) = f(x_2) \qquad x_1^2 = x_2^2 \qquad x_1^2 - x_2^2 = 0$

$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0 \quad \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_1 = -x_2 \end{cases}$

Ho trovato due soluzioni quindi f NON È INIETTIVA

Infatti $f(1) = f(-1)$





imm $f = \mathbb{R}$, dom $f = \mathbb{R}$ imm $f \cap$ dom $g \neq 0$

dom $(g \circ f) = \mathbb{R}$?

$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(\log x) = -e^{\log x} = -x$

dom $(g \circ f) = \{x \in \text{dom} f : f(x) \in \text{dom} g\}$

La funzione $y = -x$ è definita in tutto $\mathbb{R}$, ma il dominio della funzione f era $x > 0$ quindi la x può assumere solo valori positivi

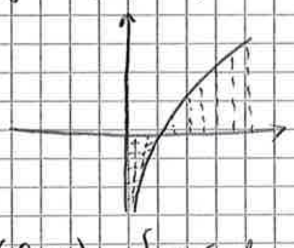
IN GENERALE: una funzione composta sarà sempre definita in un insieme che sarà un sottoinsieme della funzione f di partenza

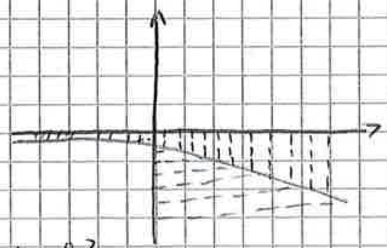
dom $f = (0; +\infty) \rightarrow$ dom $(g \circ f) = (0; +\infty)$

es) $f(x) = \log x$, $g(x) = -e^x$ $f \circ g = ?$

imm $g \cap$ dom $f \neq 0$?   FALSO

dom $f = (0; +\infty)$ imm $g = (0; -\infty)$





dom $(f \circ g) = \{x \in \text{dom} g : g(x) \in \text{dom} f\} = \emptyset$

$\Rightarrow$ la COMPOSIZIONE non è commutativa

$$f \circ g \neq g \circ f$$

es) $f(x) = \sqrt{\log_2(\cos x)}$ dom $f = ?$

$\log_2(\cos x) \geq 0 \Rightarrow \cos x \geq 1$; $x = 0 + 2k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$

dom $f = \{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$

Una funzione si dice PARI se $f(-x) = f(x)$

Una funzione si dice DISPARI se $f(-x) = -f(x)$

L

DIMOSTRAZIONE

funzione iniettiva: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

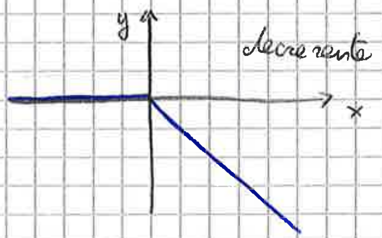
$\Rightarrow$ Se ho una funzione STRETTAMENTE MONOTONA avrò:

$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ oppure $f(x_1) > f(x_2)$

quindi avrò SICURAMENTE valori di $f(x)$ diversi al variare della x

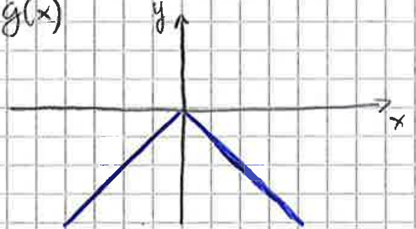
QUINDI f strett. monotona $\Rightarrow$ f INVERTIBILE

es) La somma di funzioni monotone è monotona?



$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x<0 \\ 0 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ $\qquad$ $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ -x & \text{se } x > 0 \end{cases}$

$f(x) + g(x)$



non è MONOTONA

es) Provare che la somma di due funzioni crescenti è crescente

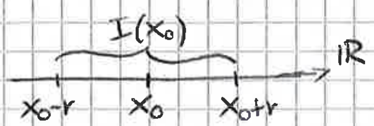
f_1, f_2 crescenti $\qquad (f_1+f_2)$ crescente?

Def $\quad x_1 < x_2 \Rightarrow (f_1+f_2)(x_1) \leq (f_1+f_2)(x_2)$

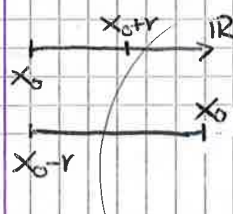
$$(f_1+f_2)(x_1) = \underbrace{f_1(x_1)}_{\leq f_1(x_2)} + \underbrace{f_2(x_2)}_{\leq f_2(x_2)} \leq f_1(x_2) + f_2(x_2) = (f_1+f_2)(x_2)$$

INTORNO

L'intorno di un punto è un intervallo simmetrico rispetto al punto:



$$I(x_0) \stackrel{def}{=} \{x : x \in (x_0 - r, x_0 + r)\} = \{x : |x - x_0| < r\}$$



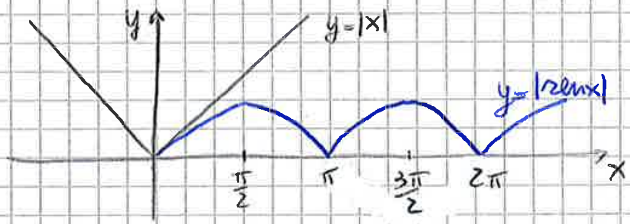
INTORNO DESTRO di x_0, di raggio r $\;(x_0, x_0+r)$

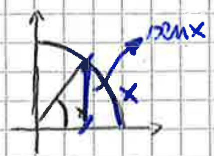
INTORNO SINISTRO

$$|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x_0| = 2\left|\operatorname{sen}\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\underbrace{\cos\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}_{\text{so che è un valore } \leq 1 \text{ quindi}}\right| \leq 2\left|\operatorname{sen}\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\right|$$

$$2\left|\operatorname{sen}\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\right| \overset{?}{\leq} 2\left|\frac{x-x_0}{2}\right|$$

Proviamo che $|\operatorname{sen} x| \leq |x|$





•) se $0 < x < \frac{\pi}{2}$ $\quad \operatorname{sen} x \leq x$?

$\forall$ l'arco sarà sempre più grande del seno, quindi è VERO

•) se $x \geq \frac{\pi}{2} \Rightarrow |\operatorname{sen} x| \leq 1 < \frac{\pi}{2} \leq x \Rightarrow |\operatorname{sen} x| \leq x$ VERO

•) se $x > 0$ $\quad |-\operatorname{sen}(-x)| = |\operatorname{sen} x|$

$|\operatorname{sen}(-x)| = |\operatorname{sen} x|$

ritorno ai due punti di prima, dove ho già dimostrato che la disuguaglianza vale

$\Rightarrow$ Abbiamo provato che $|\operatorname{sen} x| \leq |x|$

$|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x_0| \leq \cancel{2}\left|\frac{x-x_0}{\cancel{2}}\right| \qquad |\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x_0| \leq |x-x_0|$

4) IMPONGO $|x-x_0| < \varepsilon$

5) Cerco un $\delta > 0$ tale che $|x-x_0| < \delta$ allora $|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x_0| < \varepsilon$

6) Basta prendere $\delta = \varepsilon$ $(0 < \delta \leq \varepsilon)$ infatti se $|x-x_0| < \varepsilon$ avrò:

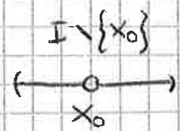
$|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x_0| \leq |x-x_0| < \varepsilon$ cioè $|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x_0| < \varepsilon$

PUNTO DI ACCUMULAZIONE

Dati $A \subseteq \mathbb{R}$ insieme e $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$

x_0 si dice PUNTO DI ACCUMULAZIONE per l'insieme A, se per ogni intorno $I(x_0)$ si ha:

$$\underbrace{(I \setminus \{x_0\})}_{\text{INTORNO BUCATO di } x_0} \cap A \neq \emptyset$$



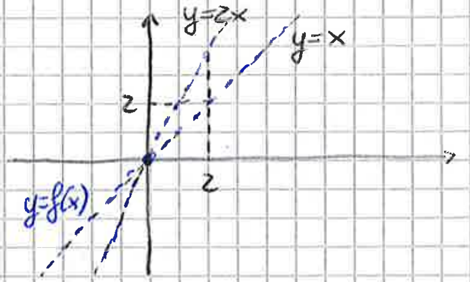
$\forall$ RETTA ESTESA $\quad \overline{\mathbb{R}} \overset{def}{=} \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$

$\hookrightarrow x_0$ può assumere valori anche di $+\infty$ e $-\infty$

es) $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 2x & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ è continua?

f è continua in x_0 se

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$



$x_0 = 2 \quad f(2) = 2 \quad f$ è continua in 2? NO

Perché non è possibile stabilire un intorno di 2 la cui immagine sia tutta compresa in un intorno V di raggio a piacere nel punto $f(2) = 2$

$\Rightarrow$ Quindi la funzione non è continua, perché non è continua in tutti i punti del suo dominio

$x_0 = 0$ è continua, infatti:

•) Preso un $\varepsilon > 0$, cerchiamo δ: $|x - \underset{x_0}{0}| < \delta \Rightarrow |f(x) - \underbrace{f(0)}_{=0}| < \varepsilon$

$|x| < \delta \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$

•) $|f(x)| \begin{cases} |x| & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ |2x| & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ in ogni caso sarà $\leq 2|x|$

•) $2|x| < \varepsilon \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon \qquad |x| < \frac{\varepsilon}{2}$

Ho ottenuto che basta prendere $0 < \delta \leq \frac{\varepsilon}{2}$ perché:

se $|x| < \delta$ allora $|x| < \frac{\varepsilon}{2}$ e quindi $|f(x)| < \varepsilon$ VERO

es) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ $\exists x_0 \in \mathbb{R} : f(x)$ è continua in x_0? NO

perché se $x_0 \in \mathbb{Q}$ $f(x_0) = 1$:

fissato $\varepsilon = \frac{1}{2}$ $\nexists \delta > 0$:

$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} < f(x) < \frac{3}{2}$ ci sono dei punti in cui questa condizione non è vera perché:

$\exists x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta) \setminus \mathbb{Q} \Rightarrow f(x) = 0$

es) $\lim_{x \to 0} \log x$ oppure $\lim_{x \to 0^+} \log x$

∇ In questo caso non è necessario prendere solo il limite destro, perché qualsiasi intorno prenda, la definizione di limite richiede che la x scelta appartenga al dominio della funzione

es) $f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{se } x < 0 \\ 1+x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ $\quad \text{dom} f = \mathbb{R}$

Per studiare il limite $\lim_{x \to 0} f(x)$ è utile studiare separatamente il limite destro e quello sinistro

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (1+x) = 1$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \cos x = 1$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) \Rightarrow$ il limite $\exists$

∇ Se il limite $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ allora $\begin{cases} \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell \\ \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell \end{cases}$ e viceversa

TIPI DI DISCONTINUITÀ

$f: A \to \mathbb{R}$ $\quad A = \text{dom} f$

$x_0 \in \mathbb{R}$ punto di accumulazione per l'insieme A

x_0 si dice PUNTO DI DISCONTINUITÀ se:

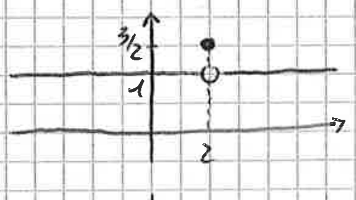
•) $x_0 \in A$ e f non è continua in x_0

•) $x_0 \notin A$

•) DISCONTINUITÀ ELIMINABILE

$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ ma $x_0 \notin A$ o $f(x_0) \neq \ell$

es)



$f(2) = \frac{3}{2}$ ma $\lim_{x \to 2} f(x) = 1$

$x=2$ è un punto di discontinuità eliminabile

es) $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ $\quad 0 \notin \text{dom} f$

ma il punto $x=0$ è un punto di accumulazione per $\text{dom} f$ e quindi posso calcolare il limite:

$\lim_{x \to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$

$\forall$ intorno V di ℓ $\exists$ intorno U di x_0 tale che:
se $x \in U \cap A \Rightarrow f(x) \in V$
$\rightarrow$ restringendo la funzione considero $Y \subset A$
se $x \in U \cap Y \Rightarrow f(x) \in V$
(sono sicuro che $U \cap Y$ è non vuoto perché ho definito x_0 punto di accumulazione di Y)

NB Questo risultato è utile per provare che un LIMITE NON ESISTE
$\Rightarrow$ Se prendo due sottoinsiemi $Y_1, Y_2 \subset A$ e x_0 punto di accumulazione per Y_1, Y_2 e A
e se $\lim_{x \to x_0} f|_{Y_1}(x) \neq \lim_{x \to x_0} f|_{Y_2}(x)$
allora si può concludere che $\lim_{x \to x_0} f(x)$ <u>NON ESISTE</u>

<u>es</u> studiare il limite $\lim_{x \to +\infty} (1 + \operatorname{sen} x)$

- $Y_1 = \{ x = k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z} \}$

$$\lim_{x \to +\infty} f|_{Y_1}(x) = \lim_{x \to +\infty} (1 + \underbrace{\operatorname{sen}(\pi k)}_{0}) = \lim_{x \to +\infty} 1 = 1$$

- $Y_2 = \{ x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z} \}$

$$\lim_{x \to +\infty} f|_{Y_2}(x) = \lim_{x \to +\infty} (1 + \underbrace{\operatorname{sen}(\tfrac{\pi}{2} + 2k\pi)}_{1}) = \lim_{x \to +\infty} (1+1) = 2$$

$\Rightarrow$ Per il teorema sul LIMITE DI RESTRIZIONI il limite $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ NON ESISTE $\lim_{x \to +\infty} f|_{Y_1}(x) \neq \lim_{x \to +\infty} f|_{Y_2}(x)$

TEOREMA DI PERMANENZA DEL SEGNO

Se il limite di f è un valore positivo, allora esiste un intorno bucato di x_0 in cui f ha valore positivo.
Data $f: A \to \mathbb{R}$, x_0 punto di accumulazione per A, x_0 e $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$
$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$, $\ell > 0$ $\Rightarrow$ $\exists$ intorno bucato U di x_0 tale che:
$\forall x \in U \cap \operatorname{dom} f$, $x \neq x_0$ si ha $f(x) > 0$
Vale anche per valori negativi del limite

NB È possibile enunciare una versione per i limiti destro e sinistro

Infatti per il teorema della permanenza del segno se $l<0$, esisterebbe un intorno in cui $f(x)<0$
↳ ASSURDO, perchè non rispecchia la tesi

TEOREMA DELLA LIMITATEZZA LOCALE

pag 64

Se f ha limite finito allora esiste un intorno di x_0 in cui f è limitata (escluso x_0)

suppongo $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$

allora $\exists M > 0$ $\exists$ intorno U di x_0 tale che:

se $x \in U \cap A$, $x \neq x_0 \Rightarrow |f(x)| < M$

dimostrazione

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ un intorno U di x_0 : $x \in U \cap A$, $x \neq x_0 \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

→ vale per $\forall \varepsilon$ quindi posso scegliere un ε a piacere

fisso $\varepsilon = 1$ allora $\exists$ un intorno di x_0:

$x \in U \cap A$, $x \neq x_0 \Rightarrow |f(x) - l| < 1$ $\qquad l-1 < f(x) < l+1$

riscrivo $f(x) = |f(x) - l + l|$

$|f(x) - l + l| \leq |f(x) - l| + |l|$ per la disuguaglianza triangolare

$|f(x) - l| + |l| < 1 + |l|$

quindi mi basta prendere un $M \geq 1 + |l|$

TEOREMA SULL'ALGEBRA DEI LIMITI

$f, g : A \to \mathbb{R}$, x_0 punto di accumulazione per A

supponiamo $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1 \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = l_2 \in \mathbb{R}$

Allora:

- $\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = l_1 + l_2$
- $\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = l_1 \cdot l_2$
- se $l_2 \neq 0$ allora $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2}$

$l_2 \neq 0 \Rightarrow \exists$ intorno di x_0 in cui $g(x)$ ha lo stesso segno di l_2 e in particolare si ha $g(x) \neq 0$

considero:

1) $|g(x)| \cdot |f(x) - l_1| < \frac{\varepsilon}{2}$

2) $|l_1| \cdot |g(x) - l_2| < \frac{\varepsilon}{2}$

- se $l_1 = 0$ è VERA per $\forall x$
- se $l_1 \neq 0 \Rightarrow |g(x) - l_2| < \frac{\varepsilon}{2|l_1|}$

Trovo sicuramente un valore che renda vera questa disuguaglianza per la definizione di limite:

se $\lim_{x \to x_0} g(x) = l_2$

$\exists \delta_1 > 0 : |x - x_0| < \delta_1$ allora $|g(x) - l_2| < \frac{\varepsilon}{2|l_1|}$

1) $|g(x)| \cdot |f(x) - l_1| < \frac{\varepsilon}{2}$

Posso dire che $g(x)$ è sempre minore di un valore M perché se $g(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} l_2$ con $l_2 \in \mathbb{R}$ (quindi no $+\infty$ e $-\infty$) per il teorema della LIMITATEZZA LOCALE $\exists M > 0$ $\exists \delta_2 > 0$ tale che:

se $|x - x_0| < \delta_2$ e $x \in X$ allora $|g(x)| < M$

- quindi $|g(x)| \cdot |f(x) - l_1| < M \cdot |f(x) - l_1|$

pongo $M \cdot |f(x) - l_1| < \frac{\varepsilon}{2}$ $\quad |f(x) - l_1| < \frac{\varepsilon}{2M}$

- Per la definizione di limite:

$\exists \delta_3 > 0 : |x - x_0| < \delta_3$ allora $|f(x) - l_1| < \frac{\varepsilon}{2M}$

$\Rightarrow$ Ho trovato δ_1, δ_2 e δ_3 e ognuno di loro risolve una delle tre disuguaglianze che rendono vera la supposizione iniziale. Per trovare la soluzione finale devo prendere l'intersezione dei 3 intorni, che esiste sicuramente per le proprietà degli intorni concentrici

- scegliendo $0 < \delta \leq \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ otteniamo che se $0 < |x - x_0| < \delta$, $x \in X$ allora:

$|f(x) \cdot g(x) - l_1 l_2| \leq |g(x)| \cdot |f(x) - l_1| + |l_1| \cdot |g(x) - l_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow$ bisogna escludere i casi delle FORME INDETERMINATE

•) $+\infty - \infty$ •) $0 \cdot (\pm\infty)$ •) $\frac{0}{0}, \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

es) $\lim_{x \to +\infty} (x - x^2) = \lim_{x \to +\infty} x^2 \left(\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0} - 1 \right) = \lim_{x \to +\infty} (-x^2) = -\infty$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{x^2} \cdot \frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{1 + \sqrt{1-x^2}} = \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{1} - \cancel{1} + \cancel{x^2}}{\cancel{x^2}(1 + \sqrt{1-x^2})} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{1 + \sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{1 + \sqrt{1-0}} = \frac{1}{2}$$

TEOREMI DEL CONFRONTO

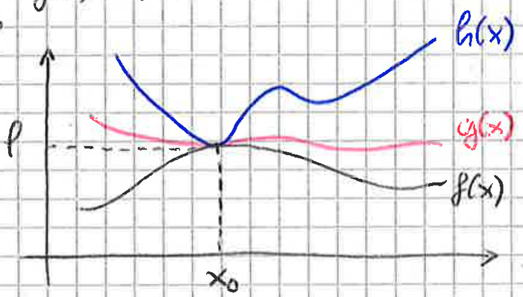
•) TEOREMA DEL CONFRONTO - CASO FINITO

$f, g, h : X \to \mathbb{R}$ x_0 punto di accumulazione di X

supponiamo $f(x) \le g(x) \le h(x)$ $\forall x \in X$

supponiamo $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = \ell \in \mathbb{R}$

allora $\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell$



dimostrazione: tesi $g(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \ell$

fisso $\varepsilon > 0$, devo determinare $\delta > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta,\ x \in X \Rightarrow |g(x) - \ell| < \varepsilon$

So no che:

•) Poiché $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \ell$ allora $\exists \delta_1$ tale che se $0 < |x - x_0| < \delta_1$, $x \in X$ allora $|f(x) - \ell| < \varepsilon$

•) $h(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \ell$ allora $\exists \delta_2$ tale che se $0 < |x - x_0| < \delta_2$, $x \in X$ allora $|h(x) - \ell| < \varepsilon$

•) $f(x) \le g(x) \le h(x)$

ovvero che $|g(x) - \ell| < \varepsilon \iff -\varepsilon < g(x) - \ell < \varepsilon \iff \ell - \varepsilon < g(x) < \ell + \varepsilon$

$\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$ se $0 < |x - x_0| < \delta_1$

$\ell - \varepsilon < h(x) < \ell + \varepsilon$ se $0 < |x - x_0| < \delta_2$

•) Applicando l'algebra dei limiti si ha che: $\frac{\operatorname{sen} x}{x} \xrightarrow[x \to 0^+]{} 1$
e per la parità della funzione si conclude che:

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 1$$

es) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ $\qquad -\frac{1}{x} \leq \frac{\operatorname{sen} x}{x} \leq \frac{1}{x}$

$-\frac{1}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0 \qquad \frac{1}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

$\frac{\operatorname{sen} x}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ per il teorema del confronto

•) TEOREMA DEL CONFRONTO "PER GLI INFINITI"

$f, g : X \to \mathbb{R}$ $\quad x_0$ punto di accumulazione

supponiamo $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in X$

•) se $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ allora $g(x)$ ha limite per $x \to x_0$ e vale $+\infty$

•) se $\lim_{x \to x_0} g(x) = -\infty$ allora $f(x)$ ha limite e vale $-\infty$

dimostrazione:

supponiamo $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ $\qquad$ tesi: $\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$

cioé $\forall M > 0 \quad \exists\, U$ intorno di x_0 tale che se:

- se $x_0 \in \mathbb{R}$ $\quad U = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$
- se $x_0 = +\infty$ $\quad U = (a, +\infty)$
- se $x_0 = -\infty$ $\quad U = (-\infty, a)$

se $x \in U \cap X$, $x \neq x_0 \Rightarrow g(x) > M$

•) fisso $M \in \mathbb{R}$
poiché $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} +\infty$ la definizione vale sicuramente per f
quindi $\exists\, U$ intorno di x_0 tale che se $x \in U \cap X$, $x \neq x_0$
allora $f(x) > M$

•) so che $f(x) \leq g(x)$ per $\forall x \in X$ quindi:

se $x \in U \cap X$, $x \neq x_0$ $\quad \underline{g(x)} \geq f(x) > \underline{M}$

$\Rightarrow$ se la x appartiene all'intorno U ottengo che $\underline{g(x) > M}$

es) $\lim_{x\to 0} \left(\log x + \operatorname{sen}\frac{1}{x}\right) = -\infty$ per il teorema del confronto

$$\underbrace{\log x + \operatorname{sen}\frac{1}{x}}_{\downarrow} \leq \underbrace{\log x + 1}_{\downarrow x\to x_0 \; -\infty}$$

$-\infty$ per il teorema del confronto

es) $\lim_{x\to +\infty} x + x^2(1+\cos x) = +\infty$ per il teorema del confronto

$$\underbrace{x + x^2(1+\cos x)}_{\downarrow} \geq \underbrace{x}_{\downarrow +\infty}$$ perché $x^2(1+\cos x) \geq 0$ per $x \to +\infty$

$+\infty$ per il teorema del confronto

invece $\lim_{x\to +\infty} x + x^2\left(\frac{1}{2}+\cos x\right)$ non è risolvibile con questo metodo perché il termine $x^2\left(\frac{1}{2}+\cos x\right)$ non è sempre ≥ 0

Questo limite non esiste:

per dimostrarlo prendo due restrizioni in modo da ottenere due risultati diversi:

$Y_1 = \{x \in \mathbb{R},\ x = 2k\pi,\ k \in \mathbb{N}\}$ $\cos x = 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{3}{2}$

$Y_2 = \{x \in \mathbb{R},\ x = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{N}\}$ $\cos x = -1 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}-1\right) = -\frac{1}{2}$

$\lim_{x\to +\infty} f|_{Y_1}(x) = x + x^2 \cdot \frac{3}{2} = +\infty$

limiti $\neq$

$\lim_{x\to +\infty} f|_{Y_2}(x) = x - \frac{1}{2}x^2 = -\infty$

es) Se $f(x) \leq g(x)$ e supponiamo che $\lim_{x\to x_0} g(x) = l \in \mathbb{R}$ è possibile dedurre qualche informazione sul limite di $f(x)$ per $x \to x_0$?

NO per esempio $f(x) = \operatorname{sen} x$

$g(x) = 1$ $x_0 = +\infty$

es) $f, g : X \to \mathbb{R}$, x_0 punto di accumulazione

supponiamo che $\lim_{x\to x_0} f(x) = 1$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$

supponiamo che $g(x) \neq 0$ per $x \neq x_0$

$\Rightarrow \lim_{x\to x_0} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = +\infty$

es) $\lim_{x\to 0} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)$

$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$, $g(y) = \operatorname{arctg} y$

$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \Rightarrow$ vale la condizione ① del teorema

$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right) = \lim_{y\to 1} \operatorname{arctg}(y) = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$

PONGO $y = \frac{\operatorname{sen} x}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$

es) $\lim_{x\to 0} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{|x|}\right)$

$f(x) = \frac{1}{|x|}$ $\quad g(y) = \operatorname{arctg}(y)$

$\frac{1}{|x|} \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty = \ell$ $\qquad \ell \notin \mathbb{R} \Rightarrow$ non è verificata la condizione ①

poiché $\lim_{y\to +\infty} \operatorname{arctg}(y) = \frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow$ è verificata la condizione ②

quindi $\lim_{x\to 0} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{|x|}\right) = \lim_{y\to +\infty} \operatorname{arctg}(y) = \frac{\pi}{2}$

CONSEGUENZA: composizione di funzioni continue è continua

se f è continua in x_0
se g è continua in $f(x_0)$
} vale la condizione ①

$\Rightarrow g \circ f$ è CONTINUA in x_0

$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = \lim_{y\to \ell} g(y)$

$\to$ se g è continua possiamo "scambiare l'ordine"

$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = g\left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)$

es) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2 = \left(\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2$

es) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$

$\frac{1-\cos x}{x^2} \cdot \frac{1+\cos x}{1+\cos x} = \frac{\overbrace{1-\cos^2 x}^{\operatorname{sen}^2 x}}{x^2(1+\cos x)} = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\cos x} =$

$= \left(\underset{\downarrow\, 1}{\frac{\operatorname{sen} x}{x}}\right)^2 \cdot \underset{\downarrow\, \frac{1}{2}}{\frac{1}{1+\cos x}} = \frac{1}{2}$ per $x \to 0$

LIMITE DI SUCCESSIONI

Una SUCCESSIONE è una funzione che ha per dominio $\mathbb{N}$ oppure $\{n \in \mathbb{N} : n \geq n_0\}$, con $n_0 \in \mathbb{N}$

SUCCESSIONE $\rightarrow$ ~~f(n)~~, a_n

esempi

1) $a_n = n^2$ successione "che viene da una funzione" (x^2 definita su $\mathbb{R}$)

2) $a_n = (-1)^n$ $= 1$ se n è pari; $= -1$ se n è dispari

3) $a_n = n!$

$a_0 = 1,\ a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 6, \dots$

4) SUCCESSIONE RICORSIVA: il valore n-esimo non è esplicito ma dipende dai valori precedenti

ex. $\rightarrow$ successione di Fibonacci: $\begin{cases} a_0 = 1, & a_1 = 1 \\ a_{n+2} = a_n + a_{n+1} \end{cases}$

$a_2 = a_0 + a_1 = 2$

$a_3 = a_1 + a_2 = 3$

$\dots$

$+\infty$ è l'UNICO punto di accumulazione per il dominio di una successione. Quindi per le successioni si studia solo il limite a $+\infty$

$\lim_{n \to +\infty} a_n$
- $\exists$ finito $\rightarrow$ successione CONVERGENTE
- $\exists$ infinito $\rightarrow$ successione DIVERGENTE
- non esiste $\rightarrow$ successione OSCILLANTE

es) $a_n = \cos(n\pi) = (-1)^n \Rightarrow$ successione OSCILLANTE

Si definiscono due successioni a_n e b_n DEFINITIVAMENTE UGUALI se $\exists\ K \in \mathbb{N} : a_n = b_n \ \forall n \geq K$

es) $a_n = n^2 - 6n + 5$

$b_n = |n^2 - 6n + 5|$

a_n e b_n vengono dalle funzioni $x^2 - 6x + 5$ e $|x^2 - 6x + 5|$

Composizione di una successione con una funzione

suppongo $g: A \to \mathbb{R}$ funzione, a_n successione
suppongo $g(a_n)$ sia ben definita
$a_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ $\quad n \longmapsto a_n$

dominio di g

Perché a_n sia ben definita $a_n \in A \quad \forall n$
Supponiamo che $a_n \to \ell$ e che valga una delle seguenti condizioni:

a) $\ell \in \mathbb{R}$ e g continua in ℓ
b) esiste il $\lim_{y \to \ell} g(y)$ e $a_n \neq \ell \quad \forall n$

allora esiste il limite di $g(a_n)$ e vale:

$$\lim_{n \to +\infty} g(a_n) = \lim_{y \to \ell} g(y)$$

$y = a_n$, posso fare il CAMBIO di VARIABILE

In particolare se g è continua:

$$\lim_{n \to +\infty} g(a_n) = g\left(\lim_{n \to +\infty} a_n\right)$$

$\Rightarrow$ Se la successione a_n viene da una funzione, cioè $a_n = f(n)$ e $f(x)$ è ben definita con $x \in \mathbb{R}$ allora:

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{x \to +\infty} f(x)$$

es) $\lim_{n \to \infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{x \to \infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$
$n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ $\quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

es) $a_n = \operatorname{sen}(\pi n!)$

$a_0 = \operatorname{sen} \pi = 0$
$a_1 = \operatorname{sen} \pi = 0$
$a_2 = \operatorname{sen} 2\pi = 0$
$a_3 = \operatorname{sen} 6\pi = 0$

$\Rightarrow$ Questa successione è CONVERGENTE (è costantemente uguale a 0) dimostrazione: caso a_n successione crescente

$$\sup_n (a_n) < \begin{cases} \ell \in \mathbb{R} \\ +\infty \text{ illimitata superiormente} \end{cases}$$

•) caso 1 : $\sup_n (a_n) = \ell \in \mathbb{R}$

Tesi : $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$

- fisso $\varepsilon > 0$, $\ell = \sup(a_n) \Rightarrow \ell - \varepsilon$ non è un maggiorante di a_n

$\exists \bar{n} : a_{\bar{n}} > \ell - \varepsilon$

$a_{\bar{n}+1} \geq a_{\bar{n}} > \ell - \varepsilon \ \dots \ a_k > \ell - \varepsilon$ per $\forall k > \bar{n}$

- abbiamo ottenuto che :

data $\varepsilon > 0$ $\exists \bar{n} \in \mathbb{N}$: se $n > \bar{n}$ allora $a_n > \ell - \varepsilon$

$\rightarrow$ è rispettata la definizione di limite :

$\lim_{n\to\infty} a_n = \ell \overset{def.}{\iff} \forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : n > \bar{n} \Rightarrow |a_n - \ell| < \varepsilon$

$\ell - \varepsilon \overset{①}{<} a_n \overset{②}{<} \ell + \varepsilon$

① $a_n > \ell - \varepsilon$ $\rightarrow$ ottenuto che è vero dal punto precedente

② $a_n < \ell + \varepsilon$ sicuramente perché abbiamo caratterizzato ℓ come il sup. di a_n

•) caso 2 $\sup_n (a_n) = +\infty$

Tesi : $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$

$\overset{def.}{\iff} \forall M$ devo trovare un $\bar{n}$: se $n > \bar{n}$ allora $a_n > M$

- fisso M, poiché il $\sup(a_n) = +\infty$ allora M non è un maggiorante di a_n, quindi esiste $\bar{n}$: $a_{\bar{n}} > M$

- se a_n è una successione crescente :

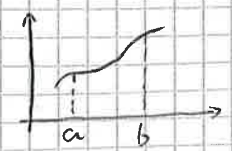
$\Rightarrow a_n > M$, $\forall n \geq \bar{n}$

• Il teorema si applica anche alle successioni definitivamente monotone

! Questo risultato si applica anche alle funzioni "limite di funzioni monotone", per esempio :

f crescente, $f : (a,b) \to \mathbb{R}$

$\lim_{x\to b} f(x) = \sup_{x\in(a,b)} (f(x))$



es) $a_n = \frac{n^n}{n!}$ $\qquad b_n = \frac{n!}{2^n}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)\cdot n!} : \frac{n^n}{n!} = \frac{(n+1)^n \cancel{(n+1)}}{\cancel{(n+1)}\cancel{n!}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{n^n} = \frac{(n+1)^n}{n^n} \ ?$$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(n+1)!}{2^{n+1}} : \frac{n!}{2^n} = \frac{\cancel{n!}(n+1)}{\cancel{2^n}\cdot 2} \cdot \frac{\cancel{2^n}}{\cancel{n!}} = \frac{n+1}{2} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$$

b_n diverge a $+\infty$

SOTTOSUCCESSIONE

K_n successione strettamente crescente di naturali, $K_n \in \mathbb{N}$
b_n SOTTOSUCCESSIONE di a_n se:

$$b_n \overset{def.}{=} a_{K_n}$$

es) $a_n = \frac{1}{n}$, definisco $b_n = a_{2n}$

$b_1 = a_2 = \frac{1}{2}$, $\quad b_2 = a_4 = \frac{1}{4}$, $\quad b_3 = a_6 = \frac{1}{6}$

Teorema:
Se a_n ha limite l
Allora ogni sottosuccessione di a_n ha lo stesso limite l
Questo teorema si usa per provare che una successione non ha limite.

es) $a_n = n \operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{2}\right)$

$$b_n \overset{def.}{=} a_{2n} = 2n \operatorname{sen}\left(\cancel{2}n\frac{\pi}{\cancel{2}}\right) = 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

$$c_n \overset{def.}{=} a_{4n+1} = (4n+1)\operatorname{sen}\left((4n+1)\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= (4n+1)\operatorname{sen}\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 4n+1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} b_n \neq \lim\limits_{n\to+\infty} c_n \implies a_n$ non ha limite

$$d_n - c_n = \frac{d-c}{2^n}$$
$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$
$$l_1 - l_2 = 0 \implies l_1 = l_2$$

$$c_n \le b_n \le d_n \quad \text{teorema del confronto}$$
$$\downarrow \qquad\quad \downarrow \qquad \downarrow$$
$$l_1 \qquad\quad l_1 \implies b_n \to l_1$$

SIMBOLI DI LANDAU

Si usano per confrontare il comportamento di due funzioni in un intorno (bucato) di un punto x_0 che sia di accumulazione per il dominio di entrambe.

- $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ si dice che le due funzioni hanno lo STESSO ORDINE

$f \asymp g$ per $x \to x_0$

- in particolare $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ si dice che f e g sono EQUIVALENTI

$f \sim g$ per $x \to x_0$

- $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ si dice che f è un o PICCOLO di g

$f = o(g)$ per $x \to x_0$

In questo caso si può dire che f è TRASCURABILE rispetto a g

- se $\exists K > 0 : \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| < K$ in un intorno bucato di x_0, f si dice O GRANDE di g

$f = O(g)$ per $x \to x_0$

$\Rightarrow$ Due funzioni si dicono CONFRONTABILI per $x \to x_0$ se esiste il limite per $x \to x_0$ di $\frac{f(x)}{g(x)}$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in \overline{\mathbb{R}}$$

altrimenti f e g si dicono NON CONFRONTABILI

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 67 di 130

es) $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ $\quad (1-\cos x) \asymp x^2$ per $x \to 0$

posso anche dire che $(1-\cos x) \sim \frac{1}{2} x^2$ per $x \to 0$

•) $f = o(1)$ per $x \to x_0$

$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{1} = 0 \Rightarrow f$ è INFINITESIMA

•) supponiamo $f \sim g$ per $x \to x_0$

$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \iff \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} - 1 \right) = 0$

$\iff \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - g(x)}{g(x)} \right) = 0 \Rightarrow f - g = o(g)$ se $f \sim g$

$\iff f = g + o(g)$ per $x \to x_0$

In generale: $f \asymp g \Rightarrow f \sim \ell g \Rightarrow f = \ell g + \underbrace{o(g\ell)}_{= o(g)}$

es) •) $(\sim)$ è RIFLESSIVA? SÌ

$f \sim f \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{f(x)} = 1$ VERO

•) è simmetrica? ovvero, se $f \sim g$ per $x \to x_0$, $g \sim f$ per $x \to x_0$? VERO

supponiamo $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

per l'algebra dei limiti $\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 1 \Rightarrow g \sim f \quad x \to x_0$

•) è transitiva? se $f \sim g$ e $g \sim h$ per $x \to x_0$, $f \sim h$? SÌ

$\frac{f(x)}{h(x)} \cdot \frac{g(x)}{g(x)} = \underbrace{\frac{f(x)}{g(x)}}_{\to 1 \text{ perché } f \sim g} \cdot \underbrace{\frac{g(x)}{h(x)}}_{\to 1 \text{ perché } g \sim h} = 1 \Rightarrow f \sim h$

es) •) $\boxed{o}$ è riflessiva? NO

$f = o(f)$ FALSO

•) è simmetrica? NO

$f = o(g) \overset{?}{\Rightarrow} g = o(f)$ FALSO

LIMITI NOTEVOLI CON I SIMBOLI DI LANDAU

- $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \iff \operatorname{sen} x = x + o(x) \qquad x \to 0$
- $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \iff 1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2 \iff 1-\cos x = \frac{1}{2}x^2 + o\left(\frac{1}{2}x^2\right)$

per le proprietà degli o piccolo $1-\cos x = \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$

$\iff \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \qquad x \to 0$

- $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1 \iff \log(1+x) = x + o(x) \qquad x \to 0$
- $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \iff e^x - 1 = x + o(x) \iff e^x = 1 + x + o(x) \qquad x \to 0$
- $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha \iff (1+x)^\alpha - 1 = \alpha x + o(x)$

$\iff (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x) \qquad x \to 0$

∇ Vale la sostituzione

$\operatorname{sen}(x^2)$ so che $\operatorname{sen} x = x + o(x) \qquad x \to 0$

$\operatorname{sen}(x^2) = x^2 + o(x^2)$ per $x \to 0$

$x^2 = t \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \qquad \operatorname{sen} t = t + o(t)$

es) $x \operatorname{sen}(x^2) = x\left(x^2 + o(x^2)\right) = x^3 + x\,o(x^2)$

$x \operatorname{sen}(x^2) = x^3 + o(x^3) \qquad x \to 0$

Principio di eliminazione dei termini trascurabili

Se $f_2 = o(f_1)$ e $g_2 = o(g_1)$ per $x \to x_0$

① $\lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x) + f_2(x)}{g_1(x) + g_2(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x) + o(f_1)}{g_1(x) + o(g_1)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$

② $\lim_{x\to x_0} \left(f_1(x) + f_2(x)\right)\left(g_1(x) + g_2(x)\right) = \lim_{x\to x_0} f_1(x) \cdot g_1(x)$

dimostrazione ①

0 per ipotesi iniziale

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f_1 + f_2}{g_1 + g_2} = \lim_{x\to x_0} \frac{f_1\left(1 + \frac{f_2}{f_1}\right)}{g_1\left(1 + \frac{g_2}{g_1}\right)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f_1}{g_1} \cdot 1$$

0 per ipotesi iniziale

$$\frac{3x+6}{2x} + o\left(\frac{3x+6}{x}\right) \overset{?}{=} o(x) \qquad \text{Pongo } g = o\left(\frac{3x+6}{x}\right)$$

tesi: $\left(\frac{3x+6}{2x} + g\right) \cdot \frac{1}{x} \xrightarrow{?} 0$ per $x \to +\infty$

$$\frac{3x+6}{2x^2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \qquad \text{VERO}$$

$$\frac{g}{x} = \frac{g}{\frac{3x+6}{x}} \cdot \frac{3x+6}{x} \cdot \frac{1}{x} = 0$$

$\frac{g}{\frac{3x+6}{x}} \to 0$ per ipotesi iniziale; $\frac{3x+6}{x}\cdot\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{3x+6}{x} + o\left(\frac{3x+6}{x}\right) = o(x)$$

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+3x+6} - x = \lim_{x\to+\infty} x + o(x) - x$$

∇ In questo caso non posso trascurare l' $o(x)$ perché non si tratta di una divisione o di una moltiplicazione.

$$\lim_{x\to+\infty} (x + o(x) - x) \neq \lim_{x\to+\infty} (x - x) = 0$$

NO!

In una somma o differenza NON si può MAI trascurare gli o piccolo.

È quindi inutile utilizzare i simboli di Landau per risolvere questo limite e devo usare un'altra tecnica

$$\sqrt{x^2+3x+6} - x \cdot \frac{\sqrt{x^2+3x+6}+x}{\sqrt{x^2+3x+6}+x} = \frac{\cancel{x^2}+3x+6-\cancel{x^2}}{\underbrace{\sqrt{x^2+3x+6}}_{x+o(x)}+x} = \frac{3x+6}{x+o(x)+x} = \frac{3}{2}$$

es) $f(x) = \operatorname{sen} x^2$ $\qquad \varphi(x) = x$

determinare ORDINE e PARTE PRINCIPALE di $\operatorname{sen} x^2$ rispetto a $\varphi(x) = x$ per $x \to 0$

$\operatorname{sen} x^2 = \boxed{x^2} + o(x^2) \qquad x \to 0$

→ ORDINE = 2

→ PARTE PRINCIPALE = x^2

perché ho già scritto la funzione $f(x)$ nella formula:

$$f(x) = \ell\, \varphi(x)^\alpha + o\left(\varphi(x)^\alpha\right)$$

es) $\operatorname{sen}(\sqrt{x} + x) \qquad x \to 0$

ordine e parte principale rispetto alla funzione $\varphi(x) = x$

$\operatorname{sen} t = t + o(t) \qquad t \to 0$

PONGO $t = \sqrt{x} + x \qquad t \to 0$ per $x \to 0$

$\operatorname{sen}(\sqrt{x} + x) = \sqrt{x} + x + o(\sqrt{x} + x) \qquad x \to 0$

→ OBBIETTIVO è scrivere $\operatorname{sen}(\sqrt{x} + x) = \ell x^\alpha + o(x^\alpha) \qquad x \to 0$

→ ORDINE (α)

→ PARTE PRINCIPALE (ℓx^α)

$\sqrt{x} = o(x) \quad x \to 0$? NO

$x = o(\sqrt{x}) \quad x \to 0$? $\quad \dfrac{x}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x \to 0]{} 0 \quad$ SÌ

$\Rightarrow \operatorname{sen}(\sqrt{x} + x) = \sqrt{x} + o(\sqrt{x}) + o(\sqrt{x} + x)$

$o(x + \sqrt{x}) = o(\sqrt{x})$? così otterrei solo più $o(\sqrt{x})$

$\dfrac{o(\sqrt{x} + x)}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$?

so che $\dfrac{o(\sqrt{x} + x)}{\sqrt{x} + x} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$

$\dfrac{o(\sqrt{x} + x)}{\sqrt{x}} \cdot \dfrac{\sqrt{x} + x}{\sqrt{x} + x} = \underbrace{\dfrac{o(\sqrt{x} + x)}{\sqrt{x} + x}}_{0} \cdot \dfrac{\sqrt{x} + x}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 0 \qquad$ VERO

$\Rightarrow \operatorname{sen}(\sqrt{x} + x) = \sqrt{x} + o(\sqrt{x}) + o(\sqrt{x}) = \sqrt{x} + o(\sqrt{x}) \qquad x \to 0$

ordine $= \dfrac{1}{2}$, parte principale $= \sqrt{x}$

$\underset{0}{\nabla} - \frac{x^3}{2} = o(x)$ per $x \to 0$

quindi era giusto ottenere $\lim_{x\to 0} \frac{o(x)}{x^3}$, ma con il secondo metodo so che funzione è $o(x)$ e quindi la posso risolvere

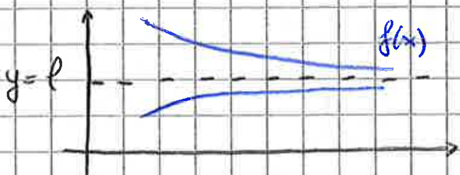
es) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - \log(1+x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x} + o(x) - \cancel{x} + o(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{o(x)}{x^2}$?

$\Rightarrow$ questo limite non si può risolvere con Landau

ASINTOTI

- Se $f = \ell + o(1)$ per $x \to +\infty$ con $\ell \in \mathbb{R}$

  $f - \ell = o(1) \iff f(x) - \ell \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \iff f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell$



allora la retta di equazione $y = \ell$ è un ASINTOTO ORIZZONTALE di f a $+\infty$ (discorso analogo per $-\infty$)

- Se $f(x) = ax + b + o(1)$ per $x \to +\infty$ con $a \neq 0$, a e $b \in \mathbb{R}$

allora la retta $y = ax + b$ si dice ASINTOTO OBLIQUO per f a $+\infty$ (discorso analogo per $-\infty$)

es) $f(x) = \log(e^{2x} - 1)$ calcolare l'eventuale asintoto destro $(x \to +\infty)$

- raccolgo e^{2x}

$\log e^{2x}(1 - e^{-2x}) = \log e^{2x} + \log(1 - e^{-2x}) = 2x + \underbrace{\log(1 - e^{-2x})}_{\to 0 \ (x\to+\infty)} = 2x + o(1)$

$\Rightarrow$ la retta $y = 2x$ è asintoto obliquo a $+\infty$

- ASINTOTO VERTICALE : $x_0 \in \mathbb{R}$

$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \pm\infty$ oppure $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \pm\infty$

$\Rightarrow$ la retta $x = x_0$ si dice asintoto VERTICALE

TEOREMA DI WEIERSTRASS

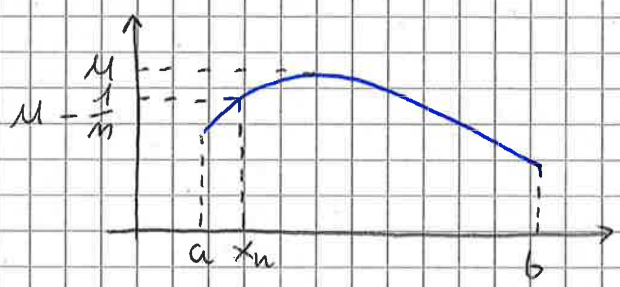
Una funzione continua su un intervallo CHIUSO e LIMITATO ammette massimo e minimo.

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua

$\Rightarrow \exists \; m = \min\limits_{x \in [a,b]} f(x) \quad , \quad M = \max\limits_{x \in [a,b]} f(x)$

dimostrazione: proviamo che f ammette massimo

- definiamo $M \overset{def}{=} \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x)$, supponiamo $M \in \mathbb{R}$



$f(x) \leq M$

$\exists x$ tale che $f(x) \geq M - \frac{1}{n}$

definisco $x_n = \inf \left\{ x \in [a,b] : f(x) \geq M - \frac{1}{n} \right\}$

$f(x_{n+1}) \geq M - \frac{1}{n+1} \geq M - \frac{1}{n} \Rightarrow \underline{x_{n+1} \geq x_n}$

$\Rightarrow x_n$ è una successione monotona crescente e superiormente limitata da b

$\Rightarrow \exists \ell \in \mathbb{R} : x_n \to \ell$ con $\ell \in [a,b]$

$\underbrace{f(x_n)}_{\downarrow n \to +\infty} \geq \underbrace{M - \frac{1}{n}}_{\downarrow M \text{ per } n \to +\infty}$

$f(\ell)$ perché f è continua quindi se $x_n \to \ell \Rightarrow \underline{f(x_n) \to f(\ell)}$

$\Rightarrow f(\ell) \geq M \Rightarrow f(\ell) = M = \sup f(x)$

$\Rightarrow M = \max\limits_{x \in [a,b]} f(x)$

∇ se $M = \sup f(x) = +\infty \Rightarrow f(x_n) \geq n$, $f(\ell) \geq +\infty$ non ha senso che un valore $f(\ell)$ sia maggiore di $+\infty$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 79 di 130

→ dopo n passi $f(a_n) < 0$, $f(b_n) > 0$

$a_n \to l_1$

$b_n \to l_2$

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$$

$$l_2 - l_1 = 0 \Rightarrow l_1 = l_2 = l$$

f continua: $f(a_n) \to l$ visto che $f(a_n) < 0 \Rightarrow f(l) \leq 0$

$f(b_n) \to l$ visto che $f(b_n) > 0 \Rightarrow f(l) \geq 0$

$0 \leq f(l) \leq 0 \Rightarrow f(l) = 0$ con $l \in [a, b]$

! Tutte le ipotesi sono necessarie:

↳ se trascuro un'ipotesi, posso trovare una f che soddisfa le altre ma non ha valori di x per cui si annulla

Conseguenze del teorema degli zeri

→ f continua su un intervallo I (limitato e illimitato)

→ supponiamo che f ammette limiti (finiti e infiniti) di segno opposto per x che tende agli estremi dell'intervallo I

⇒ allora f ha almeno uno zero in I

•) i polinomi di grado dispari hanno almeno uno zero

es) $f(x) = x^7 + 3x^5 + 1$ f continua in $I = \mathbb{R}$

$$\left(\lim_{x \to +\infty} f(x)\right)\left(\lim_{x \to -\infty} f(x)\right) < 0$$

⇒ esiste almeno uno zero

Provo a restringere il campo ex:

$f(0) = 0^7 + 3 \cdot 0^5 + 1 = 1 > 0$

$f(-1) = -1^7 + 3(-1)^5 + 1 = -3 < 0$

$\Big\}$ ∃ almeno uno zero nell'intervallo $(-1; 0)$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 81 di 130

•) I limitato $\Rightarrow f(I)$ limitato <u>FALSO</u>

<u>es.</u> $f(x) = \operatorname{tg} x$ $\quad \underbrace{I = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)}_{\text{limitato}} \Rightarrow \underbrace{f(I) = \mathbb{R}}_{\text{illimitato}}$

•) I chiuso e limitato $\Rightarrow f$ chiuso e limitato <u>VERA</u>

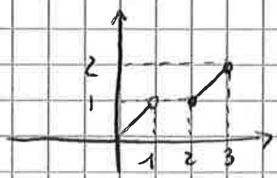
perché se f è continua in un intervallo chiuso e limitato

$\Rightarrow \exists$ min e max, per il teorema di Weierstrass

$f(I) = [\min f, \max f]$

<u>es.</u> Se f è continua su $A \subset \mathbb{R}$ e invertibile allora è vero che f^{-1} è continua? $\quad f(x) = y \quad f^{-1}(y) = x$

$\rightarrow$ in generale è <u>FALSO</u>



per esempio $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \le x < 1 \\ x-1 & \text{se } 2 \le x \le 3 \end{cases}$

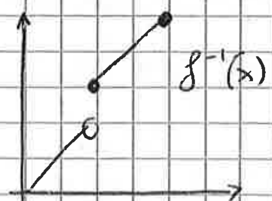
$A = [0, 1) \cup [2, 3] \longrightarrow f$ è continua su A

se $x \in [0, 1) \quad y = x \iff f^{-1}(y) = x \Rightarrow x = y$

se $x \in [2, 3] \quad y = x - 1 \iff x = y + 1$

f è invertibile

$f^{-1}(y) = \begin{cases} y & y \in [0, 1) \\ y+1 & y \in [1, 2] \end{cases}$



$\Rightarrow f^{-1}(x)$ non è continua in A perché non è continua nel punto 1

TEOREMA DELLA CONTINUITÀ DELLA FUNZIONE INVERSA

Data una funzione continua e invertibile su un intervallo I

$\Rightarrow$ la funzione inversa f^{-1} è continua su $f(I)$

$\Rightarrow \underline{f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)}$ per $x \to x_0$

$\hookrightarrow$ PRIMA FORMULA DELL'INCREMENTO FINITO

Se anziché considerare $y=f(x)$ considero la sua retta tangente nei dintorni di x_0 commetto un errore che vale $o(x-x_0)$ per $x \to x_0 \Rightarrow o(x-x_0) \to 0$ e quindi l'errore si assottiglia

$\underline{df(x_0)} = f'(x_0)(x-x_0)$ $\qquad$ f differenziale $= f$ derivabile

$\hookrightarrow$ DIFFERENZIALE di f in x_0

∇ Altro modo per scrivere il rapporto incrementale:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \Rightarrow \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

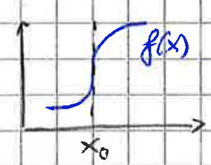
in questo modo studio la derivata in qualsiasi punto, e non solo in un punto x_0: $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

derivata DESTRA di f in x_0 $\qquad \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'_+(x_0)$

derivata SINISTRA di f in x_0 $\qquad \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'_-(x_0)$

PUNTI DI NON DERIVABILITÀ

•) x_0 è un punto di non derivabilità a TANGENTE VERTICALE se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ esiste infinito



•) se il limite destro e il limite sinistro esistono finiti ma sono diversi (cioè $f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0)$) allora x_0 è un punto di non derivabilità detto PUNTO ANGOLOSO

TEOREMA

f derivabile in $x_0 \Rightarrow f$ continua in x_0

dimostrazione: tesi $\rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

- 1° MODO: so che f è derivabile in x_0

$\Rightarrow f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$, $x \to x_0$ dalla definizione

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \Big(f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)(x - x_0)}_{\downarrow \, 0} + \underbrace{o(x - x_0)}_{\downarrow \, 0} \Big) = f(x_0)$$

- 2° MODO

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \overset{?}{=} f(x_0) \Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0} \big(f(x) - f(x_0) \big) \overset{?}{=} 0$$

perché $f(x_0)$ è una costante quindi posso metterla nel limite

$\rightarrow$ faccio comparire il rapporto incrementale

$$\lim_{x \to x_0} \big(f(x) - f(x_0) \big) \frac{x - x_0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\downarrow \, f'(x_0)} \cdot \underbrace{(x - x_0)}_{\downarrow \, 0} \overset{?}{=} 0 \quad \text{VERO}$$

∇ derivabile $\Rightarrow$ continua

quindi se non è continua non è derivabile

I punti di derivabilità di f si studiano fra i punti di continuità e quindi prima di studiare la derivabilità bisogna verificare la continuità

REGOLE DI DERIVAZIONE

Se f e g sono derivabili in x_0:

- $f+g$ è derivabile in x_0 e $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
- cf è derivabile $\forall c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $(cf)' = c \cdot f'(x_0)$
- $f \cdot g$ è derivabile e $(f \cdot g)' = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$
- se $f(x_0) \neq 0$ $\frac{1}{f}$ è derivabile in x_0 e $\frac{1}{f'(x_0)} = -\frac{f'(x_0)}{f^2(x_0)}$
- se $g(x_0) \neq 0$ f/g è derivabile in x_0 e

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'(x_0)\, g(x_0) - f(x_0)\, g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

$\boxed{es}$ derivata di $\tan x$

$$(\tan x)' = \left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos(x)\cos(x) - \operatorname{sen} x(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

oppure $\frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$

•) derivata della funzione composta

$g \circ f$ è derivabile in x_0 e:

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

$$\frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)}{x - x_0} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{f(x) - f(x_0)} = \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \underbrace{\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)}}_{\text{rapp. incrementale } g'(f(x))} \cdot \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{f'(x)} \xrightarrow[x \to x_0]{} g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{df}{dx}$ $\quad y = f(x)$ $\quad w = g(y) = g(f(x))$

$$(g \circ f)' = g'(f) \cdot f' \qquad \frac{dw}{dx} = \frac{dw}{dy} \frac{dy}{dx}$$

REGOLA della CATENA

•) derivata della funzione inversa

se f è invertibile in un intorno di x_0 e derivabile con $f'(x_0) \neq 0$

Allora la funzione inversa f^{-1} è derivabile nel punto

$y_0 \overset{def}{=} f(x_0)$ e vale:

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

dimostrazione:

$f^{-1} \circ f$ = IDENTITÀ $\quad f^{-1}(f(x)) = x$

$\rightarrow$ derivo a destra e a sinistra: $\quad (f^{-1}(f(x)))' = x'$

$$(f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x) = 1 \Rightarrow \frac{(f^{-1})'(f(x_0)) \cdot \cancel{f'(x_0)}}{\cancel{f'(x_0)}} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

$$\Rightarrow (f^{-1})'(f(y_0)) = \frac{1}{f(x_0)}$$

•) Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile e PARI
$\Rightarrow$ $f'(x)$ sarà una funzione DISPARI

dimostrazione

$f(-x) = f(x)$ $\qquad$ $\underbrace{D[f(-x)]}_{\text{funzione composta}} = D[f(x)]$

$f'(-x) \cdot (-1) = f'(x) \iff -f'(-x) = f'(x) \Rightarrow f'$ DISPARI

$\forall$ $f'(0) = ?$

$-f'(0) = f'(0) \Rightarrow -2f'(0) = 0$ $\qquad$ $f'(0) = 0$

•) Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, pari, derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

cosa può succedere in $x = 0$?

$\to$ se $f'_+(0) = 0 \Rightarrow f'_-(0) = 0 \Rightarrow f'(0) = 0$

perché f' è DISPARI $\qquad \Rightarrow f$ è derivabile in $\emptyset$

$\to$ se $f'_+(0) \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow f'_-(0) = -f'_+(0)$

$\Rightarrow x = 0$ punto ANGOLOSO

$\to$ se $\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty \Rightarrow \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\infty$

$\Rightarrow x = 0$ CUSPIDE

MONOTONIA e SEGNO DELLA DERIVATA

$f: (a, b) \to \mathbb{R}$ derivabile

Allora:

a) se f è crescente in $(a, b) \Rightarrow f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b)$

b) se f è decrescente in $(a, b) \Rightarrow f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in (a, b)$

dimostrazione caso a:

TESI $f'(x) \geq 0 \quad \forall x$, f crescente

$\to$ prendiamo un punto $x_0 \in (a, b)$ e studiamo il segno del

→ abbiamo ottenuto che $0 \le f'(x_0) \le 0$

$\Rightarrow \underline{f'(x_0) = 0}$

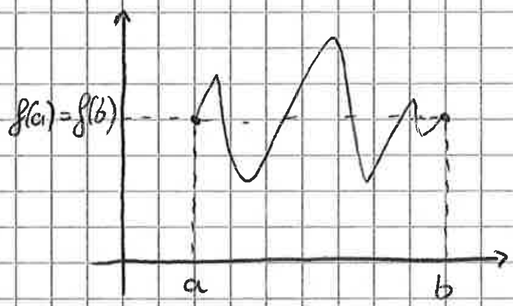
◦ Procedimento per determinare i punti di estremo di f continua su $[a,b]$

→ studio $f'(x) = 0$ (nei punti di derivabilità di f) e calcolo f nei punti critici

→ se ci sono punti di non derivabilità, calcolo la funzione in quei punti

→ calcolo f negli estremi a e b

TEOREMA DI ROLLE



→ f definita su un intervallo chiuso e limitato $[a,b]$

→ f continua su $[a,b]$

→ f derivabile in (a,b)

→ $f(a) = f(b)$

Allora $\exists x_0 \in (a,b) : f'(x_0) = 0$

cioè f ha almeno un PUNTO CRITICO

dimostrazione

→ f continua su $[a,b]$ $\Rightarrow$ per il teorema di Weierstrass f ammette massimo M e minimo m assoluti

$f(x_M) = M \quad , \quad f(x_m) = m$

•) se $x_M, x_m \in \{a,b\} \Rightarrow m = M = f(a) = f(b)$

$\Rightarrow f$ è COSTANTE e $f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a,b)$

•) almeno uno tra x_M e $x_m \in (a,b)$: visto che f è derivabile in (a,b) $\Longleftrightarrow f'(x_M) = 0$

per il teorema di Fermat

2) g continua in $[a,b]$ VERO

3) g derivabile in (a,b) VERO

4) $g(a) = \cancel{f(a)} - \cancel{f(a)} - \frac{f(b)-f(a)}{\cancel{b-a}}(\cancel{a-a}) = 0$

$g(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{(\cancel{b-a})}(\cancel{b-a}) = 0$

$\Big\} \; g(a) = g(b)$ VERO

$\Rightarrow$ possiamo applicare il teorema di Rolle

$\exists x_0 \in (a,b) : g'(x_0) = 0$

$\rightarrow$ osserviamo che:

$$g'(x) = f'(x) - \left(0 + \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot 1\right) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$\Rightarrow$ c'è almeno un punto in cui si risolve questa equazione

Seconda formula dell'incremento finito

Sia f derivabile in un intervallo I e siano a e b due punti dell'intervallo

$\rightarrow$ per il teorema di Lagrange $\exists$ almeno una soluzione $x_0 \in (a,b)$ dell'equazione $f'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$\Leftrightarrow \; f(b) - f(a) = f'(x_0)(b-a)$ SECONDA FORMULA DELL'INCREMENTO FINITO

Se fisso $a \in I$ $\exists x_0$ compreso tra x e a tale che:

$$\boxed{f(x) = f(a) + f'(x_0)(b-a)}$$

$\Rightarrow$ questo significa che posso uguagliare una funzione ad una retta che passa per $(a, f(a))$ e con coefficiente angolare $f'(x_0)$

CONSEGUENZA $\rightarrow$ se f è continua in un intervallo I e derivabile almeno nei punti interni Allora:

$f(x) = $ costante $\forall x \in I \Leftrightarrow f'(x) = 0 \quad \forall x \in \mathring{I}$ — punti interni dell'intervallo

TEOREMA DI L'HÔPITAL

→ x_0 punto di accumulazione per dom f e dom g

→ f, g derivabili in un intorno bucato di x_0

→ f, g entrambe infinite o infinitesime per $x \to x_0$

→ $g'(x) \neq 0$ nell'intorno bucato di x_0

→ $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$

Allora $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$

! Valgono opportune variazioni per i limiti da destra e da sinistra

es) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\log(1+x)}{\log(x^2+3)}$ $\quad f, g$ funzioni infinite

$f(x) = \log(1+x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x}$

$g(x) = \log(x^2+3) \Rightarrow g'(x) = \frac{2x}{x^2+3}$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\frac{1}{1+x}}{\frac{2x}{x^2+3}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+3}{2x^2+2x} = \frac{1}{2}$$

$$\overset{H}{\Longrightarrow} \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{1}{2}$$

caso forma indeterminata "$0 \cdot \infty$"

es) $\lim_{x \to 0} x \log x$

! Devo SEMPRE ricondurmi alle forme $\frac{0}{0}$ o $\frac{+\infty}{+\infty}$

$$x \log x \quad \begin{cases} \dfrac{x}{\frac{1}{\log x}} = \dfrac{0}{0} \\[2ex] \dfrac{\log x}{\frac{1}{x}} = \dfrac{+\infty}{+\infty} \end{cases}$$

*) caso $\frac{0}{0}$: $\frac{x}{\frac{1}{\log x}}$

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{1}{-\frac{1}{(\log x)^2} \cdot \frac{1}{x}} = -\frac{x}{\frac{1}{(\log x)^2}}$$