NUMERO: **2480A** ANNO: 2020

A P P U N T I

STUDENTE: Pieretto Letizia

MATERIA: Statistica - Prof. Vicario

STATISTICA

quad. 1

SCATTO
ENERGIA CREATIVA

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 172

$$\boxed{P[E] = \lim_{N \to \infty} f_E}$$

• **definizione soggettiva**

La probabilità di un evento E, secondo l'opinione di un individuo coerente, è il prezzo p che egli stima equo attribuire all'importo unitario e si ottiene solo al verificarsi di E

L'individuo deve essere coerente, non deve cambiare opinione se le condizioni al contorno non sono cambiate, deve mantenere il grado di fiducia

$0 <$ g° di fiducia < 1

• **definizione assiomatica**

viene identificato un evento con un insieme

S = spazio campione, insieme di tutti i possibili risultati di un esperimento casuale (S non è un vuoto) ed è l'**evento certo**

es. lancio di una moneta

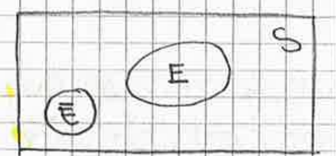
$S = \{T, C\}$

es. lancio di un dado

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

E = evento, sottoinsieme di S

$\bar{E}$ = complementare, quando non si verifica E, costituito da pt campione $\notin E$



A = spazio degli eventi, tutti gli eventi associati ad un esperimento

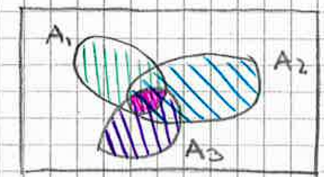
$A = \{S, E, \bar{E}, F, E \cup F, EF, \emptyset\}$

2) $\mathbb{P}[\emptyset] = 0$

3) qualunque siano gli eventi E, F
$\mathbb{P}[E \cup F] = \mathbb{P}[E] + \mathbb{P}[F] - \mathbb{P}[EF]$

- **regola dell'addizione**

dati 3 eventi



$$P[A_1 \cup A_2 \cup A_3] = \mathbb{P}[A_1] + \mathbb{P}[A_2] - P[A_1 A_2] + \mathbb{P}[A_3] - \mathbb{P}[A_1 A_3] - \mathbb{P}[A_2 A_3] + \mathbb{P}[A_1 A_2 A_3]$$

in generale => $\mathbb{P}$ evento singolo $-$ $\mathbb{P}$ pari $+$ $\mathbb{P}$ dispari

- **spazio campione finito con pt equiprobabili**

$$1 = \mathbb{P}[S] = \mathbb{P}\Big[\bigcup_{i=1}^{N} \{s_i\}\Big] \underset{\uparrow \text{ 3° assioma}}{=} \sum_{i=1}^{N} \mathbb{P}[\{s_i\}] = N\mathbb{P}[\{s_i\}]$$

da qui ottengo che

$$\mathbb{P}[\{s_i\}] = \frac{1}{N} = \frac{1}{\#S}$$

quindi per un generico evento $A \subseteq S$

$$\boxed{\mathbb{P}[A] = \frac{\#A}{\#S}}$$

es. (1.17)

lancio di due dadi in contemporanea

$S = \{(i_1, i_2) : i_1, i_2 = 1 \dots 6\}$ ha 36 elementi

? $P[A_7]$ (somma = 7)

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 7 di 172

se non avessi gli elementi ordinati

$$\#A_k = \underbrace{\binom{n}{k}}_{\text{per rimescolare}} K^k \,(M-K)^{n-k}$$

$$\boxed{\mathbb{P}[A_k] = \frac{\#A_k}{\#S} \quad \frac{\binom{n}{k} K^k (M-K)^{n-k}}{M^n}}$$ con reimmissione

2) senza reimmissione

$$(\underbrace{z_1, \dots z_k}_{\text{solo difettosi}}, \underbrace{z_{k+1}, \dots z_n}_{\text{solo corretti}})$$

$K \times \dots \times K-(k-1) \times (M-K) \dots (M-K-(n-k-1))$

$$\boxed{\mathbb{P}[A_k] = \frac{\binom{K}{k}\binom{M-K}{n-k}}{\binom{M}{n}}}$$ senza reimmissione

- spazio campione finito con pt non equiprobabili

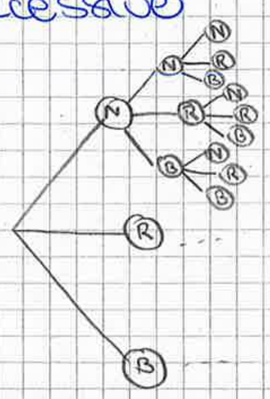
devo trovare la probabilità di ogni pt

$p_j = \mathbb{P}[\{s_j\}]$ $\quad j = 1 \dots N$ e $1 = \sum_{j=1}^{N} p_j$

$\boxed{\mathbb{P}[A] = \sum p_j}$ $\quad \forall A \subseteq S$

- diagramma ad albero

estrazione di 3 palline bianche, rosse, nere in fasi successive



definizione

dato lo spazio di probabilità $(S, A, P[\cdot])$ si defini-
sce probabilità condizionata dell'evento A condizio-
natamente al fatto che si verifichi l'evento B
(con A e B eventi qualunque)

$$\boxed{P[A|B] = \frac{P[AB]}{P[B]}} \qquad P[B] \neq 0$$

e

$$\boxed{P[B|A] = \frac{P[AB]}{P[A]}}$$

es.

lancio di due dadi

$S = \{(1,1) \dots (6,6)\}$

? P $n>8$ condiz. al verificarsi di almeno un 6

$A = n>8 \rightarrow 10$ elementi

$B =$ almeno un 6 $\rightarrow 11$ elementi

$$P[A|B] = \frac{7}{11}$$

3° assioma

2 eventi A_1 e A_2 e $A_1 \cap A_2 \neq 0$

$$\boxed{P[A_1 \cup A_2 | B] = P[A_1|B] \cup P[A_2|B]}$$

• teorema probabilità totali

siano $B_1, B_2 \dots B_n$ eventi incompatibili e $S = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$
l'unione degli eventi e $P[B_i] \neq 0$

$$\boxed{P[A] = \sum_{i=1}^{n} P[A|B_i]\, P[B_i]}$$

vale anche per $n \rightarrow \infty$

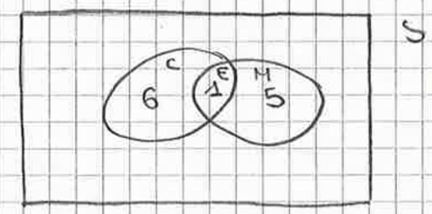
ESERCITAZIONE 1 eventi e probabilità

Esercizio 1.
Chiara e Marco acquistano insieme uno dei 50 biglietti di una pesca di beneficenza. Ci sono 50 premi in palio di cui 7 piacciono a Chiara e 5 piacciono a Marco, ma uno solo piace ad entrambi.
Si calcoli la probabilità con cui il premio piacerà:

a) a Chiara;
b) a Marco;
c) ad entrambi;
d) ad almeno uno dei due;
e) a nessuno dei due;
f) ad uno solo dei due.

(Risposta: a) 7/50 - b) 1/10 - c) 1/50 - d) 11/50 - e) 39/50 - f) 1/5)

C = piace a chiara = 7
M = piace a marco = 5
E = piace a entrambi = 1
$S = \{1 \dots 50\}$



a) $P[C] = 7/50$
b) $P[M] = 1/10$
c) $P[E] = 1/50$
d) $P[\text{almeno uno}] = 11/50$
e) $P[\text{nessuno dei due}] = 39/50$
f) $P[\text{ad uno solo}] = 1/5$

Esercizio 2.
In una città di provincia vengono venduti tre quotidiani di qui in poi denominati con A, B e C. Il quotidiano A è letto dal 20% della popolazione, il quotidiano B dal 16% e il quotidiano C dal 14%. Inoltre l'8% della popolazione legge entrambi i quotidiani A e B, il 5% legge entrambi i quotidiani A e C e il 4% legge entrambi i quotidiani B e C. Il 2% legge tutti e tre i quotidiani.
Calcolare:

a) la probabilità che una persona di quella città legga almeno un quotidiano;
b) la probabilità che una persona di quella città non legga alcun quotidiano;
c) la probabilità che una persona di quella città legga un solo quotidiano.

(Risposta: a) 0,35 – b) 0,65 – c) 0,22)

Esercizio 4.
Un gioco consiste nel lanciare contemporaneamente 3 dadi equilibrati ed annotare il punteggio minimo ottenuto con i tre lanci.
Determinare la probabilità che tale punteggio minimo:

a) sia uguale a 6
b) sia superiore a 1
c) Sia pari a 1.

(Risposta: a) 1/216 - b) 125/216 - c) 91/216)

$S = \{(i, j, k) : i = j = k = 1 \dots 6\} = 6^3 = 216$

A = punteggio min

a) $\mathbb{P}[A = 6] = 1/216$

b) $\mathbb{P}[A > 1] = \frac{5^3}{216} = \frac{125}{216}$ $\quad S = \{(i, j, k) : i = j = k = 2 \dots 6\}$

c) $\mathbb{P}[A = 1] = 1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216}$

ESEMPI

es. (1.24)

urna / Tutte bianche : B
urna \ metà bianche, metà nere : $\bar{B}$

$\mathbb{P}[B \mid \text{estraz. una bianca}]$?

$\mathbb{P}[B] = 1/2 \qquad \mathbb{P}[\bar{B}] = 1/2$

$$\mathbb{P}[B \mid \text{estraz. una bianca}] = \frac{\mathbb{P}[\text{estraz. una bianca} \mid B]\,\mathbb{P}[B]}{\mathbb{P}[\text{estr. bianca} \mid B]\,\mathbb{P}[B] + \mathbb{P}[\text{estr. bianca} \mid \bar{B}]\,\mathbb{P}[\bar{B}]}$$

$$= \frac{1 \cdot 1/2}{1 \cdot 1/2 + 1/2 \cdot 1/2} = 2/3$$

es. (1.28)

lancio di 2 dadi

$A = \{\text{somma n° pari}\}$

$B = \{\text{n° 6 primo dado}\}$

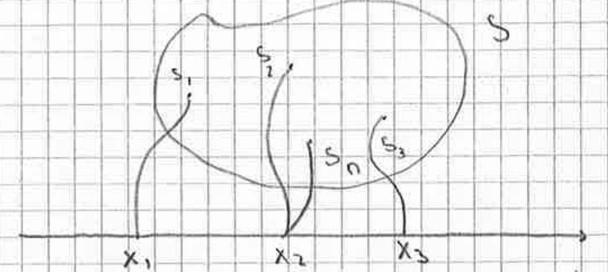
DISTRIBUZIONI

cap. 2

• variabile casuale

funzione che ha come dominio S e come codominio la retta reale

è una funzione non biunivoca



$X(s) : S \to \mathbb{R}$

argomento

es. (2.1)

lancio di una moneta

$S = \{T, C\}$

$X(s) = \begin{cases} 1 & s = T \\ 0 & s = C \end{cases}$

variabile casuale che conta il n° delle T

• funzione di densità discreta

vale negli spazi finiti e numerati

$f_X(x) = \begin{cases} P[X = x_j] & x = x_j \quad j = 1 \dots n \\ 0 & x \neq x_j \end{cases}$

↳ pt massa

es. (2.7)

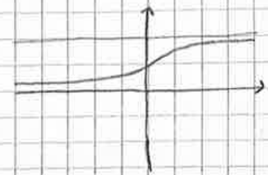
lancio di un dado

X, variabile casuale, indica il n° che esce

$S = \{1 \dots 6\}$

- proprietà

a) $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$



b) $F_X(x)$ monotona non decrescente

per $x_1 < x_2 \qquad F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$

c) $F_X(x)$ continua da destra

$\lim_{h \to 0^+} F_X(x+h) = F_X(x)$

- Teorema

lega $f_X(x)$ a $F_X(x)$

$$F_X(x) = \sum_{j:\, x_j \leq x} f_X(x_j)$$

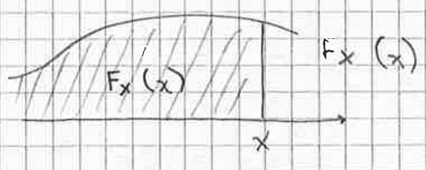
e quindi

$$f_X(x) = \begin{cases} F_X(x_j) - \lim_{h \to 0^+} F_X(x_j - h) & x = x_j \\ 0 & x \neq x_j \end{cases}$$

estensione → $\displaystyle\sum_{j:\, a < x_j \leq b} f_X(x_j) = F_X(b) - F_X(a) \qquad a < b$

- funzione di densità di probabilità

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\,du$$



proprietà

a) $f_X(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$

b) $f_X(x) \geq 0$

c) $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1$ perché $F_X(+\infty) = 1$

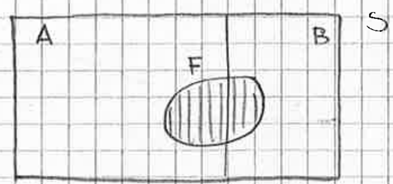
ESERCITAZIONE 2 condizionamento e indipendenza

Esercizio 1
Una fabbrica riceve da due fornitori dei regolatori di tensione nelle proporzioni 0.6 per il primo e 0.4 per il secondo. Si sa che il 95% dei regolatori forniti dal primo e l'80% di quelli forniti dal secondo funzionano secondo le prescrizioni. Scelto a caso un regolatore e supposto che non funzioni secondo le prescrizioni, calcolare la probabilità che provenga dal secondo fornitore.
(Risposta:0.727)

A = { proviene dal 1° }

B = { proviene dal 2° }

F = { funziona }



$\mathbb{P}[A] = 0{,}6$

$\mathbb{P}[B] = 0{,}4$

$\mathbb{P}[F|A] = 0{,}95$

$\mathbb{P}[F|B] = 0{,}80$

? $\mathbb{P}[B|\bar{F}]$

$$\mathbb{P}[F] = \mathbb{P}[F|A]\,\mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[F|B]\,\mathbb{P}[B] = 0{,}89$$

regola prob. totale di eventi incompat.

$$\mathbb{P}[B|\bar{F}] = \frac{\mathbb{P}[\bar{F}|B]\,\mathbb{P}[B]}{\mathbb{P}[\bar{F}]}$$

regola di Bayes

$$= \frac{[1 - \mathbb{P}[F|B]]\,\mathbb{P}[B]}{1 - \mathbb{P}[F]} = 0{,}727$$

$\boxed{\text{regola}}$

$\mathbb{P}[\bar{F}|B] = 1 - [F|B]$

ma

$\mathbb{P}[B|\bar{F}] \neq 1 - [B|\bar{F}]$

vale solo quando ho il complementare dell'evento che sto studiando non su quello che si è già verificato

Esercizio 4

Un prigioniero è rinchiuso in una cella con 3 porte, di qui in poi denominate con A, B e C. La porta A si apre su un corridoio che riconduce il prigioniero nella cella dopo due ore e mezza di cammino; la porta B conduce ad un altro corridoio che lo riconduce nella cella dopo quattro ore di cammino ed infine la porta C gli ridà la libertà immediatamente. Il prigioniero sceglie la porta da utilizzare lanciando due dadi omogenei in questo modo:

- se la somma dei numeri apparsi sulla facce superiori è al più uguale a 5 sceglie la porta A
- se la somma dei numeri è almeno uguale a 10 sceglie la porta B
- negli altri casi sceglie la porta C.

Se poi il prigioniero torna in cella, sceglie la porta tra le due non ancora provate in modo equiprobabile.

Qual è la probabilità che il prigioniero impieghi al più quattro ore per riacquistare la libertà?

(Risposta: 7/9)

$A_1 = \{A \text{ al } 1° \text{ giro}\}$

$A_2 = \{A \text{ al } 2° \text{ giro}\}$

$B_1, B_2 \ \dots \quad C_1, C_2 \dots$

$L = \{\text{libertà in al più 4 ore}\}$

$? \ \mathbb{P}[L]$

$L = C_1 \cup (A_1 \cap C_2) \cup (B_1 \cap C_2)$ siccome sono eventi incomp.

$$\mathbb{P}[L] = \mathbb{P}[C_1] + \mathbb{P}[A_1 C_2] + \mathbb{P}[B_1 C_2]$$

$$= \mathbb{P}[C_1] + \underbrace{\mathbb{P}[C_2 | A_1]}_{1/2}\mathbb{P}[A_1] + \underbrace{\mathbb{P}[C_2 | B_1]}_{1/2}\mathbb{P}[B_1]$$

al 2° giro sceglie le porte in modo equipr.

siccome

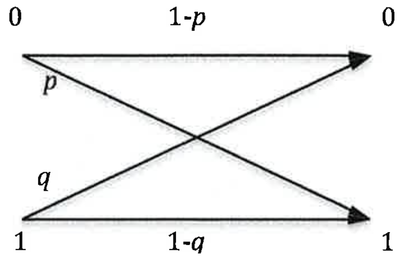
$\mathbb{P}[A] = 10/36$

$\mathbb{P}[B] = 1/6$

$\mathbb{P}[C] = \mathbb{P}[\bar{A}\bar{B}] = \mathbb{P}[\overline{(A \cup B)}] = \mathbb{P}[1 - (A \cup B)] = 20/36$

$\mathbb{P}[L] = 7/9$

Esercizio 5
Si consideri un canale di trasmissione binario, rappresentato nella figura sottostante.
Siano note le probabilità di transizione p=0.07 e q=0.05 e la probabilità che la sorgente trasmetta un 1, pari a 0.6.
a) Qual è la probabilità di errore del canale binario ?
Si supponga che trasmissioni successive siano indipendenti.
b) Con quale probabilità si effettuano 3 trasmissioni senza errore ?
c) Si effettua la seguente codifica : A=00, B=01, C=10, D=11. Con quale probabilità il canale commette errore, sapendo che trasmette la parola A ?
(Risposta: a) 0.058 - b) 0.8359 – c) 0.1351)



$T_0 = \{\text{trasmesso } x_0 = 0\}$

$T_1 = \{\text{trasmesso } x_1 = 1\}$

$R_0 = \{\text{ricevuto } y_0 = 0\}$

$R_1 = \{\text{ricevuto } y_1 = 1\}$

$\mathbb{P}[T_0] = P_0 = 0{,}6$

$\mathbb{P}[T_1] = P_1 = 0{,}4$

$E = \{\text{errore}\}$

$E = (T_0 \cap R_1) \cup (T_1 \cap R_0)$

$\mathbb{P}[E \mid T_0] = \mathbb{P}[R_1 \mid T_0] = p = 0{,}07$

$\mathbb{P}[E \mid T_1] = \mathbb{P}[R_0 \mid T_1] = q = 0{,}05$

a) ? $\mathbb{P}[E]$

$$\mathbb{P}[E] = \mathbb{P}[T_0 \cap R_1] + \mathbb{P}[T_1 \cap R_0]$$
$$= \mathbb{P}[R_1 \mid T_0]\,\mathbb{P}[T_0] + \mathbb{P}[R_0 \mid T_1]\,\mathbb{P}[T_1] = 0{,}058$$

b) $\mathbb{P}[\bar{E}_1 \cap \bar{E}_2 \cap \bar{E}_3] = \mathbb{P}[\bar{E}_1]\,\mathbb{P}[\bar{E}_2]\,\mathbb{P}[\bar{E}_3] = 0{,}8359$

↓

sono eventi indipend.

VALORI ATTESI

- **media** o valore atteso ($E[X]$ o μ_X)

$$E[X] = \sum_{x_j} x_j f_X(x_j) \quad X \text{ discreta}$$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx \quad X \text{ continua}$$

misura la posizione di X

$$E[X] = \int_0^{+\infty} 1 - F_X(x)\,dx - \int_{-\infty}^{0} F_X(x)\,dx$$

- **varianza**

$$var[X] = \sum_{x_j} (x_j - \mu_X)^2 f_X(x_j) \quad X \text{ discreta}$$

$$var[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X)^2 f_X(x)\,dx \quad X \text{ continua}$$

$$\boxed{var[X] = E[(X - \mu_X)^2]}$$

- **deviazione standard**

$$\sigma_X = \sqrt{var[X]}$$

- **valore atteso di una f di variabile casuale**

$$E[g(X)] = \sum_{x_j} g(x_j) f_X(x_j) \quad X \text{ discreta}$$

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x)\,dx \quad X \text{ continua}$$

proprietà

1) $E[c] = c$ il valore atteso di una costante è la costante stessa

$$= \frac{2}{\lambda} \underbrace{\int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx}_{\displaystyle \int_{-\infty}^{+\infty} x f_x(x) dx = E[X_{exp}] = 1/\lambda} - 1/\lambda^2$$

$$= \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

DISUGUAGLIANZA DI TCHEBYCHEFF

(per trovare minoranti o maggioranti)

sia X una variabile casuale e $g(x)$ una funzione non negativa $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\boxed{P[g(x) \geq K] \leq \frac{E[g(x)]}{K}}$$

$K > 0$ cost.

• **corollario**

X variabile casuale con $var[x]$ finita

$$\boxed{P[\underbrace{|X-\mu_x|}_{g(x)} \geq \underbrace{t\sigma_x}_{K}] = P[\underbrace{(X-\mu_x)^2}_{E\,g(x)} \geq \underbrace{t^2\sigma_x^2}_{K}] \leq 1/t^2} \rightarrow \text{maggiorante}$$

$$\boxed{\geq 1 - 1/t^2} \rightarrow \text{minorante}$$

ALTRE MISURE DI POSIZIONE

• **mediana**

soddisfa

$P[X \leq med(X)] \geq 1/2$ e $P[X \geq med(X)] \geq 1/2$ — X discreta

$$\int_{-\infty}^{med(x)} f_x(x) dx = \int_{med(x)}^{+\infty} f_x(x) dx$$ — X continua

FAMIGLIE DI DISTRIBUZIONI

cap. 3

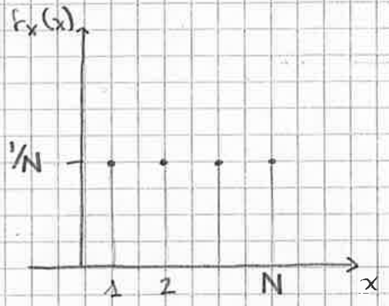
· DISTRIBUZIONI DISCRETE

① UNIFORME DISCRETA

$$f_X(x) = f_X(x; N) = \begin{cases} 1/N & x = 1, 2 \dots N \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

funzione densità discreta

$f_X(x) \geq 0$ e $\sum_{x_j} f_X(x_j) = 1$



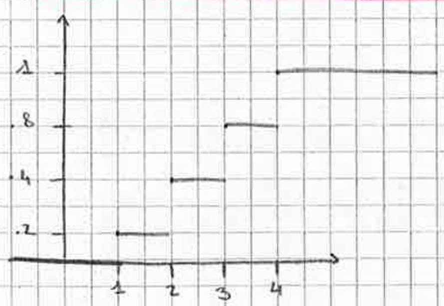
Teorema

$$\mathbb{E}[X] = \frac{N+1}{2}$$

$$\mathrm{var}[X] = \frac{N^2-1}{12}$$

la funzione della distribuzione cumulativa

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ j/N & j \leq x < j+1 \quad j = 1 \dots N-1 \\ 1 & x \geq N \end{cases}$$



N = 4

dopo N = 4 non ho più cambiamento

② BERNOULLI

$$f_X(x) = f_X(x; p) = \begin{cases} p^x(1-p)^{1-x} & x = 0, 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

funzione di densità discreta

$f_X(x) \geq 0$ e $\sum_{x_j} f_X(x_j) = 1$

con $0 \leq p \leq 1$

④ IPERGEOMETRICA (senza reimmissione)

$$f_X(x; M, K, n) = \begin{cases} \dfrac{\binom{K}{x}\binom{M-K}{n-x}}{\binom{M}{n}} & x = 0, 1, \dots n \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

funzione di densità discreta

con $K \leq M$ e $n \leq M$
$M \in \mathbb{N}$
$K \in \mathbb{N}$
$n \in \mathbb{N}$

Teorema

$$\mathbb{E}[X] = n\frac{K}{M}$$

$$\mathrm{var}[X] = \frac{K(M-K)}{M}\,\frac{M-n}{M-1}$$

es.

lotto di 800 pezzi

piano di campionamento semplice con $n = 150$ (numerosità campione) e $a = 2$ (n° unità difettose accettabili)

? P lotto accettato nel caso in cui ho il 5% di unità difettose

S: {"estrazione difettosa"}

X: conta unità difettose nel campione

X ∼ distribuz. ipergeometrica ($M = 800$, $K = 40$, $n = 150$)

$K = 40$ ↓ 5% di 800

P lotto accettato $= P[X \leq 2]$

$$P[X \leq 2] = \sum_{x=0}^{2} f_X(x; 800, 40, 150)$$

$$= \sum_{x=0}^{2} \frac{\binom{40}{x}\binom{800-40}{150-x}}{\binom{800}{150}}$$

• casi particolari

$$\binom{n}{0} = 1 \qquad \binom{n}{1} = n \qquad \binom{n}{n} = 1 \qquad \binom{n}{n-1} = n$$

(5) POISSON

$$f_X(x;\lambda) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} & x = 0, 1 \dots n \dots \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

funzione di densità discreta

$f_X(x) \geq 0$

$$\sum_{x=0}^{+\infty} f_X(x) = 1 \rightarrow \sum_{x=0}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{x=0}^{+\infty} \frac{\lambda^x}{x!}}_{\text{sviluppo in serie di potenze}} = 1$$

Teorema

$\mathbb{E}[X] = \lambda$

$\text{var}[X] = \lambda$

Teorema

se $n \rightarrow +\infty$ allora $p \rightarrow 0$ $(n \geq 100$ e $p \leq 0.05)$

posso approssimare la densità binomiale con quella di Poisson

$$\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \longrightarrow e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} \qquad \lambda = np$$

es. 3.10

2500 persone di cui 4 allergiche
campione di 1500 persone

a) $\mathbb{P}[3 \text{ allergiche}]$

X: conta n° persone allergiche

$X \sim$ binomiale

$\frac{K}{M} = 0{,}0016 = p$

$n = 1500$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 35 di 172

ESERCITAZIONE 3 variabili casuali

Esercizio 1

Una scatola contiene 100 dadi di cui 80 sono omogenei, mentre i rimanenti sono truccati in modo che la probabilità di ottenere il numero 6 sia uguale a 0.5 e ogni altro risultato si verifichi con probabilità 0.1.

Un dado viene estratto dalla scatola e lanciato: sia *X* la variabile casuale che indica il numero apparso sulla faccia superiore del dado.

a) Calcolare la funzione di densità, il valore atteso e la varianza della variabile casuale *X*.

b) Calcolare la probabilità che il numero apparso sia al più 2 e la probabilità che sia almeno 5.

(Risposta: a) media 3.7 – varianza 3.14 – b) 0.307 e 0.387)

X : indica n° apparso su dado

codominio $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

2 casi
- omogeneo (80%)
- non omogeneo (20%) $\rightarrow P[6] = 0,5 \quad P[\bar{6}] = 0,1$

a)

$P[X=1] = P[X=1 \mid \text{omogeneo}]\, P[\text{omogeneo}] + P[X=1 \mid \text{non omog.}]\, P[\text{non omogeneo}]$

$= \frac{1}{6} \cdot \frac{8}{10} + \frac{1}{10} \cdot \frac{2}{10} = \frac{23}{150}$

$P[X=1]$ è la stessa se $X = 2, 3, 4, 5$

$P[X=6] = P[X=6 \mid \text{omogeneo}]\, P[\text{omogeneo}] + P[X=6 \mid \text{non omogeneo}]\, P[\text{non omogeneo}]$

$= \frac{1}{6} \cdot \frac{8}{10} + \frac{5}{10} \cdot \frac{2}{10} = \frac{7}{30}$

$$f_X(x_j) = \begin{cases} \frac{23}{150} & j = 1, 2, 3, 4, 5 \\ \frac{7}{30} & j = 6 \end{cases}$$

$= K + K = 2K = 1 \rightarrow K = 1/2$

b) $F_x(x) = \mathbb{P}[X \leq x] = \int_{-\infty}^{x} f_x(u)\,du$

$$F_x(x) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{x} 1/2\, e^{u}\,du & x < 0 \\ \int_{0}^{x} 1/2\, e^{-u}\,du + \int_{-\infty}^{0} 1/2\, e^{u}\,du & x \geq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1/2\, e^{x} & x < 0 \\ 1/2 - \frac{1}{2} e^{-x} + 1/2 = 1 - 1/2\, e^{-x} & x \geq 0 \end{cases}$$

c) $\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_x(x)\,dx$

$= \int_{-\infty}^{0} x \cdot 1/2\, e^{x}\,dx + \int_{0}^{+\infty} x \cdot 1/2\, e^{-x} = 0$ perché simmetrica

$\mathrm{var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$

$\mathbb{E}[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_x(x)\,dx$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{0} x^2\, 1/2\, e^{x}\,dx}_{\text{cambio di variab.}} + \underbrace{\int_{0}^{+\infty} x^2\, 1/2\, e^{-x}\,dx}$$

cambio di variab.

$x \rightarrow -t$

$dx \rightarrow -dt$

$- \int_{+\infty}^{0} \frac{1}{2} t^2 e^{-t}\,dt$

$\frac{1}{2}\, \mathbb{E}[X^2_{exp(1)}]$

$= 1/2\, \mathrm{var}[X_{exp(1)}] + (\mathbb{E}[X_{exp}])^2$

$= 1/2 \left[\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) + \frac{1}{\lambda}\right]$

b) X: indica i n° delle sfere estratte

x	3	4	5	6	7	8
$f_X(x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$

funzione di densità

$f_X(x) = \mathbb{P}[X = x]$

c) funzione distribuzione cumulativa

$$F_X(x) = \sum_{x_j \leq x} f_X(x_j) = \mathbb{P}[X \leq x]$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 3 \\ 1/10 & 3 \leq x < 4 \\ 2/10 & 4 \leq x < 5 \\ 5/10 & 5 \leq x < 6 \\ 7/10 & 6 \leq x < 7 \\ 9/10 & 7 \leq x < 8 \\ 10/10 & x \geq 8 \end{cases}$$

d) $\mathbb{E}[X]$ e $var[X]$

- $\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{8} x f_X(x)$

$$= 3 \cdot \frac{1}{10} + 4 \cdot \frac{1}{10} + 5 \cdot \frac{3}{10} + 6 \cdot \frac{2}{10} + 7 \frac{2}{10} + 8 \cdot \frac{1}{10} = 5.6$$

- $var[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$

$$\mathbb{E}[X^2] = 9 \cdot \frac{1}{10} + 16 \cdot \frac{1}{10} + 25 \cdot \frac{3}{10} + 36 \frac{2}{10} + 49 \cdot \frac{2}{10} + 64 \cdot \frac{1}{10}$$

$var[X] = 2.04$

e) $\mathbb{P}[X \geq 7] = \mathbb{P}[X = 7] + \mathbb{P}[X = 8] = \frac{3}{10}$

$\mathbb{P}[3 < X \leq 5] = \mathbb{P}[X = 4] + \mathbb{P}[X = 5] = \frac{2}{5}$

per simmetria

$f_x(3) = 4\left(\frac{1}{2}\right)^4$

$f_x(4) = \left(\frac{1}{2}\right)^4$

devo soddisfare le due disuguaglianze

$x=2 \rightarrow$ soddisfa la 1° disug. $\left(\frac{11}{16}\right)$ sommo a partire da ∅

$x=2 \rightarrow$ soddisfa la 2° disug. $\left(\frac{11}{16}\right)$ sommo a partire da 4

$x = 2 = \text{med}(x)$

↳ distrib. simmetrica rispetto al valore 2

b) $n=5$ e $p=0.5$

x	0	1	2	3	4	5
$f_x(x)$	$\left(\frac{1}{2}\right)^5$	$5\left(\frac{1}{2}\right)^5$	$10\left(\frac{1}{2}\right)^5$	$10\left(\frac{1}{2}\right)^5$	$5\left(\frac{1}{2}\right)^5$	$\left(\frac{1}{2}\right)^5$

$x=2 \rightarrow$ soddisfa 1° disug. $\left(\frac{16}{32}\right)$

$x=3 \rightarrow$ soddisfa 2° disug. $\left(\frac{16}{32}\right)$

$x=2=\text{med}(x) \rightarrow$ perché soddisfa entrambe le disug.

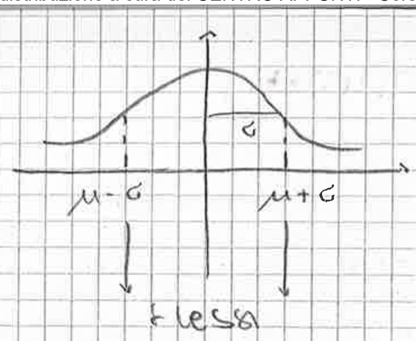
c) $n=2$ $p=0.9$

x	0	1	2
$f_x(x)$	$\left(\frac{1}{10}\right)^2$	$\frac{2}{10}\cdot\frac{9}{10}$	$\left(\frac{9}{10}\right)^2$

$x=2 \rightarrow$ soddisfa 1° disug. (1)

$x=2 \rightarrow$ soddisfa 2° disug. $\left(\frac{81}{100}\right)$

$x=2=\text{med}(x)$



se $\mu = 0$ e $\sigma = 1$ la distribuzione normale assume il nome di distribuzione centrata e ridotta o standardizzata

$$\boxed{z = \frac{X - \mu}{\sigma}} \qquad z \sim N(0,1)$$

$$\downarrow$$

$E[z] = 0$
$var[z] = 1$

es.

sia $X \sim N(131.3, 12.5)$, trovare il valore della variabile normale standardizzata a $x = 97.6$

$\sigma = 12.5 \rightarrow$ var

$\mu = 131.3 \rightarrow$ media

$$z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{97.6 - 131.25}{12.5} = -2.696$$

es.

$X \sim N(0.76, 0.14^2)$, trovare il valore di x in $z = 1.94$

$0.14 = \sigma^2 \rightarrow$ dev. standard

$$1.94 = \frac{x - 0.76}{0.14} \rightarrow x = 1.0316$$

es.

? $P[0 < z < 0.09]$

Φ = area sottesa dalla normale = valore f. cumulativa

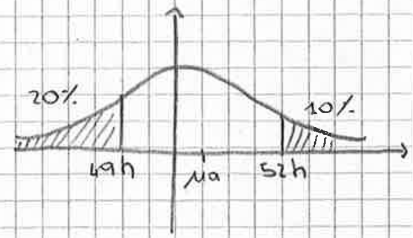
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 45 di 172

A = produttore 1
B = produttore 2

$X_A \sim N(\mu_A, \sigma_A)$

$\mathbb{P}[X_A \leq 49h] = 0.20$

$\mathbb{P}[X_A \geq 52h] = 0.10$



$\downarrow$

$\mathbb{P}\left[z \leq \frac{49-\mu_A}{\sigma_A}\right] = 0.20 \rightarrow z_{0.20}$
↳ area sottesa

$\mathbb{P}\left[z \geq \frac{52-\mu_A}{\sigma_A}\right] = 0.10 \rightarrow z_{0.90}$

0.90 è l'area, quindi lo cerco direttamente dalle tavole $\rightarrow$ 1.28

0.20 non c'è, quindi guardo la parte simmetrica rispetto a $\mu_A \rightarrow z_{0.80}$

$z_{0.20} = -z_{0.80} = -0.84$

$\mathbb{P}[z \leq -0.84] = 0.20$
$\mathbb{P}[z \geq 1.28] = 0.10$
$\rightarrow$ $\mu_A = 50.189$, $\sigma^2_A = 2$
$\mu_B = 50.66$, $\sigma^2_B = 4.32$

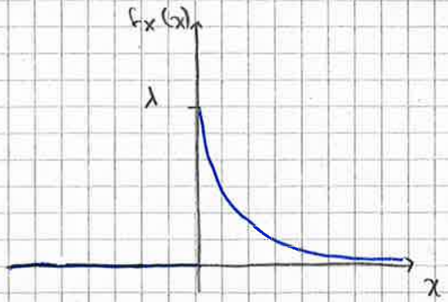
$\downarrow$

più grande, quindi conviene A

③ ESPONENZIALE

$$\boxed{f_X(x;\lambda) = \begin{cases} \lambda \exp(-\lambda x) & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}}$$

funzione di densità



Teorema

$\mathbb{E}[X] = 1/\lambda$

$var[X] = 1/\lambda^2$

$\mathbb{P}[X > s+t \mid X > s] = \mathbb{P}[X > t]$

es.

$T \to$ tempo fino alla prima x

? $\mathbb{P}[T > t] \to$ nessuna manifestazione dell'evento

$$\mathbb{P}[N(t)=0] = \frac{\exp(-\alpha t)(\alpha t)^0}{0!} = \exp(-\alpha t)$$

$$\mathbb{P}[T > t] = 1 - \mathbb{P}[T \leq t]$$
$$= 1 - \exp(-\alpha t) \sim e^{\alpha}$$

es. 3.13

2 linee telefoniche

1^a linea $\to$ 24 telef. ogni 30 min $= \frac{4}{5}$ /min $= \alpha_1$
2^a linea $\to$ 9 telef. ogni 15 min $= \frac{3}{5}$ /min $= \alpha_2$

$X \sim$ Poisson $\to$ due variab. casuali indipend

N_1 = conta # telef. su L_1
N_2 = conta # telef. su L_2

a) ? $\mathbb{P}$ in 45 min che sulle due linee non ho più di 40 telef.

$$N(t) = N_1(t) + N_2(t) \sim \text{Poisson}(\alpha_1 t + \alpha_2 t)$$

$N_1(45\,min) = (45\,min \cdot 4/5\,min) = 36$
$N_2(45\,min) = (45\,min \cdot 3/5\,min) = 27$
$\to N(45\,min) = 63$

$$\mathbb{P}[N(45\,min) \leq 40] = \sum_{x=0}^{40} \frac{e^{-63}\, 63^x}{x!} = 0.0013$$

b) ? $\mathbb{P}$ per 2 min non ci sono telef. sulle due linee

$\mathbb{P}[N(2\,min) = 0]$
$N(2\,min) = (4/5 + 3/5)\, 2\,min = 14/5$

$$\mathbb{P}[N(2\,min)=0] = \frac{e^{-14/5}(14/5)^0}{0!} = 0.0608$$

• OSSERVAZIONE

X censurata → i punti massa sono $x = 1, \dots, K$, dove la distribuzione di Poisson modellizza tutti i pt massa fino a $K-1$ e in K si concentra tutta la massa rimanente

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{\exp(-\lambda)\lambda^x}{x!} & x = 0, 1, \dots, K-1 \\ 1 - \sum_{x=0}^{K-1} \dfrac{\exp(-\lambda)\lambda^x}{x!} & x = K \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

a K si tronca l'esperimento

ESERCITAZIONE 4 variabili casuali discrete

Esercizio 1
I passeggeri di un piccolo volo aereo sono 20. Di questi, 3 trasportano sostanze non consentite.
Il controllo da parte del personale di vigilanza prevede di ispezionare 4 passeggeri.
Qual è la probabilità che almeno uno degli ispezionati abbia con sé sostanze proibite?
(Risposta: 0.509)

S = "trasporto sostanze non consentite"

X : conta n° passeggeri sostanze proibite

$X \sim$ ipergeom. (non ho reimmissione)
$n = 4, \; K = 3, \; M = 20$

$$f_X(x, M, K, n) = \begin{cases} \dfrac{\binom{K}{x}\binom{M-K}{n-x}}{\binom{M}{n}} & x = 0, 1, \dots, n \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

? $\mathbb{P}[X \geq 1]$

$$\mathbb{P}[X \geq 1] = 1 - \mathbb{P}[X < 1]$$
$$= 1 - \mathbb{P}[X = 0]$$
$$= 1 - \left[\frac{\binom{3}{0}\binom{17}{4}}{\binom{20}{4}} \right]$$

$Y \sim$ binomiale (n, p) $\quad n = 150$, $p = 0.0381$] potrei approssim. con Poisson

Y : conta confezioni con più di due lampadine difettose

? $\mathbb{P}$[accettata]

$$= \mathbb{P}[Y < 2] = \mathbb{P}[Y=0] + \mathbb{P}[Y=1]$$

$$= \sum_{y=0}^{1} \binom{150}{y} (1-0.0381)^{150-y} \, 0.0381^{y}$$

$$= 0.0205$$

2.

a) $X \sim$ binomiale $(20, 0.10)$

$$\mathbb{P}[X \leq 2] = \sum_{x=0}^{2} \binom{20}{x} (0.10)^{x} (1-0.10)^{20-x} = 0.6769$$

b) $Y \sim$ binomiale $(20, 1-0.6769) = (20, 0.3231)$

$$\mathbb{P}[Y < 2] = \sum_{y=0}^{1} \binom{20}{y} 0.3231^{y} (0.6769)^{20-y} = 0.0043$$

3. $X \sim$ ipergeometrica (M, K, n) $\quad M = 50,\ K = 2,\ n = 4$] potrei approssim. ad una binomiale con $(n, K/M)$

X : conta lampadine difettose

$$\mathbb{P}[X \leq 1] = \mathbb{P}[X=0] + \mathbb{P}[X=1]$$

$$= \sum_{x=0}^{1} \frac{\binom{2}{x}\binom{50-2}{4-x}}{\binom{50}{4}}$$

$$= \frac{1 \binom{48}{4}}{\binom{50}{4}} + \frac{2 \binom{48}{3}}{\binom{50}{4}}$$

$$= \frac{\frac{48!}{44!\,4!}}{\frac{50!}{46!\,4!}} + \frac{2\,\frac{48!}{45!\,3!}}{\frac{50!}{46!\,4!}} = 0.9951$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 53 di 172

3.

$$P[\,|X-\mu_X| < t\,\sigma_X\,] \geq 1-\frac{1}{t^2}$$

$X \rightarrow \frac{X}{n}$ = frequenza relativa dove $X \sim binom(n,p)$

$\mu_{\frac{X}{n}} = p$ e $\sigma_{\frac{X}{n}} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$

$$P\left[\,\left|\frac{X}{n}-p\right| < t\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\,\right] \geq 1-\frac{1}{t^2}$$

$p = 5/12$ $\quad \varepsilon = 0.01$ $\quad 1-\frac{1}{t^2} = 0.90$

$$\begin{cases} t\sqrt{\frac{5/12 \cdot 7/12}{n}} \leq 0.01 \\ 1-\frac{1}{t^2} \geq 0.90 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t^2 \geq 10 \rightarrow t \geq \sqrt{10} \quad (t>0) \\ \sqrt{10}\sqrt{\frac{5/12 \cdot 7/12}{n}} \leq 0.01 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t \geq \sqrt{10} \\ n \geq 24305.55 \end{cases} \qquad \begin{cases} t \geq \sqrt{10} \\ n \geq 24306 \end{cases}$$

approssimo sempre con l'intero superiore

4. $\varepsilon = 0.1$

$$\begin{cases} t \geq \sqrt{10} \\ \sqrt{10}\sqrt{\frac{5/12 \cdot 7/12}{n}} \leq 0.1 \end{cases} \qquad \begin{cases} t \geq \sqrt{10} \\ n \geq 243{,}055 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t \geq \sqrt{10} \\ n \geq 244 \end{cases}$$

TRASFORMAZIONE DI VARIABILE CASUALE $Y = g(X)$

$$f_X(x) = \begin{cases} \mathbb{P}[X = x_i] & x = x_1 \dots x_n \dots \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \sum\limits_{x_j : g(x_j) = y_i} f_X(x_j) & y = y_i \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

funzione densità discreta
↓
quando
X v.c. discreta

es.

x	y
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4
4	16

$y = x^2$

x	-2	-1	0	1	2	4
$f_X(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$

$f_Y(0) = \mathbb{P}[Y = 0] = \mathbb{P}[X^2 = 0] = \mathbb{P}[X = 0] = \frac{1}{12}$

$f_Y(1) = \mathbb{P}[X^2 = 1] = \mathbb{P}[X = 1] + \mathbb{P}[X = -1] = \frac{1}{12} + \frac{1}{4}$

---

y	0	1	4	16
$f_Y(y)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{1}{4}$

$\mathbb{E}[Y] =$

- $\sum\limits_{y_j} y_j f_Y(y_j) = 0 \cdot \frac{1}{12} + \frac{4}{12} + 4 \cdot \frac{4}{12} + \frac{16}{4}$
- $\mathbb{E}[X^2] = \sum\limits_{x_j} x_j^2 f_X(x_j) = 4 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{4}{12} + \frac{16}{4}$
- $\mathbb{E}[X^2] = \mathrm{var}[X] + (\mathbb{E}[X])^2$

• se X v.c. continua

ho due metodi

$$\mathbb{E}[Y] = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y)\, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} y \frac{1}{\pi(1+y^2)}\, dy \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{tg}(x) f_X(x)\, dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{tg}(x) \frac{1}{\pi}\, dx \end{cases}$$

es. 3.25

X v.c con μ e σ^2

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-1/2\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

? distribuzione di $Y = \exp(X)$

$$D_X = (-\infty, +\infty) \xrightarrow{y = e^x} D_Y = (0, +\infty)$$

$$x = \ln y = g^{-1}(y)$$

$$\frac{d g^{-1}(y)}{dy} = \frac{1}{y}$$

$$\boxed{f_Y(y) = \begin{cases} \left|\frac{1}{y}\right| \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-1/2\left(\frac{\ln y - \mu}{\sigma}\right)^2} & y > 0 \\ 0 & y \leq 0 \end{cases}}$$

distribuzione log-normale

es. 3.26

X v.c con μ e σ^2

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma^2} e^{-1/2\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

? distrib. di $Y = ax + b$

$$D_X = (-\infty, +\infty) \xrightarrow{y = ax+b} D_Y = (-\infty, +\infty)$$

$$x = \frac{(y-b)}{a} = g^{-1}(y)$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 59 di 172

$$\frac{dg_{(1)}^{-1}(y)}{dy} = \frac{-1}{2\sqrt{y}}$$

$$\frac{dg_{(2)}^{-1}(y)}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

$$f_Y = \begin{cases} \left|\frac{-1}{2\sqrt{y}}\right| \frac{1}{2} + \left|\frac{1}{\sqrt{y}\,2}\right| \frac{1}{2} & 0 < y < 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$f_Y = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}} & 0 < y < 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$E[Y] = E[X^2] = \underbrace{var[X]}_{\frac{(b-a)^2}{2}} + \underbrace{(E[X])^2}_{\frac{a+b}{2}} = \frac{1}{3}$$

ESERCITAZIONE 5 variabili casuali continue

Esercizio 1

Un supermercato riceve un prodotto da due diversi fornitori F1 e F2 nelle percentuali rispettivamente del 70% e 30%. I limiti di specifica (= *valori minimo e massimo per una caratteristica del prodotto entro i quali quest'ultimo è considerato essere secondo le prescrizioni*) sono 29.6 e 30.4. La misura di tale caratteristica segue una distribuzione uniforme per entrambi i fornitori: per F1 ha media e varianza μ_1=29.9 e σ_1^2=0.09; per F2 è invece uniforme sull'intervallo (29.5, 30.5). Trovare la percentuale di prodotto ricevuta dal supermercato che non soddisfa le prescrizioni.
(Risposta: 0.22)

$l_i = 29.6 \quad l_s = 30.4$

X_1 : V.C prodotto da F_1

X_2 : V.C prodotto da F_2

$P[F_1] = 0.7 \quad P[F_2] = 0.3$

$X_1 \sim U(a, b)$ dove $\mu_1 = 29.9$ e $\sigma_1^2 = 0.09$

$X_2 \sim U(29.5, 30.5)$

$= \mathbb{P}[z \leq 1] - \mathbb{P}[z \leq -0.5]$

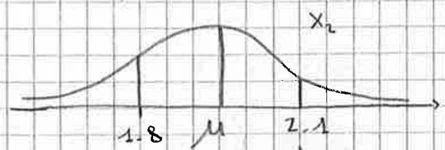
$= \mathbb{P}[z \leq 1] - [1 - \mathbb{P}[z \leq 0.5]]$

$= 0.8413 - (1 - 0.6915) = 0.5328$

2. $X_2 \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$\begin{cases} \mathbb{P}[X_2 \leq 2.1] = 0.8413 \\ \mathbb{P}[X_2 \geq 1.8] = 0.9772 \end{cases}$$

risolvo il sistema per trovare μ e σ



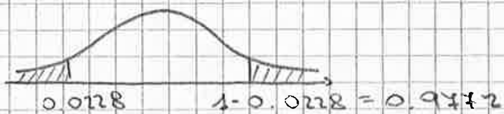
$\hookrightarrow$ dopo μ perché $\mathbb{P} = 0.8413 > 0.5$

standardizzo la normale

$$\begin{cases} \mathbb{P}\left[z_{0.8413} \leq \dfrac{2.1 - \mu}{\sigma}\right] = 0.8413 \\ \mathbb{P}\left[z_{0.0228} \geq \dfrac{1.8 - \mu}{\sigma}\right] = 0.9772 \end{cases}$$

$z_{0.8413} = 1 \rightarrow$ guardando le tavole

$z_{0.0228} \rightarrow$ non c'è sulle tavole $= -z_{0.9772} = -2$



$$\begin{cases} \dfrac{1.8 - \mu}{\sigma} = -2 \\ \dfrac{2.1 - \mu}{\sigma} = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{array}{l} \mu = 2 \\ \sigma^2 = 0.01 \end{array}$$

Esercizio 3

Il diametro (in *mm*) di un certo tipo di valvole è approssimativamente distribuito secondo una distribuzione normale con media 65; si è valutato inoltre che l'84% delle valvole ha un diametro superiore a 59.5.

1. Determinare la percentuale di valvole il cui diametro differisce dal diametro medio per più di una volta e mezzo la deviazione standard.
2. Calcolare la percentuale di valvole con un diametro superiore a 68, tra quelle con diametro superiore alla media più metà deviazione standard.
3. Avendo acquistato 12 valvole, calcolare la probabilità che almeno 2 abbiano un diametro compreso tra 63.5 e 66.5.

(Risposta: 1) 0.1336 - 2) 0.9549 – 3) 0.7597)

X: v.c indica diametro

$X \sim N(65, \sigma^2)$

$$= \frac{\mathbb{P}[Z > 0.54]}{\mathbb{P}[Z > 0.5]}$$

$$= \frac{1 - \mathbb{P}[Z \leq 0.54]}{1 - \mathbb{P}[Z \leq 0.5]} = \frac{1 - 0.7054}{1 - 0.6915} = 0.9549$$

Esercizio 4

In uno stabilimento, un detersivo è prodotto da due linee, A e B. La linea A produce il 40% dei flaconi, il rimanente è prodotto dalla linea B. E' noto che, se il detersivo è prodotto dalla linea A, la quantità di detersivo immessa nel flacone segue una distribuzione uniforme sull'intervallo (0.95,1.05); se è prodotto dalla linea B, invece, segue una distribuzione normale di media 1 e varianza 0.03^2.

1. Qual è la probabilità che un flacone scelto a caso abbia una quantità di liquido superiore a 1.09?
2. Qual è la probabilità che avendo trovato un flacone con una quantità di liquido inferiore a 1 sia stato prodotto dalla linea A?
3. I flaconi prodotti dalla linea A vengono assemblati in scatole da 10 pezzi, presi a caso a fondo linea. Qual è la probabilità che, scelta a caso una scatola, esattamente 3 dei pezzi in essa contenuta abbiano una quantità di liquido inferiore a 1?

(Risposta: 1) 0.00078 – 2) 0.4 – 3) 0.117)

$\mathbb{P}[A] = 0.40$

$\mathbb{P}[B] = 0.60$

X_A: v.c contenuto detersivo da A

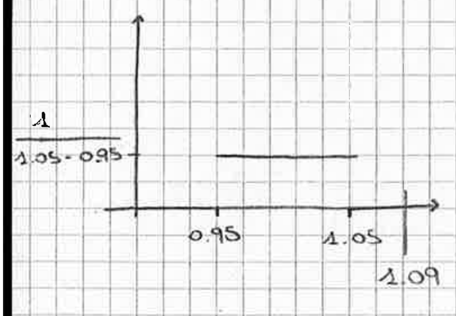
X_B: v.c contenuto detersivo da B

$X_A \sim U(0.95, 1.05)$

$X_B \sim N(1, 0.03^2)$

1.

$\mathbb{P}[\text{contenuto} > 1.09] = \mathbb{P}[X_A > 1.09]\,\mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[X_B > 1.09]\,\mathbb{P}[B]$



so che $\mathbb{P}[X_A > 1.09] = 0$

$$\mathbb{P}[X_B > 1.09] = \mathbb{P}\left[Z > \frac{1.09 - 1}{0.03}\right]$$

$$= \mathbb{P}[Z > 3]$$

$$= 1 - \mathbb{P}[Z \leq 3] = 1 - 0.9987 = 0.0013$$

$$= -e^{-1/2 t}\Big|_3^{+\infty} = e^{-3/2}$$

X: v.c conta n° componenti con durata > 3h $\quad X \sim bin(10, e^{-3/2})$

$n = 10$

$$P[X \geq 2] = 1 - P[X < 2]$$

$$= 1 - P[X \leq 1]$$

$$= 1 - \left\{ \binom{10}{0}\left(e^{-3/2}\right)^0\left(1-e^{-3/2}\right)^{10} + \binom{10}{1}\left(e^{-3/2}\right)^1\left(1-e^{-3/2}\right)^9 \right\}$$

$$= 0.69$$

ESERCITAZIONE 6 trasformazioni di variabili

ESERCIZIO 1

Sia X una variabile casuale discreta a valori in $\{0,1,2,3,4,5\}$, con funzione di densità:

$$f_X(0) = \frac{1}{2}, \qquad f_X(1) = f_X(2) = \frac{1}{16}, \qquad f_X(3) = f_X(4) = f_X(5) = \frac{1}{8}$$

Determinare la funzione di densità discreta di $Y = (X-2)^2$ e calcolarne la media.

(Risposta: $\mathbb{E}[Y] = \frac{61}{16}$)

x	0	1	2	3	4	5
$f_X(x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

$Y = (X-2)^2$

? $f_Y(y)$

? $E[Y]$

x	y
0	4
1	1
2	0
3	1
4	4
5	9

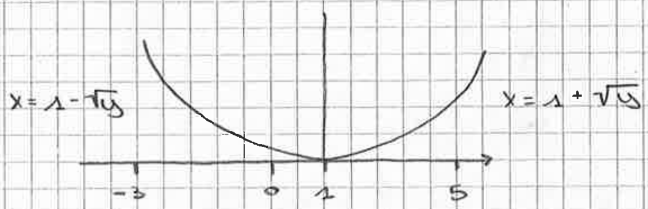
$$f_Y(y) = \begin{cases} \theta e^{-\theta y} & y > 0 \\ 0 & y < 0 \end{cases} \rightarrow \exp(\theta)$$

$$\mathbb{E}[Y] = \frac{1}{\theta} \qquad var[Y] = \frac{1}{\theta^2}$$

ESERCIZIO 3

Sia data la variabile casuale X con distribuzione uniforme sull'intervallo $(-3, 5)$. Calcolare la distribuzione e la media della variabile casuale $Y = (X-1)^2$.
(Risposta: $\mathbb{E}[Y] = \frac{16}{3}$)

$X \sim unif(-3, 5)$
$Y = (X-1)^2$
? $f_Y(y)$
? $\mathbb{E}[Y]$



$$f_X = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a < x < b \\ 0 & 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \frac{1}{8} & -3 < x < 5 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$D_X = (-3, 5) \xrightarrow[\text{non è biunivoca}]{Y = (X-1)^2} D_Y = (0, 16)$$

divido D_X

$D_{X_1}\ (-3, 1) \cup D_{X_2}\ (1, 5)$

$y = (x-1)^2 \rightarrow x - 1 = \pm\sqrt{y} \rightarrow x = 1 \pm \sqrt{y}$

$$\frac{dg^{-1}_{(1)}}{dy} = -\frac{1}{2\sqrt{y}} \qquad \frac{dg^{-1}_{(2)}}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \left|\frac{dg^{-1}}{dy}\right| f_X(g^{-1}) & 0 < y < 16 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{2}{9\sqrt{y}} & 0<y<1 \\ \dfrac{1}{9\sqrt{y}}(\sqrt{y}+1) & 1<y<4 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

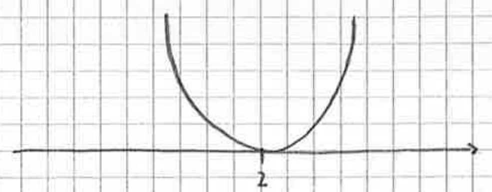
ESERCIZIO 5

Sia X una variabile casuale gaussiana $\mathcal{N}(2,4)$. Calcolare la legge della variabile $Y = \left(\frac{X}{2}-1\right)^2$ e la sua media.

(Risposta: $\mathbb{E}[Y] = 1$)

$X \sim N(2,4)$

$Y = \left(\frac{X}{2}-1\right)^2$



? $f_Y(y)$

? $\mathbb{E}[Y]$

$$D_X\ (-\infty,+\infty) \xrightarrow[\text{non è biunivoca}]{Y=\left(\frac{X}{2}-1\right)^2} D_Y\ (0,+\infty)$$

$$D_X = (-\infty,2) \cup (2,+\infty) \longrightarrow D_Y\ (0,+\infty)$$

$$(x-2)^2 = 4y \longrightarrow x-2 = \pm\sqrt{4y} \longrightarrow x = 2 \pm 2\sqrt{y}$$

$$\frac{dg^{-1}_{(1)}}{dy} = -\cancel{2}\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{y}} \qquad \frac{dg^{-1}_{(2)}}{dy} = \cancel{2}\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{y}}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \left|\frac{-1}{\sqrt{y}}\right| \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,2}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{2-2\sqrt{y}-2}{2}\right)^2}}_{f_X \text{ di una normale}} + \left|\frac{1}{\sqrt{y}}\right| \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,2}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{2+2\sqrt{y}-2}{2}\right)} & y>0 \\ 0 & y<0 \end{cases}$$

ESERCITAZIONE 7 — Processi di Poisson

Esercizio 1

Un filato prodotto da una determinata ditta può essere affetto da due tipi di difetti, nel seguito indicati come difetto A e difetto B. Il numero di difetti dell'uno e dell'altro tipo è una variabile casuale che segue una distribuzione di Poisson e le due variabili casuali sono indipendenti tra loro.

E' stato stimato che ogni 100m di filato (il diametro viene considerato trascurabile) vi sono mediamente 0.25 difetti di tipo A e ogni 125m vi sono mediamente 0.5 difetti di tipo B.

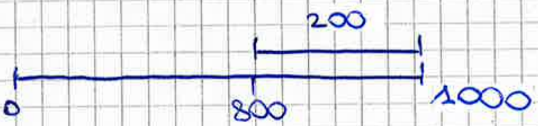
1. Calcolare la probabilità che in un rotolo di filato lungo 1000m non vi sia alcun difetto negli ultimi 200m.
2. Calcolare la probabilità che in un rotolo di filato lungo 500m vi siano 2 difetti del tipo A e 4 del tipo B.
3. Qual è la probabilità che in un rotolo di filato lungo 400m vi sia un difetto del tipo A, dato che in esso sono stati riscontrati complessivamente 3 difetti dei due tipi?

(Risposta: 1) 0.2725 - 2) 0.0202 - 3) 0.4370)

$\alpha_A = 0.25 \;/(100\text{ m})$

$\alpha_B = 0.5 \;/(125\text{ m})$

1.



? $\mathbb{P}$[nessun difetto in 200 m]

$N_A(200\text{ m}) \sim \text{Poisson}(\alpha t) = (0.25/100\text{m} \times 200\text{m})$
$= \text{Poisson}(0.5)$

$N_B(200\text{ m}) \sim \text{Poisson}(0.5/125\text{m} \times 200\text{ m}) = \text{Poisson}(0.8)$

$$\mathbb{P}[N_A(200\text{ m})=0] \times \mathbb{P}[N_B(200\text{ m})=0]$$
$$= e^{-0.5}\frac{0.5^0}{0!} \times e^{-0.8}\frac{0.8^0}{0!} = e^{-1.3}$$

2. $\mathbb{P}[N_A(500\text{ m})=2]\;\mathbb{P}[N_B(500\text{ m})=4]$

$N_A(500\text{m}) \sim \text{Poisson}(1.25)$

$N_B(500\text{m}) \sim \text{Poisson}(2)$

$$\mathbb{P}[N_A(500\text{ m})=2]\;\mathbb{P}[N_B(500\text{m})=4] = e^{-1.25}\frac{(1.25)^2}{2!}\cdot e^{-2}\frac{2^4}{4!}$$
$$= 0.0202$$

$$P[N(0-5)=0 \mid N(0-15)=35] = \frac{P[N(0-5)=0]\, P[N(5-15)=35]}{P[N(0-15)=35]}$$

$N(5\,min) \sim Poisson\left(\frac{3}{1min}\, 5\,min\right) = (15)$
$N(10\,min) \sim Poisson(30)$
$N(15\,min) \sim Poisson(45)$

$$= \frac{e^{-15}\,\frac{15^0}{0!} \cdot e^{-30}\,\frac{30^{35}}{35!}}{e^{-45}\,\frac{45^{35}}{35!}} = \left(\frac{30}{45}\right)^{35} = 6.87 \cdot 10^{-7}$$

2.

$\alpha_c = 0.2\,/min$

$\alpha_v - \alpha_c = \alpha_{v-c} = 2.8\,/min$

$N_v(t) = N_c(t) + N_{v-c}(t)$

$N_v(10\,min) \sim Poisson(30)$
$N_c(10\,min) \sim Poisson(2)$
$N_{v-c}(10\,min) \sim Poisson(28)$

$$P[N_c(10\,min)=1 \mid N_v(10\,min)=10] = \frac{P[N_c(10)=1]\, P[N_{v-c}(10)=9]}{P[N_v(10)=10]}$$

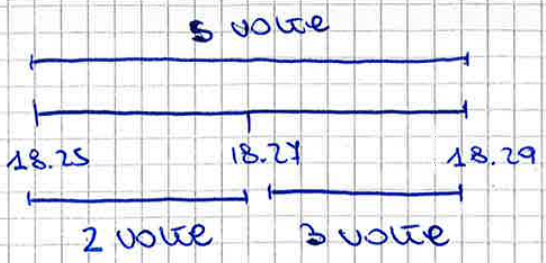
$$= \frac{e^{-2}\,\frac{2^1}{1!}\; e^{-28}\,\frac{28^9}{9!}}{e^{-30}\,\frac{30^{10}}{10!}} = \frac{10!}{1!\,9!}\;\frac{2^1\, 28^9}{30^9}$$

$$= \binom{10}{1}\left(\frac{2}{30}\right)^1\left(\frac{28}{30}\right)^9 \sim bin(10, p) \quad con\ p = \frac{2}{30}$$

3. $P[N_v(30\,sec)=0]$

$N_v(30\,sec) \sim Poisson\left(3/min\ \ 1/2\,min\right) = (3/2)$

$$= e^{-3/2}\,\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^0}{0!} = e^{-3/2} = 0{,}2231$$



1. $\mathbb{P}[N(18.27-18.29)=3 \mid N(18.25-18.29)=5]$

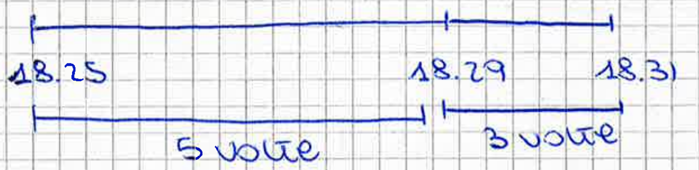
$$= \frac{\mathbb{P}[N(18.27-18.29)=3]\,\mathbb{P}[N(18.25-18.27)=2]}{\mathbb{P}[N(18.25-18.29)=5]}$$

$$= \frac{\mathbb{P}[N(2\,min)=3]\,\mathbb{P}[N(2\,min)=2]}{\mathbb{P}[N(4\,min)=5]}$$

$N(2\,min) \sim Poisson(3)$
$N(4\,min) \sim Poisson(6)$

$$= \frac{e^{-3}\frac{3^2}{2!}\;e^{-3}\frac{3^3}{3!}}{e^{-6}\frac{6^5}{5!}} = \frac{5!}{2!\,3!}\left(\frac{3}{6}\right)^2\left(\frac{3}{6}\right)^3 = \binom{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^5$$

2.



$\mathbb{P}[N(18.29-18.31)=3 \mid N(18.25-18.29)=5]$
sono eventi indipendenti

$$\mathbb{P}[N(2\,min)=3] = e^{-3}\frac{3^3}{3!} = 0.224$$

3) $$\boxed{var\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \, var[X_i] + \sum_{j} \sum_{i: i \neq j} a_i a_j \, cov[X_i, X_j]}$$

dove $cov[X_i, X_j] = \mathbb{E}[X_i X_j] - \mu_{x_i}\mu_{x_j}$

$= \mathbb{E}[(X_i - \mu_{x_i})(X_j - \mu_{x_j})]$

misura l'esistenza di una relazione lineare tra 2 variabili casuali

se X_i e X_j non sono correlate $cov[X_i, X_j] = 0$

indipendenza => no correlazione (no viceversa)

quindi

$$\boxed{var\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \, var[X_i]}$$ se e solo se X_i indipendenti

caso particolare

$a_i = \frac{1}{n}$ e X_i indipendenti

$$var\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^2} var[X_i]$$

$$\boxed{var[\bar{X}_n] = \frac{\sigma^2}{n}}$$

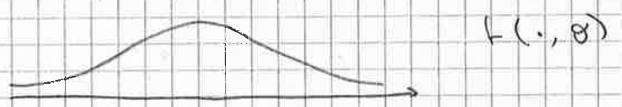
- $\bar{X}_n$ → media campionaria

$\mathbb{E}[\bar{X}_n] = \mu$

$var[\bar{X}_n] = \frac{\sigma^2}{n}$

- PRINCIPALI STATISTICHE

supponendo di aver estratto un campione $\{X_1 \dots X_n\}$ con densità $f(x; \theta)$ di forma nota e θ incognito



- **media campionaria** $\bar{X}_n$ → stimatore della media μ della popolazione
- **varianza campionaria** S_n^2 → stimatore della varianza σ^2 della popolazione

RICERCA STIMATORI PUNTUALI

1 metodo dei momenti

data una popolazione distribuita secondo la funzione di densità
$f(\cdot, \theta_1, \theta_2 \dots, \theta_n)$

se i momenti $\mu_r' = E[X^r]$ di $X \sim f(\cdot, \theta_1, \dots, \theta_n)$ esistono finiti in n° uguale a θ, allora

$$\begin{cases} \mu_1'(\theta_1 \dots \theta_n) = M_1' \\ \mu_2'(\theta_1 \dots \theta_n) = M_2' \\ \dots \\ \mu_n'(\theta_1 \dots \theta_n) = M_n' \end{cases}$$

→ risolvendo il sistema trovo gli stimatori per $\theta_1, \theta_2 \dots \theta_n$

$$\boxed{M_r' = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^r}$$

momento campionario

quando $r = 1$ → $M_1' = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \equiv$ media campionaria $\bar{X}_n$

es.

distribuzione normale

$\{x_1 \dots x_n\}$ da $f(\cdot; \mu, \sigma^2) \to N(\mu, \sigma^2)$

voglio determinare stimatori per μ e σ^2

$$\begin{cases} \mu_1' = M_1' \\ \mu_2' = M_2' \end{cases}$$

siccome per def. $\mu_1' = E[X] = \mu$ perché ho una N

$$\begin{cases} \mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \\ E[X^2] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{cases}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 81 di 172

$$\begin{cases} \mu_1' = M_1' \\ \mu_2' = M_2' \end{cases}$$

$\mu_1' = E[X] = \frac{a+b}{2}$ perche $X \sim$ Poisson

$$\begin{cases} \frac{a+b}{2} = \bar{X}_n \\ E[X^2] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 2\bar{X}_n - b \\ var[X] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - (E[X])^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 2\bar{X}_n - b \\ \frac{(b-a)^2}{12} + \frac{(a+b)^2}{2^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 2\bar{X}_n - b \\ \frac{b - 2\bar{X}_n + b}{12} + \frac{(2\bar{X}_n - b + b)^2}{4} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 2\bar{X}_n - b \\ (b - \bar{X}_n)^2 = 3\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \bar{X}_n^2 \right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 2\bar{X}_n - b \\ b = \bar{X}_n \pm \sqrt{3}\sqrt{M_2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = \bar{X}_n - \sqrt{3}\sqrt{M_2} & \text{stimatore di B} \\ B = \bar{X}_n + \sqrt{3}\sqrt{M_2} & \text{stimatore di A} \end{cases}$$

non prendo rispettivamente + e − perche $a < b$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 83 di 172

? $\mathbb{P}[T]$

X v.c conta teste → $X \sim bin(20, p)$

voglio stimare p

$\mathbb{P}[X=6] = \binom{20}{6} p^6 (1-p)^{14} = h(p)$

$p: h(p)$ sia max → calcolo $h'(p)$

$h'(p) = \binom{20}{6} \left[6p^5 (1-p)^{14} - 14 p^6 (1-p)^{13} \right] = 0$

Tolgo $p=0$ e $p=1$ (casi estremi

$6(1-p) - 14p = 0$

$6 - 6p - 14p = 0 \rightarrow p = \frac{6}{20}$

$\hat{p} = 6/20$ stima di p → f. relativa

Lo stimatore di max verosimiglianza è la f. relativa

es.

$f(\cdot\,; p) = \begin{cases} p^x (1-p)^{1-x} & x \in \{0,1\} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$ bernulli

dato un campione $\{x_1, \dots x_n\}$

$L(p) = L(p; x_1 \dots x_n) = p^{x_1} (1-p)^{1-x_1} \dots p^{x_n} (1-p)^{1-x_n}$

f. di max verosimiglianza

$L(p) = p^{\sum_{i=1}^n x_i} (1-p)^{n - \sum_{i=1}^n x_i}$

pongo $\sum_{i=1}^n x_i = y$

$L(p) = p^y (1-p)^{n-y}$

passo al log di $L(p)$ (tanto è una f sempre crescente)

$\ln L(p) = \ln p^y + \ln (1-p)^{n-y}$

$= y \ln p + n-y \ln (1-p)$

faccio derivata per trovare max

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 85 di 172

· DISTRIBUZIONE MEDIA CAMPIONARIA

dato un campione $\{x_1, \dots x_n\}$ da $f(\cdot)$ con media μ e varianza σ^2

$\bar{X}_n$ → media campionaria

$$E[\bar{X}_n] = \mu \qquad var[\bar{X}_n] = \sigma^2/n$$

Teorema limite centrale

sia $f_X(x)$ una funzione di densità con μ e σ^2, la distribuzione di $\bar{X}_n$ tende a distribuirsi lungo una normale con media μ e varianza σ^2/n con $n \to \infty$

$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ campione con X_i indipendenti

$f_{\bar{X}_n} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$

$$Z = \frac{\bar{X}_n - E[\bar{X}_n]}{\sqrt{var[\bar{X}_n]}} \qquad n > 30$$

$$\boxed{Z = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}} \sim N(0,1)$$

es. 7.3

campione $n=64$ preso da una popolazione avente $\sigma = 20$

? P di $\bar{X}_n$ che differisca per più di 5 da μ della popolaz.

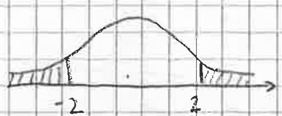
$X \sim f(\mu, 20^2)$ $\qquad n = 64 > 30$

$f_{\bar{X}_{64}} \sim N\left(\mu, \frac{20^2}{64}\right) \qquad \sigma = \frac{20}{\sqrt{64}}$

$$P[|\bar{X}_{64} - \mu| > 5] = P\left[|Z| > \frac{\sqrt{64}\, 5}{20}\right]$$

$$= P[|Z| > 2]$$

$$= P[Z < -2] + P[Z > 2]$$



$$= 2\,P[Z > 2]$$ → x simmetria

ESERCITAZIONE 8 Trasformazioni lineari

ESERCIZIO 1

Si faccia riferimento all'**Esercizio 3** del **Foglio 5**.

Avendo acquistato 12 valvole, calcolare la probabilità che il loro diametro medio sia compreso tra 63.5 e 66.5.

(Risposta: 0.6528)

X v.c. misura diametro valvole $\sim N(65, 5.5276^2)$

$\bar{X}_{12}$ media campionaria

$$\bar{X}_{12} \sim N\left(65, \frac{5.5276}{\sqrt{12}}\right)$$

$$? \ P[63.5 \leq \bar{X}_n \leq 66.5]$$

$$= P\left[\frac{63.5-65}{\frac{5.5276}{\sqrt{12}}} \leq Z \leq \frac{66.5-65}{\frac{5.5276}{\sqrt{12}}}\right]$$

$$= P[-0.94 < Z \leq 0.94]$$

$= P[Z \leq 0.94] - P[Z \leq -0.94]$ → uguali × simmetria

$$= 2(P[Z \leq 0.94]) - 1 = (0.8264)2 - 1 = 0.6528$$

ESERCIZIO 2

Si faccia riferimento all'**Esercizio 2** del **Foglio 5**.

Si consideri un campione di 10 rondelle della prima scatola ed un campione di 12 rondelle della seconda scatola. Con quale probabilità la lunghezza media del diametro delle 10 rondelle è inferiore alla lunghezza media del diametro delle 12 rondelle?

(Risposta: 0.0749)

$$\bar{X}^{(1)}_{10} \sim N\left(2.1, \frac{\sqrt{0.04}}{\sqrt{10}}\right)$$

$$\bar{X}^{(2)}_{12} \sim N\left(2, \frac{\sqrt{0.01}}{\sqrt{12}}\right)$$

X v.c. diametro → $X_1 \sim N(2.1, \sqrt{0.04})$
→ $X_2 \sim N(2, \sqrt{0.01})$

$$? \ P[\bar{X}^{(1)}_{10} < \bar{X}^{(2)}_{12}]$$

$$= P[\underbrace{\bar{X}^{(1)}_{10} - \bar{X}^{(2)}_{12}}_{Y} < 0]$$

$Y \sim N(\mathbb{E}[X_2 - X_1],\ \sigma_2^2 + \sigma_1^2)$ var si somma sempre

$Y \sim N(0,\ 557.78)$

$\mathbb{P}[Y > 14]$

$= \mathbb{P}\left[Z > \frac{14}{\sqrt{557.78}}\right]$

$= \mathbb{P}[Z > 0.59]$

$= 1 - \mathbb{P}[Z \leq 0.59] = 1 - 0.7224 = 0.2776$

ESERCIZIO 4

Si considerino tre variabili casuali X_1, X_2, X_3, con distribuzione esponenziale di parametro rispettivamente pari a 1, 2 e 4, mutuamente non correlate.

1) Si calcolino media e varianza di $Y = X_1 + X_2 - X_3$.

2) Sono non correlate anche $U = 2X_1 - X_3$ e $V = X_1 + X_2 + X_3$? Motivare la risposta calcolando il coefficiente di correlazione.

3) Calcolare media e varianza di $U + V$.

4) Supponiamo ora che le variabili abbiano correlazione non nulla. Si calcolino media e varianza di $Y = X_1 + X_2 - X_3$ nel caso in cui il coefficiente di correlazione sia $\varrho(X_i, X_j) = 0.4$ per ogni $i, j = 1, 2, 3$ con $i \neq j$.

(Risposta: 1) $\frac{5}{4}$ e $\frac{21}{16}$ - 2) $\varrho(U, V) = 0.839$ - 3) $\frac{7}{2}$ e $\frac{37}{4}$ - 4) $\frac{5}{4}$ e $\frac{113}{80}$)

1) mutuam. non correlate $\rightarrow \text{cov}[X_i, X_j] = 0 \quad \forall\, i \neq j$

$Y = X_1 + X_2 - X_3$

? μ e var

$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2] - \mathbb{E}[X_3]$ esp. $\rightarrow \mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda}$

$= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$

$\text{var}[Y] = \text{var}[X_1] + \text{var}[X_2] + \text{var}[X_3] + \underset{\text{somma cov.}}{\underset{\downarrow}{0}}$ i coeff. elevati al quadrato

$= \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} = \frac{21}{16}$

2) $U = 2X_1 - X_3$

$V = X_1 + X_2 + X_3$

sono non correlate?

4) $Y = X_1 + X_2 - X_3$

$\rho(X_i, X_j) = 0.4 \quad \forall i,j$ non sono più non correlate

$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2] - \mathbb{E}[X_3] = \frac{5}{4}$

$var[Y] = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + 2cov[X_1, X_2] - 2cov[X_1, X_3] - 2cov[X_2, X_3]$

$\frac{cov[X_1, X_2]}{\sigma_1 \sigma_2} = 0.4$

ma $\sigma_1 = 1 \quad \sigma_2 = \frac{1}{2}$ (per l'espon. $var = \frac{1}{\lambda^2}$, $\sigma = \frac{1}{\lambda}$)

$cov[X_1, X_2] = \frac{1}{5}$

$cov[X_1, X_3] = \frac{1}{10}$

$cov[X_2, X_3] = \frac{1}{20}$

$var[Y] = \frac{113}{80}$

ESERCIZIO 5

Supponiamo che per ogni $i = 1, 2, 3$ X_i sia una variabile casuale con distribuzione normale di media μ_i e varianza σ_i^2 e che le variabili siano indipendenti.

1) Se $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 60$ e $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = 15$ calcolare $\mathbb{P}(X_1 + X_2 + X_3 \leq 200)$ e $\mathbb{P}(150 \leq X_1 + X_2 + X_3 \leq 200)$.

2) Usando medie e varianze del punto 1) calcolare $\mathbb{P}(\bar{X} \geq 55)$ e $\mathbb{P}(58 \leq \bar{X} \leq 62)$.

3) Usando medie e varianze del punto 1) calcolare $\mathbb{P}(-10 \leq X_1 - \frac{1}{2}X_2 - \frac{1}{2}X_3 \leq 5)$.

4) Se $\mu_1 = 40, \mu_2 = 50, \mu_3 = 60$ e $\sigma_1^2 = 10, \sigma_2^2 = 12, \sigma_3^2 = 14$ calcolare $\mathbb{P}(X_1 + X_2 + X_3 \leq 160)$ e $\mathbb{P}(X_1 + X_2 \geq 2X_3)$.

(Risposta: 1) 0.9986 e 0.9986 - 2) 0.9875 e 0.6266 - 3) 0.836 - 4) 0.9525 e 0.0003)

1) $\mathbb{P}[\underbrace{X_1 + X_2 + X_3}_{Y} \leq 200]$ $\qquad \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 60$, $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = 15$

$Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y)$

$\mu_Y = \mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2] + \mathbb{E}[X_3] = 180$

$$\mu_Y = \mathbb{E}[X_1] - \frac{1}{2}\mathbb{E}[X_2] - \frac{1}{2}\mathbb{E}[X_3] = 0$$

$$\sigma_Y = \sqrt{\sigma_1^2 + \frac{1}{4}\sigma_2^2 + \frac{1}{4}\sigma_3^2} = \sqrt{\frac{45}{2}} = 3\sqrt{\frac{5}{2}}$$

$$\mathbb{P}\left[\frac{-10-0}{3\sqrt{\frac{5}{2}}} < z \leq \frac{5-0}{3\sqrt{\frac{5}{2}}}\right]$$

$$= \mathbb{P}[-2.11 < z \leq 1.05]$$

$$= \mathbb{P}[z \leq 1.05] - \mathbb{P}[z < -2.11]$$

$$= 0.8531 - 1 + \mathbb{P}[z < 2.11]$$

$$= 0.8531 - 1 + 0.9826 = 0.836$$

4) $\mathbb{P}[\underbrace{X_1 + X_2 + X_3}_{Y} \leq 160]$

$$\mu_Y = \mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2] + \mathbb{E}[X_3] = 150$$

$$\sigma_Y = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2} = 6$$

$$\mathbb{P}\left[z \leq \frac{160-150}{6}\right]$$

$$= \mathbb{P}[z \leq 1.67] = 0.9525$$

$\mathbb{P}[\underbrace{X_1 + X_2 - 2X_3}_{Y} > 0]$

$$\mu_Y = \mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2] - 2\mathbb{E}[X_3] = -30$$

$$\sigma_Y = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 4\cdot\sigma_3^2} = \sqrt{78}$$

$$\mathbb{P}\left[z > \frac{0+30}{\sqrt{78}}\right]$$

$$= \mathbb{P}[z > 3.40] \simeq 0$$

$\hookrightarrow > 3$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 95 di 172

- Teorema

$$\boxed{\frac{\sum_{i=1}^{m} (x_i - \bar{x}_m)^2 / (m-1)}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}_n)^2 / (n-1)}} \sim F_{m-1,n-1} = \frac{S_m^2}{S_n^2}$$

DISTRIBUZIONE T DI STUDENT

Z v.c. normale standardizzata χ^2 v.c. chi-quadro con n gradi di libertà

Z, χ^2 indipendenti

$$\boxed{T = \frac{Z}{\sqrt{\chi^2/n}}} \sim T_n$$

$$T = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\frac{S_n}{\sqrt{n}}} \sim T_{n-1}$$