NUMERO: **2477A** ANNO: 2020

A P P U N T I

STUDENTE: Pieretto Letizia

MATERIA: Analisi 2 - Prof. Zanini, Quelali

ANALISI 2

quad. 1

SCATTO
ENERGIA CREATIVA

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 260

- **definizione**

$$\left.\begin{array}{l} \gamma_1 : [a,c] \to \mathbb{R}^n \\ \gamma_2 : [c,b] \to \mathbb{R}^n \end{array}\right\} \text{archi di curve}$$

γ_1 e γ_2 sono consecutivi se $\gamma_1(c) = \gamma_2(c)$

- **definizione**

una curva è piana se e solo se il suo sostegno Γ è contenuto in un piano

es.

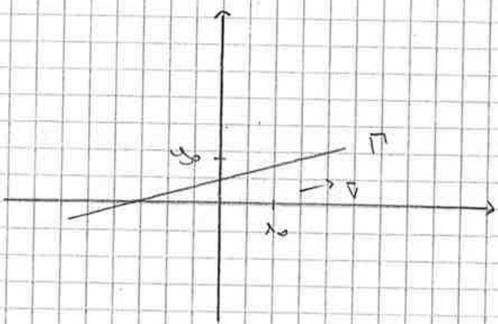
$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$t \in \mathbb{R}$ $\quad \bar{v} \neq 0 \quad P \in \mathbb{R}^2$

$P(x_0, y_0) \quad \bar{v}(a,b)$

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= (x_0, y_0) + t(a,b) \\ &= (x_0 + ta, y_0 + tb) \\ &= (x(t), y(t)) \end{aligned}$$ è la funzione

il sostegno è il disegno

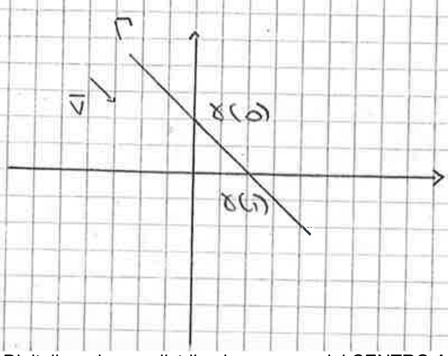


es.

$\gamma(t) = (t, 1-t) \qquad t \in \mathbb{R}$

$\gamma(0) = (0, 1)$

$\gamma(1) = (1, 0)$



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 5 di 260

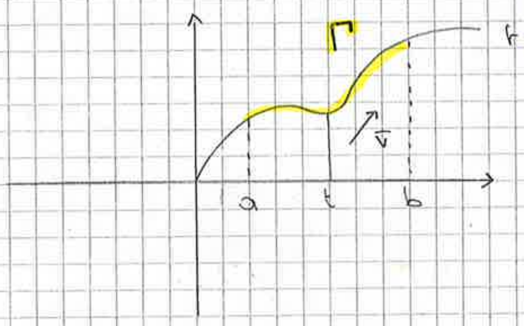
es.

$\gamma : [0, 3\pi] \to \mathbb{R}$

$t \mapsto (R\cos t, R\sin t)$

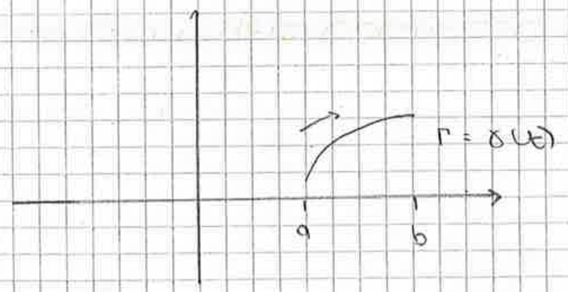
$\gamma(0) = (R, 0)$
$\gamma(3\pi) = (-R, 0)$ → non è una curva chiusa e non è semplice

- considero $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
  $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}$ arco di curva
  $t \mapsto (t, f(t))$
  $\gamma(a) = (a, f(a))$ e $\gamma(b) = (b, f(b))$

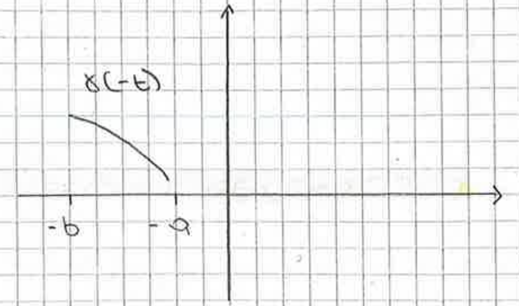


verso da $\gamma(a)$ a $\gamma(b)$, ho parametrizzato da sinistra a destra

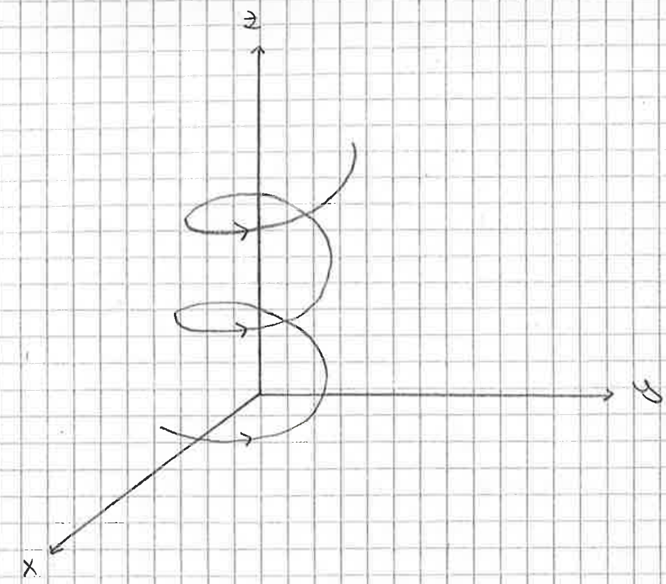
- per parametrizzare da destra a sinistra



ribalto rispetto all'asse y



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 7 di 260



- curva polare

$r : I \to [0, +\infty)$

$t \mapsto r(t)$ dove $r(t)$ è la distanza dall'origine

$\gamma : I \to \mathbb{R}^2$

$\gamma(t) = (r(t)\cos t, r(t)\sin t)$

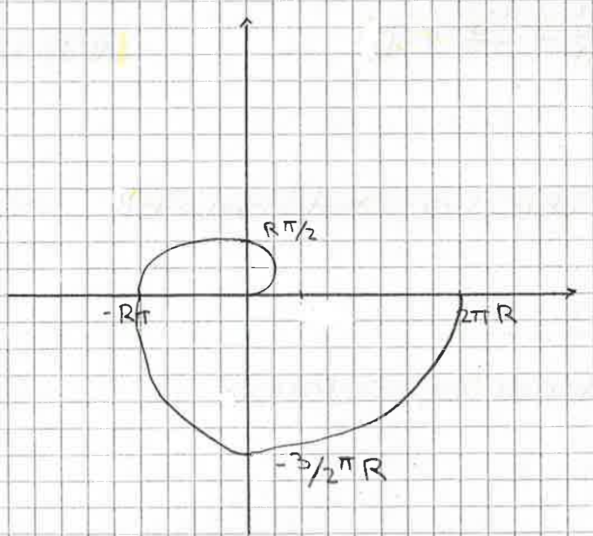
es. spirale di archimede

$r(t) = Rt$ $\quad R > 0$ perché devo avere l'immagine di r positiva

$I = [0, +\infty)$

$\gamma(t) = (Rt\cos t, Rt\sin t)$

$\gamma(0) = (0,0)$
$\gamma(\pi/2) = (0, R\pi/2)$
$\gamma(\pi) = (-R\pi, 0)$
$\gamma(3/2\pi) = (0, -R3\pi/2)$
$\gamma(2\pi) = (2R\pi, 0)$



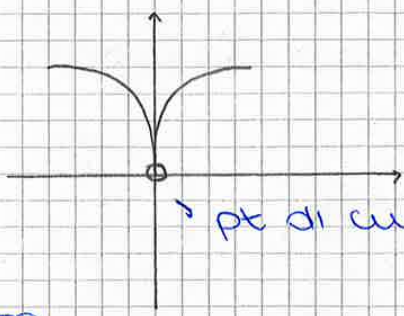
es.

$\gamma : [3,3] \to \mathbb{R}^2$
$\gamma(t) = (t^3, t^2)$

$x(t) = t^3 \qquad y(t) = t^2$

disegno Γ
$t = \sqrt[3]{x}$

$y = \sqrt[3]{x^2}$



regolare a tratti

pt di cuspide

$\gamma(0)$ non ammette retta tg

• **definizione**

$\gamma : I \to \mathbb{R}^n$
si dice **regolare se**

1) **γ è derivabile** in I **con derivata continua**, ciascuna $x_i : I \to \mathbb{R} : x_i \in C^1(I)$

2) il modulo del vettore tg, ovvero la velocità scalare, sia $\neq 0$

$\|\gamma'(t)\| \neq 0 \ \forall t \in I \iff \gamma'(t) \neq 0 \ \forall t \in I$

• **definizione**

$\gamma : I \to \mathbb{R}^n$
si dice **regolare a tratti** se I è unione di un n° finito di intervalli su cui la curva è regolare

es.

$f : I \to \mathbb{R}$
$[a,b] \subset I$

$\gamma(t) = (t, f(t))$
$\gamma'(t) = (1, f'(t))$

γ è regolare su $[a,b] \iff f \in C^1$ su $[a,b]$

TOPOLOGIA

· **definizione**

sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $P_0 \in \mathbb{R}^n$, un intorno di P_0 di raggio $R>0$ è una palla aperta

$$B_R(P_0) = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : \|\bar{x} - P_0\| < R\}$$

dove $\bar{x}(x_1, x_2 \dots x_n)$ e $P_0 = (x_0^1, x_0^2 \dots x_0^n)$

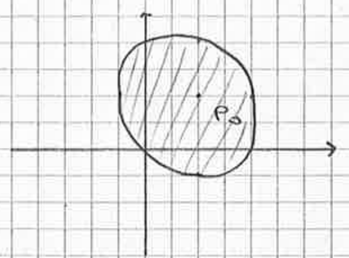
es.

in $\mathbb{R}$

$B_R(P_0)$ è l'insieme dei punti di $\mathbb{R}^n$ che distano meno di R da P_0

es.

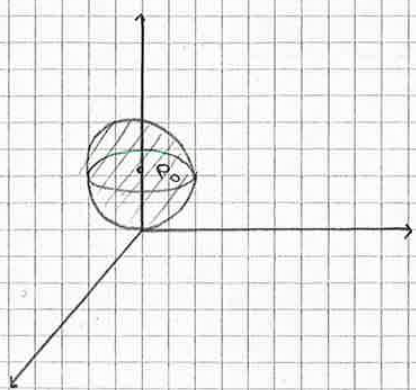
in $\mathbb{R}^2$



palla aperta

es.

in $\mathbb{R}^3$



sfera aperta

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 13 di 260

② esterno di Ω → $est(\Omega)$ o $int(\Omega^c)$

$est(\Omega) = \{P \in \mathbb{R}^n \,/\, P$ è esterno a $\Omega\}$

③ frontiera di Ω → $\partial\Omega$

$\partial\Omega = \{P \in \mathbb{R}^n \,/\, P$ è pt di frontiera di $\Omega\}$

④ chiusura di Ω → $\bar{\Omega}$

$\bar{\Omega} = \mathring{\Omega} \cup \partial\Omega$

⑤ Ω è aperto se $\forall P \in \Omega, \exists R > 0 : B_R(P) \subset \Omega$

osservazione

se Ω è aperto, $\Omega = \mathring{\Omega}$

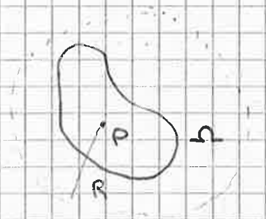
⑥ Ω è chiuso se Ω^c è aperto

osservazione

se Ω è chiuso, $\Omega = \bar{\Omega}$ e $\partial\Omega \subset \Omega$

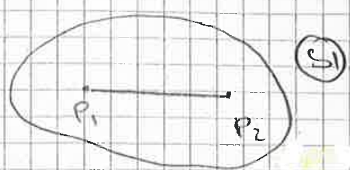
⑦ Ω è limitato se $\exists\, B_R$ aperta che lo contiene interamente

$\exists R > 0 : \Omega \subset B_R(P)$ $\quad P \in \Omega$

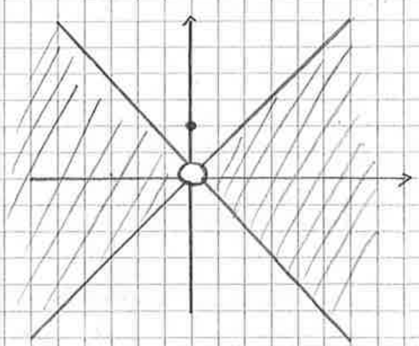


⑧ Ω è compatto se Ω è chiuso e limitato

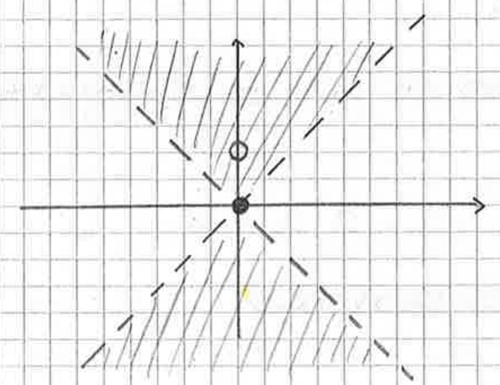
⑨ Ω è convesso se $\forall P_1, P_2 \in \Omega$, il segmento $\overline{P_1P_2}$ è tutto contenuto in Ω



Ω non è aperto perché ho la frontiera



per vedere se è chiuso studio Ω^c se è aperto



Ω^c non è aperto perché $(0,0)$ non è un pt interno

Ω non è né aperto, né chiuso

Ω non è convesso

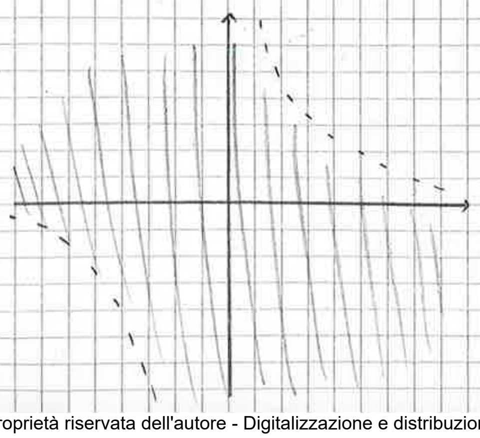
<u>es.</u>

$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ xy < 1\}$

$xy < 1$

$x=0$
$y=0$

se $x \neq 0$ $\begin{cases} x > 0 & y < 1/x \\ x < 0 & y > 1/x \end{cases}$



Ω è aperto, connesso per archi ma non convesso

FUNZIONI IN $\mathbb{R}^n$ A VALORI IN $\mathbb{R}$

- **definizione**

sia $\Omega \in \mathbb{R}^n$ e $\bar{x} \in \mathbb{R}$ con $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots x_n)$

una funzione di n variabili reali $x_1, x_2 \dots x_n$ a valori reali è una legge

$$f: \Omega \to \mathbb{R}$$

che associa ad ogni ad ogni punto $\bar{x}$ di Ω un numero reale

$f(\bar{x}) = f(x_1, x_2 \dots x_n)$

$\Omega = \text{dom} f = \{(x_1, \dots x_n) \in \mathbb{R}^n \,/\, f(x_1, \dots x_n) \exists \text{ in } \mathbb{R}\}$

$\text{im}(f) = \{f(x_1, \dots x_n) \in \mathbb{R} \,/\, (x_1, \dots x_n) \in \text{dom} f\}$

es.

$f(x,y) = x^2 + y^2$

$\text{dom} = \mathbb{R}^2$

es.

$f(x,y) = \dfrac{x^2 - 4y^2}{x^2 + y^2}$

$\text{dom} = \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$

es.

$f(x,y,z) = \log(x+y+z)$

$x + y + z > 0$

dom è un semispazio aperto, convesso e connesso

es.

$f(x,y,z) = xyz + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}$

$x \neq 0$ (tolgo i vari piani)

$y \neq 0$ è limitato, non è né convesso né connesso

$z \neq 0$

FUNZIONI IN 2 VARIABILI

- definizione

sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ il grafico della funzione $f: \Omega \to \mathbb{R}$ è l'insieme

$graf(f) = \{(\bar{x}, f(\bar{x})) \in \mathbb{R}^{n+1} : \bar{x} \in \Omega\}$

con $\bar{x} = (x_1 \dots x_n) \in \Omega$

es.

$f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$graf(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (x,y) \in \Omega, z = f(x,y)\}$

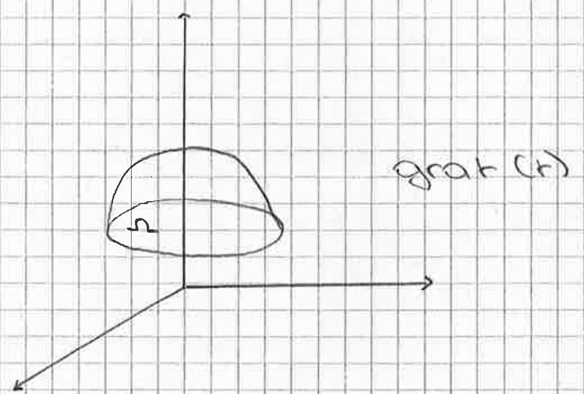
es.

$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

$z = \pm\sqrt{R^2 - y^2 - x^2}$

$f(x,y) = \sqrt{R^2 - y^2 - x^2}$ considero semisfero superiore

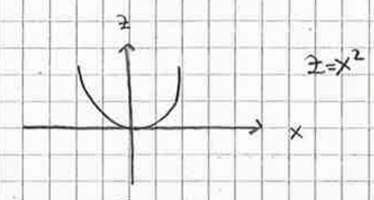
$x^2 + y^2 \leq R^2$



es.

$z = f(x,y) = x^2 + y^2$

se $y = 0$



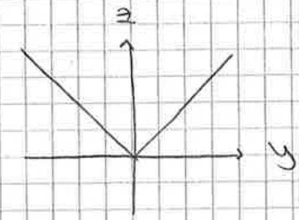
se $x = 0$

le curve di livello devono stare sempre sul piano

<u>es.</u>

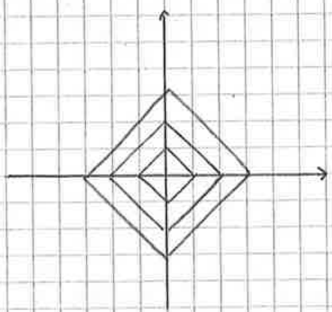
$f(x,y) = |x| + |y|$

$x = 0 \rightarrow z = |y|$



- $c < 0 \rightarrow \Gamma_c = \emptyset$
- $c = 0 \rightarrow \Gamma_0 = \{(0,0)\}$
- $c > 0 \rightarrow \Gamma_c = \{(x,y) \subset \mathbb{R}^2 \,/\, |x| + |y| = c\}$

$|y| = c - |x|$



$|x| + |y| = c$

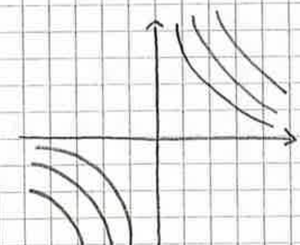
<u>es.</u>

$f(x,y) = xy$

$\Gamma_c = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, xy = c\}$

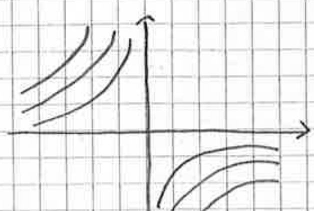
- $c = 0 \rightarrow xy = 0$
- $c > 0 \rightarrow xy = c$

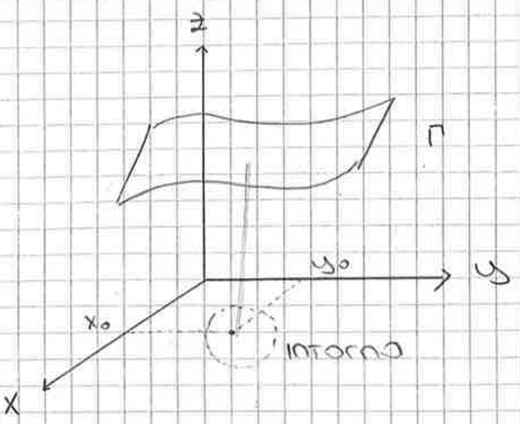
  $y = \dfrac{c}{x}$



- $c < 0 \rightarrow xy = c$

  $y = \dfrac{c}{x}$





es.

$$f(x,y) = \frac{x y^2}{4x^2 + y^4}$$

$dom(f) = \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$

↳ pt di accumulazione

1) $f(x,y)\Big|_{y=0} = f(x,0)$

$$\lim_{(x,0)\to(0,0)} = 0$$

2) $f(x,y)\Big|_{x=0} = f(0,y)$

$$\lim_{(0,y)\to(0,0)} = 0$$

3) $f(x,y)\Big|_{y=mx} = \frac{x m^2 x^2}{4x^2 + m^4 x^4} = \frac{m^2 x}{4 + m^4 x^2}$

$$\lim_{(x,mx)\to(0,0)} \frac{m^2 x}{4 + m^4 x^2} = 0$$

4) $f(x,y)\Big|_{y^2=x} = \frac{y^4}{4y^4 + y^4}$ (cerco una fz. per avere lo stesso grado di x e y)

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{\rho^3 \cos^3\theta}{\rho^2 \cos^2\theta + \rho^2 \sin^2\theta}$$

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{\rho^{\cancel{3}} \cos^3\theta}{\cancel{\rho^2}}$$

siccome $|\cos^3\theta| \leq 1$ e $\rho \geq 0$

$|\rho \cos^3\theta| \leq \rho$

per il teorema del confr.

$$\lim_{\rho \to 0} \rho \cos^3\theta = 0$$

- **definizione**

$f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$g : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

dove $f(\Omega) \subset I$

$g \circ f : \mathrm{dom}(g \circ f) \to \mathbb{R}$

dove $\mathrm{dom}(g\circ f) = \{ \bar{x} \in \Omega \;/\; f(\bar{x}) \in I \}$

$$\underbrace{\Omega \xrightarrow{f} f(\Omega) \subset I \xrightarrow{g} \mathbb{R}}_{g \circ f}$$

proposizione

se f e g sono continue, rispettivamente in Ω e in I, $g \circ f$ è continua su $\mathrm{dom}(g\circ f)$

es.

$$f(x,y) = \begin{cases} \log\left(\dfrac{\arctan(xy)}{xy}\right) & xy \neq 0 \\ 0 & xy \neq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \log\Big(\underbrace{\frac{\arctan(xy)}{xy}}_{1}\Big) = 0$$ è continua nell'origine

senza definizione

$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = x2y$ → pa sost. (x_0, y_0)

- definizione

sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $\bar{x}_0$ pt interno a Ω

$f: \Omega \to \mathbb{R}$ si dice derivabile in $\bar{x}_0$ se ammette tutte le derivate parziali prime in quel punto

l'∃ non garantisce però la continuità

- definizione

sia $\Omega \in \mathbb{R}^n$ e $\bar{x}_0$ pt interno a Ω

supponiamo che $f: \Omega \to \mathbb{R}$ ammetta derivate parziali prime in $\bar{x}_0$, rispetto a tutte le variabili. il vettore di $\mathbb{R}^n$ che ha come componenti le derivate parziali prime di f in $\bar{x}_0$, si dice gradiente di f in $\bar{x}_0$

$$\boxed{\nabla f(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{x}_0)\right)}$$

es.

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & xy = 0 \\ 0 & xy \neq 0 \end{cases}$$

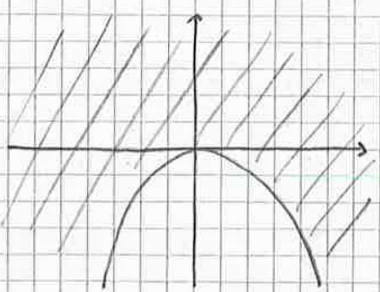
$\nabla f(0,0) = (0,0)$

es.

$f(x,y) = \log(x^2 + 4y)$

dom (f) = $y > -\frac{1}{4}x^2$

aperto, illimitato, connesso e non convesso



$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{2x}{x^2+4y}, \frac{4}{x^2+4y}\right)$$

es.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

è continua nell'origine?

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)\Big|_{y=x^2} = \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{4}$$

non è contin.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)\Big|_{y=mx} \quad \frac{x^2 mx}{x^4+m^2x^2} = 0$$

se uso def., prendo $\bar{v} = (a,b) \,/\, a^2+b^2=1$ (versore)

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{v}}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+t(a,b)) - \overbrace{f(0,0)}^{0}}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{f(\overbrace{ta}^{x}, \overbrace{tb}^{y})}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \frac{t^2a^2\, tb}{t^4a^4 + t^2b^2}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{\cancel{t}} \frac{\cancel{t^2}(a^2 \cancel{t}b)}{\cancel{t^2}(t^2a^4+b^2)}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{a^2 b}{t^2a^4+b^2} \longrightarrow \begin{cases} 0 & b=0 \\ \dfrac{a^2}{b} & b\neq 0 \end{cases}$$

$\exists$ deriv. direz., ma f non è continua

FUNZIONI DIFFERENZIABILI

· **definizione**

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \Omega$ e pt interno

$f: \Omega \to \mathbb{R}$ si dice differenziabile in x_0 se $\exists$ un'applicazione lineare $d_{x_0}f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tale che

$$\lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} \frac{f(\bar{x}) - f(\bar{x}_0) - d_{x_0}f(\bar{x} - \bar{x}_0)}{\|\bar{x} - \bar{x}_0\|} = 0$$

$d_{x_0}f$ si dice differenziale di $f(\bar{x}_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\,dy$

osservazione

se f ammette derivate parziali continue in un intorno di $\bar{x}_0$, allora f è differenziabile in $\bar{x}_0$

osservazione

se f è differenziabile in $\bar{x}_0$, allora

$$d_{x_0}f(\bar{x} - \bar{x}_0) = \nabla f(\bar{x}_0)(\bar{x} - \bar{x}_0)$$

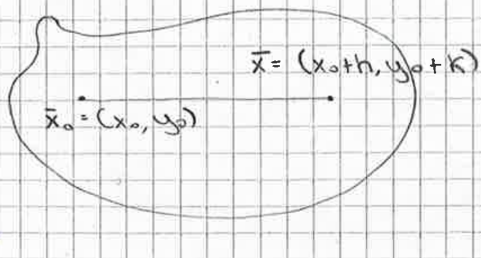
· **definizione**

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ con $\bar{x}_0 \in \Omega$ pt interno

$f: \Omega \to \mathbb{R}$ si dice differenziabile in $\bar{x}_0$ se $\exists\ \nabla f(x_0)$ e per $\bar{x} \to \bar{x}_0$

$$f(\bar{x}) = f(\bar{x}_0) + \nabla f(\bar{x}_0)(\bar{x} - \bar{x}_0) + o(\|\bar{x} - \bar{x}_0\|)$$

es. caso particolare $\mathbb{R}^2$



$\bar{x} - \bar{x}_0 = (h, k)$

$\|\bar{x} - \bar{x}_0\| = \sqrt{h^2 + k^2}$

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)(h, k) + o\left(\sqrt{h^2 + k^2}\right)$$

$X - P = (\bar{x} - \bar{x}_0, z - f(\bar{x}_0))$

$(X-P)\underbrace{(-\nabla f(\bar{x}_0), 1)}_{N} = 0$

vettore normale al piano

piano $\rightarrow (X-P)N = 0$

- definizione

se $\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x})$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x})$ viste come funzioni in 2 variabili sono continue in $(\bar{x}_0)$ allora f è differenziabile in $(\bar{x}_0)$

- definizione

se il grafico della funzione ammette il piano unico e non verticale in $\bar{x}_0$ allora f è differenziabile

es.

$f(x,y) = x^4 y$

$\bar{x}_0 = (1, 1/2)$

? derivata direz. con $\bar{v} = (-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ versore

$x_0 + t\bar{v} = (1, 1/2) + t(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$

$= (1 - t\sqrt{2}/2, 1/2 + t\sqrt{2}/2)$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \lim_{t \to 0} \frac{f(\bar{x}_0 + t\bar{v}) - f(\bar{x}_0)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f(1 - t\sqrt{2}/2, 1/2 + t\sqrt{2}/2) - f(1, 1/2)}{t}$$

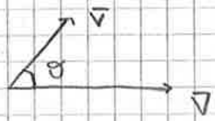
$$= \lim_{t \to 0} \frac{(1 - t\sqrt{2}/2)^4 (1/2 + \sqrt{2}/2) - 1/2}{t}$$

$(1+t)^\alpha = 1 + \alpha t + o(t)$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 35 di 260

• definizione

$$\frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x}_0) = \nabla f(\bar{x}_0)\,\bar{v} = \|\nabla f(x_0)\|\,\|\bar{v}\| \cos\theta$$



la derivata direzionale è max quando $\bar{v}$ e ∇f stanno nella stessa direzione e verso. è nulla quando $\bar{v} \perp \nabla f$

• teorema : condizioni sufficienti per la differenziazione

sia $f: \Omega \to \mathbb{R}$ con $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $\bar{x}_0 \in \Omega$ pt interno
se f è differenziabile in $\bar{x}_0$, allora

1) f è continua in $\bar{x}_0$

2) $\exists$ derivate parziali in $\bar{x}_0$

3) $\forall\, \bar{v}$ versore $\bar{v} \neq \bar{0}$, $\exists\ \frac{\partial f}{\partial v} = \nabla f(\bar{x}_0) \cdot \bar{v}$

4) $d_x f = \nabla f(\bar{x}_0)$

5) con $n=2$ e $\bar{x}_0 = (x_0, y_0)$, esiste il piano tg al grafico in $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ e ha eq.
$z = f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0)(x - x_0, y - y_0)$

DERIVATE SECONDE

• definizione

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\bar{x}_0 \in \Omega$ pt interno
$f: \Omega \to \mathbb{R}$
se f è derivabile rispetto a x_i (componente i-esima di x_0) in un intorno di $\bar{x}_0$ e inoltre la funzione $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x})$ è a sua volta derivabile rispetto a x_j in un intorno di $\bar{x}_0$, si dice che f ammette in $\bar{x}_0$ derivata parziale seconda rispetto a x_i e x_j

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\bar{x}_0) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}_0)\right)}$$ derivata seconda

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 3x^2 - \sin(xy)xy + \cos(xy)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 3x^2 - \sin(xy)xy + \cos(xy)$$

derivata seconda mista
↓
è continua, quindi coincidono

· **matrice hessiana**

definizione

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $\bar{x}_0$ pt interno di Ω
se $f: \Omega \to \mathbb{R}$ ha tutte le derivate parziali seconde in $\bar{x}_0$, si dice matrice hessiana di f in $\bar{x}_0$, la matrice $n \times n$

$$\boxed{Hf(x_0) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)} \quad i=j=1 \dots n$$

se $n=2$

$$Hf(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\bar{x}_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\bar{x}_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} \end{pmatrix}$$

es.

$f(x,y) = x^2 e^y - xy^2$
$P(2,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x e^y - y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 e^y - 2xy$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2e^y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^2 e^y - 2x$$

$$Hf(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 14 \end{pmatrix}$$

$$f(x,y) = f(1,1) + \nabla f(1,1)(x-1, y-1) + \tfrac{1}{2}(x-1, y-1)\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 14 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} + o(\|(x,y)-(1,1)\|^2)$$

$$= 5 + (4,8)(x-1, y-1) + \tfrac{1}{2}(x-1, y-1)\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 14 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} + o(\|(x,y)-(1,1)\|^2)$$

$$= 5 + 4x - 4 + 8y - 8 + \tfrac{1}{2}(2(x-1) + 2(y-1),\ 2(x-1) + 14(y-1))\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} + o(\|(x,y)-(1,1)\|^2)$$

$$= 4x + 8y - 7 + ((x-1)^2 + 7(y-1)^2 + (x-1)(y-1) + (y-1)(x-1)) + o(\|(x,y)-(1,1)\|^2)$$

$$= 4x + 8y - 7 + 2(x-1)(y-1) + (x-1)^2 + 7(y-1)^2 + o(\|(x,y) - (1,1)\|^2)$$

FUNZIONI A VALORI VETTORIALI

• **definizione**

una funzione a valori vettoriali è una funzione

$F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

definita da

$F(\bar{x}) = (f_1(\bar{x}), f_2(\bar{x}) \dots f_m(\bar{x}))$ con $\bar{x} = (x_1, \dots x_n)$

dove le funzioni

$f_i : \Omega_i \to \mathbb{R}$ $\quad \Omega \in \mathbb{R}^n$ $\quad i = 1, 2 \dots m$ si dicono componenti

$\mathrm{dom}(F) = \bigcap_{i=1 \dots m} \Omega_i$ intersezione di tutti i domini

es.

$$F(x,y) = \left(\sqrt{1-xy},\ \frac{e^{-x^2}}{x+y}\right)$$

$\mathrm{dom}(F) \to \mathbb{R}^2$

quindi

$$\lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} F(\bar{x}) \iff \lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} f_i(\bar{x}) = l_i \in \mathbb{R} \quad \forall i = 1 \dots m$$

- **derivabilità**

si dice che F è derivabile in $\bar{x}_0$ pt interno al dom(F) secondo un versore $\bar{v} \neq \bar{0}$ se lo sono tutte le funzioni componenti

- **definizione**

la **matrice jacobiana** di F è la matrice **m x n** che ha come righe i gradienti delle funzioni componenti di F

$$\boxed{JF(\bar{x}) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)} \qquad \begin{matrix} j = 1 \dots n \\ i = 1 \dots m \end{matrix}$$

es.

$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$F(x, y, z) = (x y^2 z, y z^2)$

$$JF(\bar{x}) = \begin{pmatrix} y^2 z & 2xyz & xy^2 \\ 0 & z^2 & 2yz \end{pmatrix}$$

- **definizione** (caso particolare)

una funzione di più variabili a valori vettoriali

$F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

si dice **campo vettoriale**

$JF(\bar{x})$ è quadrata e il suo **det** si chiama **jacobiano**

- **definizione**

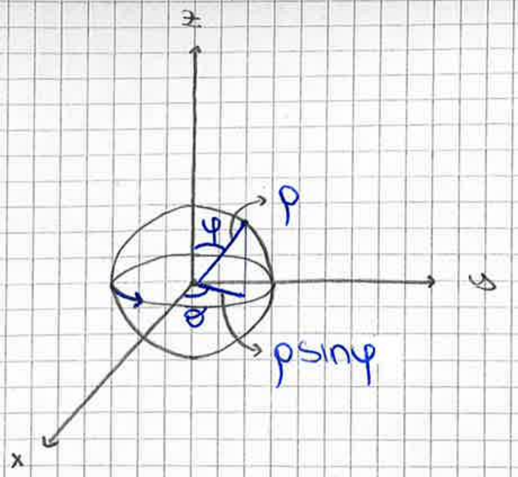
F si dice differenziabile in $\bar{x}_0$ se ogni funzione componente lo è

se f_i è differenziabile $(i = 1 \dots m)$

$$f_i(\bar{x}) = f_i(\bar{x}_0) + \nabla f_i(\bar{x}_0)(\bar{x} - \bar{x}_0) + o(\|\bar{x} - \bar{x}_0\|) \qquad \bar{x} \to \bar{x}_0$$

$$\boxed{F(\bar{x}) = F(\bar{x}_0) + \underbrace{JF(\bar{x}_0)(\bar{x} - \bar{x}_0)}_{d_{\bar{x}_0}F(\bar{x} - \bar{x}_0)} + o(\|\bar{x} - \bar{x}_0\|)} \qquad \bar{x} \to \bar{x}_0$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 43 di 260



$x = \rho \sin\varphi \cos\theta$
$y = \rho \sin\varphi \sin\theta$

$$\boxed{F(\rho, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \rho \sin\varphi \cos\theta \\ \rho \sin\varphi \sin\theta \\ \rho \cos\varphi \end{pmatrix}}$$ coord. sferiche

$\det(JF(\rho, \theta, \varphi)) = -\rho^2 \sin\varphi$

- definizione

$G: \text{dom}(G) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$
$F: \text{dom}(F) \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$

$$\underbrace{\mathbb{R}^n \xrightarrow{G} \mathbb{R}^m \xrightarrow{F} \mathbb{R}^p}_{F \circ G}$$

$G(\text{dom}\, G) \subset \text{dom}\, F$

$F \circ G: \text{dom}(F \circ G) \to \mathbb{R}^p$

$\bar{x}_0 \in \text{dom}\, G$
$\bar{y}_0 = G(\bar{x}_0) \in \text{dom}\, F$

- regola della catena

$$\boxed{J(F \circ G)(\bar{x}_0) = JF(\bar{y}_0) \cdot JG(\bar{x}_0)}$$

ESERCIZI LIMITI e DOMINI

5.10

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{y^2 \log(x)}{(x-1)^2+y^2}$$

dom f = $x>0 \setminus \{1,0\}$
↳ pt di accumulaz.

uso coord. polari

$$\begin{cases} x = 1+\rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$ perché sono in $(1,0)$

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2 \sin^2\theta \log(1+\overbrace{\rho\cos\theta}^{\to 0})}{(\cancel{1}+\cancel{\rho}\cos\theta-\cancel{1})^2+\cancel{\rho^2}\sin^2\theta}$$

siccome $\log(1+t) \to t + o(t)$ $\quad t\to 0$

$$\lim_{\rho\to 0} \sin^2\theta(\rho\cos\theta + o(\rho\cos\theta))$$

$$\lim_{\rho\to 0} \rho[\sin^2\theta\cos\theta + o(\sin^2\theta\cos\theta)] = 0 \quad \forall\theta$$

6

stabilire per quali α il lim $\exists$ in $\mathbb{R}$

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{(x^2-2x+1)y}{((x-1)^2+y^2)^\alpha}$$

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{(x-1)^2 y}{((x-1)^2+y^2)^\alpha}$$

dom (f) = $\mathbb{R}^2 \setminus \{1,0\}$
↳ pt di accumulaz.

$$\begin{cases} x = 1+\rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

ESERCIZI CALCOLO DIFFERENZIALE

1

$$f(x) = \begin{cases} x & y=0 \\ 0 & y\neq 0 \end{cases}$$

? $\nabla f(0,0)$

uso la definizione

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h-0}{h} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}$$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{0-0}{k} = 0$$

$\nabla f(0,0) = (1,0)$

5.3

$f(x,y) = \sin x \cos y$

$(x_0,y_0) = (0,0)$

? piano tg in x_0

$\nabla f(x,y) = (\cos x \cos y, -\sin x \sin y)$

$\nabla f(0,0) = (1,0)$

$f(0,0) = 0$

$z = 0 + (1,0)(x,y)$

$z = x$

II metodo $\to$ $\boxed{\text{Taylor}}$ [quando ho prodotto e somma in un unica variabile x, y]

$\sin x = x + o(x)$

$\cos y = 1 + \frac{1}{2} y^2 + o(y^2)$

calcolo ∇f

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\cancel{h}} h^{\cancel{2}} \cos \frac{1}{h^2} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{k \to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k}$$

$$= \lim_{k \to 0} \frac{1}{\cancel{k}} k^{\cancel{2}} \cos \frac{1}{k} = 0$$

$f(0,0) = 0$

$\nabla f(0,0) = 0$

è differenziabile se lim = 0

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \nabla f(0,0)(x-0, y-0)}{\|(x-0, y-0)\|}$$

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{(x^2+y^2) \cos \frac{1}{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \sqrt{x^2+y^2} \cos \frac{1}{x^2+y^2} = 0$$ è differenz.

1) $\begin{cases} x=0 \\ y(1-x^2)=0 \end{cases} \Rightarrow (0,0)$

2) $\begin{cases} y=1 \\ y(1-x^2)=0 \end{cases} \Rightarrow (-1,1)\ (1,1)$

3) $\begin{cases} y=-1 \\ y(1-x^2)=0 \end{cases} \Rightarrow (-1,-1)\ (1,-1)$

ho 5 pt stazionari

es.

$f(x,y,z) = 2x + 3y - 4$

$\nabla f(2,3,0) \neq (0,0,0) \rightarrow$ i pt sono tutti regolari

es.

$f(x,y) = x^2 + 2x + 2y^2 - 4y$

$\nabla f(x,y) = (2x+2,\ 4y-4)$

$\begin{cases} 2(x+1)=0 \\ 4(y-1)=0 \end{cases}$

$\begin{cases} x=-1 \\ y-1=0 \end{cases} \Rightarrow (-1,1)$ pt staz.

II metodo $\rightarrow$ individuo i quadrati di binomio

$f(x,y) = x^2+2x+1-1+2(y^2-2y+1)-2$

$= (x+1)^2 + 2(y-1)^2 - 3$

$\hookrightarrow$ si ann. in $(-1,1)$

$\downarrow$

ho trovato un pt stazionario

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 53 di 260

es.

$$f(x,y) = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 3x^2 - 3y^2 + 1$$

$$\nabla f(x,y) = (4x^3 + 4xy^2 - 6x,\ 4y^3 + 4yx^2 - 6y)$$

$$\begin{cases} 2x(2x^2+2y^2-3) = 0 \\ 2y(2y^2+2x^2-3) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ (2y^2+2x^2-3)y = 0 \end{cases} \Rightarrow (0,0)$$

$2y^2 + 2x^2 = 3$ è una circonf.

↓

infiniti pt staz. sul bordo

• definizione

$\nabla f(x_0, y_0) = 0$ (se no pt staz.)

nel caso in cui $Hf(x_0, y_0)$ sia simmetrica, è anche diagonalizzabile → calcolo gli autovalori

diagonalizzazione matrice Hessiana

$$(x-x_0,\ y-y_0)\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{z = \lambda_1 (x-x_0)^2 + \lambda_2 (y-y_0)^2}$$ forma quadratica in forma canonica

osservaz.

1) $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ f. quadratica positiva → pt di min

2) $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ f. quadratica negativa → pt di max

3) $\lambda_1 \lambda_2 < 0$ f. quadratica indefinita → pt di sella

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 6-6xy & -3x^2 \\ -3x^2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \lambda_1, \lambda_2 > 0 \quad (0,0) \text{ pt min}$$

$$Hf(\sqrt{2},\sqrt{2}) = Hf(-\sqrt{2},-\sqrt{2}) = \begin{vmatrix} -6 & -6 \\ -6 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\det = \lambda^2 + 4\lambda - 48$$

no cambio   si cambio

$\lambda_1 \lambda_2 < 0$ $(\sqrt{2},\sqrt{2})$ e $(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$ pt di sella

· **Teorema**

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) \in \Omega$

$f: \Omega \to \mathbb{R}$ di classe C^2 in un intorno di (x_0, y_0)

supponiamo $\nabla f(x_0,y_0) = 0$

sia $Hf(x_0,y_0)$ la matrice hessiana

$$Hf(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

1) $\det > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$, P_0 pt di min relativo

2) $\det > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$, P_0 pt di max relativo

3) $\det < 0$, P_0 è un pt di sella

4) $\det = 0$ non possiamo dire nulla

es.

$f(x,y) = x^2 + y^2 - \alpha xy$

$(x_0, y_0) = (0,0)$

? α per cui ho pt min

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 57 di 260

es.

$f(x,y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2$

$\nabla f = (6x^2 - 6y, -6x + 6y)$

$$\begin{cases} 6(x^2 - y) = 0 \\ 6(y - x) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow (0,0)$$

$$\begin{cases} x^2 - x = 0 \\ x = y \end{cases} \quad \begin{cases} x(x-1) = 0 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow (1,1)$$

$$Hf = \begin{pmatrix} 12x & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$$

$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$ det $= -36 < 0$ pt sella

$Hf(1,1) = \begin{pmatrix} 12 & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$ det $= 36 > 0$, $12 > 0$ pt min

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 59 di 260

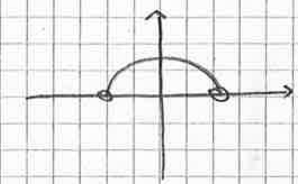
$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ → circonferenza, curva di livello ma non è una funzione

parametrizzo

$\gamma(t)=(3\cos t, 2\sin t)$ $\quad\gamma:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2$

$y=\pm\sqrt{4-\frac{x^2 4}{9}}$

• considero (x_0,y_0) con $y_0>0$

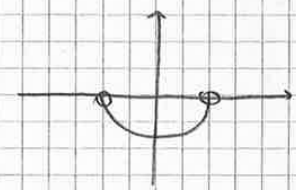


$\varphi_1(x)=2\sqrt{1-x^2/9}$

↓

funzione che soddisfa l'eq $f(x,\varphi_1(x))=0$ con $\varphi_1=y_0$ → sì, unica e definita in un intorno di x_0

• considero (x_0,y_0) con $y_0<0$



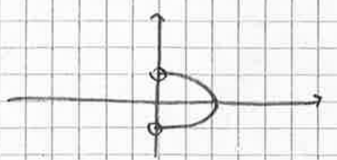
$\varphi_2(x)=-2\sqrt{1-x^2/9}$

• considero $y_0=0$

↓

nell'intorno di -3 e 3 non trovo una f continua

• considero (x_0,y_0) con $x_0>0$



$x=3\sqrt{1-y^2/4}$

$\psi_3(y)=3\sqrt{1-y^2/4}$

es.

$f(x,y)=e^{xy}+\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}-1$

$f(x,y)=0\to(x,y)=(0,0)$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 61 di 260

1) $\varphi(x_0) = y_0 = \text{Im}(x)$
2) $f(x, \varphi(x)) = 0$
3) $\varphi(x)$ è di classe C^1 su I e

$$\boxed{\varphi'(x) = \frac{-\dfrac{\partial f(x,\varphi(x))}{\partial x}}{\dfrac{\partial f(x,\varphi(x))}{\partial \varphi(x)}}} \quad \forall x \in I$$

→ funzione unica

OSS.

in un intorno di (x_0, y_0) l'insieme degli zeri di f, coincide con il grafico di φ

es.

$$e^{xy} + \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1$$

verifico le HP

$f(0,0) = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = xe^{xy} + \frac{2y}{9}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0 \rightarrow \text{non valgono le HP}$$

es.

mostrare che in un intorno di $(0,2)$, l'eq. $xe^y + 2(x-1)(y-2) = 0$ definisce una $y = \varphi(x)$

? $\varphi'(0)$

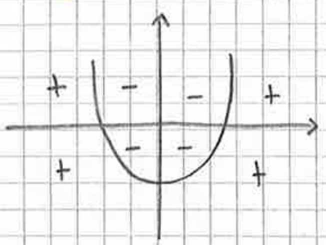
$f(x,y) = xe^y + 2(x-1)(y-2)$

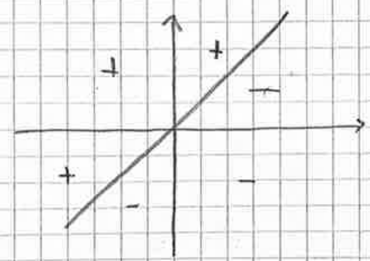
$f(0,2) = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = xe^y + 2(x-1)$$

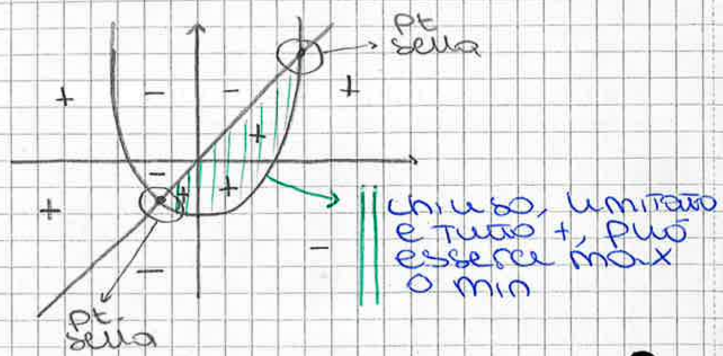
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,2) = -2 \neq 0 \rightarrow \text{valgono le HP}$$

$y < x^2 - 2$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $y > x$





$$\begin{cases} y = x \\ (x+1)(x-2) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} (1, -1) \\ (2, 2) \end{matrix}$$



$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x(y-x) + (-x^2+2+y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = (x-y) + (x^2-2-y)$$

sommo le 2 eq

$$\begin{cases} 2x(y-x) - (y-x) = 0 \\ 2x(y-x) - (x^2-2-y) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (y-x)(2x-1) = 0 \\ 2x(y-x) - (x^2-2-y) = 0 \end{cases}$$

I) $\begin{cases} y = x \\ -(x^2-2-y) = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} y = x \\ (x+1)(x-2) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} (-1, -1) \\ (2, 2) \end{matrix}$

II) $\begin{cases} x = 1/2 \\ y - 1/2 - (1/4 - 2 - y) = 0 \end{cases} \rightarrow (1/2, -5/8)$

calcolo matrice hessiana

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -6x + 2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 65 di 260

I) $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow (0,0)$

II) $\begin{cases} x^2 = 3y^2 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow (0,0)$

III) $\begin{cases} x^2 = 3y^2 \\ y^2 = 3x^2 \end{cases} \rightarrow (0,0)$

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 12y^2 & -24xy \\ -24xy & -12x^2 + 12y^2 \end{pmatrix}$$

$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ det = 0 → non posso dire nulla

$f(0,0) = 0$

$\left.\begin{array}{l} f(x,0) = x^4 \geq 0 = f(0,0) \\ f(0,y) = y^4 \geq 0 = f(0,0) \end{array}\right]$ det. di min

$f(x,x) = -4x^4 \leq 0 = f(0,0)$ → non è un min

$(0,0)$ → pt sella

10.1

Sviluppo di Taylor del 2° ordine in $(0,0)$

$f(x,y) = e^{xy} \cos y$

$e^{xy} = 1 + xy + \underbrace{1/2\,(xy)^2}_{\rightarrow\, 4° \text{ grado} \,\rightarrow\, \text{NO}} + o(xy)$

$\cos y = 1 - 1/2\, y^2 + o(y^2)$

$f(x,y) = (1 + xy)(1 - 1/2\, y^2) + o(x^2 + y^2)$

$= 1 - 1/2\, y^2 + xy + o(x^2 + y^2)$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, \varphi(x,y))}{\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, \varphi(x,y))}}$$

es.

$f(x,y,z) = (x+y)^2 + (x+z)^2 + (y+z)^2 - 2z^6 + x^2 - y^2$

verificare che l'eq. definisce implicitamente una funzione di due variabili $z = \varphi(x,y) \in C^1$ / $\varphi(0,0) = 1$

valgono le HP?

$x_0 = 0,\ y_0 = 0,\ z_0 = 1$

$f(0,0,1) = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2(x+z) + 2(y+z) - 12z^5$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0) = -8 \neq 0 \quad \to \text{SI}$$

applico il teorema del dini

$\exists\, B_r(0,0)$ dove $\exists$ un'unica $\varphi : B_r(0,0) \to \mathbb{R}$

1) $\varphi(0,0) = 1$

2) $f(x, y, \varphi(x,y)) = 0$

3) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2(x+y) + 2(x+z) + 2x$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0,1) = 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2(x+y) + 2(y+z) - 2y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0,1) = 2$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 69 di 260

$y = \varphi(1) + \varphi'(1)(x-1) = -x+2$

calcolo $\varphi''(x)$ → IMPORTANTE

$f(x, \varphi(x)) = x^3 + x + \varphi(x) + \varphi^3(x) - 4 = 0$

$$\frac{d f(x,\varphi(x))}{dx} = 3x^2 + 1 + \varphi'(x) + 3\varphi^2(x)\varphi'(x) = 0$$

$4 + 1 + \varphi'(1) + 3\varphi^2(1)\varphi'(1) = 0$

$\varphi'(1) = -1$ (ho ottenuto lo stesso risultato)

$$\frac{d^2 f(x,\varphi(x))}{dx^2} = 6x + \varphi''(x) + 6\varphi(x)\varphi'(x)\varphi'(x) + 3\varphi^2(x)\varphi''(x) = 0$$

$6 + \varphi''(1) + 6\varphi(1)\varphi'(1)\varphi'(1) + 3\varphi^2(1)\varphi''(1) = 0$

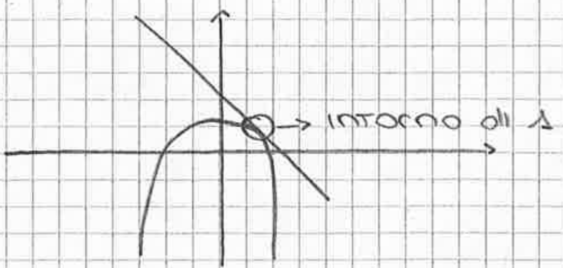
$\varphi''(1) = -3$

commento

$$\varphi(x) = \varphi(x_0) + \varphi'(x_0)(x-x_0) + \varphi''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2} + o((x-x_0)^2)$$

$\varphi(x) = 1 - (x-1) - \frac{3}{2}(x-1)^2 + o((x-1)^2) \qquad x \to 1$

$\varphi(x) = \underbrace{-x+2}_{\text{retta tg}} - \frac{3}{2}(x-1)^2 + o((x-1)^2) \qquad x \to 1$



$\varphi(x)$ nell' I di 1 è concava, decrescente e positiva

es.

determinare tutti i valori di $y_0 \in \mathbb{R}$ / sia applicabile il teorema del Dini per l'esistenza di una funzione $y=\varphi(x)$ definita implicitamente in un intorno $(0, y_0)$ dall'eq.

$f(x,y) = x^4 - y^2 + e^{4x+y} + y^3 - e^y + ye^{x^2} - y = 0$

1) è di classe C^1 → composizione di funzioni continue

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 71 di 260

ESTREMI VINCOLATI

• **definizione**

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f: \Omega \to \mathbb{R}$, $K \subset \Omega$ (vincolo)

un pt $P_0 \in K$ si dice pt di **massimo vincolato** per f su K se $f(P_0) \geq f(\bar{x}) \quad \forall \bar{x} \in K$

un pt $P_0 \in K$ si dice pt di **minimo vincolato** per f su K se $f(P_0) \leq f(\bar{x}) \quad \forall \bar{x} \in K$

con K insieme compatto → chiuso e limitato

$$\boxed{K = \{(x,y) \in \Omega \ / g(x,y) = 0\}}$$ vincolo

• **Teorema Weierstrass** (per funzioni in più variabili)

se $K \subset \mathbb{R}^n$ è compatto e $f: K \to \mathbb{R}$ è continua, allora f ha almeno un pt di max assoluto e uno di min assoluto su K, ossia

$$\boxed{\exists \ \bar{x}_M, \bar{x}_m \ / \forall \bar{x} \in K, \ f(\bar{x}_m) \leq f(\bar{x}) \leq f(\bar{x}_M)}$$

con $K = \underset{\text{interno}}{\mathring{K}} \cup \underset{\text{frontiera}}{\partial K}$

a) cerchiamo i pt stazionari di f su $\mathring{K}$ → $\nabla f(x,y) = (0,0)$
b) valutiamo la f su ∂K
c) si confrontano le immagini dei pt trovati

① METODO DI SOSTITUZIONE

siano $f, g: \Omega \to \mathbb{R}$ con Ω aperto di $\mathbb{R}^2$ e f, g di classe C^1 su Ω

considero $\Gamma = \{(x,y) \in \Omega \ / g(x,y) = 0\}$ → vincolo

definizione

- $(x_0, y_0) \in \Gamma$ è un pt di max per f sul vincolo Γ se $f(x_0, y_0) \geq f(x,y)$
- $(x_0, y_0) \in \Gamma$ è un pt di min per f sul vincolo Γ se $f(x_0, y_0) \leq f(x,y)$

es.

$f(x,y) = x^2 + y^2$

con Γ $x + y = 1$

$\downarrow$

$y = 1 - x$

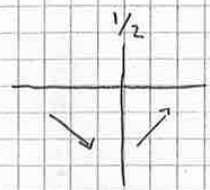
$\gamma(t) = (t, 1-t)$

$f(\gamma(t)) = t^2 + (1-t)^2$

$= 2t^2 - 2t + 1$

$\frac{df(\gamma(t))}{dt} = 4t - 2 = 0$ $\quad$ $4t - 2 > 0$

$t = 1/2$ $\quad$ $t > 1/2$

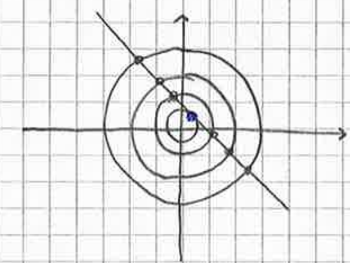


$\gamma(1/2) = (1/2, 1/2) \rightarrow$ pt di min

verifico con le curve di livello

$x^2 + y^2 = K$

$y = 1 - x$



i pt di inters. si allontanano

$\downarrow$

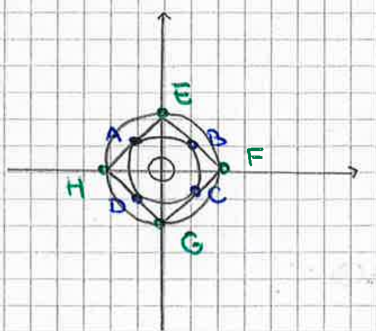
pt min

es.

$f(x,y) = x^2 + y^2$

vincolo $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / |x| + |y| = 1$

$x^2 + y^2 = K$



A, B, C, D $\rightarrow$ pt min

E, F, G, H $\rightarrow$ pt max

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 75 di 260

siccome $\nabla g(x_0, y_0) \neq 0$ perché pt regolare

$\nabla g(x_0, y_0) \perp \underline{\gamma'(t)}$

↳ vettore tg alla curva in (x_0, y_0)

• **Teorema di Fermat sul vincolo**

siano $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ con Ω aperto di $\mathbb{R}^2$ e $f, g \in C^1(\Omega)$

$g(x_0, y_0) = 0$ → vincolo

$\nabla g(x_0, y_0) \neq 0$ → pt regolare

se (x_0, y_0) pt di estremo (di max o di min) per f sul vincolo $g(x,y) = 0$, allora

(x_0, y_0) pt critico per $f|_\Gamma$

• **Teorema**

$f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ con Ω aperto di $\mathbb{R}^2$ e $f, g \in C^1(\Omega)$

$g(x_0, y_0) = 0$ → vincolo

$\nabla g(x_0, y_0) \neq 0$ → pt regolare

allora

$\nabla f(x_0, y_0) \perp$ vettore tg al vincolo in (x_0, y_0)

Conseguenza

$$\boxed{\nabla f(x_0, y_0) \parallel \nabla g(x_0, y_0)}$$

• **Proprietà**

nei pt di max e di min i due gradienti sono paralleli e

$\exists \lambda \in \mathbb{R} \;/\; \nabla f = \lambda \nabla g$

• **Teorema dei moltiplicatori di Lagrange**

sia $(x_0, y_0) \in \Gamma$ un pt regolare per la $g(x,y)$

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2}\lambda y \\ -\frac{3}{2}\lambda y - 2y = -\frac{1}{2}\lambda^2 y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y\left(-\frac{3}{2}\lambda - 2 - \frac{1}{2}\lambda^2\right) = 0 \\ x = -\frac{1}{2}\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

applico legge annullamento del prodotto

I) $\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \\ 0 + 0 = 1 \end{cases} \rightarrow$ no

II) $\begin{cases} \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0 \\ x = -\frac{1}{2}\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} (\lambda+1)(\lambda-4) = 0 \\ x = -\frac{1}{2}\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

se $\lambda = 4$ $\begin{cases} \lambda = 4 \\ x = -2y \\ 5y^2 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = \pm \frac{1}{\sqrt{5}} \\ x = \pm \frac{2}{\sqrt{5}} \end{cases}$

$A\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ $B\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$

se $\lambda = -1$ $\begin{cases} \lambda = -1 \\ y = 2x \\ 5x^2 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda = -1 \\ y = \pm \frac{2}{\sqrt{5}} \\ x = \pm \frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$

$C\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ $D\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$

$\left.\begin{array}{l} f(A) = 4 \\ f(B) = 4 \end{array}\right]$ max assoluti vincolati

$\left.\begin{array}{l} f(C) = -1 \\ f(D) = -1 \end{array}\right]$ min assoluti vincolati

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 79 di 260

$f(x,y) = x^2 + y - y^2 - 3$

$\nabla f = (2x, 1-2y) = (0,0)$ → perché il vincolo è un compatto

$A\,(0, 1/2)$

$f(A) = -3 + 1/4$

$$\begin{cases} (2x, 1-2y) = \lambda(2x, 2y) \\ x^2 + y^2 = 3 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x = \lambda 2x \\ 1 - 2y = \lambda 2y \\ x^2 + y^2 = 3 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(1-\lambda) = 0 \\ 1 - 2y = \lambda 2y \\ x^2 + y^2 = 3 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

I) $\begin{cases} x = 0 \\ 1 - 2y = 2y \\ y^2 = 3 \\ y \geq 0 \end{cases}$ $\quad B\,(0, \sqrt{3})$ $\quad$ non considero $(0, -\sqrt{3})$ perché $y \geq 0$

II) $\begin{cases} \lambda = 1 \\ y = 1/4 \\ x^2 = 3 - 1/16 \end{cases}$ $\quad C\left(\frac{\sqrt{47}}{4}, \frac{1}{4}\right) \quad D\left(-\frac{\sqrt{47}}{4}, \frac{1}{4}\right)$

$f(C) = f(D) = -3 + \frac{25}{8}$

es.

$f(x,y) = -\log(x^2 + y^2)$

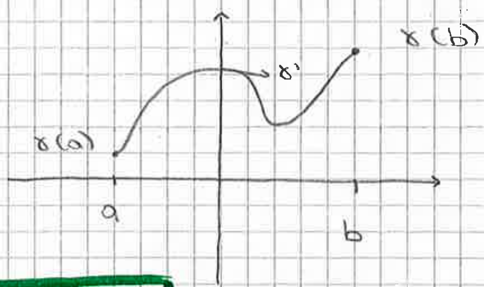
vincolo $x^2 - y^2 - 9 = 0$

$-\log$ → sempre decrescente → rispetto la funzione più interna invertita

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 81 di 260

INTEGRALI CURVILINEI I SPECIE

$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ arco di curva regolare ($\gamma' \neq 0$)



$$\boxed{L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt}$$ lunghezza di γ

$\gamma(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$

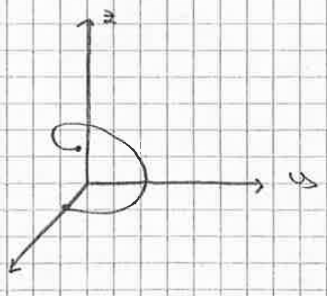
$\gamma'(t) = (x_1'(t), \ldots, x_n'(t))$

$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{(x_1')^2(t) + \ldots (x_n')^2(t)}$

es.

considero l'elica cilindrica

$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$ $\quad t \in [0, 2\pi]$



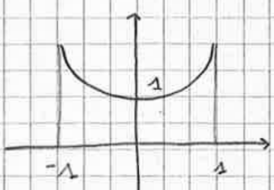
$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$

$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}$

$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\, dt = 2\sqrt{2}\,\pi$

es.

arco di catenaria



es.

$$\int_\gamma \frac{y}{x^2+y^2}\, ds$$

γ semicirconferenza >0 di centro $(0,0)$ e raggio R

$\gamma(t) = (R\cos t, R\sin t)$ $\quad t \in [0, 2\pi]$

$$f(\gamma(t)) = \frac{R\sin t}{R^2} = \frac{\sin t}{R}$$

$\gamma'(t) = (-R\sin t, R\cos t)$

$\|\gamma'(t)\| = R$

$$\int_\gamma \frac{y}{x^2+y^2}\, ds = \int_0^\pi \frac{\sin t}{R} R\, dt = 2$$

• Teorema

se γ_1 e γ_2 sono due curve equivalenti ($\exists\ \varphi$ biettiva / $\varphi \circ \gamma_1 = \gamma_2$) allora

$$\boxed{\int_{\gamma_1} f\, ds = \int_{\gamma_2} f\, ds}$$

L'integrale curvilineo di I specie non dipende dalla parametrizzazione ma solo dal sostegno

es.

$$f = \frac{y}{x^2+y^2}$$

scelgo un'altra parametrizzazione di γ

$\gamma_2 = (Rt, R\sqrt{1-t^2})$ $\quad t \in [-1, 1]$

$$f(\gamma_2) = \frac{\sqrt{1-t^2}}{R}$$

$$\gamma'(t) = R\left(1, \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}\right)$$

$$\|\gamma'(t)\| = R\sqrt{\frac{1}{1-t^2}}$$

per simmetria $x_B = 0$

$$y_B = \frac{\cancel{k} \int_\gamma y \, ds}{\cancel{k} \int_\gamma ds} = \frac{\int_\gamma y \, ds}{\pi R}$$

$\int_\gamma y \, ds \Rightarrow \quad \gamma(t) = (R\cos t, R\sin t) \quad t \in [0, \pi]$

$\|\gamma'\| = R$

$$\int_\gamma y \, ds = \int_0^\pi R \sin t \cdot R \, dt = 2R^2$$

$y_B = \frac{2}{\pi} R \quad \rightarrow \quad B = (0, \frac{2}{\pi} R)$

- **definizione**

baricentro in 3 variabili

$$\boxed{x_B = \frac{\int_\gamma \mu(x,y,z)\, x \, ds}{\int_\gamma \mu(x,y,z)}}$$

$$\boxed{y_B = \frac{\int_\gamma \mu(x,y,z)\, y \, ds}{\int_\gamma \mu(x,y,z) \, ds}}$$

$$\boxed{z_B = \frac{\int_\gamma \mu(x,y,z)\, z \, ds}{\int_\gamma \mu(x,y,z) \, ds}}$$

$$\begin{cases} (y, x) = \lambda(2, 2) \\ 2x + 2y - 2p = 0 \end{cases}$$

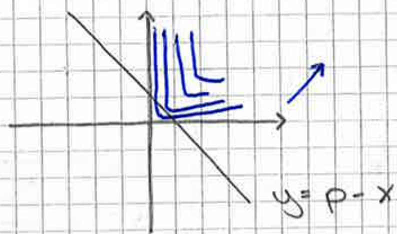
$$\begin{cases} 2\lambda = y \\ 2\lambda = x \\ 4\lambda + 4\lambda - 2p = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda = p/4 \\ x = p/2 \\ y = p/2 \end{cases}$$

$(p/2, p/2)$
pt stazionario

con le curve di livello vedo se max o min

$xy = k$
se $x \neq 0 \rightarrow y = k/x$

vincolo $y = p - x$



si avvicinano al pt di tg
$(p/2, p/2) \rightarrow$ pt max

- definizione

la somma integrale inferiore di f relativa alla partizione P è la somma

$$\boxed{s(f,P) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} m_{ij} |R_{ij}|}$$

la somma integrale superiore di f relativa alla partizione P è la somma

$$\boxed{S(f,P) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} M_{ij} |R_{ij}|}$$

il volume del solido

$$s(f,P) \leq V \leq S(f,P)$$

più la partizione è fine più s e S si avvicinano al volume effettivo del solido

$$s(f) = \sup s(f,P)$$
$$S(f) = \inf S(f,P) \rightarrow s(f) \leq S(f)$$

- definizione

f è integrabile sul rettangolo R se

$$\boxed{s(f) = S(f)}$$

il valore di tale uguaglianza si dice integrale doppio di f sul rettangolo R

$$\boxed{\iint_R \underbrace{f(x,y)}_{\text{altezza}} \underbrace{dx\,dy}_{|R_{ij}|}}$$

- **Teorema di Fubini per i rettangoli**

$R = [a,b] \times [c,d]$ → compatto

$f : R \to \mathbb{R}$ continua e limitata

allora

$$\boxed{\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_{x=a}^{x=b} \int_{y=c}^{y=d} f(x,y)\,dy\,dx = \int_{y=c}^{y=d} \int_{x=a}^{x=b} f(x,y)\,dx\,dy}$$

- **osservazione**

$f(x,y) = g(x)\,h(y)$ allora

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_{x=a}^{x=b} g(x)\,dx \int_{y=c}^{y=d} h(y)\,dy$$

dove $R = [a,b] \times [c,d]$

es.

$R = [0,1] \times [0, \pi/2]$

$$\iint_R x^3 \cos y\,dx\,dy = \int_{x=0}^{x=1} x^3\,dx \int_{y=0}^{y=\pi/2} \cos y\,dy$$

$$= \left[\frac{x^4}{4}\right]_{x=0}^{x=1} \left[\sin y\right]_{y=0}^{y=\pi/2} = \frac{1}{4}$$

- **Teorema criterio necessario e sufficiente di integrabilità**

$f : R \to \mathbb{R}$ limitata, allora f risulta integrabile se e solo se $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ una partizione P_ε di R tale che $S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 93 di 260

$S(f,P) = 1 \cdot 1 = 1$

$s(f,P) \neq S(f,P) \rightarrow$ $\tilde{f}$ non è integrabile
(infatti non è continua)

- **definizione**

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ insieme limitato

Ω si dice misurabile se la sua funzione caratteristica

$$\chi_\Omega(x,y) = \begin{cases} 1 & (x,y) \in \Omega \\ 0 & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega \end{cases}$$

è integrabile su Ω

la misura di Ω si indica $m(\Omega) = |\Omega|$ e si pone che

$$\boxed{m(\Omega) = \iint_\Omega \chi_\Omega(x,y)\,dx\,dy}$$

- **osservazione**

nel caso in cui Ω sia un rettangolo

$m(\Omega) =$ area di Ω

- **definizione**

consideriamo la partizione di un rettangolo R che contiene Ω

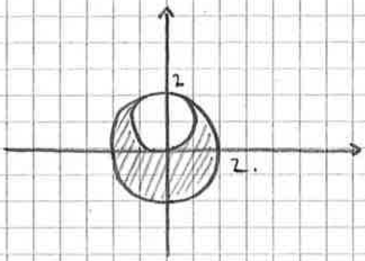
$s(\chi_\Omega, P) =$ somma delle aree di rettangoli individuati dalla partizione P completamente contenuti in Ω

$S(\chi_\Omega, P) =$ somma delle aree di rettangoli individuati dalla partizione P che contengono Ω

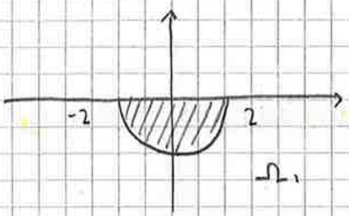
$\boxed{S(\chi_\Omega, P) - s(\chi_\Omega, P)} =$ aree che contengono il bordo $= \partial\Omega$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 95 di 260

Verificare se è regolare

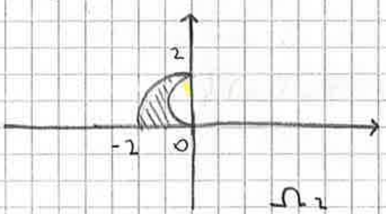


spezzo il dominio



$y = -\sqrt{4-x^2}$ dominio y-semplice

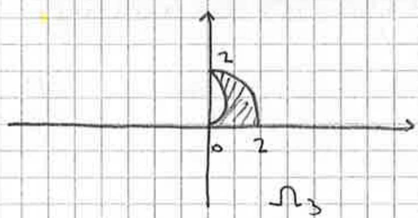
$\Omega_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \in [-2,2], -\sqrt{4-x^2} \leq y \leq 0\}$



$x = -\sqrt{4-y^2}$ $\quad$ $x = -\sqrt{1-(y-1)^2}$

$\Omega_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y \in [0,2], -\sqrt{4-y^2} \leq x \leq -\sqrt{1-(y-1)^2}\}$

dominio x-semplice



$x = \sqrt{4-y^2}$ $\quad$ $x = \sqrt{1-(y-1)^2}$

$\Omega_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y \in [0,2], \sqrt{1-(y-1)^2} \leq x \leq \sqrt{4-y^2}\}$

dominio x-semplice

- **condizione integrabilità**

sia Ω un insieme regolare (limitato e misurabile) di $\mathbb{R}^2$ e $f: \Omega \to \mathbb{R}$ continua su Ω, allora f è integrabile su Ω

- **proprietà integrale doppio**

① **linearità**

per ogni α e $\beta \in \mathbb{R}$, risulta che l'integrale doppio

$$\boxed{\iint_\Omega (\alpha f(x,y) + \beta g(x,y))\,dx\,dy = \alpha \iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy + \beta \iint_\Omega g(x,y)\,dx\,dy}$$