NUMERO: **2476A** ANNO: 2020

A P P U N T I

STUDENTE: Pieretto Letizia

MATERIA: Analisi 1 - Prof. Tilli, Quelali

LETIZIA PIERETTO

• paolo.tilli@polito.it

ANALISI

ASSIOMI (postulati) → proposizioni accettate come vere

TEOREMI → proposizioni vere perché deducibili logicamente dagli assiomi

DEDUZIONE LOGICA → dimostrazione teorema

ES.

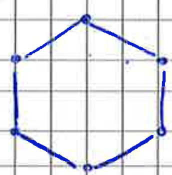
- A_1 : ci sono 6 persone
- A_2 : ogni persona ha una relazione simmetrica con altre 2 persone

• sono compatibili?

→ no → devo ricavare una contraddizione logica

→ si → creo modello

- modello A_1 e A_2 → compatibili



①

②

- Teorema: non ci sono modelli oltre esagono e triangoli
- dimostrazione:

→ almeno un triangolo ⇒ ci sono esattamente due triangoli

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 5 di 298

B) dell'addizione

b_1 : $a+b=b+a$

b_2 : $a+(b+c)=(a+b)+c$

b_3 : $\exists$ elemento neutro di somma $\rightarrow \emptyset$
$a+\emptyset=a$

b_4 : $\exists$ elemento opposto
$\forall a \in \mathbb{R},\ \exists b \in \mathbb{R} \,/\, a+b=\emptyset$
$b=-a$

C) della moltiplicazione

c_1 : $a \cdot b = b \cdot a$

c_2 : $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

c_3 : $\exists$ elemento neutro $\rightarrow 1$ $\quad 1 \neq 0$
$a \cdot 1 = a$

c_4 : $\forall a \neq \emptyset,\ \exists b \in \mathbb{R} \,/\, a \cdot b = 1$
$b = 1/a$

D) assiomi collegamento

AB : $a \leq b \Rightarrow a+c \leq b+c$

AC : $\emptyset \leq a \wedge 0 \leq b \Rightarrow 0 \leq ab$

BC : $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$

$a \cdot (0+0) + (-a \cdot 0)$ (BC)

$a \cdot 0 + (-a \cdot 0)$ (B3)

0 (B4) $n° + (-n°) = 0$

TEOREMA

- $a \leq 0 \wedge b \leq 0 \rightarrow a \cdot b \geq 0$

TEOREMA

- $a \cdot (-1) = -a$

TEOREMA

- $\emptyset$ non ha reciproco

dimostrazione:
se $a \in \mathbb{R}$ fosse il reciproco di $\emptyset$, avrei
$a \cdot 0 = 1 \rightarrow$ ma $a \cdot 0 = 0$

avrei $1 = 0$, ma per assioma C3 $1 \neq 0$

MODELLO PER I 14 ASSIOMI

$\{0, 1, -1, 1+1, (-2), \ldots\}$

deve contenere n° interi e anche le frazioni $a \cdot b = 1 \rightarrow a \cdot \frac{1}{a} = 1$

contiene almeno gli irrazionali

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \;/\; p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0 \right\}$

ASSIOMA DI COMPLETEZZA

15° assioma

- 1° metodo → **FORMA DI SEPARAZIONE**

dati due qualunque sottoinsiemi di $\mathbb{R}$
$A \subseteq \mathbb{R}$ e $B \subseteq \mathbb{R}$
dove $A \neq \emptyset$ e $B \neq \emptyset$ tali che $\forall x \in A$, $\forall y \in B$
$x \leq y$, esiste sempre un elemento separatore
$c \in \mathbb{R} \,/\, \forall x \in A, \forall y \in B \quad x \leq c \leq y$

OSSERVAZIONE:
in ambiente razionale l'elemento separatore
non c'è → non vale l'assioma di completezza
se scrivo $\mathbb{Q}$ al posto di $\mathbb{R}$

$\mathbb{Q}$ verifica i 14 assiomi, ma non quello di
completezza → l'assioma di completezza
non deriva dai 14 assiomi

ES.

$A = \{x \in \mathbb{Q} \,/\, x \geq 0 \wedge x^2 \leq 2\}$

$B = \{x \in \mathbb{Q} \,/\, x \geq 0 \wedge x^2 \geq 2\}$

A e $B \subseteq \mathbb{Q}$ quindi A e $B \subseteq \mathbb{R}$

si può dimostrare che $c^2 = 2$ dove $c \notin \mathbb{Q}$,
$\exists\, c \in \mathbb{R} \,/\,$ separa A da B

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 11 di 298

m: -2, -4, -8 ...

-2 é il min di A

- un insieme che ha maggiorante si dice limitato superiormente
- un insieme che ha minorante si dice limitato inferiormente

2° metodo → ESISTENZA ESTREMO SUPERIORE

per ogni insieme $A \subseteq \mathbb{R}$, limitato superiormente e $A \neq \emptyset$, $\exists$ sempre il più piccolo dei maggioranti → sup(A)

non é detto che $\sup(A) \in A$

se $\sup(A) \in A \rightarrow \sup(A) = \max(A)$

ESTREMO INFERIORE

$E \subset \mathbb{R}$, l'estremo inferiore di E, come il massimo dei minoranti di E

inf (E) → é un minorante

- nessun numero > inf (E) é un minorante per E

$\inf(E) \leq \forall x \in E$

- $\forall \varepsilon > 0, \ \exists x \in E \ / \ \inf(E) < x + \varepsilon$

ES.

- $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$

<u>dimostrazione</u>: per dimostrare che se è vera l'ipotesi p allora deve essere vera la tesi q, possiamo supporre falsa la tesi q e da ciò dedurre che è falsa l'ipotesi q.

- $\neg(p \land q) \Leftrightarrow \neg p \lor \neg q$
- $\neg(p \lor q) \Leftrightarrow \neg p \land \neg q$

- quantificatori

a) universale $\forall x, p(x)$: ogni elemento soddisfa
↳ valore di verità

b) esistenziale $\exists x, p(x)$: almeno un elemento soddisfa

ES.

$\neg(\forall x, p(x)) \Leftrightarrow \exists x, \neg p(x)$

$\neg(\exists x, p(x)) \Leftrightarrow \forall x, \neg p(x)$

ES.

- $A = B \iff A \subset B \wedge B \subset A$
- $A \subset B \iff (x \in A \Rightarrow x \in B)$
- $x \in A \cap B \iff x \in A \wedge x \in B$
- $x \in A \cup B \iff x \in A \vee x \in B$
- $x \in A \setminus B \iff x \in A, x \notin B$
- $x \in A^c \iff x \notin A$
- $A \cap A^c = \emptyset$ INSIEME VUOTO
- $A \cap \emptyset = \emptyset$
- $A \cup \emptyset = A$
- $(A^c)^c = A$

- VALORE ASSOLUTO $|x| = \begin{cases} x & \text{SE } x \geq 0 \\ -x & \text{SE } x < 0 \end{cases}$

PROPRIETÀ

- $d(x,y) = |x-y| = |y-x|$
- $|x| \geq 0$
- $|x| = 0 \iff x = 0$
- $|x| = |-x|$
- $-|x| \leq x \leq |x|$

ESERCIZI

1) negare le affermazioni

- $\forall x, \exists y : \forall z \,/\, x+y=z$

$\downarrow$

$\exists x, \forall y : \exists z \,/\, x+y \neq z$

- $\exists x : (\forall y \,/\, x^2 > y) \vee (\exists z \,/\, x < z)$

$\downarrow$

$\forall x : (\exists y \,/\, x^2 > y) \wedge (\forall z \,/\, x \geq z)$

- $\forall x \,/\, \underbrace{x^2 > 2}_{p} \implies \exists y \,/\, \underbrace{\forall z,\ y^2 < x+z}_{q}$

$p \implies q \iff \sim p \vee q$

$\downarrow$

$\forall x \,/\, x^2 \leq 2 \vee \exists y \,/\, \forall z,\ y^2 < x+z$

$\downarrow$

$\exists x \,/\, x^2 > 2 \vee \exists y \,/\, \exists z,\ y^2 \geq x+z$

2) calcolare l'estremo sup e inf

- $E = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x^3 < 8\}$

$\downarrow$

$x \in \mathbb{R} \,/\, x < 2$

$E = (-\infty, 2)$ $\sup(E) = 2$, $\max(E) =$ non esiste

$\inf(E) = -\infty$, $\min(E) =$ non esiste

FUNZIONI

dati due insiemi A e B, una "funzione f da A a B" è una "legge" che associa ad ogni elemento $x \in A$ un unico $y \in B$

$$\boxed{f : A \to B}$$

l'insieme A si chiama dominio di f, mentre l'insieme B codominio

si scrive $\boxed{y = f(x)}$ dove "y è funzione di x" e "y è l'immagine di x tramite f"

• DEFINIZIONI DI BASE

sia $f : A \to B$ una funzione

- se $C \subseteq A$ è un sottoinsieme di A, si definisce l'immagine dell'insieme C tramite f, l'insieme

$$\boxed{f(C) = \{ y \in B \,/\, \exists\, x \in C \text{ e } y = f(x) \}}$$

- se $D \subseteq B$ è un sottoinsieme di B, si definisce la controimmagine di D tramite f, l'insieme

$$\boxed{f^{-1}(D) = \{ x \in A \,/\, f(x) \in D \}}$$

1) $f(f^{-1}(y))=y$ implica che f è suriettiva

$\downarrow$

$\forall y \in B$ se pongo $x=f^{-1}(y)$ e
$f(x)=f(f^{-1}(y))=y$

2) $f^{-1}(f(x))=x$ implica che f è iniettiva

$\downarrow$

$x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f^{-1}(f(x_1))=x_1$
e $f^{-1}(f(x_2))=x_2$

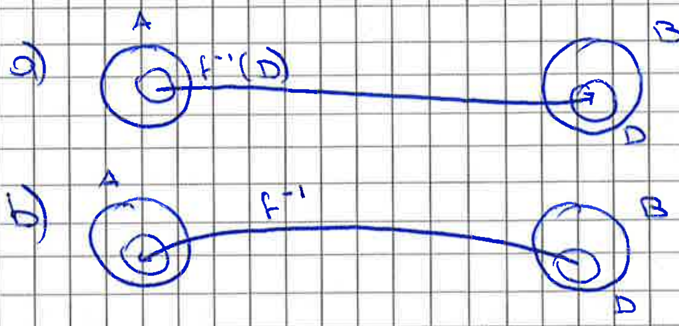
per essere inversa $\rightarrow$ suriettiva + iniettiva

ambiguità

$f^{-1}(D)$

a) controimmagine di D $\{x \in A \ / \ f(x) \in D\}$

b) immagine di D tramite la funzione f^{-1} $\{x \in A \ / \ \exists y \in D$ e $x=f^{-1}(y)\}$



se c'è l'inversa, a e b coincidono

ES.

$f(x) = e^x$

se la penso da $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non c'è f^{-1} perché $\log x$ $\mathbb{R}_+$. Sarebbe iniettiva, ma non suriettiva e quindi non invertibile

Rimedio:

$f: \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ per renderla biunivoca

$f(x) = e^x$ e $f^{-1}(x) = \log x$

dove $f^{-1}: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$

OSSERVAZIONE

se $f: A \to B$ è iniettiva, ma non suriettiva e si può rimediare per definire f^{-1} restringendo il codominio di B

$$f: A \to Im(f) \subseteq B$$

ora è suriettiva!

OSSERVAZIONE

se $f: A \to B$ è suriettiva, ma non è iniettiva non si può avere f^{-1}. Si può rimediare restringendo il dominio

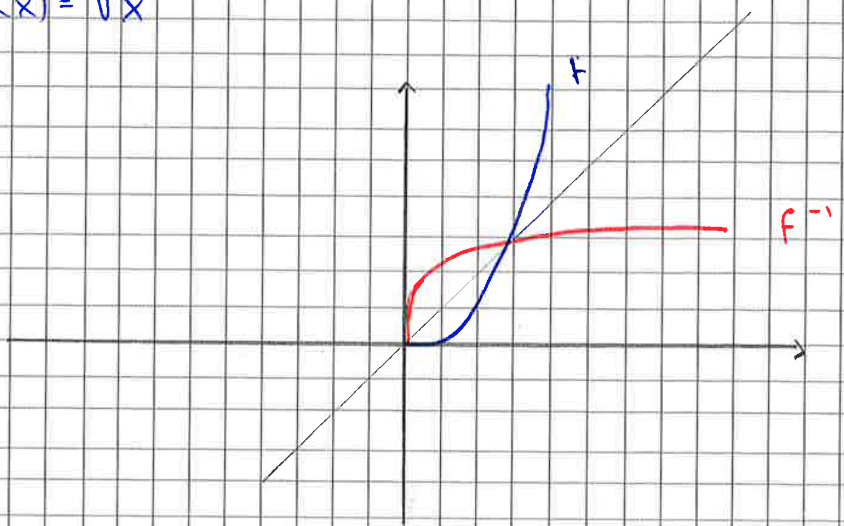
$f(x) = x^2$

del I e III quadrante $y = x$

ES.

$f(x) = x^2$ $\qquad f: [0, +\infty) \to [0, +\infty)$

$f^{-1}(x) = \sqrt{x}$



dimostrazione:

$G(f) = \{(x, y) \,/\, x \in A \wedge y = f(x)\}$

se ribalto rispetto a $y = x$

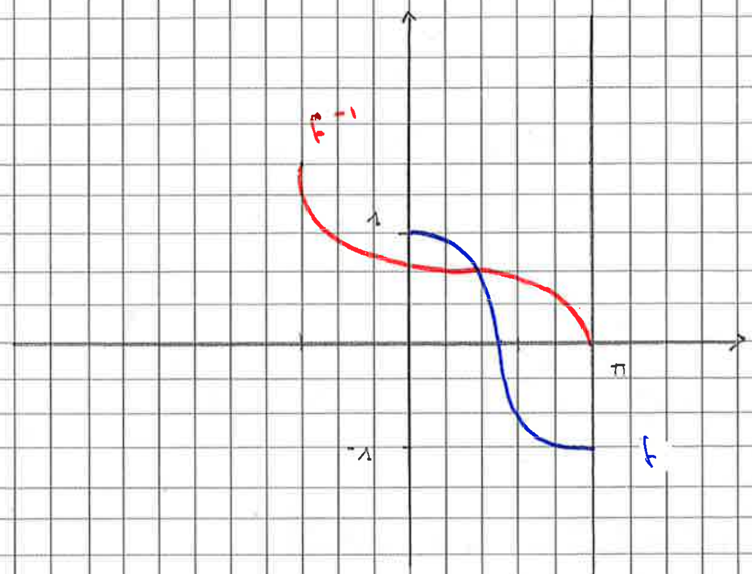
$P(x, y)$ e $P'(y, x)$

ottengo l'insieme

$G(f^{-1}) = \{(y, x) \,/\, x \in A \wedge y = f(x)\}$

$\parallel$

$\{(y, x) \,/\, y \in B \wedge x = f^{-1}(y)\}$



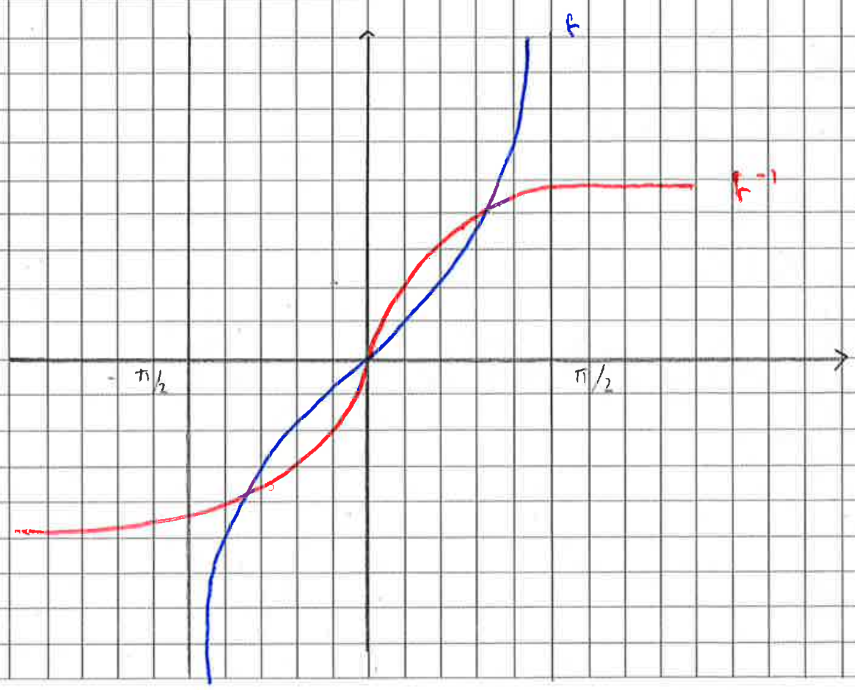
ES.

$$f(x) = Tg\,x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$D(f) = \{\, x \in \mathbb{R} \;/\; x \neq \pi/2 + k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \,\}$$

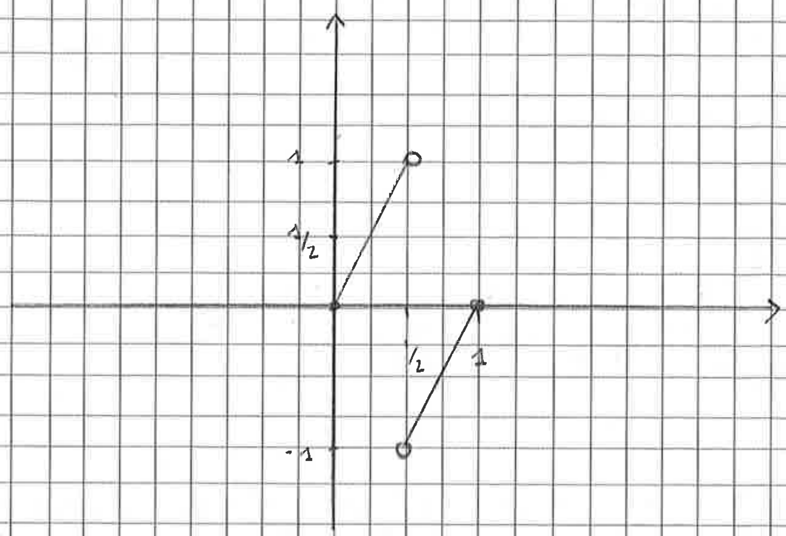
$$f^{-1} = \arctan x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$f^{-1} : \mathbb{R} \to \left(-\pi/2 \,,\, \pi/2\right)$$



② TRACCIARE IL GRAFICO DI

$$f(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x < 1/2 \\ 0 & x = 1/2 \\ 2x-2 & 1/2 < x \leq 1 \end{cases}$$



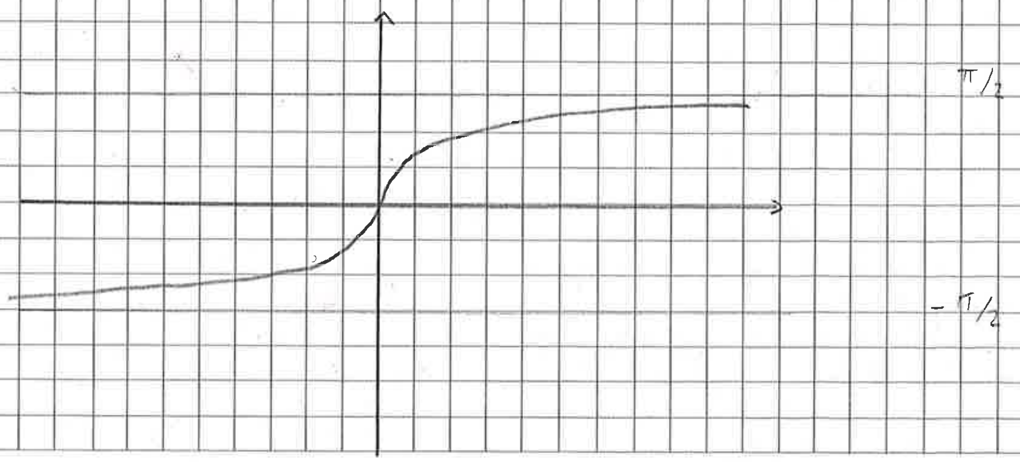
$f([0,1]) = (-1,1)$

↳ codominio

f non è iniettiva perché $Im(0) = 0$ e $1/2$

③ TROVARE SE ESISTE LA FUNZIONE INVERSA DI

$$y = \arctg \sqrt{\frac{e^x - 1}{e^x + 1}}$$



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 31 di 298

invertibile solo in $[0,2]$

$y = \sqrt{4-2x}$

$y^2 = 4-2x$

$y^2 - 4 = -2x$

$2x = 4 - y^2$

$x = 2 - \frac{1}{2} y^2 = f^{-1}(x)$

5) TROVARE $g \circ f$ e $f \circ g$

$f = x^2 + x - 2$

$g = \log(1-2x)$

1) $g \circ f = g(f(x))$

$\log(1-2(x^2+x-2))$

$\log(1-2x^2-2x+4)$

$\log(-2x^2-2x+5)$

↳ calcolo D

$-2x^2-2x+5>0$

2) $f \circ g = f(g(x))$

$(\log^2(1-2x)) + \log(1-2x) - 2$

D $\quad 1-2x>0$

$-2x>-1$

$x<1/2$

SUCCESSIONI

una successione $\{a_n\}$ è una $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, cioè una sequenza infinita di numeri $a_1, a_2, a_3, a_4 \dots a_n$

es.

- $a_n = 1/n$
- $a_n = (-1)^n$
- $a_n = n^2$
- $a_n = n / n + \sqrt{n}$
- $a_n = (1 + 1/n)^n$
- $a_n = \sin(n)$

↳ dopo K salti mi trovo sempre su un punto diverso, altrimenti avrei percorso un numero di giri completi N e avrei

$2\pi N = K$, quindi $\pi = \frac{K}{2N}$

che è $\mathbb{Q}$ → ASSURDO

$\{a_n\}$ si dice:

a) CRESCENTE se $a_n \leq a_{n+1}$ $\forall n$

b) STRETTAMENTE CRESCENTE se $a_n < a_{n+1}$ $\forall n$

c) DECRESCENTE se $a_n \geq a_{n+1}$ $\forall n$

d) STRETTAMENTE DECRESCENTE se $a_n > a_{n+1}$ $\forall n$

e) MONOTONA se è crescente oppure decrescente

f) SUPERIORMENTE LIMITATA se $\exists M \in \mathbb{R} / a_n \leq M$

se $M \geq 0$ basta scegliere $\bar{n} = \sqrt{M}$ che non è la soglia ottimale, ma funziona

definizione

si dice che "a_n tende a $-\infty$" e si scrive

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} a_n = -\infty}$$

se $\forall M \in \mathbb{R}$, $\exists \bar{n} \,/\, \forall n > \bar{n}$, $a_n < M$

es.

- $a_n = 1/n \to \lim = 0$
- $a_n = n/n+1 \to \lim = 1$
- $a_n = n/n+\sqrt{n} \to \lim = 1$
- $a_n = (1 + 1/n)^n \to \lim = e$

definizione

si dice che "a_n tende a L" e si scrive

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} a_n = L}$$

se $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \bar{n} \,/\, \forall n > \bar{n}$, $|a - L| < \varepsilon$

es.

$$a_n = \frac{n}{n + \sin(n)}$$

verifichiamo che $\lim_{n \to +\infty} a_n = 1$

- se crescente
  - → superiormente limitata : L é finito, $L \in \mathbb{R}$
  - → no superiormente limitata : L é infinito, $L = +\infty$

di sicuro è inferiormente limitata e $L = \sup\{a_n\}$

- se decrescente
  - → inferiormente limitata : L é finito, $L \in \mathbb{R}$
  - → no inferiormente limitata : L é infinito, $L = -\infty$

di sicuro è superiormente limitata e $L = \inf\{a_n\}$

1° caso

a_n é crescente e superiormente limitata.

pongo $L = \sup\{a_n\}$, $L \in \mathbb{R}$ perché per ipotesi $\{a_n\}$ è un insieme superiormente limitato.

siccome $L = \sup\{a_n\}$ ho:

1) $a_n \leq L \quad \forall n$

2) $\forall \varepsilon > 0, \exists \bar{n} \,/\, L - \varepsilon < a_{\bar{n}}$

e quindi $L - \varepsilon < a_n \quad \forall n > \bar{n}$ perché a_n crescente

combinando 1) e 2)

$\forall \varepsilon > 0, \exists \bar{n} \,/\, \forall n > \bar{n} \quad \underline{L - \varepsilon < a_n \leq L < L + \varepsilon}$

e ottengo che

$\exists \bar{n} \ / \ n > \bar{n} \quad L-1 < a_n < L+1$

- 3 $\not\Rightarrow$ 1

per esempio $a_n = (-1)^n$ verifica la condizione 3, ma non verifica la condizione 1

- 1 e 4 si escludono a vicenda
- 2 $\Rightarrow$ 4 ma 4 $\not\Rightarrow$ 2

es. $a_n = (-2)^n$

- 1 e 2 così come 2 e 3 sono incompatibili

definizioni:

- la 1 si esprime dicendo che "a_n è convergente" ovvero che ha un limite finito, ma non che è limitata
- la 2 si esprime dicendo che "a_n è divergente a $+\infty$ o $-\infty$"
- 1 e 2 si esprimono dicendo che "hanno un limite"

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n \to +\infty} \left(1 + x/n\right)^n = e^x}$$

il numero "e" si ottiene anche come $\lim_{n \to +\infty} a_n$
dove $a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots \frac{1}{n!}$

ESERCIZI

1. verificare con definizione di limite

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{2n+1}{n+1} = 2$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \ / \ \forall n > \bar{n} \quad \left| \frac{2n+1}{n+1} - 2 \right| < \varepsilon$$

infatti,

$$\left| \frac{2n+1-2n-2}{n+1} \right| < \varepsilon$$

$$\frac{1}{n+1} < \varepsilon$$

$$n > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \longrightarrow \bar{n} = \left[\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \right]$$

2. verificare con definizione di limite

$$\lim_{n \to +\infty} 1/n^2 = 0$$

$$\left| \frac{1}{n^2} \right| < \varepsilon$$

$$n > \sqrt{1/\varepsilon} \longrightarrow \bar{n} = \left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \right]$$

4) verifica la veridicità del limite

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{2n+5} \neq 1$$

poniamo che per assurdo converga a 1

$$\left| \frac{n}{2n+5} - 1 \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{-n-5}{2n+5} \right| < \varepsilon$$

siccome $|-x| = |x|$

$$\frac{n+5}{2n+5} < \varepsilon$$

$$n+5 < 2n\varepsilon + 5\varepsilon$$

$$n - 2n\varepsilon < 5\varepsilon - 5$$

supponiamo che $\varepsilon = 2$

$-3n < 5 \rightarrow$ vero

supponiamo che $\varepsilon = 1/5$

$\frac{3}{5} n < -4 \rightarrow$ assurdo $\rightarrow \lim \neq 1$

ALGEBRA DEI LIMITI

Teorema

supponiamo di avere $\lim_{n\to+\infty} a_n = L_1$ e $\lim_{n\to+\infty} b_n = L_2$ dove L_1 e $L_2 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$

allora:

1) $\lim (a_n + b_n) = L_1 + L_2$ tranne quando L_1 e L_2 sono entrambi ∞ discordi.
In questo caso il lim va studiato a parte

es. $a_n \to +\infty$
$b_n \to -\infty$

$a_n = n^2 \qquad L_1 = +\infty$
$b_n = -n \qquad L_2 = -\infty$

$\lim (a_n + b_n) = +\infty$

2) $\lim (a_n - b_n) = L_1 - L_2$ tranne quando L_1 e L_2 sono entrambi ∞ concordi.

3) $\lim (a_n \cdot b_n) = L_1 \cdot L_2$ tranne quando uno è $\emptyset$ e l'altro è $+\infty$ o $-\infty$

es.

$a_n = 1/n \qquad L_1 = 0$
$b_n = 5n \qquad L_2 = +\infty$

ESERCIZIO

1) risolvere con le successioni

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n}$$

$$\frac{2^n \cdot 2 + 3^n \cdot 3}{2^n + 3^n}$$

$$\frac{\cancel{3^n}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n 2 + 3\right)}{\cancel{3^n}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1\right)} = 3$$

$\to \emptyset$

$\emptyset$

2) $$\lim_{n \to +\infty} n\left(\sqrt{n^2-1} - n\right)$$

forma indeterminata $+\infty - \infty$, moltiplico per il coniugato

$$\frac{n\left(\sqrt{n^2-1} - n\right)\left(\sqrt{n^2-1} + n\right)}{\sqrt{n^2-1} + n}$$

$$\frac{n\left(\cancel{n^2} - 1 - \cancel{n^2}\right)}{\sqrt{n^2-1} + n}$$

$$\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1+2}$$

$$\underbrace{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}}_{e} \cdot \left(1+\underbrace{\frac{1}{n-1}}_{0}\right)^{2} = e$$

5) $$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{n}$$

$$\left(1+\frac{2}{n-1}\right)^{n}$$

$$\left(1+\frac{1}{\frac{n-1}{2}}\right)^{\frac{n-1}{2}\cdot\frac{2n}{n-1}}$$

$$\Bigg[\underbrace{\left(1+\frac{1}{\frac{n-1}{2}}\right)^{\frac{n-1}{2}}}_{e}\Bigg]^{\frac{2n}{n-1}}$$

$$e^{\frac{2n}{n-1}} = e^{2}$$

FUNZIONI

il concetto di limite di una successione $\{a_n\}$ si estende al caso di una funzione $f(x)$, definita (almeno) su una semiretta del tipo $(a, +\infty)$

le definizioni rimangono identiche:

$$a_n \to f(x)$$
$$n \in \mathbb{N} \to x \in \mathbb{R}$$

definizione

- $\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = L}$ $\quad L \in \mathbb{R}$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \bar{n} \,/\, \forall x > \bar{n}, \; |f(x) - L| < \varepsilon$$

- $\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists \bar{n} \,/\, \forall x > \bar{n}, \; f(x) > M$$

- $\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty}$

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists \bar{n} \,/\, \forall x > \bar{n}, \; f(x) < M$$

- $\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty}$

$\forall M \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0 \ / \ \forall x \ / \ 0 < |x - x_0| < \delta, \ f(x) > M$

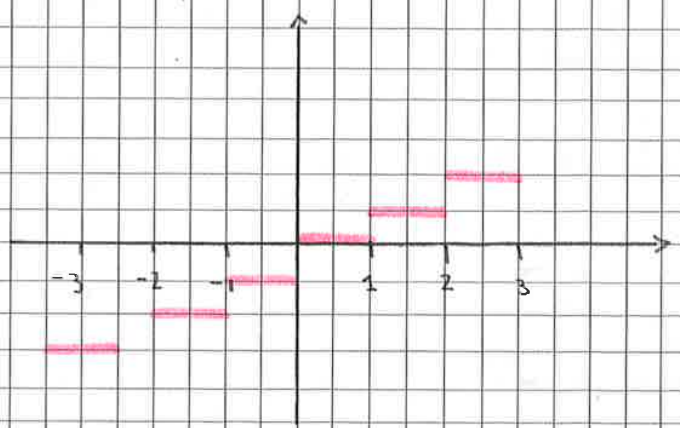
- $\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty}$

$\forall M \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0 \ / \ \forall x / 0 < |x - x_0| < \delta, \ f(x) < M$

- **LIMITI UNILATERALI**

$\lfloor x \rfloor$ è il più grande intero $\leq x$ $(x \in \mathbb{R})$

es. $\lim_{x \to 2} \lfloor x \rfloor \rightarrow$ non esiste perché non è verificata la condizione $|f(x) - L| < \varepsilon$ perché $\forall \varepsilon > 0$ L dovrebbe valere sia 1 che 2



introduzione limite destro e limite sinistro

$\lim_{x \to x_0^+}$ $\qquad$ $\lim_{x \to x_0^-}$

- $\boxed{\lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty}$

$\forall M \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0 \,/\, \forall x \,/\, 0 < |x - x_0| < \delta$ e $x > x_0$, $f(x) < M$

- $\boxed{\lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty}$

$\forall M \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0 \,/\, \forall x \,/\, 0 < |x - x_0| < \delta$ e $x < x_0$, $f(x) < M$

N.B.

$\boxed{0,\overline{9} = 1}$

poiché non esiste nessun numero tra $0,\overline{9}$ e 1

$0,\overline{3} = 1/3 \rightarrow$ quindi $3 \cdot 0,\overline{3} \begin{cases} 0,\overline{9} \\ 1 \end{cases}$

N.B.

legame tra $\lim_{x \to x_0}$ e i due $\lim_{x \to x_0^+}$ e $\lim_{x \to x_0^-}$

$\downarrow$

il limite $f(x)$ esiste e vale $L \iff \lim_{x \to x_0^+}$ e $\lim_{x \to x_0^-}$ valgono L

- **TEOREMA DI UNICITÀ DEL LIMITE**

$$\boxed{\text{se } \lim_{x \to x_0} f(x) = L_1 \text{ e } \lim_{x \to x_0} f(x) = L_2 \text{ allora } L_1 = L_2}$$

dimostrazione

se $L_1 \neq L_2$, posso trovare un intorno I_{L_1} (di L_1) e un intorno I_{L_2} (di L_2) / $I_{L_1} \cap I_{L_2} = \emptyset$

- **Teorema del confronto**

1) se $f(x) \leq g(x)$ in un intorno di x_0 (tranne eventualmente x_0)

se $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ allora anche $\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$

se $\lim_{x \to x_0} g(x) = -\infty$ allora anche $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$

es.

$\lim_{x \to +\infty} x + \operatorname{sen} x = +\infty$

cerco una funzione $f(x)$ più piccola e più semplice che tende a $+\infty$

$g(x) = x + \operatorname{sen} x$

$f(x) = x - 1$

$f(x) = +\infty \to g(x) = +\infty$

2) "Teorema dei due carabinieri"

sia $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ $\forall x$ in un intorno di x_0, (tranne eventualmente x_0)

$PH = \sin x$

$x = \text{arco}$

$QA = \operatorname{tg} x$

$\sin x < x$

e per confronto di aree $x < QA$

$$P\hat{O}A < O\hat{Q}A$$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$x/2 \qquad QA/2$$

quindi $\sin x < x < \operatorname{tg} x$

divido per $\sin x$ $\quad 1 < \dfrac{x}{\sin x} < \dfrac{1}{\cos x}$

inverto la disuguaglianza usando i reciproci

$$\cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1$$

$$\lim_{x \to 0^+} \cos x = 1$$

quindi $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = 1/2}$$

discende dal limite notevole $\dfrac{\sin x}{x} = 1$

ESERCIZI

1) determinare il valore del limite

$$\lim_{x \to 1} \left[x^4 - 2x^2 - x + 2 \right]$$

studio limite destro e limite sinistro

$$\lim_{x \to 1^+} \left[x^4 - 2x^2 - x + 2 \right]$$

$$\left[\underbrace{(x^3 - 1)}_{\oplus} \underbrace{(x - 2)}_{\ominus} \right] \to \left[0^- \right] = -1$$

$$\lim_{x \to 1^-} \left[\underbrace{(x^3 - 1)}_{\ominus} \underbrace{(x - 2)}_{\ominus} \right] \to \left[0^+ \right] = \varnothing$$

limiti laterali distinti → non esiste il limite

2) determinare il valore del limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{|x|}$$

studio limite destro e sinistro

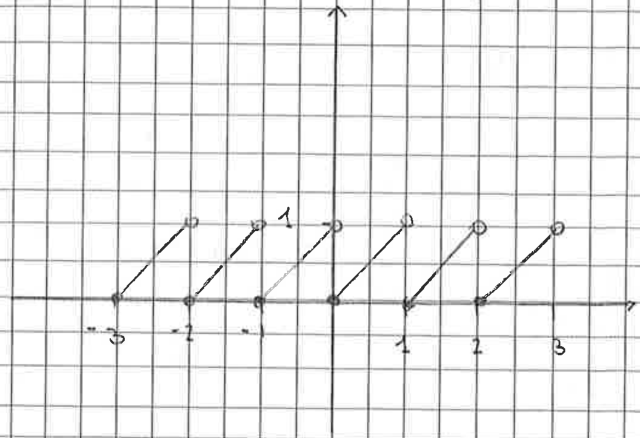
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\operatorname{sen} x}{-x} = -1$$

limiti laterali distinti → non esiste il limite

$M(x)$

$Im(M(x)) = [0, 1)$



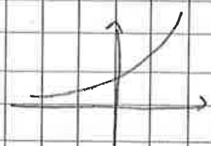
quindi $0 \leq M(x) < 1$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x + M(x)}{x + \sqrt{x}}$$

$$\frac{\cancel{x}\left(1 + \underbrace{M(x)/x}_{\to 0}\right)}{\cancel{x}\left(1 + \underbrace{\sqrt{x}/x}_{\to 0}\right)} = 1$$

5) determinare il valore del limite

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2^{2x} + 2^{-x}}{(2^{x} - 1)^2}$$



$$\frac{\cancel{2^{2x}}\left(1 + \underbrace{2^{-3x}}_{\to 0}\right)}{\cancel{2^{2x}}\left(1 - \underbrace{2^{-x}}_{\to 0}\right)^2} = 1$$

quindi $K\pi > M$

se si sceglie K n° pari, $\cos x = 1$ ossia
$1 \in I_L \quad \forall I_L$

se si sceglie K n° dispari, $\cos x = -1$ ossia
$-1 \in I_L \quad \forall I_L$

possiamo sempre trovare un intorno di L contemporaneamente -1 e 1 → CONTRADDIZ.

si verifica che $\lim_{x \to +\infty} \cos x$ non esiste

9) sia $f(x)$ una funzione reale qualsiasi
$\lim_{x \to 5} f(x) = 12$

a) trovare che $\exists\, I_5$ dove $f(x) > 11,99 \quad \forall x \in I_5 \setminus \{5\}$

$I_5 \,/\, x \in I_5 \setminus \{5\} \Rightarrow f(x) \in I_{12}$

$I_{12} = (11,999 \,,\, 12,001)$

cioè $f(x) > 11,99$

b) è vero questo se si pretende che $f(x) > 11,99 \quad \forall x \in I_5$?

falso perché:
se

$$f(x) = \begin{cases} 12 & x \neq 5 \\ 0 & x = 5 \end{cases}$$

12) $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x}$

$$\underbrace{\frac{\operatorname{sen} x}{x}}_{1} \operatorname{sen} x = \emptyset$$

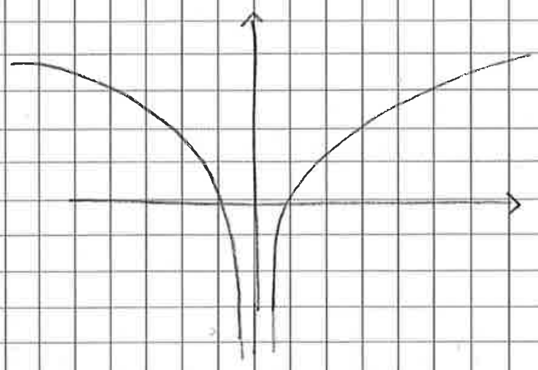
13) $\lim_{x \to 0^+} \frac{1-\cos\sqrt{x}}{2x^2}$

$$\underbrace{\frac{1-\cos\sqrt{x}}{x}}_{1/2} \cdot \frac{1}{2x} = +\infty$$

LIMITE NOTEVOLE

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = 1/2}$$

14) $\lim_{x \to 0} \log|x| = -\infty$



$-1 < x-1 < 1$

$0 < x < 2$

se sommo 1

$1 < x+1 < 3$

essendo $x+1$ positivo

$|x+1| = x+1$

e quindi

$|x+1| < 3$ → dimostrata la mia affermazione

$|3x^2-3| \to 3\underbrace{|x+1|}_{<3}|x-1| \to 9|x-1|$

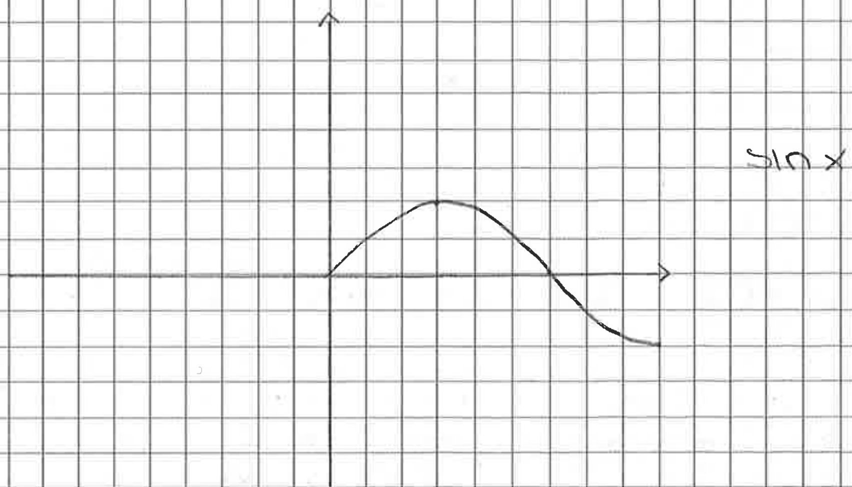
$9|x-1| < \varepsilon$

$|x-1| < \varepsilon/9$

$\delta = \varepsilon/9$

3) dimostrare attraverso la definizione

$\lim_{x \to \pi/2} \lfloor \sin x \rfloor = 0$



$1/x < \varepsilon$

$x > 1/\varepsilon$

$\bar{n} = \{1/\varepsilon, 1/4\}$

5) dimostrare attraverso la definizione

$$\lim_{x \to +\infty} x - 2\sqrt{x} = +\infty$$

$x - 2\sqrt{x} > M$

$x - 2\sqrt{x} - M > 0$ pongo $t = \sqrt{x}$

$t^2 - 2t - M > 0$

$$t = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4M}}{2}$$

$t < 1 - \sqrt{1+M} \quad \vee \quad t > 1 + \sqrt{1+M}$

↓

siccome $t = \sqrt{x}$
non è possibile
che $\sqrt{x} < 0$

quindi

$\sqrt{x} > 1 + \sqrt{1+M}$

$x > (1 + \sqrt{1+M})^2$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 73 di 298

LIMITI NOTEVOLI

① $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

② $$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = 1/2$$

③ $$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

④ $$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

⑤ $$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} = a$$

⑥ $$\lim_{x \to 0} \frac{\alpha^x - 1}{x} = \ln \alpha \qquad \alpha > 0$$

Riconduco α^x a "e"

$\alpha = e^{\ln \alpha}$

quindi

$\alpha^x = e^{x \ln x}$

$$(1+x)^a - 1 = \sum_{j=1}^{a} \binom{a}{j} x^j$$

$$\downarrow$$

$$\underbrace{\binom{a}{1} x}_{ax} + \binom{a}{2} x^a + \dots \binom{a}{a} x^a$$

caso particolare $a = 1/2$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = 1/2$$

se $|x|$ è piccolo $\sqrt{1+x} - 1 \simeq x/2$

quindi $\sqrt{1+x} \simeq 1 + x/2$

Es.

$\sqrt{10}$ $<$ $3?$

$\quad$ ...

$$\sqrt{10} = \sqrt{9+1} = 3\sqrt{1 + 1/9} \simeq 3\left(1 + 1/18\right) = 3 + 1/6$$

Spiegazione (2)

se $|x|$ è piccolo $\qquad \dfrac{1-\cos x}{x^2} = 1/2$

$1 - \cos x \simeq x^2/2$

cioè

$\cos x \simeq 1 - x^2/2$

ES.

$\sin x \rightarrow$ è continua almeno nell'origine $x_0 = 0$

$$\lim_{x \to 0} \sin x = \sin(0)$$

$$\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\downarrow\, 1} \cdot x = \underbrace{\emptyset}_{\sin(0)}$$

$\cos x \rightarrow$ è continua almeno nell'origine $x_0 = 0$

$$\lim_{x \to 0} \cos x = 1$$

$$\underbrace{\frac{1-\cos x}{x^2}}_{\downarrow\, 1/2} \cdot \underbrace{x^2}_{\downarrow\, \emptyset} = \emptyset$$

$$1 - \cos x = 0$$

$$\cos x = 1$$

ES.

$\sin x$ è continua $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to x_0} \sin x = \lim_{h \to 0} \sin(x+h) =$$

$$\lim_{h \to 0} (\sin x_0 \cdot \underbrace{\cos h}_{\downarrow\, 1} + \cos x_0 \cdot \underbrace{\sin h}_{\downarrow\, \emptyset})$$

è continua.

PUNTI DI DISCONTINUITÀ

Sia $f(x)$ definita in un intorno di $x_0 \in \mathbb{R}$, tranne eventualmente in x_0

Consideriamo i due limiti:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L^-$$

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L^+$$

1) se entrambi i limiti esistono, sono finiti e coincidono (cioè $\exists$ finito il limite $\lim_{x \to x_0} f(x) = L^- = L^+$)

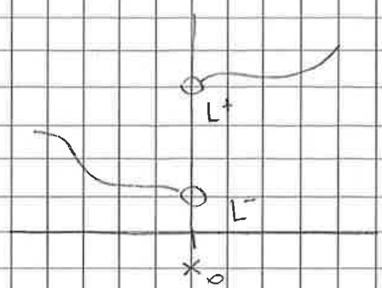
allora f può essere resa continua in x_0, ridefinendo

$$f(x_0) = L^+ = L^-$$

x_0 si chiama "punto di discontinuità eliminabile"

2) se i due limiti esistono, sono finiti, ma non coincidono $L^+ \neq L^-$, allora

x_0 si chiama "discontinuità di tipo salto"



salto di ampiezza $|L^+ - L^-|$

TEOREMA CONTINUITÀ f COMPOSTA

Se $g(x)$ è continua in x_0 e $f(x)$ è continua in $g(x_0)$, allora $f(g(x))$ è continua in x_0

es.

$$\frac{e^{x^2} \cdot \sin(x^3)}{x-1}$$

è continua (almeno) in tutti gli $x_0 \neq 1$, perché ottenuta componendo funzioni elementari continue

TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO

Sia $f(x)$ continua in x_0

1) se $f(x_0) > a$ $(a \in \mathbb{R})$
allora $\exists$ un intorno I di x_0 dove
$f(x) > a$ $\forall x \in \mathbb{R}$

2) se $f(x) \geq a$ in tutto un intorno di x_0, tranne eventualmente x_0, allora anche $f(x_0) \geq a$

Osservazione : è un teorema sui limiti

Teorema generale

f definita in un intorno di x_0, tranne eventualmente x_0

1) se $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) > a$, allora $\exists$ I di x_0 dove $f(x) > a$ $\forall x \in I$, $x \neq x_0$

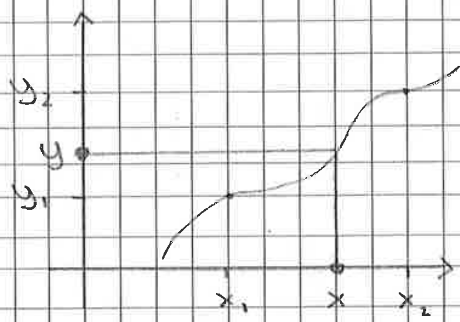
2) se $f(c) < 0$, avrei dei punti a sinistra di c dove $f(x) < 0$, il che è assurdo perché uno di questi x sarebbe un maggiorante di A minore di c

• TEOREMA DEI VALORI MEDI

I intervallo qualunque $f: I \to \mathbb{R}$ continua, allora l'immagine di f è un intervallo, ovvero se $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$ $(x_1$ e $x_2 \in I)$ allora $\forall y$ tra y_1 e y_2 $\exists x$ tra x_1 e x_2 tale che $y = f(x)$

dimostrazione

Fissiamo $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$, supponiamo che $y_1 \neq y_2$ e che $x_1 < x_2$



pongo $g(x) = f(x) - y$

applico il teorema degli zeri a $g(x)$ sull'intervallo (x_1, x_2):

$$g(x_1) \cdot g(x_2) = (f(x_1) - y) \cdot (f(x_2) - y)$$

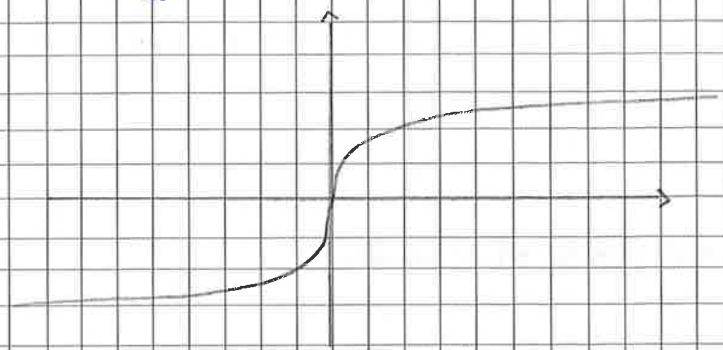
$$= (y_1 - y) \cdot (y_2 - y) < 0$$

perché y è intermedio tra y_1 e y_2 quindi uno dei due fattori è negativo

1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con Im (a, b) aperto:

es.

$f(x) = \text{arctg}\, x$

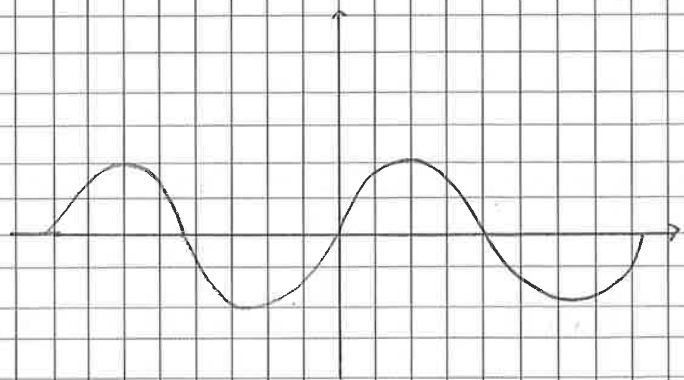


$(-\pi/2, \pi/2)$

2) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con Im $[a, b]$ chiuso:

es.

$f(x) = \sin x$

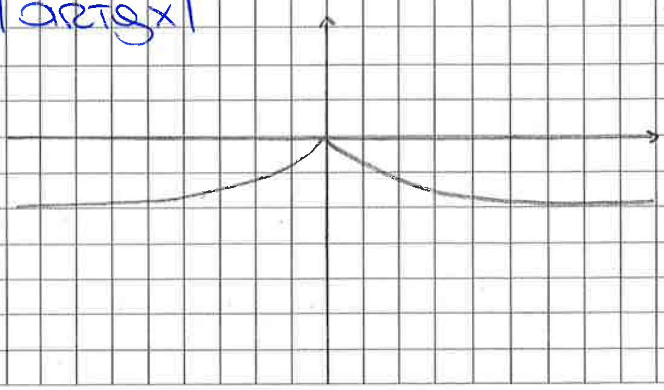


$[-1, 1]$

3) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con Im $(a, b]$ semiaperto:

es.

$f(x) = -|\text{arctg}\, x|$



$(-\pi/2, 0]$

ESERCIZI

1) mostrare che

$f(x) = (1+|\sin x|)^{1/x}$ presenta una discontinuità di tipo salto $x_0 = 0$

$$\lim_{x \to 0^-} (1+\underbrace{|\sin x|}_{\ominus})^{1/x}$$

utilizzo la funzione log per sfruttarne le sue proprietà

$$\log(1-\sin x)^{1/x}$$

$$1/x \log(1-\sin x)$$

$$\frac{\log(1-\sin x)}{(-\sin x)x}(-\sin x) \to -1$$

cambio variabile $t = -\sin x$

$$\lim_{t \to 0^-} \underbrace{\frac{\log(1+t)}{t}}_{1}(-1) = -1$$

siccome avevo usato la funzione log

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = e^{-1}$$

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{\log(x+1)}{x} & -1 < x < 0 \\ 1 & x = 0 \\ \dfrac{e^x - 1}{x} & 0 < x < 1 \end{cases}$$

2) $$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\underbrace{\log|x|}_{\to -\infty}} = 0$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{\underbrace{\log|x|}_{\to -\infty}} = 0$$

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

3) $$\lim_{x \to 0^-} \underbrace{e^{-1/x^2}}_{0} + 2 = 2 \qquad -1/x^2 \to -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} \underbrace{e^{-1/x^2}}_{0} + 2 = 2$$

$$\tilde{h}(x) = \begin{cases} h(x) & x \neq 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 91 di 298

$$\lim_{t \to -\infty} -t \cdot \cos^2 t \quad \nexists$$

quindi $\boxed{\beta > 0}$

se $\alpha = 0 \rightarrow$ si

$$\lim_{x \to 0^+} \underbrace{x^\alpha}_{\downarrow \, 1} \cdot \underbrace{\sin^2 x}_{\downarrow \, 0} = 0$$

se $\alpha = 1 \rightarrow$ si

$$\lim_{x \to 0^+} x^\alpha \sin^2 x = 0$$

se $\alpha = -1 \rightarrow$ si

$$\lim_{x \to 0^+} x^\alpha \cdot \sin^2 x = 0$$

se $\alpha = -2 \rightarrow$ no

$$\lim_{x \to 0^+} x^\alpha \cdot \sin^2 x = 1$$

quindi $\boxed{\alpha > -2}$

4) determinare i valori di $a \in \mathbb{R}$ per cui le funzioni sono continue nel loro dominio

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x} + 3 & x < 0 \\ (x-1)^2 + a & x \geq 0 \end{cases}$$

$\exists\ \varepsilon > 0 \ / \ \forall \delta > 0 \ \exists x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \delta, \ |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$

consideriamo $0 < \varepsilon \leq 1$

$\delta > 0$ se $x \in \mathbb{R}$ con $|x - x_0| < \delta$ si ha che

$$|f(x) - f(x_0)| = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q} \\ 1 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

siccome $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$, cioè

$\exists x \in \mathbb{Q}, \ \exists x \notin \mathbb{Q} \ / \ |x - x_0| < \delta$

cioè $\exists x \in \mathbb{R}$ con $|x - x_0| < \delta$

più precisamente

$x \notin \mathbb{Q} \ / \ |f(x) - f(x_0)| = 1 \geq \varepsilon$

6) dimostrare che $f(x)$ ha almeno 4 zeri

$$f(x) = x^3 - 2x + 2 - e^x$$

$f(x)$ è continua perché somma di f continue

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\left.\begin{aligned} f(-2) &= -8 + 4 + 2 - e^{-2} < 0 \\ f(-1) &= -1 + 2 + 2 - e^{-1} > 0 \end{aligned}\right\} \text{cambio di segno}$$

$\exists x_0 \in (-2, -1)$ zero di f

$$\left.\begin{aligned} f(0) &= 0 - 0 + 2 - 1 > 0 \\ f(1) &= 1 + 2 + 2 - e < 0 \end{aligned}\right\} \text{cambio di segno}$$

$\exists x_0 \in (0, 1)$ zero di f

SIMBOLI DI LANDAU

definizione

- la scrittura "$f \sim g$ per $x \to x_0$" significa "f è equivalente a g" e quindi

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1}$$

- la scrittura "$f\ o\ g$ per $x \to x_0$" significa "o piccolo di f" e quindi

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{o(f(x))}{f(x)} = \emptyset}$$

→ generica funzione

$o(f(x))$ indica una funzione trascurabile (cioè molto più piccola) rispetto a $f(x)$ quando $x \to x_0$

es. $f \sim g$

a) $\sin \sim x$ per $x \to 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

b) $1 - \cos x \sim x^2/2$ per $x \to 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2/2} = 1$$

b) $x = o(x^3)$ per $x \to +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^3} = 0$$

c) $\sin x - x = o(x)$ per $x \to 0$

$\sin x = o(x) + x$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x} = 0$$

d) $x^{10} = o(e^x)$ per $x \to +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^{10}}{e^x} = 0$$

e) $f(x) = o(1)$ per $x \to x_0$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{o(1)} = 0$$

$o(1)$ rappresenta una generica f infinitesima quando $x \to x_0$

f) $e^{-x} = o(x^4)$ per $x \to +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{-x}}{x^4} = 0$$

$\cos x = 1 - x^2/2 - o(x^2/2)$

siccome $o(x^2/2)$ è molto piccolo,
il $:2$ è trascurabile

$\cos x = 1 - x^2/2 - o(x^2)$

c) $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$e^x - 1 \sim x \rightarrow e^x - 1 = x + o(x)$

$e^x = 1 + x + o(x)$

d) $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

$\ln(1+x) \sim x \rightarrow \ln(1+x) = x + o(x)$

e) $\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} = a$

$(1+x)^a - 1 = x \cdot a \rightarrow (1+x)^a - 1 = xa + o(xa)$

$(1+x)^a = xa + 1 + o(x)$

f) $\sqrt{1+t} = 1 + t/2 + o(t)$

g) $\arctg x = x + o(x)$

siccome f è pari studio solo $x > 0$

$-t \leq \sin t \leq t$ dove $t = 1/x$

$-1/x \leq \sin 1/x \leq 1/x$

$-1 \leq x \sin 1/x \leq 1$ → è limitata

quindi l'affermazione è falsa

3) affermazione: $f : [3,7] \to \mathbb{R}$ continua, allora f può essere suriettiva su $\mathbb{R}$. V o F?

siccome f è continua l'$Im(f)$, grazie al teorema di Weierstrass $= [m, M]$

$m = \min f(x) \in [3,7]$
$M = \max f(x) \in [3,7]$ → è falsa

4) affermazione: f continua in $[a,b]$ allora f limitata su $[a,b]$. V o F?

V per il teorema di Weierstrass

5) affermazione: $f \sim g$ per $x \to +\infty$ allora $f(x) - g(x) = o(1)$ $x \to +\infty$. V o F?

$f(x) = x^2$

$g(x) = x^2 + 1$

per $x \to +\infty$ $f(x) \sim g(x)$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = 1$$

$D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) \to +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) \to +\infty$

$\lim_{x \to 0^-} \underset{\downarrow\, 0}{x^4} - 3\underset{\downarrow\, 1}{\cos x} + \underset{\downarrow\, \pi/2}{\operatorname{arctg} 1/x} =$

$-3 - \pi/2$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -3 + \pi/2$

$\Big\}$ diversa ma entrambi < 0

quindi

1 sz $\to (-\infty, 0)$

2 sz $\to (0, +\infty)$

cambiamenti di segno

$= (1+2t)(1-8t^2) + o(t^2) + 2t(o(t^2)) + o(t) - 8t^2 o(t)$
$+ o(t)o(t^2)$

$= 1 - 8t^2 + 2t - 16t^3 + \underbrace{o(t^2) + o(t^3)}_{\text{per } t\to 0 \text{ sono } o(t) \text{ quindi ven-gono inglobati}} + o(t) + \cancel{o(t^3)} + \cancel{o(t^3)}$

$= 1 \underbrace{- 8t^2}_{\to o(t)} + 2t \underbrace{- 16t^3}_{\to o(t)} + o(t)$

$= 1 + 2t + o(t)$

es.

sviluppare $e^{\sin t + t}$ $\quad t \to 0$

$e^{\sin t + t} = e^{\overbrace{2t + o(t)}^{x}}$

$= 1 + \underbrace{2t + o(t)}_{x} + \underbrace{o(2t + o(t))}_{o(x)}$ $\to = 2t$

$= 1 + 2t + o(t) + o(2t)$

$= 1 + 2t + o(t)$

es.

$e^{\cos x}$ $\quad x \to 0$

siccome per $x \to 0$ $\cos x \to 1$, non posso usare direttamente sviluppo di e^x

$e^{\cos x} = e^{1 - x^2/2 + o(x^2)}$

$= e\left(e^{x^2/2 + o(x^2)}\right)$ $\quad$ siccome ora $x \to 0$

es.

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - \cos x - x}{x^4}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cancel{1} + \cancel{x} + o(x) - \cancel{1} + x^2/2 + o(x^2) - \cancel{x}}{x^4}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2/2 + o(x)}{x^4}$$

ma siccome $x^2/2$ è $o(x)$

$$\lim_{x \to 0} \frac{o(x)}{x^4}$$ → non posso determinare il valore del limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{3x + o(x)}{4x + o(x)} = 3/4$$

ma ho usato log
quindi

$$\lim_{x \to 0} f(x) = e^{3/4}$$

4) $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2(3x)}{1 - \cos 2x}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \sin x \sim x \\ 1 - \cos 2x \sim (2x)^2/2 \end{array}}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{(3x)^2 + o(x^2)}{\frac{(2x)^2}{2} + o(x^2)} = 9/2$$

5) $$\lim_{x \to 0} \frac{2x \log x + x - 3x^2}{\log(1 + 4x) + x^3}$$

siccome per $x \to 0$

$x - 3x^2 = o(\log x \cdot 2x)$

$x^3 = o(\log(1 + 4x))$

$$\lim_{x \to 0} \frac{2x \cdot \log x + o(x \log x)}{4x + o(x)} = -\infty$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{\tg 4t - \sin 2t^2}{\log(1+3t)}$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{4t - (2t^2)^2 + o(t^2)}{3t + o(t)}$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{4t + o(t)}{3t + o(t)}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 113 di 298

le rette $y_m = f(x_0) + m(x - x_0)$ al variare di $m \in \mathbb{R}$ passano tutte per $(x_0; f(x_0))$

l'errore è $o(x-x_0) = o(h)$ per $x \to x_0$ e $h \to 0$

RETTA TG al grafico di $f(x)$ nel punto $(x_0, f(x_0))$
$y(x)$ → l'unica retta che da un errore $o(h)$

OSSERVAZIONE

f è derivabile in x_0

$\Leftrightarrow f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \quad x \to x_0$

$\Leftrightarrow o(x - x_0) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{(x - x_0)} = 0$$

cioè

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)} - f'(x) = 0$$

cioè

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)} = f'(x_0)}$$ derivata $\in \mathbb{R}$

OSSERVAZIONE

anche la continuità in x_0 è esprimibile con il linguaggio degli $o()$

f è continua in $x_0 \Leftrightarrow f(x) = f(x_0) + o(1) \quad x \to x_0$
cioè $f(x)$ è approssimabile con la costante $f(x_0)$ con un errore infinitesimo $o(1)$.

se $\exists\, m_2 \in \mathbb{R} \,/\, f(x) = f(x_0) + m_2(x-x_0) + o(x-x_0) \quad x \to x_0^-$
allora $f(x)$ si dice "derivabile a sinistra" e
m_2 si chiama "derivata sinistra"

se f ha derivata destra m_1 e sinistra m_2

1) se $m_1 = m_2$ allora f è derivabile e $f'(x_0) = m_1 = m_2$

2) se $m_1 \neq m_2$ $(\in \mathbb{R})$ allora x_0 è un punto angoloso

es.

$$\boxed{f(x) = e^x \qquad f'(x_0) = e^x}$$

infatti

$$e^x = e^{x_0} \cdot e^{\overbrace{x-x_0}^{t}}$$
$$= e^{x_0}\underbrace{\left(1 + (x-x_0) + o(x-x_0)\right)}_{\text{sviluppo } e^t \quad t \to 0} \qquad x \to x_0$$
$$= e^{x_0} + \underbrace{e^{x_0}}_{f'}(x-x_0) + o(x-x_0)$$

es.

$$\boxed{f(x) = \sin x \qquad f'(x) = \cos x}$$

$$\sin x = \sin((x_0) + (x-x_0))$$
$$= \sin x_0 \cos(\overbrace{x-x_0}^{t}) + \cos x_0 \sin(x-x_0) \quad t \to 0$$
$$= \sin x_0 \underbrace{\left(1 + o(x-x_0)\right)}_{1 - \frac{(x-x_0)^2}{2} + o(x-x_0)} + \cos x_0 \left((x-x_0) + o(x-x_0)\right)$$

$1 + o(x-x_0)$

$$f(x)\cdot g(x) = \big(f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)\big)\cdot\big(g(x_0) + g'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)\big)$$

$$= f(x_0)\cdot g(x_0) + (x-x_0)\underbrace{\left[f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)\right]}_{F'} + o(x-x_0)$$

↳ sono compresi tutti gli altri termini con o()

es.

$f(x) = e^x \cdot \cos x$

$f'(x) = e^x \cdot \cos x + (-\sin x)\cdot e^x$

$= e^x(\cos x - \sin x)$

OSSERVAZIONE

$$\boxed{f(x) = x \qquad f'(x) = 1}$$

quindi

$f(x) = x^2 = x \cdot x \qquad f'(x) = 2x$

$f(x) = x^3 = x^2 \cdot x \qquad f'(x) = 3x^2$

$$\boxed{f(x) = x^n \qquad f'(x) = nx^{n-1}} \qquad n \in \mathbb{N}$$

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = f'(g(x_0)) \cdot g'(x)$$

$$\boxed{\left(\frac{1}{g(x)}\right)'} = \frac{1}{g^2} \cdot g' = \boxed{\frac{g'(x)}{g^2(x)}}$$

es.

$$\boxed{h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \qquad h'(x) = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{g^2(x)}}$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = f' \cdot \frac{1}{g} + \left(-\frac{g'}{g^2}\right) f = \frac{f' \cdot g + f \cdot g'}{g^2}$$

es.

$$\boxed{f(x) = tg\,x \qquad f'(x) = 1 + tg^2 x \quad \text{o} \quad f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}}$$

$$\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$\nearrow 1 + tg^2 x$

$\searrow \dfrac{1}{\cos^2 x}$

$$\lim_{x \to 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{m(x-9)} = 1$$

$$\lim_{x \to 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9} = m$$

$$\lim_{x \to 9} \frac{\cancel{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)}}{\cancel{(x-9)}(\sqrt{x} + 3)} = m$$

$m = 1/6$

$f'(9) = 1/6$

3) $f(x)$ definita in un intorno di $x_0 = 0$ / $f(0) = 0$ e $f(x) = o(x)$ $x \to 0$

dimostrare che f è derivabile in $\emptyset$ e determinare $f'(0)$

se $f(x) = o(x)$ $x \to 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 0$$

usando la definizione di derivata

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$$

per HP $f(0) = 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - 0}{x - 0} = 0$$

$f'(x)$ è continua?

$$\lim_{x \to 0} \underbrace{\left(2x \cdot \sin 1/x\right)}_{\downarrow \, 0} - \cos 1/x$$

$$\lim_{x \to 0} -\cos 1/x \to \nexists \to f' \text{ non è continua}$$

5) Studiare la derivabilità su $\mathbb{R}$ di $f(x) = x \cdot |x|$.
È continua la sua derivata?

$f(x) = o(x) \quad x \to 0$

perché $\lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x} \cdot |x|}{\cancel{x}} = 0$

$f(0) = 0$

quindi $f' \exists$ e $f'(0) = 0$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -2x & x < 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to 0^+} 2x = 0 \\ \lim_{x \to 0^-} -2x = 0 \end{aligned}\right\} \text{è continua}$$

$y = x^{\sqrt{x}}$

$\log y = \log x^{\sqrt{x}}$

$\log y = \sqrt{x} \log x$

inizio a derivare, y la devo derivare perché è in funzione di x

$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \log x + \sqrt{x} \cdot 1/x$

$y' = y \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \log x + \sqrt{x} \cdot 1/x \right.$

$y' = x^{\sqrt{x}} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \log x + \sqrt{x}/x \right)$

8) scrivere l'equazione della retta tg in P di ascissa x_0 al grafico di

a) $f(x) = \log(3x-2)$ $\quad x_0 = 2$

b) $f(x) = e^{\sqrt{2x+1}}$ $\quad x_0 = 0$

a) $y - y_0 = m(x - x_0)$

$y - \log 4 = m(x-2)$

$f' = \frac{1}{3x-2} \cdot 3$

$f'(2) = m = 3/4$

$y = \log 4 + 3/4 (x - 2)$

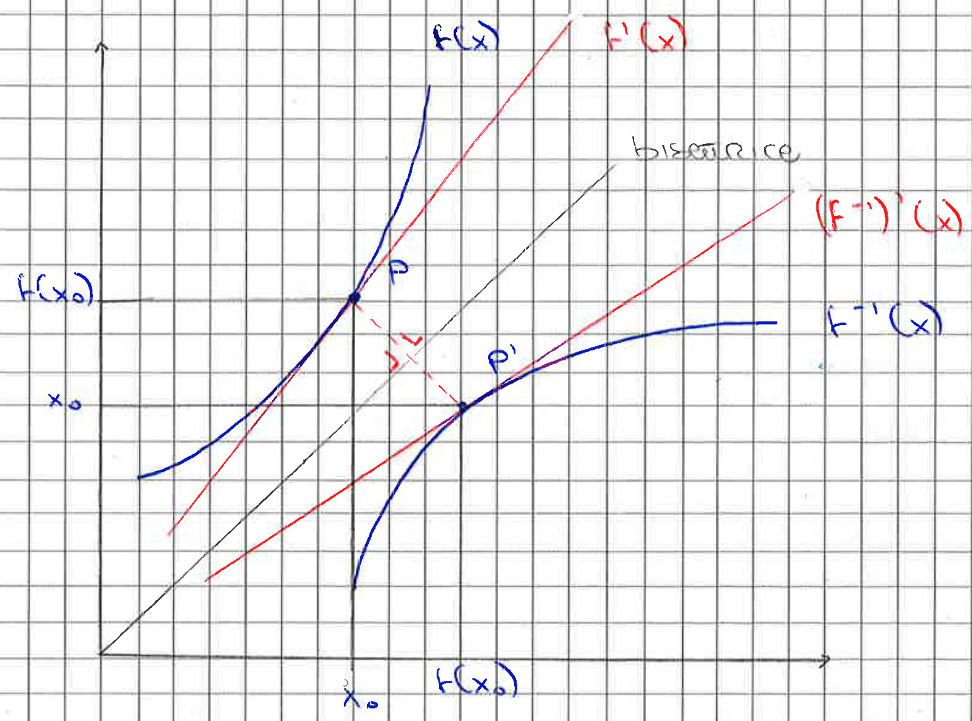
derivata f(x) inversa: $f^{-1}(x)$

sia f(x) derivabile e invertibile in un certo x_0 con $f'(x_0) \neq 0$.
Allora f^{-1} risulta derivabile nel punto $f(x_0)$ e vale

$$\boxed{(f^{-1})' f(x_0) = \frac{1}{f'(x_0)}}$$

o si può anche scrivere

$$\boxed{(f^{-1})'(t_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(t_0))}}$$



$P(x_0, f(x_0))$ e $P'(f(x_0), x_0)$

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{1+Tg^2 x}$$

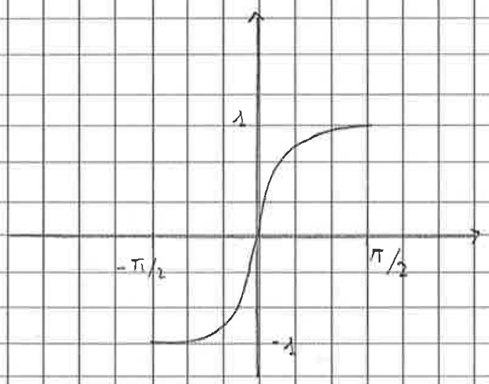
in generale

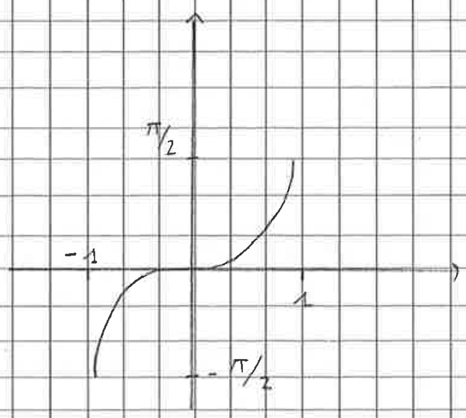
$$\boxed{(f^{-1})' = (\operatorname{arctg} t)' = \frac{1}{1+t^2}}$$

es.

$f(x) = \sin x$ $\quad x \in [-\pi/2, \pi/2]$

$f^{-1}(x) = \arcsin x$ $\quad t \in [-1, 1]$





arcsin t è derivabile $\forall t \in (-1, 1)$

$$(f^{-1})'(t_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))} = \frac{1}{\cos(\arcsin t)}$$

$$\boxed{(\arcsin t)' = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}}$$

ERRORE (COMUNE) GRAVE !

data $f(x) = \dots$, calcolo $f'(x) = \dots$ e deduco che $Dom(f') = \{\dots\}$ guardando $f'(x)$

↓

SBAGLIATO

es.

$f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} 1/x$

$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad Dom(f'(x)) = \{R\} \rightarrow$ NO

$Dom(f'(x)) = Dom(f(x))$ tranne nei punti di non derivabilità

per calcolare f' mi baso sui teoremi di derivabilità con la verificazione delle loro ipotesi

1) guardo $f(x) = \dots$

2) nei punti dove è lecito applicare il teorema, lo applico e trovo $f'(x) = \dots$

3) nei restanti punti del $Dom(f(x))$ devo studiare l'esistenza di $f'(x)$

4) ora sono in grado di dire il $Dom(f'(x))$

2) $f(x) = \left|\sqrt[3]{e^x - 1}\right|$

provare che in $x = 0$ c'è una cuspide

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{-\sqrt[3]{e^x - 1} - 0}{x - 0}$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{-\sqrt[3]{e^x - 1}}{x}$$

siccome $e^x - 1 \sim x$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{-\sqrt[3]{x}}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{e^x - 1}}{x} = +\infty$$

$+\infty$ e $-\infty$ $\rightarrow$ cuspide

3) $f(x) = x \cdot \operatorname{arctg} 1/x$

studiare il comportamento vicino a $x_0 = 0$

$$\lim_{x \to 0} x \cdot \operatorname{arctg} 1/x = 0$$

prolungo la continuità

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} x \cdot \operatorname{arctg} 1/x & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

5) $f(x) = |x| \cos x$

studiare se è derivabile

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} |x| \cos x & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x \cdot \cos x - 0}{x - 0} = 1$$

$\rightarrow$ punto angoloso

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{-x \cdot \cos x - 0}{x - 0} = -1$$

6) $f(x) = 5x + x^3 + 2x^5$

verificare che f è invertibile e f^{-1} derivabile

? $(f^{-1})'(0)$ e $(f^{-1})'(8)$

somma f crescenti $\rightarrow$ f(x) è crescente e continua

$$\left.\begin{array}{ll} \lim_{x \to +\infty} & f(x) \; +\infty \\ \lim_{x \to -\infty} & f(x) \; -\infty \end{array}\right\}$$ è iniettiva e suriettiva

$f'(x) = 5 + 3x^2 + 10x^4$ sempre > 0

f^{-1} è derivabile?

se $f(0) = 0 \rightarrow f^{-1}(0) = 0$

TEOREMA DE L'HOPITAL

supponiamo che ∃

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) \begin{array}{l} = 0 \\ = +\infty \\ = -\infty \end{array}$$

se esiste $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$ allora esiste anche

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

applicazioni

- $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^{3/2}}$ forma indeterminata $\dfrac{+\infty}{+\infty}$

studio $\dfrac{f'}{g'}$

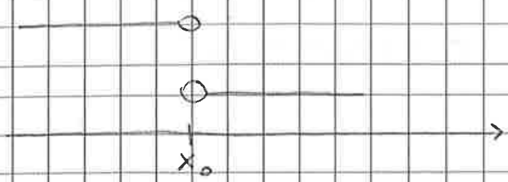
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{\frac{3}{2} x^{1/2}}$$

é ancora una forma indeterminata

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{\frac{3}{4} x^{-1/2}} = +\infty$$

allora

- se f è discontinua



$\exists\ f'(x) = 0 \quad \forall\, x \neq x_0$

$\lim_{x \to x_0} f'(x) = 0$ ma f non è derivabile in x_0

perché non è verificata la prima ipotesi

attenzione: se non esiste $\lim_{x \to x_0} f'(x)$ non è detto che f sia non derivabile in x_0

es.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin 1/x & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

f è continua

se $x \neq 0$ $\quad f'(x) = 2x \cdot \sin 1/x + x^2 \cdot \cos 1/x \cdot (-1/x^2)$

$$= 2x \cdot \sin 1/x - \cos 1/x$$

verifico anche la derivabilità nell'origine

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x^2} \cdot \sin 1/x - 0}{\cancel{x} - 0} = 0$$

quindi $\mathrm{Dom}(f'(x)) = \mathbb{R}$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \cdot \sin 1/x - \cos 1/x & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

COME TROVARE UN ASINTOTO

METODO I

1) se c'è l'asintoto $y = ax + b$, allora

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$$

se il lim ∄ o vale $+\infty / -\infty$ allora non c'è un asintoto

2) se ho trovato a e c'è asintoto, allora

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - a\,x = b$$

se il lim ∄ o vale $+\infty / -\infty$ allora non c'è un asintoto

METODO II

es.

$f(x) = \sqrt{4x^2+5}$

per $x \to +\infty$ $\quad f(x) = 2|x|\sqrt{1 + 5/4x^2}$

$\sqrt{1+t} = 1 + t/2 + o(t)$

allora $x \to +\infty$

$f(x) = 2x\left(1 + 5/8x^2 + o(1/x^2)\right)$

$$= \underbrace{2x}_{\text{asintoto}} + \underbrace{5/4x^2 + o(1/x)}_{o(1)}$$

TERMINOLOGIA

data $f(x)$, un punto $x_0 \in Dom(f)$ si dice:

1) PUNTO CRITICO (o stazionario) se $f'(x_0) = 0$

2) PUNTO DI MIN RELATIVO se $\exists$ un intorno I di x_0 / $\forall x \in I \cap Dom(f(x))$ $f(x_0) \leq f(x)$

3) PUNTO DI MAX RELATIVO se $\exists$ un intorno I di x_0 / $\forall x \in I \cap Dom(f(x))$ $f(x_0) \geq f(x)$

TEOREMA DI FERMAT

se f è definita in tutto un intorno di x_0, x_0 è punto di min o max relativo ed $\exists f'(x_0)$, allora $f'(x_0) = 0$ quindi un punto stazionario

dimostrazione (applicazione della permanenza del segno)

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f'(x_0) = \begin{cases} \lim_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \\ \lim_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0 \end{cases}$$

TEOREMA DI ROLLE

se f continua in $[a,b]$ con $f(a)=f(b)$
allora $\exists\, c \in (a,b) \;/\; f'(c)=0$

dimostrazione (applicazione teorema di Weierstrass)

per Weierstrass, $\exists\, x_0 \in [a,b]$ punto di max assoluto e $\exists\, x_1 \in [a,b]$ punto di minimo assoluto

se entrambi i punti sono agli estremi allora f è costante

$f(a)=f(b)$
$\downarrow$
$\max f(x) = \min f(x) \Rightarrow f(x) = \text{costante}$
$f'(c)=0$

altrimenti se almeno uno tra x_0 e x_1 sta (a,b) allora sono nell'ipotesi del teorema di Fermat, quindi $f'(x_0)$ o $f'(x_1)=\emptyset$

TEOREMA DI LAGRANGE

se f è continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b)
allora $\exists\, c \in (a,b) \;/\; f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

CONSEGUENZA TEOREMA DI LAGRANGE

sia f derivabile su un intervallo I, allora:

1) se f è crescente su $I \iff f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$

2) $f'(x) > 0 \quad \forall x \in I \Rightarrow f$ strettamente crescente su I

· f si dice
- crescente su I se $x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$
- decrescente su I se $x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$
- strettamente crescente su I se $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$
- strettamente decrescente su I se $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$

dimostrazione

se $x < y$ e $x, y \in I$ allora per Lagrange su $[x, y]$

$$f'(c) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \qquad \text{con } x < c < y$$

1) se so che $f' \geq 0$ deduco che

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0 \quad \text{cioé deduco}$$

$f(x) \leq f(y)$ quindi f crescente

$g'(x) = 0$ se $2f(x) \cdot f'(x) = 0$

se $2f(x) = 0$ o $f'(x) = 0$

$\begin{cases} f(1) = 0 \\ f(2) = 0 \\ f(3) = 0 \end{cases}$

ho 3 zeri

per il teorema di Rolle

$f(1) = f(2) \rightarrow f'(x) = 0$
$f(2) = f(3) \rightarrow f'(x) = 0$ } ho 2 zeri

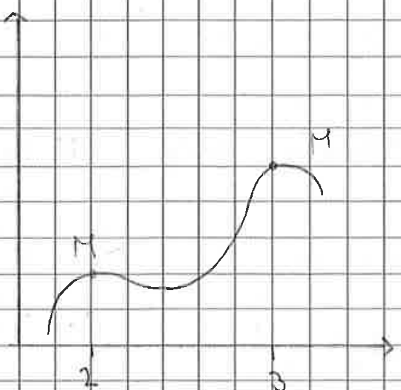
g' ha almeno 5 zeri in $[1, 3]$

3) $f: [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$
$g: [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ $\rightarrow$ soddisfano Rolle

quindi $f(0) = f(4)$
$g(0) = g(4)$

$\exists\, c \in (0, 4)$ dove f e g hanno derivata uguale

4) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ classe C^1 max locale in $x_0 = 2$ e l'altro in $x_0 = 3$



f' ha almeno 3 zeri $[2, 3]$

$g(f(x))' = f'(x)\, \text{arctg}\, f(x)$

per trovare pt critici

$f'(x)\, \text{arctg}\, f(x) = 0$

se

$f'(x) = 0$ o $\text{arctg}\, f(x) = 0$

$f'(x) = 0$ ↓ se $f(0)$ e $f(1) = 0$ anche $f'(0)$ e $f'(1) = 0$ ↓ 2 pt critici

$\text{arctg}\, f(x) = 0$ ↓ quindi se $f(x) = 0$

$f(0)$ e $f(1) = 0$ ↓ 2 pt critici

siccome è dispari

$f(1) = f(-1) = 0$ ↓ 3 pt critici

ha almeno 5 pt critici

es.

$f(x) = |x|^3$

é continua su tutto $\mathbb{R}$

$|t|$ è derivabile $\forall t \neq 0$

$$|t| = \begin{cases} t & t > 0 \\ -t & t < 0 \end{cases}$$

$$|t|' = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases}$$

in modo compatto $|t|' = \text{sgn}(t)$ $\forall t \neq 0$

$f(x)' = 3x^2 \cdot \text{sgn}\, x \quad \forall x \neq 0$

per il criterio "tappabuchi"
$f(x)$ è derivabile anche in $x = 0$ e $f'(0) = 0$

$f'(x) = 3x^2 \cdot \text{sgn}\, x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

? derivata 2ª

$f''(x) = 6x \cdot \text{sgn}(x)$ $\quad \text{sgn}(x)' = \emptyset$
$= 6|x| \quad \forall x \neq 0$

$f''(0)$ non $\exists$ $\rightarrow$ c'è pt angoloso

? derivata 3ª

$f'''(x) = 6 \cdot \text{sgn}(x) \quad \forall x \neq 0$

è del tipo $\frac{0}{0}$ quindi applico de l'Hopital

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0) - f''(x_0)(x - x_0)}{2(x - x_0)}$$

$$\lim_{x \to x_0} -\frac{1}{2} f''(x_0) + \underbrace{\frac{f'(x) - f'(x_0)}{2(x - x_0)}}_{\text{incremento } f''(x)}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{2} \left(f''(x_0) - f''(x_0) \right) = 0 \rightarrow \text{dimostrato}$$

definizione

se f é derivabile (almeno) n volte in x_0, si chiama "polinomio di Taylor di grado n centrato in x_0" il polinomio

$$T_n(x) = f(x) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

$$\boxed{T_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} f^{(j)}(x_0)(x - x_0)^j}$$

applicazione a e^x

$f(x) = e^x \qquad x \in [0, 1]$

$$f(x) = T_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

se $x_0 = 0$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \frac{x^n}{n!} + \underbrace{\frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1}}_{\text{errore} = E_n(x)}$$

$0 < c < x \leq 1$

stimiamo l'errore

$$0 < E_n \leq \frac{3}{(n+1)!} \cdot 1$$

3 → valore max se $e^1 = e \sim 3$

$e^c \leq e \rightarrow e \leq 3$

$x^{n+1} \leq 1$ perché $x \in [0, 1]$

corollario

se $x = 1$ e $x_0 = 0$

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots \frac{1}{n!} + E_n$$

$$0 < E_n \leq \frac{3}{(n+1)!}$$

quindi

$$e = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} \dots + \frac{1}{n!}\right)$$

3) senh x → seno iperbolico $\quad x \to 0$

parte dispari funzione esponenziale

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

se f dispari allora f' pari, f'' dispari, f''' pari...

quindi lo sviluppo di $T_n(x)$ ordine dispari ha solo monomi dispari perché quelli pari in $x_0 = 0$ si annullano

$$T_{2k+1}(x) = f'(0) + \frac{f'''(0)\,x^3}{3!} + \dots \frac{f^{(2k+1)}(0)\,x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

invece lo sviluppo di $T_n(x)$ ordine pari

$T_{2k+2} = T_{2k+1}$ perché il monomio $2k+2$ è pari e quindi si annulla

$$\boxed{\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \dots + \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2k+2})}$$

4) cos x $\quad x \to 0$

$(\cos x)' = -\sin x$

$(\cos x)'' = -\cos x$

$(\cos x)''' = \sin x$

$(\cos x)^{(4)} = \cos x \quad \dots$

$$\boxed{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} \dots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2k+1})}$$

f) $(1+x)^a \qquad x \to 0$

$$((1+x)^a)' = a(1+x)^{a-1} \qquad f'(0) = a$$

$$((1+x)^a)'' = a(a-1)(1+x)^{a-2} \qquad f''(0) = a(a-1)$$

$$\dots \qquad f^{(n)}(0) = a(a-1)(a-2)\dots(a+1-n)$$

$$\boxed{(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)x^2}{2!} + \frac{a(a-1)(a-2)x^3}{3!} + \dots + \frac{a(a-1)\dots(a+1-n)\,x^n}{n!}x^n + o(x^n)}$$

CASI PARTICOLARI IMPORTANTI

$\boxed{\text{di } (1+x)^a}$

- se $a = -1$ (serie geometrica)

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 \dots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

se pongo $t = -x$

$$\boxed{\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 \dots + t^n + o(t^n)}$$

- se $a = 1/2$

$$\sqrt{1+x} = 1 + x/2 - x^2/8 + o(x^2)$$

es. calcolo sviluppo

come si calcola $\ln 3$?

cattiva approssimazione:

usare sviluppo $\ln(1+x)$ con $x=2$ perché con la formula del resto di Lagrange

$$\frac{(-1)^{n+1} \, (1+c)^{-n}}{n} \cdot 2^{n+1} \rightarrow \text{Err grande}$$

buona approssimazione:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \dots$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \dots$$

sottraggo e viene

$$\frac{\ln(1+x)}{\ln(1-x)} = 2x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^5 \dots \frac{2}{2k+1}x^{2k+1} + \text{Err}$$

$f(x) = \underbrace{\frac{1}{2}(x-2)}_{P.P.} \qquad x \to 2$

quindi

$$\lim_{x\to 2} \frac{\log x - \log 2}{x-2} = \frac{1}{2}$$

3) determinare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x^3+2x^2)}{x^4-x^4} \qquad \frac{0}{0}$$

per $t \to 0$ $\quad \frac{1-\cos t}{t^2} = \frac{1}{2}$

quindi $1-\cos t \sim \frac{1}{2}t^2$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}(x^3+2x^2)^2 + o(x^6)}{x^4+o(x^4)}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}(x^6+4x^5+4x^4+o(x^6))}{x^4+o(x^4)}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}(4x^4+o(x^4))}{x^4+o(x^4)} = 2$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{\log(2-x) - \log(2+x)}{x} + 1}{x}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(2-x) - \log(2+x) + x}{x^2} \quad \frac{0}{0}$$

applico de l'Hopital

$$\lim_{x \to 0} \frac{-\dfrac{1}{2-x} - \dfrac{1}{2+x} + 1}{2x}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{-2 - x + x - 2 + 4 - x^2}{(4-x^2)\,2x}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{-x^2}{(4-x^2)\,2x} = 0$$

$$(\tilde{g}(0))' = 0$$

5) $f(x) = \sqrt{|x^2 - 4|} - x$

determinare asintoti ed eventuali pt di max e min

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{|x^2 - 4|} - x$$

siccome a $+\infty$, tolgo $|\;|$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{-\cancel{x}\left(\sqrt{1-4/x^2}-1\right)}{\cancel{x}} = -2 \quad m \text{ retta}$$

TROVO q

$$\lim_{x \to -\infty} f(x)+2x$$

$$\lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2-4}-x+2x$$

$$\lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2-4}+x$$

siccome $-\infty+\infty$ moltiplico per il coniugato

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2-4}+x\right)\left(\sqrt{x^2-4}-x\right)}{\left(\sqrt{x^2-4}-x\right)}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2-4-x^2}{\sqrt{x^2-4}-x} = 0$$

$\exists$ asintoto obliquo $\to$ $y=-2x$

② guardo segno $f''(x_0)$

- se $f''>0$ → x_0 è pt min
- se $f''<0$ → x_0 è pt max
- se $f''=0$ → non si riesce a classificare

③ usando lo sviluppo

$$f(x) = A + B(x-x_0) + C(x-x_0)^2 + o((x-x_0)^2)$$

cosa posso ottenere?

$A = f(x_0)$

$B = f'(x_0)$

$C = \frac{f''(x_0)}{2}$

x_0 è critico $\Leftrightarrow B=0$

se è critico allora

- se $C>0$ → x_0 pt min
- se $C<0$ → x_0 pt max
- se $C=0$ → x_0 potrebbe essere min, max o flesso

come classificare x_0 se $f''(x_0)=0$?

si guarda lo sviluppo a ordini $n>2$ fino a trovare un coefficiente non nullo

$$f(x) = f(x_0) + \dots + \underbrace{\frac{f^n(x_0)}{n!}}_{*}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$$

$\forall t \in [0,1]$ e $\forall x_1, x_2 \in I$

se f è derivabile, f è convessa <=> f' è crescente <=> il grafico (≥ 0) sta sopra alla retta tg

se f è derivabile 2 volte, f è convessa <=> $f'' \geq 0$

$f^{(n)}(x_0)$ con n pari → >0 f convessa in x_0; → <0 f concava in x_0

RETTA TG

retta tg al grafico

$$\boxed{y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$$

2) Calcolare la P.P. rispetto all'infinitesimo campione $u(x) = x$ $x \to 0$ della funzione

$$f(x) = \log(2x+e) - 2e^{x-1} + \frac{2-e}{e}$$

$$f(x) = \log e\left(\frac{2x}{e}+1\right) - 2e^{x-1} + \frac{2}{e} - 1$$

$$f(x) = \cancel{\log e} + \log\left(\frac{2x}{e}+1\right) - 2e^{x-1} + \frac{2}{e} \cancel{-1}$$

Sviluppo di $\log(1+t)$ $t \to 0$

$$\log\left(1+\frac{2x}{e}\right) = \frac{2x}{e} - \frac{1}{2}\left(\frac{2x}{e}\right)^2 + o(x^2)$$

Sviluppo di e^x

$$-2e^{x-1} = -\frac{2e^x}{e}$$

$$-\frac{2e^x}{e} = -\frac{2}{e}\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)$$

quindi

$$f(x) = \cancel{\frac{2x}{e}} - \frac{1}{2}\left(\frac{2x}{e}\right)^2 - \frac{2}{e} - \cancel{\frac{2x}{e}} - \frac{x^2}{e} + o(x^2)$$

$$f(x) = \underbrace{-\left(\frac{2}{e^2} - \frac{1}{e}\right)x^2}_{P.P.} + \underbrace{o(x^2)}_{2\ \text{ordine}}$$

4) Scrivere lo sviluppo di Mac Laurin al 4° ordine di

$f(x) = \sqrt[3]{e^{-x}+x}$ e studiare il comportamento locale in $x_0 = 0$ di

$g(x) = f(x) - 1 - 1/6\, x^2 + 1/18\, x^3$

a) faccio lo sviluppo di $(1+t)^{\alpha} \to (e^{-x}+x)^{1/3}$

$$f(x) = (\underbrace{e^{-x}+x-1}_{t}+1)^{1/3}$$

con $t \to 0$

quindi

$$(e^{-x}+x-1+1)^{1/3} = 1 + 1/3\,(e^{-x}+x-1) + \frac{1/3(-2/3)}{2}(e^{-x}+x-1)^2 + o((e^{-x}+x-1)^2)$$

b) sviluppo $e^t \to e^{-x}$ con $x \to 0$

$$f(x) = 1 + 1/3\left(\cancel{1} - \cancel{x} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) + \cancel{x} - \cancel{1}\right)$$
$$+ \frac{1/3(-2/3)}{2}\left(\cancel{1} - \cancel{x} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) + \cancel{x} - \cancel{1}\right)^2$$
$$+ o\left(\left(\cancel{1} - \cancel{x} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) + \cancel{x} - \cancel{1}\right)^2\right)$$

$$f(x) = 1 + 1/6\, x^2 - 1/18\, x^3 + 1/72\, x^4 - 1/36\, x^4 + o(x^4)$$

$$f(x) = 1 + 1/6\, x^2 - 1/18\, x^3 - 1/72\, x^4 + o(x^4)$$

5) $f(x) = x^7 \cdot e^{3x}$

a) $f^{(8)}(0) = 0$

b) $f^{(7)}(0) = 0$

c) $f^{(8)}(0) = 3 \cdot 8!$

d) $f^{(3)}(0) = 8 \cdot 3!$

e) $f^{(3)}(0) = 24$

$$f(x) = x^7 (1 + 3x + o(x))$$

$$= x^7 + 3x^8 + o(x^8)$$

Teorema di Taylor

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2} x^2$$

quindi

$$3x^8 \rightarrow \frac{f^{(8)}(0)}{8!} = 3 \rightarrow f^{(8)}(0) = 3 \cdot 8!$$

6) $g(x) = \sin^2 3x - \log(1 + 9x^2) + \beta(x^5 - x^4)$

a) sviluppo Mc Laurin di ordine 5

b) ? β per cui $g(x) = o(x^4)$ $x \rightarrow 0$

IMPORTANTE

se f infinitesimo di ordine n $x \to x_0$

$$\boxed{f(x) = K(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 183 di 298

definizione

integrale su [a, b]

sia f continua a tratti su [a, b]. Si definisce "integrale su [a, b]" il numero finito

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^{n} \underbrace{f\left(a + j\,\frac{b-a}{n}\right)}_{h} \cdot \underbrace{\frac{b-a}{n}}_{b}}$$

e si indica con il simbolo

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx}$$

(N.B. si può dimostrare che il lim ∃ ed è finito: è l'area della figura T, se $f(x) \geq 0$)

significato come "media"

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a) \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f\left(a + j\,\frac{b-a}{n}\right)}$$

media aritmetica dei valori che f(x) assume negli n nodi

quindi il numero

$$\boxed{\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f\left(a + j\,\frac{b-a}{n}\right)$$

Teorema media integrale

- se f è continua a tratti, allora

$$\inf f(x) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx \leq \sup f(x)$$

- se f è continua su $[a,b]$ allora $\exists\, c \in (a,b)$ tale che

$$\boxed{\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx = f(c)}$$

dimostrazione

se f è continua su $[a,b]$ allora

$\sup f(x) = \max f(x)$

$\inf f(x) = \min f(x)$

$$\min f(x) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx \leq \max f(x)$$

per il teorema dei valori intermedi, f(x) assume tutti i valori tra max e min, quindi anche quello della media integrale

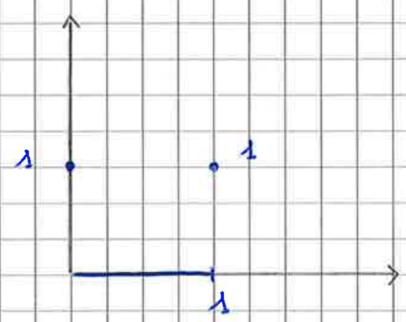
proprietà generali

1) $(b-a)\inf f(x) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq (b-a)\sup f(x)$

ESERCIZI

1) provare che $f(x)$ non è integrabile in $[0,1]$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$



$\mathcal{P}$ $\quad 0 \leq x < x_1 < x_2 \dots < x_n = 1$

somma inferiore

$$s(\mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} \Delta_k \cdot \inf(f(x)) = 0 \quad \text{perché } \inf(f x) = 0$$

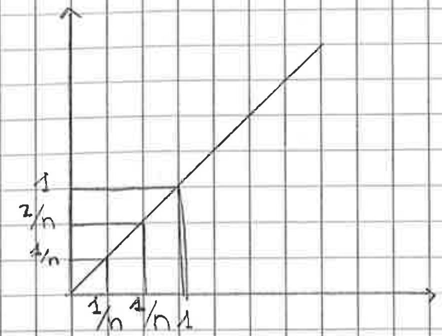
somma superiore

$$S(\mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} \Delta_k \cdot \sup(f(x)) = 1 \quad \text{perché } \sup = 1$$

non è integrabile perché $S(\mathcal{P}) \neq s(\mathcal{P})$

2) sia $f(x)$ limitata e integrabile in $[0,5]$

$$\int_0^5 f(x)\,dx = 10$$



$$s_n = 0 + \underbrace{1/n}_{b} \cdot \underbrace{1/n}_{h} + 1/n \cdot 2/n + 1/n \, \frac{n-1}{n}$$

$$S_n = 1/n \cdot 1/n + 1/n \cdot 2/n + 1/n \, n/n$$

$$S_n - s_n = 1/n$$

$$\lim_{n\to+\infty} 1/n = 0$$ è integrabile

per essere integrabile

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} s_n$$

$$\lim_{n\to+\infty} 1/n \left(1/n + 2/n + \dots n/n\right)$$

$$\lim_{n\to+\infty} 1/n \left(\frac{1+2+3+\dots n}{n}\right)$$

$$\lim_{n\to+\infty} 1/n^2 \left(1+2+3 \dots + n\right)$$

PRIMITIVA

definizione

I intervallo, $f: I \to \mathbb{R}$.
Una funzione $F: I \to \mathbb{R}$ si chiama "primitiva di f su I" se F è derivabile su I e $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$

osservazione

se F_1 e F_2 sono due primitive di f su I, allora $F_1' = F_2' = f \quad \forall x \in I$ e quindi (essendo I un intervallo) $F_2(x) - F_1(x)$ è costante su I, cioè $F_2(x) = F_1(x) + c$ per una certa costante $c \in \mathbb{R}$

Trovata una primitiva su I, le ho trovate tutte!

La generica primitiva di f su I si indica con

$$\boxed{F = \int f(x)\,dx}$$

es.

$I = \mathbb{R}$

$$\int e^x\,dx = e^x + c$$

$$\int x^4\,dx = \frac{x^5}{5} + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + c \qquad \text{su } (-1,1)$$

ottengo la media integrale di f sull' I $[x, x+h]$ per $h>0$ e sull' I $[x+h, x]$ per $h<0$

$f(c_h)$ intermedio tra x e $x+h$

quindi

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} f(c_h) = f(x)$$

calcolo degli integrali

I intervallo, $f \in C(I)$, a e $b \in I$, e $G(x)$ è una primitiva di f su I.
Allora:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)}$$

dimostrazione

so che $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ è una primitiva di $f(t)$.

(se potessi calcolare $F(x)$, avrei $\int_a^b f(t)\,dt = F(b)$)

G è un' altra primitiva che conosco:

$F(x) = G(x) + c$ su I

es.

chi è la derivata di

$$\tilde{F}(x) = \int_a^{x^2} f(t)\,dt$$

$$\tilde{F}(x) = F(x^2)$$

$$\tilde{F}'(x) = F'(x^2) \cdot 2x$$

ma $F'(x) = f(t)$

$$\tilde{F}'(x) = f(x^2) \cdot 2x$$

es.

$$\tilde{F}(x) = \int_x^{x^2} f(t)\,dt$$

$$\tilde{F}(x) = \int_a^{x^2} f(t)\,dt - \int_a^{x} f(t)\,dt$$

$$\tilde{F}'(x) = f(x^2) \cdot 2x - f(x)$$

INTEGRAZIONE PER PARTI

$$\boxed{\int f'(x)\,g(x)\,dx = f(x)\cdot g(x) - \int g'(x)\,f(x)\,dx}$$

dimostrazione

$$\int f'(x)\,g(x)\,dx + \int f(x)\,g'(x)\,dx$$

$$\downarrow$$

$$\int \underbrace{f'(x)g(x) + f(x)\,g'(x)}_{\text{der. prodotto}} = g(x)\cdot f(x)$$

es.

$$\int e^x \cdot x$$

$f' = e^x \qquad g = x$

$f = e^x \qquad g' = 1$

$$\int e^x \cdot x = e^x \cdot x - \int e^x\,dx$$

$$= e^x \cdot x - e^x + C$$

es.

$$\int e^x \cdot x^2$$

UTILIZZO PER $\ln x$

se scelgo $f(x) = x$ quindi $f'(x) = 1$

$$\int g(x)\,dx = x \cdot g(x) - \int x \cdot g'(x)\,dx$$

quindi

$$\int \ln x\,dx = x \cdot \ln x - \int x \cdot 1/x\,dx$$

$$\boxed{\int \ln\,dx = x(\ln x - 1)}$$

UTILIZZO PER $\operatorname{arctg} x$

$$\int \operatorname{arctg} x\,dx = x \cdot \operatorname{arctg} x - \int x \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$= x \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx$$

$$\boxed{\int \operatorname{arctg} x\,dx = x \cdot \operatorname{arctg} x - 1/2 \ln(1+x^2)}$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{1+t}\,dt = \frac{1}{2}\ln(1+t) + c$$

$$= \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c$$

utilizzo per Tgx

$$\int Tgx\,dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx$$

$t = \cos x \qquad \frac{dt}{dx} = -\operatorname{sen} x \qquad dt = -\operatorname{sen} x\,dx$

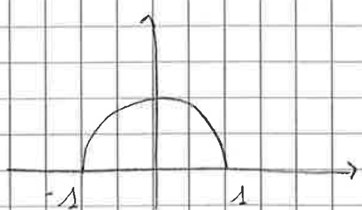
$$-\int \frac{1}{t}\,dt = -\ln|t| + c$$

$$\boxed{\int Tgx\,dx = -\ln|\cos x| + c}$$

su ogni I del tipo $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k+1\pi\right)$

es.

area del semicerchio



$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx$$

ESERCIZI

1) $F(x) = \int_2^x \frac{e^t}{t^2+1}\,dt$

studiare la monotonia e verificare che è invertibile sui n° reali

determinare $(F^{-1})'(0)$

per il teorema fondamentale del calcolo

$$F'(x) = \frac{e^x}{x^2+1}$$

$$F(2) = \int_2^2 \frac{e^t}{t^2+1} = 0$$

quindi per l'iniettività $F^{-1}(0) = 2$

$$(F^{-1})'(0) = \frac{1}{F'(2)}$$

$$F'(2) = e^2/5$$

$$(F^{-1})'(0) = 5/e^2$$

2) calcolare $F'(x)$ se

$$F(x) = \int_0^{\sin x} \frac{1}{1-t^2}\,dt$$

per il teorema fondamentale del calcolo

$F'(x) = \frac{1}{1-\sin^2 x} \cdot \cos x \rightarrow$ derivata estremo superiore

5) determinare $G'(x)$ se

$$G(x) = \int_{x^4}^{x^6} \sin^{2018} t \, dt$$

$$G(x) = \int_{x^4}^{a} \sin^{2018} t \, dt + \int_{a}^{x^6} \sin^{2018} t \, dt$$

$$G(x) = \int_{a}^{x^6} \sin^{2018} t \, dt - \int_{a}^{x^4} \sin^{2018} t \, dt$$

$$G'(x) = \sin^{2018} x^6 (5x^5) - \cancel{\sin^{2018} a} - \sin^{2018} x^4 (4x^3) + \cancel{\sin^{2018} a}$$

$$= \sin^{2018} x^6 (5x^5) - \sin^{2018} x^4 (4x^3)$$

6) determinare $F'(x)$ se

$$F(x) = \int_{2x}^{3x} \cos^2 x \, dx$$

$$F(x) = \int_{2x}^{a} \cos^2 x \, dx + \int_{a}^{3x} \cos^2 x \, dx$$

$$F(x) = \int_{a}^{3x} \cos^2 x \, dx - \int_{a}^{2x} \cos^2 x \, dx$$

$$F'(x) = 3\cos^2 3x - 2\cos^2 2x$$

8) calcolare la media integrale di

$$f(x) = \begin{cases} x^3 e^{x^2} & x \leq 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{1+x}+1} & x > 0 \end{cases}$$

su I [-1, 1]

$$\lim_{x \to 0^-} x^3 e^{x^2} = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{1+x}+1} = 1/2$$

→ discontinuità di tipo salto
||
f continua a tratti
↓
posso applicare il teorema

$$\frac{1}{b-a} = \frac{1}{2}$$

$$1/2 \int_{-1}^{1} f(x)\,dx$$

$$1/2 \left(\underbrace{\int_{-1}^{0} f(x)\,dx}_{I} + \underbrace{\int_{0}^{1} f(x)\,dx}_{II} \right)$$

I $\displaystyle\int_{-1}^{0} x^3 e^{x^2}\,dx$

integro per parti

$u = x^2$ $\qquad dv = x \cdot e^{x^2}$

$du = 2x\,dx$ $\qquad v = \int x\, e^{x^2}\,dx$

$$-\int_{2}^{1} \frac{2u-2}{u}\,du$$

sostituisco estremi

$$\int_{1}^{2} \frac{2u-2}{u}\,du$$

$$2\int_{1}^{2} \frac{u-1}{u}\,du$$

$$2\left[\int_{1}^{2} du - \int_{1}^{2} \frac{du}{u}\right]$$

$$2\cdot u\Big|_{1}^{2} - 2\log|u|\Big|_{1}^{2}$$

$$= 2 - \log 4$$

quindi la media integrale è

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} + 2 - \log 4\right)$$

es.

$$\frac{1}{1+x^2}$$

uso serie geometrica ponendo $t=-x^2$

siccome è una f pari

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 + o(x^9)$$

se integro

$$\operatorname{arctg} x = c + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} + o(x^{10})$$

$c = f(0) = \operatorname{arctg}(0) = 0$

es.

sviluppare in $x=0$ a ordine 5

$$f(x) = \int_0^x e^{t^2}\,dt$$

$f(x)$ è la primitiva di e^{x^2}

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)$$

ora integro

$$\int_0^x e^{t^2}\,dt = f(0) + x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} + o(x^5)$$

2) se f ha discontinuità in $x=a$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)\,dx$$

se f ha discontinuità in $x=b$

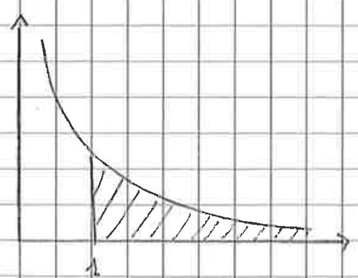
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)\,dx$$

in ciascun caso l'integrale si dice:

- convergente, se il lim $\exists$ ed è finito
- divergente, se il lim $\exists$ ed è $+\infty$ o $-\infty$
- indeterminato, se il lim $\nexists$

es. FONDAMENTALE

- <u>area sotto l'iperbole</u>



$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{a \to +\infty} \int_1^a \frac{1}{x}\,dx$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 215 di 298

OSSERVAZIONE IMPORTANTE

- se $f(x) \geq 0$ allora ogni suo integrale improprio non è mai indeterminato, o è convergente o è divergente

MOTIVO:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$ è crescente in b

$$\left(\exists \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\,dx\right)$$

- se $f(x) \leq 0$ allora ogni suo integrale improprio non è mai indeterminato, o è convergente o è divergente

MOTIVO:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$ è decrescente in b

$$\left(\exists \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\,dx\right)$$

CRITERI DI CONVERGENZA

1 CRITERIO della convergenza assoluta

se f cambia segno infinite volte

se l'integrale improprio con $|f(x)|$ (al posto di $f(x)$) converge, allora converge anche quello con $f(x)$

ESERCIZI

1) ? $F(x)$

$f(x) = x e^{-|x|}$ / $\lim_{x \to +\infty} F(x) = -5$

$$f(x) = \begin{cases} x e^{-x} & x \geq 0 \\ x e^{x} & x < 0 \end{cases}$$

① $\int x e^{-x}$

$u = x \qquad dv = e^{-x}$

$du = dx \qquad v = -e^{-x}$

$= -e^{-x} \cdot x - \int -e^{-x} \, dx$

$= -e^{-x} \cdot x - e^{-x} + c_1$

② $\int x e^{x} \, dx$

$u = x \qquad dv = e^{x}$

$du = dx \qquad v = e^{x}$

$= e^{x} x - \int e^{x} \, dx$

$= e^{x} x - e^{x} + c_2$

$$\int_1^6 \frac{1}{x(9-\log^2 x)}\,dx$$

$$t = \log x$$

$$dt = 1/x \; dx$$

$$\int_0^{\log 6} \frac{1}{9-t^2}\,dt$$

$$\frac{1}{9-t^2} = \frac{1}{(3-t)(3+t)}$$

$$\frac{A}{3-t} + \frac{B}{3-t} \rightarrow \frac{3A - At + 3B + Bt}{(3-t)(3+t)}$$

$$3A + 3B = 1$$

$$-A + B = 0$$

$$B = A$$

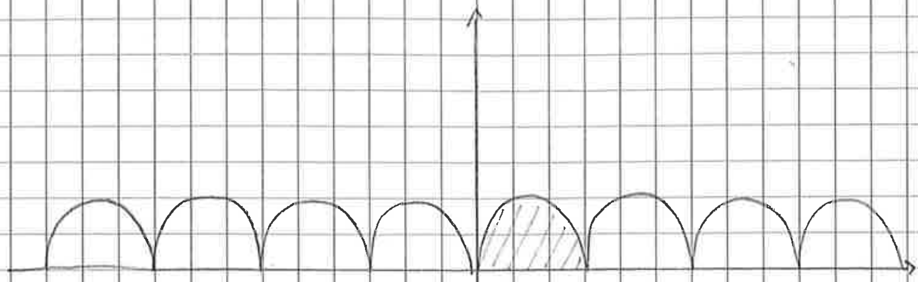
$$6A = 1$$

$$A = B = 1/6$$

$$1/6 \int_0^{\log 6} \frac{dt}{3+t} + 1/6 \int_0^{\log 6} \frac{dt}{3-t}$$

$$1/6 \log|3+t| \Big|_0^{\log 6} - 1/6 \log|3-t| \Big|_0^{\log 6}$$

5) $\int_{-4\pi}^{4\pi} |\sin| \, dx$



quindi equivale a

$8 \int_0^{\pi} \sin x \, dx$

$8 (-\cos x) \Big|_0^{\pi} = 8(-\cos\pi + \cos 0) = 16$

6) $\int_0^1 \frac{x^2 + \sin x}{x^2} \, dx$

integrale improprio in $\emptyset$

$\int_0^1 dx + \int_0^1 \frac{\sin x}{x^2} \, dx$

$x \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{\sin x}{x^2} \, dx$

ma $\frac{\sin x}{x^2} \sim \frac{1}{x}$

INTEGRALI BASE

①

$$\boxed{\int_a^{+\infty} x^\alpha \, dx}$$

↗ diverge $\boxed{\alpha \geq -1}$

↘ converge $\boxed{\alpha < -1}$

$$\int_a^{+\infty} x^\alpha \, dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b x^\alpha \, dx$$

$$\lim_{b \to +\infty} \left. \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right|_a^b$$

$$\lim_{b \to +\infty} \left(\frac{b^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{a^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right)$$

dipende da $\alpha + 1$

↳ $\alpha \geq -1 \to +\infty$

↳ $\alpha < -1 \to \dfrac{a^{\alpha+1}}{\alpha+1}$

②

$$\boxed{\int_0^{b} x^\alpha \, dx}$$

↗ converge $\boxed{\alpha \geq -1}$

↘ diverge $\boxed{\alpha < -1}$

$$\int_0^b x^\alpha \, dx = \lim_{c \to 0^+} \int_c^b x^\alpha \, dx$$

perché per la definizione di o()

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\left|\frac{2 + x\sin x}{x^3}\right|}{1/x^{3/2}} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{|2 + x\sin x|}{x^{3/2}} = 0 \to \text{verificato}$$

fino a x^2 escluso perche verrebbe

$$\frac{|2+x\sin x|}{x} = 1 \text{ e non più a } 0$$

quindi scelgo $\alpha = 3/2$

$$\int_5^{+\infty} 1/x^{3/2}\, dx \quad \text{converge perche } \alpha > -1$$

quindi converge anche $\int_5^{+\infty} \left|\frac{2+x\sin x}{x^3}\right| dx$

e quindi per il criterio della convergenza assoluta

$$\int_5^{+\infty} \frac{2+x\sin x}{x^3}\, dx \quad \text{converge}$$

$$e^{-x} \cdot x^{39} = o\left(1/x^2\right)$$

perché

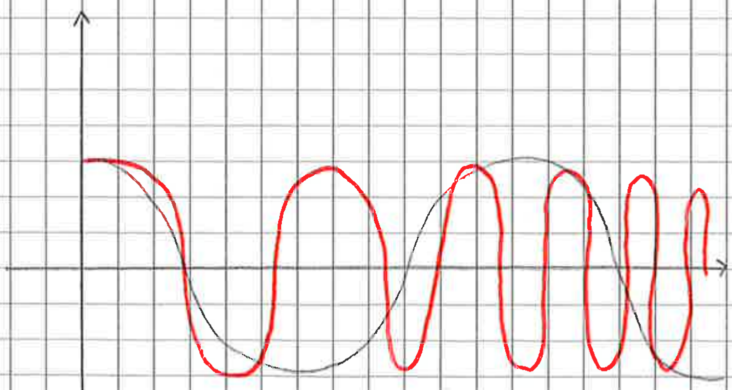
$$x \to +\infty \qquad \frac{e^{-x} \cdot x^{39}}{x^{-2}} = 0$$

$$\int_2^{+\infty} x^{-2}$$ converge perche $\alpha < -1$

quindi converge anche quello di partenza

es. IMPORTANTE

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \cos(x^2)\, dx}$$ converge



ma

$$\int_0^{+\infty} |\cos(x^2)|\, dx$$ diverge

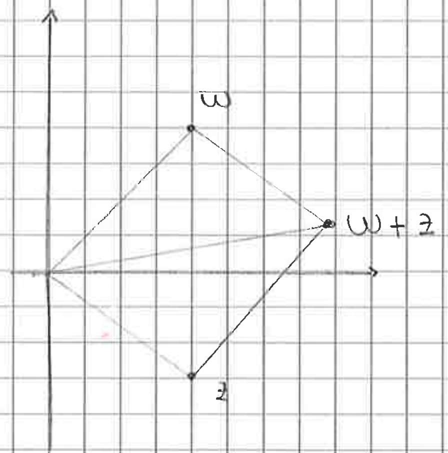
NUMERI COMPLESSI

estensione dei numeri reali, visualizzabile nel piano cartesiano.
Un numero complesso, $w \in \mathbb{C}$, si può identificare con un punto (x, y) nel piano.
I numeri reali sono i punti $(x, 0)$ sulla retta delle x e i punti del tipo $(0, y)$ sulla retta delle y si chiamano numeri immaginari

somma

regola del parallelogramma

$$\boxed{(x, y) + (u, v) = (x+u, y+v)}$$



è coerente con la somma su $\mathbb{R}$

$$(x, 0) + (u, 0) = (x+u, 0)$$

prodotto

$$\boxed{(x, y)(u, v) = (xu - yv, xv + yu)}$$

è coerente con il prodotto su $\mathbb{R}$

si lavora così

$w = (x, y) \rightarrow x(1,0) + y(0,1)$

$$\boxed{w = x + iy}$$

il prodotto diventa

$$\boxed{(x+iy)(u+iv) = xu - yv + i(xv + yu)}$$

NOTAZIONI BASE

- $w = (x, y) = x + iy$

  $x =$ Re di w parte reale

  $y =$ Im di w parte immaginaria

- $\boxed{\overline{w} = (x, -y) = x - iy}$ coniugato di w

- $\boxed{|w| = \sqrt{x^2 + y^2}}$ modulo di w (lunghezza vettore)

- $|w|^2 = x^2 + y^2 = (x+iy)(x-iy)$

  $\boxed{|w|^2 = w \cdot \overline{w}}$

- il reciproco diventa

  $\boxed{w^{-1} = \overline{w} / |w|^2}$

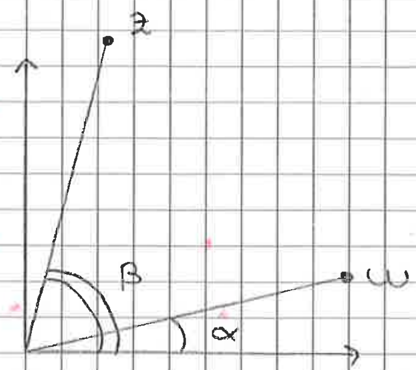
MOLTIPLICAZIONE

$$\boxed{|w| = \sqrt{x^2 + y^2} = R}$$

se

$w = R\cos\alpha + i R \sin\alpha$

$z = r\cos\beta + i r \sin\beta$



quindi $w \cdot z$

$w \cdot z = rR(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta + i\sin\alpha\cos\beta + i\cos\alpha\sin\beta)$

$$\boxed{w \cdot z = rR(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta))}$$

quindi moltiplicando due n° $\mathbb{C}$, i moduli si moltiplicano mentre gli argomenti (cioè gli angoli) si sommano

se

$z = R\cos\beta + Ri\sin\beta$

$$\boxed{z^n = R^n(\cos n\beta + i\sin n\beta)}$$

definizione

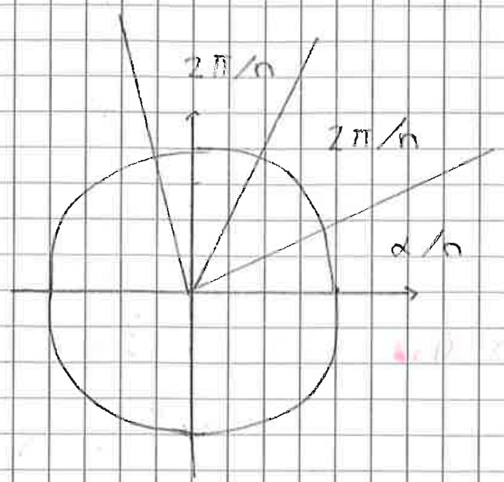
ESPONENZIALE IMMAGINARIO

$$\boxed{e^{i\beta} = \cos\beta + i\sin\beta}$$

quindi

$z = Re^{i\beta}$

ottengo



$K=0 \rightarrow \beta = \alpha/n$

$K=1 \rightarrow \beta = \alpha/n + 2\pi/n$

$K=2 \rightarrow \beta = \alpha/n + 4\pi/n$

...

$K=n \rightarrow \beta = \alpha/n + 2\pi \rightarrow$ ritorno da dove sono partito

ottengo n soluzioni distinte

$$\boxed{w = r^{1/n} \cdot e^{i(\alpha/n + 2\pi K/n)}}$$

$K = 0, 1, 2 \ldots n-1$

TEOREMA

ogni $w = re^{i\alpha} \in \mathbb{C}$ ha n radici n-esime distinte date da:

$$\boxed{R^{1/n} \, e^{i(\alpha/n + 2K\pi/n)}}$$

$K = 0 \div n-1$

le trovo sui vertici del poligono di n lati costruito sulla circonferenza di raggio $R^{1/n}$ partendo da un angolo α/n