NUMERO: **2473A** ANNO: 2020

A P P U N T I

STUDENTE: Tondo Mariachiara

MATERIA: Analisi Funzionale - Teoria + esercizi svolti + temi di esame svolti - Prof. Vallarino

Capitolo ①: Preliminari

01/10/2019

Lezione 01

Spazi Vettoriali

Indichiamo con $\mathbb{F}$ (campo) $\begin{cases}\mathbb{R}\\ \mathbb{C}\end{cases}$

Uno spazio vettoriale V su $\mathbb{F}$ e' un insieme non vuoto su cui sono definibile delle operazioni:

$+ \quad V \times V \longrightarrow V$ operazione somma

$(x, y) \longmapsto x+y$

$* \quad \mathbb{F} \times V \longrightarrow V$ operazione prodotto per uno scalare

$(\alpha, x) \longmapsto \alpha x$

Proprietà (delle operazioni)

- $x+y = y+x$ commutatività
- $(x+y)+z = x+(y+z)$ associatività
- $\exists\, 0 \in V$ tale che: $0 + x = x \quad \forall x$ elemento nullo
- $\forall\, x \in V \quad \exists!\, -x \in V$ tale che $x - x = 0$ elemento inverso
- $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y \quad \forall \alpha \in \mathbb{F};\ \forall x, y \in V$
- $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$
- $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x \quad \forall x \in V$ e $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$
- $1 \cdot x = x \quad \forall x \in V$

Esempi (di spazi vettoriali)

1) $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$

2) $C_{\mathbb{F}}[a,b] = \{ f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{F} \text{ continua} \}$ spazio delle funzioni continue in $[a,b]$

con $-\infty < a < b + \infty$ Operazioni che rendono $C_{\mathbb{F}}[a,b]$ spazio vettoriale:

- $(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \forall x \in [a,b]$
- $(\alpha f)(x) = \alpha f(x) \quad \forall x \in [a,b],\ \forall \alpha \in \mathbb{F}$

Proprietà (delle applicazioni lineari)

$T \in L(V, W)$

1° $T(0) = 0$ (l'immagine di zero è zero)

2° $\ker T = \{x \in V : Tx = 0\}$ (insieme dei vettori che hanno immagine zero)

3° T iniettiva $\Leftrightarrow \ker T = \{0\}$

4° $\operatorname{Im} T = \{Tx : x \in V\}$ (immagine dei vettori di partenza)

5° T suriettiva $\Leftrightarrow \operatorname{Im} T = W$ (immagine = spazio d'arrivo)

Spazi Metrici

(M, d) è spazio metrico se M è un insieme e:

$d : M \times M \to [0, +\infty]$ (d è una funzione) tale che:

1. $d(x,y) = d(y,x) \quad \forall x, y \in M$ simmetria
2. $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
3. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \quad \forall x, y, z \in M$ disuguaglianza triangolare

Esempi (sulle distanze su $\mathbb{R}^n$)

Su $\mathbb{R}^n$ abbiamo:

- $d_2(x,y) = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|^2 \right)^{1/2}$ Distanza Euclidea (Questa definisce una metrica su $\mathbb{R}^n$)
- $d_\infty(x,y) = \max_{j=1,\dots,n} |x_j - y_j|$ Distanza Infinito
- $d_1(x,y) = \sum_{j=1}^{\infty} |x_j - y_j|$

(Analogamente abbiamo le stesse distanze su $\mathbb{C}^n$ dove però il modulo è fatto su numeri complessi)

Esempio (sullo spazio delle funzioni continue su $[a,b]$)

$M = C_{\mathbb{F}}[a,b]$ come possiamo definire una distanza su questo spazio?

Prese $f, g \in C_{\mathbb{F}}[a,b]$ $\quad d_\infty(f,g) = \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - g(x)|$

Distanza tra funzioni continue = distanza Infinito

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 5 di 232

$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in [a,b]$ possiamo far tendere $n, m \to \infty$

scelgo $m \to \infty$ $\quad |f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon \quad \forall x \in [a,b]$

↳ (l'abbiamo vista prima questa convergenza)

questo mi dice che: $d_\infty(f_n, f) \le \varepsilon$

* Proviamo che $f \in C_F[a,b]$, deve essere continua in ogni punto

Preso $x_0 \in [a,b]$, $\varepsilon > 0$ devo trovare se esiste un $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$

δ tale che: $|x - x_0| < \delta$ e tale che $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

(definizione di continuità) Metto insieme quanto ho già verificato

$$|f(x) - f(x_0)| \le \underline{|f(x) - f_n(x)|} + |f_n(x) - f_n(x_0)| + \underline{|f_n(x_0) - f(x_0)|}$$

$$\le \underline{2 d_\infty(f_n, f)} + |f_n(x) - f_n(x_0)|$$

$\exists n = n(\varepsilon)$ tale che $d_\infty(f_n, f) < \varepsilon$, dal primo punto della dimostrazione

$\exists \delta = \delta(n, \varepsilon, x_0)$ tale che $|x - x_0| < \delta$ questo mi porta a dire

$|f(x) - f(x_0)| < 3\varepsilon$ Quindi ho dimostrato che f e' continua $\square$

04/10/2019

Lezione 02

Convergenza Uniforme

Sia $I \subset \mathbb{R}$ con $I = [a,b]$ $-\infty < a < b < +\infty$

$\{f_n\} \in C(I)$ $\quad A \subset I$ $\quad f: A \to \mathbb{R}$

Definizione $\{f_n\}$ converge puntualmente a f in A se:

$\exists \lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in A$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in A \quad \exists N = N(\varepsilon, x)$ tale che: $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall n \ge N$

$\{f_n\}$ converge uniformemente a f se:

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon)$ (non dipende da x) tale che: $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

$\forall n \ge N \quad \forall x \in A$

Dimostrazione: si basa sul teorema fondamentale del calcolo
sia $x_0 \in I$ punto fissato nell'intervallo
$\tilde{f}(x) = f(x) + \int_{x_0}^{x} g(t)dt$ il teorema fondamentale del calcolo ci dice: $\tilde{f}'(x) = g(x)$

(vogliamo far vedere che $\tilde{f}(x)$ è il limite delle f_n)

* Adesso andiamo a verificare che: $f_n \rightrightarrows \tilde{f}$, preso $\varepsilon > 0$ vediamo:

- $f_n(x_0) \to f(x_0)$ questo è vero in tutti i punti per ipotesi

quindi sappiamo che vale: $\exists N = N(\varepsilon, x)$ tale che $\forall n > N(\varepsilon, x_0)$:
$|f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$

- $f_n' \rightrightarrows g$ $\exists N = N(\varepsilon)$ tale che $\forall n > N(\varepsilon)$
  $\sup_{t \in I} |f_n'(t) - g(t)| < \varepsilon$ prendiamo x, n generici

$x \in I$ e $n > \max\{N(\varepsilon, x_0), N(\varepsilon)\}$ $\forall \varepsilon > 0$

$$|f_n(x) - \tilde{f}(x)| = \left| f_n(x_0) - \int_{x_0}^{x} f_n'(t)dt - f(x_0) - \int_{x_0}^{x} g(t)dt \right|$$

(Ho usato il fatto che f_n è $C^1(I)$ poi la definizione di $\tilde{f}$)

$$\leq |f_n(x_0) - f(x_0)| + \int_{x_0}^{x} |f_n'(t) - g(t)|dt$$

$$< \varepsilon + \varepsilon \cdot |I|$$

Vista l'arbitrarietà di ε abbiamo dimostrato la convergenza ed avendo visto l'uguaglianza abbiamo dimostrato tutto □

3. Supponiamo di avere: $f_n \rightrightarrows f$ su I, f_n è integrabile su I
$\Rightarrow f$ è integrabile su I ed inoltre:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(t)dt$$

in altre parole in presenza di convergenza uniforme, possiamo scambiare l'integrale con il limite. Teorema di Beppo-Levi - Teoria della Misura funzioni misurabile non negativa.

Esempio fra tutti: $B(0,1)$ chiuso e limitato, ma non compatto (Lo dimostriamo)

Funzioni continue

Dati (M, d_M) e (N, d_N) spazi metrici sia:

$f: M \to N$ si dice f continua in x_0 se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0)$ tale che:
$\forall x \in M, \ d_M(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_N(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$

f si dice continua in M se è continua in x_0, $\forall x \in M$

f si dice uniformemente continua in M se: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon)$ tale che:
$\forall x, x_0 \in M \quad d_M(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_N(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$

Osservazione = f uniformemente continua $\Rightarrow$ f continua
(Non vale il viceversa)

Teorema (Heine-Cantor) = se M è compatto, $f: M \to N$ continua allora f è uniformemente continua. (CASO PARTICOLARE)

Definizione = $f: M \to N$ si dice Lipschitziana se $\exists L > 0$ tale che:
$$d_N(f(x), f(y)) \leq L \, d_M(x, y) \quad \forall x, y \in M$$

Osservazione = f Lipschitziana $\Rightarrow$ f uniformemente continua
(perché non abbiamo la dipendenza da x)

Infatti = $\varepsilon > 0 \quad \delta = \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{L}$ succede che (in $d_M(x,y) < \delta$)
$$d_N(f(x), f(y)) \leq L \, d_M(x, y) < \cancel{L} \cdot \frac{\varepsilon}{\cancel{L}}$$ (non dipende dal punto)

Non vale il viceversa: Controesempio: $f(x) = \sqrt{x}$ con $x \in [0,1]$

f è uniformemente continua (perché continua su un compatto), ma non è Lipschitziana. Voglio negare la condizione di Lischiptziana: prendo la distanza: $|\sqrt{x} - \sqrt{0}| \leq L|x - 0| \quad \forall x \in [0,1]$
non esiste un L che soddisfi qesta disuguaglianza
$\Rightarrow \nexists L > 0 \mid |\sqrt{x} - \sqrt{0}| \leq L|x - 0| \ \forall x \in [0,1]$
(la distanza delle immagini non viene controllata da una costante L positiva)

Lemma (dell'identità approssimata):

04/10/2019

Lezione 03

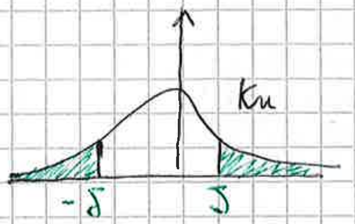
Siano $\{K_n\}$ funzioni, $K_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che:

a) $K_n \geq 0$

b) $\int_{-\infty}^{+\infty} K_n(x)\,dx = 1$ (Massa 1)

c) $\forall \delta > 0 \quad \lim_{n\to\infty} \int_{|x|\geq\delta} K_n(x)\,dx = 0$

l'integrale delle code



le code tendono a zero

$\{K_n\}$ si dice identità approssimata

$\forall f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uniformemente continua e limitata si ha che $(f * K_n)$ (= convoluzione) converge uniformemente a f su $\mathbb{R}$, cioè:

$$f * K_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f \text{ su } \mathbb{R}$$

Nota Bene: convoluzione tra due funzioni:

$$f * K_n = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)K_n(y)\,dy$$

Dimostrazione: sia $x \in \mathbb{R}$

questo per ipotesi

$$|f * K_n(x) - 1\,f(x)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)K_n(y)\,dy - f(x)\int_{-\infty}^{+\infty} K_n(y)\,dy \right|$$

$$\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-y) - f(x)|\, \underbrace{K_n(y)}_{\text{per ipotesi } \geq 0}\,dy$$

Fissato $\varepsilon > 0$ $\exists\, \delta = \delta(\varepsilon)$ tale che $|y| < \delta \Rightarrow |f(x-y) - f(y)| < \varepsilon \quad \forall x \in \mathbb{R}$

↳ questo perché per ipotesi f è uniformemente continua

- Posso quindi spezzare l'integrale -

Non ho controllo su y, ma f per ipotesi è limitata

$$\leq \int_{|y|<\delta} \underbrace{|f(x-y) - f(x)|}_{<\varepsilon} K_n(y)\,dy + \int_{|y|\geq\delta} |f(x-y) - f(x)|\, K_n(y)\,dy$$

$$\sup_{a\le x\le b}|p_n(x)-f_n(x)| = \sup_{0\le t\le 1}\underbrace{|\tilde{p}_n(t)-\tilde{f}(t)|}_{\downarrow\, n\to\infty \; 0} \longrightarrow$$ Questi sup sono proprio uguali quindi hanno lo stesso comportamento

Abbiamo ottenuto: $p_n \rightrightarrows f$ su $[a,b]$

2° passo = se dimostro il teorema per funzioni su $[0,1]$ che si annullano agli estremi $\Rightarrow$ lo posso dimostrare per tutte le altre

Presa $g\in C_{\mathbb{R}}[0,1]$ tali che: $g(0)=g(1)=0$ allora varrà per $\forall f\in C_{\mathbb{R}}[0,1]$

Infatti = presa $f\in C_{\mathbb{R}}[0,1]$ chiamo $\alpha = f(0)$

$\beta = f(1)-\alpha$

Definiamo: $g(x) = f(x)-\alpha-\beta x \rightsquigarrow g\in C_{\mathbb{R}}[0,1]$ con $0\le x\le 1$

$g(0) = f(0)-\alpha-\cancel{\beta\cdot 0} = 0$

$g(1) = f(1)-\alpha-\beta\cdot 1 = 0$

Per la funzione g il teorema vale, perchè lo sto supponendo nelle ipotesi

Quindi: $\exists\, Q_n\in\mathbb{R}[x]$ tale che: $\sup_{[0,1]}|Q_n - g| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Abbiamo allora che:

$P_n(x) := Q_n(x)+\alpha+\beta x \in \mathbb{R}[x]$ somma di polinomi

$$\sup_{x\in[0,1]}|p_n(x)-f(x)| = \sup_{0\le x\le 1}|Q_n(x)+\cancel{\alpha}+\cancel{\beta x}-g(x)-\cancel{\alpha}-\cancel{\beta x}|$$

$$= \sup_{0\le x\le 1}|Q_n(x)-g(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Concludendo $p_n \rightrightarrows f$ in $[0,1]$

3° passo = prendo $f\in C_{\mathbb{R}}[0,1]$ tale che $f(0)=f(1)=0$

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & 0\le x\le 1 \\ 0 & x\notin[0,1]\end{cases}$$

$h\in C_{\mathbb{R}}[0,1]$, h è limitata, h uniformemente continua (verifica le ipotesi del Lemma)

Scelgo:

$$K_n(x) = \begin{cases} 0 & |x|>1 \\ c_n(1-x^2)^n & |x|\le 1 \end{cases} \quad n\in\mathbb{N}$$

$(*) \leq 2\sqrt{n}\,(1-\delta^2)^n(1-\delta) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\sqrt{n} \to \infty$ ma è troppo lenta rispetto a $(1-\delta^2)^n \to 0$ per $n \to \infty$

Quindi k_n è un identità approssimata $h * k_n \rightrightarrows h$ su $[0,1]$

Dimostriamo che $h * k_n$ su $[0,1]$ è un polinomio!

Prendo $x \in [0,1]$ scrivo la convoluzione:

$h * k_n(x) = \int h(x-y)k_n(y)dy = \int_0^1 h(y)k_n(x-y)dy$ (Ho fatto un cambio di variabile) combinazione lineare

$= \int_0^1 h(y)c_n[1-(x-y)^2]^n dy$

Se $y \in [0,1]$, $x \in [0,1]$

$x - y \in [-1,1]$

$= c_n \int_0^1 f(x) \sum_{0 \leq i,j \leq 2n} a_{ij} x^i y^j dy = \sum_{i=0}^{2n} \left(c_n \sum_{j=0}^{2n} a_{ij} \int_0^1 f(y) y^j dy \right) x^i \in \mathbb{R}[x]$

integrale è lineare

$= P_n(x)$ Ho ottenuto un polinomio di grado max $2n$

$P_n \rightrightarrows f$ in $[0,1]$ $\square$

$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{su } [0,1] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$

3. Su $\mathbb{C}^n$ vale un discorso analogo

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} \qquad 1 \leq p < \infty$$

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots |x_n|\}$$

4. $X = C_{\mathbb{F}}(M)$ M spazio metrico completo

$$\|f\| = \|f\|_\infty = \sup_{x \in M} |f(x)| = \max_{x \in M} |f(x)| \text{ è una norma}$$

$$d_\infty(f,g) = \|f - g\|_\infty$$ perché vale il teorema di Stone-Weierstrass

08/10/2019

Lezione 04

Proprietà (degli spazi normati).

Sia $(X, \|\cdot\|)$ spazio normato

1. $\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\| \qquad \forall x, y \in X$

Dimostrazione.

$\|x\| = \|(x-y)+y\| \leq \|x-y\| + \|y\| \longrightarrow \|x\| - \|y\| \leq \|x-y\|$

Adesso rifaccio lo stesso con y: Applicando la disuguaglianza triangolare

$\|y\| = \|(y-x)+x\| \leq \|y-x\| + \|x\| \longrightarrow \|y\| - \|x\| \leq \|y - x\|$

2. La norma è un'applicazione continua

$\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ continua

Dimostrazione.

$x_0 \in X$, $\varepsilon > 0$ $\delta = \varepsilon$

Se prendo un generico vettore: $\|x - x_0\| < \delta = \varepsilon \Rightarrow \big|\|x\| - \|x_0\|\big| \leq \|x - x_0\| < \varepsilon$

- Non solo la norma è continua, ma è anche assolutamente continua -

3. Se $\left.\begin{array}{l}\alpha_n \to \alpha \text{ in } \mathbb{F} \\ x_n \to x \text{ in } X\end{array}\right| \longrightarrow \alpha_n x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha x$

Dimostrazione.

Scriviamo la distanza: $\|\alpha_n x_n - \alpha x\| = \|\alpha_n x_n - \alpha_n x + \alpha_n x - \alpha x\|$

$\leq \|\alpha_n x_n - \alpha_n x\| + \|\alpha_n x - \alpha x\|$

3. $(X, \|\cdot\|_1)$ è completo $\Leftrightarrow$ $(X, \|\cdot\|_2)$ è completo

Dimostrazione: supponiamo che $(X, \|\cdot\|_1)$ completo

"$\Rightarrow$" supponiamo che $\{x_n\}$ di Cauchy in $(X, \|\cdot\|_2) \Rightarrow \{x_n\}$ di Cauchy in $(X, \|\cdot\|_1)$

$\Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} x_n = x$ in $(X, \|\cdot\|_1) \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} x_n = x$ in $(X, \|\cdot\|_2)$

L'altro verso è identico

4. $X = \mathbb{R}^n$, $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ norme su $\mathbb{R}^n$ sono sempre equivalenti qualunque esse siano

Dimostrazioni:

$E = \{x \in \mathbb{R}^n ; \|x\|_1 = 1\} = S_{\|\cdot\|_1}(0,1)$ è chiuso e limitato $\Rightarrow E$ è un compatto (Vero solo in dimensione finita sempre)

Restringo la norma 2 sul compatto E:

$\|\cdot\|_2 : E \to [0,+\infty)$ continua è una restrizione ad un sottoinsieme

$\Rightarrow \exists m, M \geq 0$ tali che: $m \leq \|\cdot\|_2 \leq M \quad \forall x \in E$ (per Weierstrass)

Nota Bene: il minimo m è strettamente positivo, se per ASSURDO fosse uguale a 0 allora: $\exists x_0 \in E$ tale che $\|x_0\|_2 = 0 \Rightarrow x_0 \in E, x_0 = 0 \Rightarrow \|x_0\|_1 = 0$ ma questo è ASSURDO. ($\Rightarrow M, m > 0$)

$\forall z \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ $\quad \frac{z}{\|z\|_1} \in E$ posso scrivere: $m \leq \left\| \frac{z}{\|z\|_1} \right\|_2 \leq M$

$m\|z\|_1 \leq \|z\|_2 \leq M\|z\|_1 \rightsquigarrow$ se $z = 0$ $\quad m\|0\|_1 \leq \|0\|_2 \leq M\|0\|_1$

$\Rightarrow \|0\|_2 = \|0\|_1 = 0$ Banale

Quindi abbiamo: $m\|z\|_1 \leq \|z\|_2 \leq M\|z\|_1$ $\quad \square$

$\forall z \in \mathbb{R}^n$

5. $(X, \|\cdot\|_1)$ e $(X, \|\cdot\|_2)$ con $\dim X =$ finita allora le norme sono sempre equivalenti

Esempi (di successione)

$\{1/j^2\} \in \ell^1$ perchè sappiamo $\sum_{j=1}^{\infty} 1/j^2 < \infty$ serie convergente

$\{1/j\} \notin \ell^1$ perchè sappiamo $\sum_{j=1}^{\infty} 1/j = \infty$ serie armonica diverge

Definizione: sia $1 < p < \infty$

$$\ell^p = \left\{ x = \{x_j\}_{j=1}^{\infty} \mid x_j \in \mathbb{F}, \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p < \infty \right\}$$

la sua norma è: $\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p \right)^{1/p} \quad \forall x \in \ell^p$

Non è scontato che sia uno spazio normato

- Verifichiamo che $\|\cdot\|_p$ sia una norma -

1. $\|x\|_p \geq 0 \quad \forall x \in \ell^p$ perchè facciamo una somma di termini positivi
2. $\|0\|_p = 0 = \left(\sum_{j=1}^{\infty} 0^p \right)^{1/p} = 0$

$$\|x\|_p = 0 \iff \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p = 0 \iff |x_j|^p = 0 \ \forall j \iff x_j = 0 \ \forall j \Rightarrow x = 0$$

3. $\alpha \in \mathbb{F}, x \in \ell^p$ omogeneità rispetto agli scalari

$$\|\alpha x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha x_j|^p \right)^{1/p} = \left(|\alpha|^p \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p \right)^{1/p} = |\alpha| \|x\|_p$$

Ho la linearità se la serie è convergente

4. Presi $x, y \in \ell^p$ $\quad \|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|x\|_p$ Disuguaglianza di Minkosky

vogliamo dimostrare questa disuguaglianza

Ci servono dei risultati PRELIMINARI

1° Disuguaglianza di Young

Presi $a, b \geq 0 \quad p, q \in (1, \infty)$ tali che $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ esponenti coniugati

$q = p'$

$$a \cdot b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

11|10|2019

Lezione 05

Dimostrazione:

Ci mettiamo nel caso non banale in cui $x, y \neq 0$

$\forall k \in \mathbb{N}$: chiamo $a_k := \dfrac{|x_k|}{\|x\|_p} \geq 0 \qquad b_k := \dfrac{|y_k|}{\|y\|_q} \geq 0$

posso dividere per le norme perché tanto sono diverse da zero

Posso usare la disuguaglianza di Young:

$$\frac{|x_k y_k|}{\|x\|_p \|y\|_q} \leq \frac{a_k^p}{p} + \frac{b_k^q}{q} = \frac{|x_k|^p}{p\|x\|_p^p} + \frac{|y_k|^q}{q\|y\|_q^q}$$

esplicito a_k e b_k

Sommiamo su $k = 1, 2, 3, \dots, \infty$

$$\frac{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k|}{\|x\|_p \|y\|_q} \leq \frac{1}{p} \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{|x_k|^p}{\|x\|_p^p} \right)}_{1} + \frac{1}{q} \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{|y_k|^q}{\|y\|_q^q} \right)}_{1} = \underbrace{\frac{1}{p} \cdot 1 + \frac{1}{q} \cdot 1}_{\text{esp coniugati}} = 1$$

sono proprio per def delle norme

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k| \leq \|x\|_p \cdot \|y\|_q \qquad \square$$

Osservazione: coppie note di esponenti coniugati

- Se $p = 1 \quad q = p' = +\infty$ per convenzione
- Se $p = \infty \quad q = p' = 1$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k| \leq \|x\|_1 \|y\|_\infty \quad \forall x \in \ell^1, \forall y \in \ell^\infty$$

- Anche nei casi estremi vale la disuguaglianza di Hölder -

4° Disuguaglianza di Minkosky

E' il risultato definitivo che vogliamo

Sia $p \in [1, +\infty]$

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p \qquad \forall x, y \in \ell^p$$

Disuguaglianza triangolare per la $\|\cdot\|_p$

Proprietà (degli spazi ℓ^p)

1. $1 \le p \le +\infty \quad \forall x \in \ell^p, \forall j \ge 1$ con $j \in \mathbb{N}$

$|x_j| \le \|x\|_p$

Dimostrazione

- $p = +\infty \quad \|x\|_\infty = \sup_{k \ge 1} |x_k| \ge |x_j| \rightsquigarrow \|x\|_\infty \ge |x_j|$
- $1 \le p < \infty \quad \|x\|_p^p = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \ge |x_j|^p \rightsquigarrow \|x\|_p \ge |x_j|$

2. $1 \le p < q \le +\infty \Rightarrow \ell^p \subset \ell^q$ Abbiamo una catena di spazi di successioni uno dentro l'altro al crescere dell'esponente cresce lo spazio.

Inoltre: $\|x\|_q \le \|x\|_p \quad \forall x \in \ell^p$

Dimostrazione

- $1 \le p < q < \infty$ prendo $x \in \ell^p$

Voglio stimare la norma q con la norma p

$$\|x\|_q^q = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^{q-p+p} = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^{q-p} \cdot |x_k|^p \le \sum_{k=1}^{\infty} \|x\|_p^{q-p} |x_k|^p$$

per la prop precedente posso maggiorare

$$\le \|x\|_p^{q-p} \|x\|_p^p = \|x\|_p^q \quad \longrightarrow \|x\|_q^q \le \|x\|_p^q \rightarrow \|x\|_q \le \|x\|_p$$

- $1 \le p < q \le \infty$ (caso più delicato)

Osserviamo che $\ell^p \subset \ell^\infty$ per quanto detto prima

Se $x \in \ell^p \rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < +\infty \longrightarrow \exists \lim_{k \to \infty} |x_k|^p = 0 \Leftrightarrow \lim_{k \to \infty} |x_k| = 0$

dai concetti di Analisi I

Ma questo per definizione vuol dire che $x \in c_0 \subset \ell^\infty$

Ora verifichiamo che la $\|x\|_\infty$ è controllata da $\|x\|_p$

Se $x \in \ell^\infty$ abbiamo che $\|x\|_\infty = \sup_{k=1} |x_k|$ per definizione di sup

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists k_\varepsilon$ tale che: $\|x\|_\infty \le |x_{k_\varepsilon}| + \varepsilon \le \|x\|_p + \varepsilon$

Quindi $\|x\|_\infty \le \|x\|_p$ □

preso $\varepsilon > 0$ $M \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{j=1}^{M} |x_{n,j} - x_j|^p = \sum_{j=1}^{M} \lim_{m\to\infty} |x_{n,j} - x_{m,j}|^p = \lim_{m\to\infty} \sum_{j=1}^{M} |x_{n,j} - x_{m,j}|^p$$

somma finita

sappiamo essere il limite di $\lim_{m\to\infty} x_{m,j}$

posso spostare il limite perché ho una somma finita

$$\leq \lim_{m\to\infty} \|x_n - x_m\|_p^p < \varepsilon^p \qquad n > N_\varepsilon$$

noto che è una parte della norma ho sempre una somma di termini positivi

Quindi abbiamo dimostrato che: $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N_\varepsilon$ tale che $n > N_\varepsilon$

$$\sum_{j=1}^{M} |x_{n,j} - x_j|^p \leq \varepsilon^p$$

$\forall M \in \mathbb{N}$ visto che vale per tutti i numeri naturali vale anche per la serie

$$\rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} |x_{n,j} - x_j|^p \leq \varepsilon^p$$

è proprio la definizione di norma $\|x_n - x\|_p^p$ questo prova che $\|x_n - x\|_p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

ATTENZIONE osserviamo che $x \in \ell^p$ perché posso scrivere:

$$x = \underbrace{(x - x_{N_\varepsilon+1})}_{\in \ell^p} + \underbrace{(x_{N_\varepsilon+1})}_{\in \ell^p} \in \ell^p$$

$N_\varepsilon + 1 > N_\varepsilon$

lo posso sempre scrivere come somma di due elementi di ℓ^p (grazie alla disuguaglianza di Minkosky)

• $p = +\infty$ Secondo Caso

$\{x_n\}$ successione di Cauchy in ℓ^∞ - Procedimento analogo al precedente -

$\rightarrow \{x_{n,j}\}_{n=1}^{\infty}$ di Cauchy in $\mathbb{F}$ $\forall j$ fissato abbiamo $\exists \lim_{n\to\infty} x_{n,j} = x_j$

Dobbiamo provare che $\|x_n - x\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

come prima: $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N_\varepsilon$ tale che $\|x_n - x_m\|_\infty < \varepsilon$ con $n, m > N_\varepsilon$

$\rightarrow \forall j$ $|x_{n,j} - x_{m,j}| \leq \|x_n - x_m\|_\infty < \varepsilon$ Ma sappiamo che

$\forall j$ $|x_{n,j} - x_j| = \lim_{m\to\infty} |x_{n,j} - x_{m,j}| \leq \varepsilon$ perché sono passata al limite

Siamo in $\|\cdot\|_\infty$ quindi abbiamo il sup

$\rightarrow \|x_n - x\|_\infty = \sup_j |x_{n,j} - x_j| \leq \varepsilon$ quindi abbiamo il limite

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists J_\varepsilon$ tale che $j > J_\varepsilon \quad |x_j| < 2\varepsilon$ per arbitrarietà di ε abbiamo:

$\lim_{j \to \infty} x_j = 0 \Rightarrow x_j \in c_0 \Rightarrow c_0$ è completo $\square$

11/10/2019

Lezione 06

5. c_{00} è denso in c_0

Dimostrazione:

c_{00} denso in c_0 vuol dire che ogni elemento dello spazio c_0 si può scrivere come limite di elementi di c_{00}.

Preso $x \in c_0$ e definiamo: $x = (x_1, x_2, x_3, \dots x_j, \dots)$

$x_n = (x_1, x_2, \dots x_n, 0, 0, \dots)$

Quindi $x_n \in c_{00}$

$x_{n,j} = \begin{cases} x_j & j \le n \\ 0 & j > n \end{cases}$ $\quad x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x$ in c_{00}) $\Rightarrow$ vogliamo dimostrare questo

Quindi vogliamo che: $\|x_n - x\|_\infty = \sup_{j \ge 1} |x_{n_j} - x_j| = \sup_{j > n} |x_j|$

è il sup della differenza

Visto che $x \in c_0$ abbiamo che per definizione:

$\lim_{j \to \infty} x_j = 0$ quindi $\forall \varepsilon > 0 \ \exists J_\varepsilon$ tale che $|x_j| < \varepsilon \quad \forall j > J_\varepsilon$

Abbiamo allora $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x$ e c_{00} è denso in c_0 $\square$

6. c_{00} è denso in ℓ^∞? NO

Non posso fare la stessa cosa di prima! Perché $\overline{c_{00}} = c_0$ rispetto alla $\|\cdot\|_\infty$, ma $c_0 \subsetneq \ell^\infty$ (è incluso strettamente)

Esempio la successione $(1, 1, 1, \dots, 1)$ non la potrò mai approssimare ad una successione c_{00}

7. c_{00} è denso in ℓ^p con $1 \le p < \infty$? SI

(le successioni in ℓ^p sono infinitesime)

Se prendo $x \in \ell^p$ $\exists x_n \in c_{00}$ tale che $\|x_n - x\|_p \xrightarrow{?} 0$

Prendo $x = (x_1, x_2, \dots, x_j, \dots)$ con $x_{n_j} = \begin{cases} x_j & j \le n \\ 0 & j > n \end{cases}$

Essendo $x_n \in c_{00}$

Vogliamo che $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x$ in ℓ^p

Esercizio ② Sia $X = C_{\mathbb{F}}[0,1]$ e definiamo la norma $\|f\| = \sup_{0 \le t \le 1} t\,|f(t)|$

a) Definire che $(X, \|\cdot\|)$ è spazio normato **Buon Esempio**

b) E' completo?

SOLUZIONE

ⓐ Dobbiamo verificare se valgono le proprietà di norma

1. $\|f\| \geq 0$ (SI) è un estremo superiore di quantità mai negative perchè $t|f(t)| \geq 0 \quad \forall t \in [0,1]$

2. $\|0\| = \sup_{t \in [0,1]} t \cdot 0 = 0$ viceversa $\|f\| = 0 \Rightarrow \sup_{t \in [0,1]} t|f(t)| = 0$

$\Rightarrow t|f(t)| = 0 \quad \forall t \in [0,1] \Rightarrow f(t) = 0 \quad \forall t \in (0,1]$ il fattore $t \neq 0$ tranne in 0

$\Rightarrow f(0) = 0$ perchè f è continua $\Rightarrow f = 0$
↳ è importante! (ok)

3. $\alpha \in \mathbb{F}, f \in X$ abbiamo che:

$\|\alpha X\| = \sup_{t \in [0,1]} t|\alpha f(t)| = |\alpha| \sup_{t \in [0,1]} t|f(t)| = |\alpha|\,\|f\|$ (ok)

α non dipende da t

4. prendo $f, g \in X$: $\|f+g\| = \sup_{t \in [0,1]} t|f(t)+g(t)| \leq \sup_{t \in [0,1]} t[|f(t)| + |g(t)|]$

$\leq \sup_{t \in [0,1]} t|f(t)| + \sup_{t \in [0,1]} t|g(t)| = \|f\| + \|g\|$ (ok)

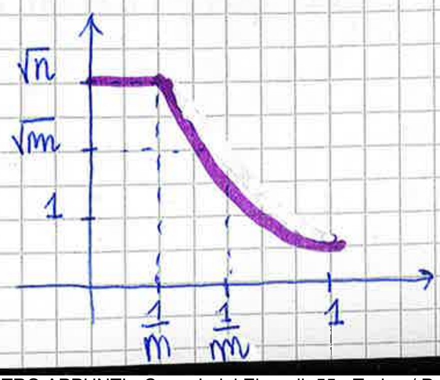
Abbiamo verificato che $\|f\|$ è una norma $\Rightarrow (X, \|\cdot\|)$ è spazio normato!

Per verificare la completezza:

ⓑ Devo prendere f_n di Cauchy che converge ad f funzione continua in $[0,1]$ per avere la completezza!! → Per smentire mi basta trovare una f che non appartiene allo spazio delle funzioni continue in $[0,1]$.

Usiamo un SUGGERIMENTO:

$$f_n(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{t}} & \frac{1}{n} \le t \le 1 \\ \sqrt{n} & 0 \le t \le \frac{1}{n} \end{cases} \qquad f_n \in X$$



Esercizio 3 Sia $f_n(x) = x + e^{-nx^2}$ con $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$

a) Studiare convergenza puntuale

b) Studiare convergenza uniforme su $\mathbb{R}$

c) Convergenza uniforme su $[a, +\infty)$ con $a > 0$

SOLUZIONE

(a) Fisso x e calcolo: $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = x + \lim_{n\to\infty} e^{-nx^2} = \begin{cases} x & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

Quindi abbiamo un limite puntuale

$f_n \to f$ dove $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ ora dobbiamo vedere se questo f e' un buon candidato limite

(b) No non abbiamo convergenza uniforme su $\mathbb{R}$ perche', abbiamo appena visto che il limite puntuale non e' una funzione continua su $\mathbb{R}$

(c) calcoliamo: $\sup_{x \geq a} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \geq a} |\cancel{x} + e^{-nx^2} - \cancel{x}| = e^{-na^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Ho eliminato la discontinuita', ho risolto il problema, quindi adesso ho convergenza uniforme.

Esercizio 4 Consideriamo $C_{\mathbb{F}}[0,1]$ $\quad \|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$

a) E' uno spazio normato?

b) Non e' completo (verificarlo)

SOLUZIONE

(a) Dobbiamo fare la verifica della norma

1. $\|f\|_2 \geq 0$ e' l'integrale di quantita' ≥ 0 ok

2. $\|0\|_2 = 0$ l'integrale di 0 e' 0

$\|f\|_2 = 0 \Rightarrow \int_0^1 |f(t)|^2 dt = 0 \Rightarrow f(t) = 0$ q.o. se integro una funzione diversa da zero il cui integrale e' nullo e' trascurabile q.o.

Teoria della Misura

Quindi $f \equiv 0$ perche' continua

3. $\alpha \in \mathbb{F}$ e $f \in C_{\mathbb{F}}[0,1]$

$\|\alpha f\|_2 = \left(\int_0^1 |\alpha f(t)|^2 dt\right)^{1/2} = |\alpha| \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt\right)^{1/2} = |\alpha| \|f\|_2$ ok

Dimostrazione (Lemma) :

Essendo $Y \subsetneq X$ chiuso $\Rightarrow \exists\, x \in X \setminus Y$ tale che $d(x, Y) = d > 0$
per definizione di distanza fuori da un chiuso e' strettamente positiva ;

$$d(x, Y) = \inf \{ \|x - y\| : y \in Y \} \text{ distanza del punto dall'insieme}$$

Per definizione di inf : → un qualunque α scelgo 2 per facilitare

$\exists\, z \in Y$ tale $0 < \|x - z\| < 2d$

(E' un estremo inf. non e' detto che sia un min)

Sicuramente preso $w \in X$ quindi : $w = \dfrac{x - z}{\|x - z\|} \in X$ e' sempre vero
che : $\|w\| = \dfrac{\|x - z\|}{\|x - z\|} = 1$
↳ E' uno dei requisiti richiesti

Sia $y \in Y$: $\|w - y\| = \left\| \dfrac{x - z}{\|x - z\|} - y \right\| = \dfrac{1}{\|x - z\|} \, \| x - z - y \|x - z\| \, \|$

la norma e' omogenea rispetto agli scalari

$$= \frac{1}{\|x - z\|} \, \| x - (\underbrace{z + y\|x - z\|}) \| \geq \frac{1}{\|x - z\|} \cdot d$$

combinazione lineare di 2 vettori che stanno in Y quindi stanno ancora nel sottospazio

$$> \frac{1}{2\cancel{d}} \cdot \cancel{d} = \frac{1}{2}$$ visto che avevamo posto $\|x - z\| < 2d$ ho il reciproco □

Dimostrazione (teorema) :

OBIETTIVO : dobbiamo trovare $\{x_k\} \subset S(0,1)$ che non ammette sottosuccessioni convergenti. Essendo $S(0,1) \subset \overline{B(0,1)}$ varra' anche per quest'ultimo!

1° passo : Essendo X di dimensione infinita, non puo essere vuoto
→ $\exists\, y_1 \in X$ tale che $y_1 \neq 0$ un vettore qualsiasi

Lo normalizzo $x_1 = \dfrac{y_1}{\|y_1\|} \in S(0,1)$ perche' cosi' com'e' ha norma 1!

Spazi di Banach

Definizione: si dice spazio di Banach, uno spazio normato completo (Rispetto alla distanza indotta dalla norma)

Esempi (di spazi di Banach)

1. $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ è spazio di Banach (è completo con qualunque norma)
2. $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|)$ analogamente è spazio di Banach (perché su $\mathbb{C}^n$ ogni norma è equivalente alla norma 2 con cui $\mathbb{C}^n$ è completo)
3. $(X, \|\cdot\|)$ dim X finita $\Rightarrow$ sempre spazio di Banach

Dimostrazione:
costruiamo $X \xrightarrow{\Phi} \mathbb{F}^n$ per essere un isomorfismo deve esistere Base $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ di X (esiste perché X finito) $\forall x \in X$ posso scrivere:

$$x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j$$

Ogni vettore x lo spediamo tramite l'isomorfismo Φ nella n-upla delle sue componenti

Φ isomorfismo, su X abbiamo una norma, quindi dobbiamo definire una norma anche su $\mathbb{F}^n$!
Definiamo: $\|(\alpha_1, \dots, \alpha_n)\|_{\mathbb{F}^n} := \|\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j e_j\|_X$ è la norma su $\mathbb{F}^n$

Ma sappiamo che $\mathbb{F}^n$ con qualunque norma è completo, quindi:
$(\mathbb{F}^n, \|\cdot\|_{\mathbb{F}^n})$ è uno spazio di Banach $\Rightarrow \{\Phi(x_k)\} \subset \mathbb{F}^n$ di Cauchy

$$\Rightarrow \Phi_k \longrightarrow \underline{\alpha} = (\alpha_1 \dots \alpha_n) \in \mathbb{F}^n$$

$$\Rightarrow x_k \xrightarrow[k\to\infty]{} x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j \text{ in } X$$

$\square$

4. $(C_{\mathbb{F}}[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ spazio di Banach
5. $P_{\mathbb{F}}[a,b] = \{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x^j \mid n \in \mathbb{N}, \alpha_j \in \mathbb{F}\}$ con $\|p\|_\infty := \sup_{x\in[a,b]} |p(x)|$

È uno spazio normato, ma non è di Banach

6. ℓ^p con $1 \leq p \leq \infty$ è spazio di Banach

$(\hat{X}_1, J_1)$ e $(\hat{X}_2, J_2)$ completamenti di X

$\Rightarrow \exists\, I : \hat{X}_1 \longrightarrow \hat{X}_2$ tale che:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "J_1"] \arrow[dr, "J_2"'] & \hat{X}_1 \arrow[d, "I"] \\ & \hat{X}_2 \end{tikzcd}$$

dove I è lineare, iniettiva e suriettiva

$\|I\hat{x}_1\|_{\hat{X}_2} = \|I\hat{x}_2\|_{\hat{X}_1}$ è una isometria negli spazi opportuni

Il diagramma è commutativo. Il completamento è unico a meno di isometrie.

Osservazione: Il completamento è il più piccolo spazio di Banach che contiene lo spazio normato di partenza.

- Se X è spazio di Banach $X = \hat{X}$ - non devo fare niente - CASO BANALE
- Se X non è completo, "devo aggiungere" a X i limiti delle sue sottosuccessioni di Cauchy non convergenti.

Completamento di $C_{\mathbb{F}}[a,b]$

Esempio - importantissimo per gli esercizi

Sia $C_{\mathbb{F}}[a,b]$ $\quad 1 \le p < \infty$ con $\|f\|_p = \left(\int_a^b |f|^p\right)^{1/p}$

$\|\cdot\|_p$ è norma su $C_{\mathbb{F}}[a,b]$ (non è facile da dimostrare)

$\hookrightarrow$ Anche su questa norma vale la disuguaglianza di Hölder:

$g, f \in C_{\mathbb{F}}[a,b]$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ come valeva per le successioni;

$\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx = \|fg\|_1 \le \|f\|_p \|g\|_q$ e naturalmente vale anche la disuguaglianza di Minkosky: $\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p$

Possiamo dire che $(C_{\mathbb{F}}[a,b], \|\cdot\|_p)$ non è uno spazio di Banach dobbiamo completarlo quindi! Il suo completamento è $L^p(a,b)$

Dove: $\mathcal{L}^p(a,b) = \{ f : [a,b] \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ misurabili tali che $\int_a^b |f(x)|^p dx < \infty \}$

Abbiamo che $L^p(a,b) = \mathcal{L}^p(a,b)/\sim$ cioè $f \sim g \Leftrightarrow f = g$ (q.o.)

$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p\right)^{1/p}$ quindi $(L^p_{(a,b)}, \|\cdot\|_p)$ spazio di Banach

Bisogna ora verificare le proprietà di prodotto scalare.

3) $C_{\mathbb{R}}[a,b]$ $\quad f,g \in C_{\mathbb{R}}[a,b]$ voglio definire il prodotto scalare

$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$ è un prodotto scalare

come prima, mi chiedo perchè è ben definito, è una buona definizione perchè il loro prodotto mi da sempre una funzione continua

$\int_a^b f(x)g(x)\,dx \in \mathbb{R}$ Abbiamo l'integrabilità su $\mathbb{R}$

Bisogna ora verificare le proprietà del prodotto:

1) e 2) sono facili

3) $\langle f,f\rangle = \int_a^b f(x)^2\,dx = \|f\|_2^2 \geq 0$ e in particolare si ha:

$$\int_a^b f^2(x)\,dx = 0 \Rightarrow f^2(x) = 0 \text{ q.o.} \Rightarrow f(x) = 0 \text{ e } f \text{ continua}$$
$$\Rightarrow f = 0$$

4) $L^2_{\mathbb{R}}(a,b) = \{ f : (a,b) \to \mathbb{R} : \underline{f \text{ misurabile}} \text{ tale che } \int_a^b f(x)^2\,dx < \infty \}$

Anche se $f,g \in L^2_{\mathbb{R}}(a,b) \Rightarrow \langle f,g\rangle := \int_a^b f(x)g(x)\,dx$ è un prodotto scalare

Anche qui Hölder ci garantisce che è una buona definizione

Se $f,g \in L^2_{\mathbb{R}}(a,b)$ abbiamo:

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2 < +\infty \Rightarrow |f\cdot g| \text{ è integrabile su } (a,b)$$

$\rightarrow$ cioè $f\cdot g$ è integrabile su (a,b), in altre parole questo integrale è un numero reale.

Anche qui vanno fatte le verifiche per il prodotto scalare

2) $X = \ell^2(\mathbb{C})$ prendo $x, y \in \ell^2(\mathbb{C})$ quindi successioni

$\langle x, y \rangle := \sum_{j=1}^{\infty} x_j \overline{y_j} \in \mathbb{C}$ E' una buona definizione anche qui posso applicare Hölder:

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_j \overline{y_j}| \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |y_j|^2\right)^{1/2} \rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} x_j \overline{y_j} \text{ converge in } \mathbb{C}$$

Nota: ho una serie non una somma

Osservazione: $\langle x, x \rangle = \|x\|_2^2$ la norma 2 di x al quadrato

3) $C_{\mathbb{C}}[a,b]$ prese $f, g \in C_{\mathbb{C}}[a,b]$ definisco:

$\langle f, g \rangle := \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx$ le verifiche sono le stesse già viste

$\langle f, f \rangle := \int_a^b |f(x)|^2 dx$ ATTENZIONE: è importante che ci sia il modulo perche' siamo nel campo dei complessi!!

4) $L^2_{\mathbb{C}}(a,b)$ prese $f, g \in L^2_{\mathbb{C}}(a,b)$

$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx \in \mathbb{C}$ e' sempre garantito grazie a Hölder

Osservazione: $\langle f, f \rangle = \int_a^b |f(x)|^2 dx = \|f\|_2^2$ (come prima)

Proprietà (del prodotto scalare):

X spazio vettoriale con prodotto scalare su $\mathbb{F}$

1. Disuguaglianza di Cauchy-Schwartz

$|\langle x, y \rangle| = \langle x, x \rangle^{1/2} \cdot \langle y, y \rangle^{1/2} \quad \forall x, y \in X$

NOTAZIONE (per il momento): $\langle x, x \rangle^{1/2} = \|x\|$

$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ useremo quindi questa notazione

Dimostrazione:

Quindi abbiamo ottenuto $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

3. Identità del Parallelogramma

$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$

questa formula viene usata per vedere se una norma è indotta dal prodotto scalare

Osservazione = tutti gli spazi con prodotto scalare sono spazi normati
Non vale il viceversa (per verificarlo usiamo l'identità del parallelogramma e l'identità di polarizzazione)

Esempio (che viene chiesto spesso all'orale) Possibile domanda

- ℓ^p $1 \leq p < \infty$ allora posso dire:

$\|\cdot\|_p$ è indotta da un prodotto scalare $\Leftrightarrow p = 2$

"$\Leftarrow$" lo abbiamo dimostrato negli esempi sui prodotti scalare

"$\Rightarrow$" prendiamo $p \neq 2$ con $1 \leq p < \infty$ ci basta un controesempio e dimostriamo che non vale l'identità del parallelogramma;

prendo $x = (2,0,0, \dots 0)$ $y = (0,2,0,0, \dots 0)$ successioni che stanno in ℓ^p

A cosa vale la norma $\|x\|_p$ e $\|y\|_p$

$\|x\|_p = (2^p)^{1/p} = 2$ lo stesso vale per $\|y\|_p = (2^p)^{1/p} = 2$

Il secondo membro dell'identità del parallelogramma

$2\|x\|_p^2 + 2\|y\|_p^2 = 2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^2$ mentre

$\|x+y\|_p = (2^p + 2^p)^{1/p} = (2 \cdot 2^p)^{1/p} = 2 \cdot 2^{1/p}$

lo stesso vale per $\|x-y\|_p = 2 \cdot 2^{1/p}$ quindi riunendo i risultati

$\|x+y\|_p^2 + \|x-y\|_p^2 = (2 \cdot 2^{1/p})^2 + (2 \cdot 2^{1/p})^2 \neq 2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^2$

$\rightarrow$ Non viene soddisfatta l'identità del parallelogramma quindi $\|\cdot\|_p$ non è indotta da un prodotto scalare.

Osservazione = se un insieme di vettori $\{e_i\}_{i\in I}$ è ortonormale è un insieme di vettori $\{e_i\}_{i\in I}$ linearmente indipendenti.

Infatti = $\{e_1, e_2, \dots, e_N\}$ finito con $N \in \mathbb{N}$

Supponiamo che: $\sum_{j=1}^{N} e_{ij}\alpha_{ij} = 0$ ci calcoliamo il prodotto scalare

$$\langle \sum_{j=1}^{N} \alpha_{ij} e_{ij}, e_{ik} \rangle = \begin{cases} 0 \\ \alpha_{ik}\|e_{ik}\|^2 \end{cases}$$ si salva solo il k-esimo termine

$\Rightarrow$ Quindi l'insieme è composto da vettori linearmente indipendenti

Teorema (di ortonormalizzazione) =

Sia $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ spazio dotato di prodotto scalare. Siano $\{v_1, \dots, v_N\}$ linearmente indipendenti. Allora $\exists \{e_1, \dots, e_N\}$ ortonormale tale che:

$$\text{span}\{e_1, \dots, e_k\} = \text{span}\{v_1, \dots, v_k\} \quad \forall k = 1, \dots, N$$

Idea di dimostrazione =

$v_1 \neq 0$ di sicuro $\Rightarrow b_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$ normalizzo chiamo $e_1 = \frac{b_1}{\|b_1\|}$

Definisco un vettore $b_2 = v_2 - \langle v_2, e_1\rangle e_1 \neq 0$ tolgo da v_2 le componenti lungo e_1

Quindi $e_2 = \frac{b_2}{\|b_2\|}$ $b_2 \neq 0$ per forza perché se non lo fosse vorrebbe dire che v_1 e v_2 sono dipendenti e questo è contro le ipotesi

al passo n-esimo e otteniamo:

$$b_{\ell+1} = v_{\ell+1} - \sum_{k=1}^{\ell} \langle v_{\ell+1}, e_k\rangle e_k \neq 0 \Rightarrow e_{\ell+1} = \frac{b_{\ell+1}}{\|b_{\ell+1}\|}$$

fino a $\ell = 1, \dots, n-1$

Gli $\|e_k\| = 1$ per come gli abbiamo costruiti, è un sistema ortonormale perché $\langle e_k, e_\ell\rangle = 0$ $k \neq \ell$

Ultima verifica $\text{span}\{e_1, \dots e_k\} = \text{span}\{v_1, \dots, v_k\}$ $1 \leq k \leq n$

"$\subseteq$" ognuno dei e_k è combinazione degli v_k

"$\supseteq$" da entrambi i lati ho uno spazio di dimensione k per

Prendiamo $a \in A$; → questo è il limite di un numero

$\langle x, a \rangle = \langle \lim_{n\to\infty} x_n, a \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x_n, a \rangle = 0$

Lo posso portare fuori perchè so di avere la convergenza in norma

qui c'è un limite nello spazio

Infatti: $|\langle x,a\rangle - \langle x_n, a\rangle| = |\langle x - x_n, a\rangle| \leq \|x - x_n\| \|a\| \longrightarrow 0$

vale per la disuguaglianza di Cauchy $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \langle x_n, a\rangle = \langle x, a\rangle$

Quindi $A^\perp$ è chiuso

□

2. se $A \subset B \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp$ (si scambiano)

Dimostrazione: se $x \in B^\perp \Rightarrow \langle x, b\rangle = 0 \quad \forall b \in B$ visto che $A \subset B$

$\Rightarrow \langle x, a \rangle = 0 \quad \forall a \in A \Rightarrow x \in A^\perp$

3. $0 \in A^\perp \quad \forall A \subset X$ - 0 è ortogonale a qualsiasi elemento di A -

4. $A^\perp = (\overline{A})^\perp$

Dimostrazione: $A \subset \overline{A} \Rightarrow \overline{A}^\perp \subset A^\perp$ dalla prima proprietà

Voglio vedere se $x \in A^\perp \overset{?}{\longrightarrow} x \in \overline{A}^\perp$

se $\overline{a} \in \overline{A}$ avremo $\overline{a} = \lim_{n\to\infty} a_n$ con $a_n \in A$ (sappiamo che $\overline{A}$ è chiuso)

quindi come prima posso portare fuori il limite dal prodotto scalare;

$\langle x, \overline{a} \rangle = \langle x, \lim_{n\to\infty} a_n \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x, a_n \rangle = 0$

È di nuovo un'applicazione della disuguaglianza di Cauchy-Sch.

$|\langle x, \overline{a}\rangle - \langle x, a_n\rangle| = |\langle x, \overline{a} - a_n\rangle| \leq \|x\| \|\overline{a} - a_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

- esattamente come prima -

□

5. $\{0\}^\perp = X$ e $X^\perp = \{0\}$

6. $A \subseteq (A^\perp)^\perp$ ATTENZIONE: non è uguale in generale

Dimostrazione: $a \in A \quad x \in A^\perp$

$\langle a, x \rangle = \overline{\langle x, a \rangle} = 0$

Nota Bene: non ho l'uguaglianza perchè A in generale non è un chiuso, mentre il suo ortogonale lo è sempre!!

$= \sqrt{n} \cdot \frac{1}{n} + \sqrt{n}\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right) \leq \sqrt{n}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right) \xrightarrow[n,m \to \infty]{} 0$ quindi la successione è di Cauchy per $\|\cdot\|_p$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N_\varepsilon$ tale che $n, m > N_\varepsilon \quad \|f_n - f_m\|_p^p < \varepsilon$

Se per ASSURDO $\exists f \in C_{\mathbb{F}}[0,1]$ tale che : $\|f_n - f\|_p^p \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

questo vuol dire che : $\int_0^1 |f_n(t) - f(t)|^p dt \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

quindi abbiamo il limite puntuale : $f(t) = \lim_{n \to \infty} f_n(t)$ q.o, ma questo candidato limite deve stare in $C_{\mathbb{F}}[0,1]$

$f(t) = t^{-1/2p}$ q.o) $\Rightarrow$ questa funzione in 0 esplode quindi non è continua

$\Rightarrow (C_{\mathbb{F}}[0,1], \|\cdot\|_p)$ non è completo.

Osservazione importante

Osservazione: se prendo $p = \infty$ $(C_{\mathbb{F}}[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ è completo

con $\|f\|_\infty = \max_{[0,1]} f$ $\quad f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{F}$ funzione misurabile

$\text{esssup}(f) = \|f\|_\infty = \inf \{ c > 0 : |\{ t : |f(t)| > c \}| = 0 \}$

$\hookrightarrow$ Estremo superiore essenziale

$\hookrightarrow$ la misura dell'insieme dei punti dove il modulo di f è maggiore di c è uguale a zero

La norma infinito si può definire per qualunque funzione misurabile!!

Nel caso in cui la funzione sia continua coincide con il max del modulo della funzione

- se $f \in C_{[a,b]} \Rightarrow \|f\|_\infty = \text{esssup}(f)$ Con questa norma $C_{[a,b]}$ è completo, non va completato
- $\mathcal{L}^\infty(a,b) = \{ f : (a,b) \to \mathbb{F}$ misurabili tale che $\|f\|_\infty < \infty \}$

$L^\infty(a,b) = \mathcal{L}^\infty(a,b) / \sim$ con la relazione di equivalenza $f \sim g \Leftrightarrow f \overset{q.o}{=} g$

In conclusione abbiamo:

$(C_{\mathbb{F}}[a,b], \|\cdot\|_\infty) \subsetneq (L^\infty(a,b), \|\cdot\|_\infty)$

completo $\uparrow$ completo

ATTENZIONE: non è il completamento come per la $\|\cdot\|_p$!

• $1 \le p < \infty$ prendo $d = (1, 0, 0, \dots 0)$ $\Rightarrow (1,1,1, \dots 1) \notin \ell^p$
$x = d \in M_d$ anche qui $2x \notin M_d$

(b) Prendo $d = (1, 0, \dots)$ quindi M_d diventa
$M_d = \{ x \in \ell^p : |x_1| \le 1 , x_k = 0$ con $k \ge 2 \}$.

Questo spazio M_d e' isomorfo a un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, se e' compatto in $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. M_d e' compatto perche' se $\{x_n\} \subset M_d$ con:

$$x_{n,k} = \begin{cases} 0 & \text{se } k \ge 2 \\ x_{n,1} & \text{se } k = 1 \end{cases} \quad \text{con } |x_{n,k}| \le 1$$

$\Rightarrow$ vedo se e' compatto per successioni (in uno spazio metrico)

$\exists$ una sottosuccessione $\{x_{n,1}\}$ che converge a x_1 (sto usando la compattezza di $[-1,1] \in \mathbb{R}$ o $\overline{B(0,1)} \in \mathbb{C}$)

$\Rightarrow \{x_{n_j}\}$ converge in ℓ^p a $(x, 0, 0, \dots)$ cioe': $\| x_{n_j} - x \|_p = \left(|x_{n_j} - x_1|^p \right)^{1/p}$
con $1 \le p < \infty$ $= |x_{n_j} - x| \xrightarrow[j \to \infty]{} 0$ perche' tutte le altre componenti sono nulle

Mentre per $p = \infty$ $\Rightarrow$ Non ho bisogno del sup ne ho solo 1!
$\| x_{n_j} - x \|_\infty = |x_{n_j} - x_1| \xrightarrow[j \to \infty]{} 0$ E' l'unica differenza che si salva

$\Rightarrow M_d$ e' compatto in ℓ^p, lo abbiamo visto per successioni.

(c) Prendiamo $d_k = 1$ e $e_n \in M_d$ (RICORDA PROCEDIMENTO) ⚠
La successione e_n ha estratte convergenti in ℓ^p con $1 \le p \le \infty$?
Prendo $m \ne n$ verifico che:

$$\| e_n - e_m \|_p = \begin{cases} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |e_{n,k} - e_{m,k}|^p \right)^{1/p} = (1^p + 1^p)^{1/p} = (2)^{1/p} & \text{con } 1 \le p < \infty \\ 1 & \text{se } p = \infty \text{ (devo prendere il sup)} \end{cases}$$

si salvano solo 2 quando $n = k$ e $m = k$

E' sempre un numero strettamente positivo

Quindi $\{e_n\}$ non ammette estratte convergenti.
$\{e_n\}$ non puo' avere successioni di Cauchy $\Rightarrow$ non puo' avere sottosuccessioni convergenti $\Rightarrow M_d$ non e' compatto!!

2. $x \in X$ e $\alpha \in \mathbb{C}$

$$\|\alpha x\| = \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha x_{k+1} - \alpha x_k| + |\alpha x_1| = |\alpha| \, \|x\|$$

3. $x, y \in X$ abbiamo:

$$\|x+y\| = |x_1 + y_1| + \sum_{k=1}^{\infty} |x_{k+1} + y_{k+1} - (x_k + y_k)|$$

$$\leq |x_1| + |y_1| + \sum_{k=1}^{\infty} |x_{k+1} - x_k| + \sum_{k=1}^{\infty} |y_{k+1} - y_k|$$

$$= \|x\| + \|y\|$$

ok $\|\cdot\|$ e' una norma $(X, \|\cdot\|)$ e' spazio normato

(c) Devo verificare che $\forall x \in X$ $|x_k| \leq \|x\|$, la verifica e' su ogni componente

quando: $k = 1$ $\quad |x_1| \leq \|x\|$ e' senz'altro vero $|x_1|$ e' solo una parte della norma

$k = 2$ $\quad x_2 = x_2 - x_1 + x_1$ così posso applicare la disuguaglianza triangolare

$$|x_2| \leq \underbrace{|x_2 - x_1|} + \underline{|x_1|} \leq \|x\|$$

↳ e' uno degli infiniti addendi della serie della norma

iterando il ragionamento arrivo per un generico k

$k > 2$ $\quad x_k = (x_k - x_{k-1}) + (x_{k-1} - x_{k-2}) + \dots + x_1$

$$|x_k| \leq \underbrace{\sum_{j=1}^{k-1} |x_{j+1} - x_j| + |x_1|} \leq \|x\|$$

Questo e' sempre un "pezzetto" che definisce la mia norma quindi e' sempre minore o uguale

Quindi anche in questo caso specifico il modulo e' minore della norma

(d) Partiamo da $\{x_n\}$ di Cauchy in X, questo vuol dire per definizione:

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists N_\varepsilon$ tale che $n > m > N_\varepsilon$:

$$\|x_n - x_m\| < \varepsilon$$

25/01/2019

Lezione 11

Esercizio ④ - Esercizio teorico - Buon Esercizio

X spazio di Banach

$\{x_k\} \subset X$ tale che: $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < \infty \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{m} x_k$ con $x \in X$

L'esercizio mi dice che se X spazio di Banach, ogni serie assolutamente convergente è convergente. Assolutamente convergente vuol dire che la serie delle norme è finita. Quindi l'esistenza delle somme parziali

Indico con $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k \in X$ voglio vedere che s_n è di Cauchy

SOMMA PARZIALE

presi $n, m \in \mathbb{N}$ con $n > m$:

$$\|s_n - s_m\| = \left\|\sum_{k=1}^{n} x_k - \sum_{k=1}^{m} x_k\right\| \overset{=}{=} \left\|\sum_{k=m+1}^{n} x_k\right\| \le \sum_{k=m+1}^{n} \|x_k\| \le \sum_{k=m+1}^{\infty} \|x_k\|$$

Mi rimane solo la differenza — È il resto n-esimo di una serie convergente

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon$ con $n, m > N_\varepsilon$ tale che:

$\|s_n - s_m\| < \varepsilon \Rightarrow s$ è tale che $s = \lim_{n\to\infty} s_n$ con $s \in X$

Osservazione: Ci chiediamo se una serie convergente è sempre assolutamente convergente in uno spazio di Banach?

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = x \in X \overset{?}{\Longrightarrow} \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < \infty$$ No naturalmente

Controesempio: sappiamo già che in $\mathbb{R}$ la convergenza $\not\Rightarrow$ la assoluta convergenza

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \text{ convergente} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^k}{k}\right| = +\infty$$

Esercitazione

Spazi di Hilbert - spazi con prodotto scalare

Esercizio ①

X spazio con prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ su $\mathbb{R}$, $z \in X$

Sia $\{x_n\} \subset X$ tale che:

1. $\langle x_n, y \rangle \longrightarrow \langle z, y \rangle \quad \forall y \in X$
2. $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|z\| \Rightarrow x_n \longrightarrow z$ in X

a) $\|\cdot\|_w$ è una norma? - Domanda aggiunta -

b) Esiste un prodotto scalare che induce la norma $\|\cdot\|_w$?

c) $\ell^2(w)$ è uno spazio completo?

d) Trovare w tale che $\left\{\frac{1}{j^j}\right\} \in \ell^2(w)$

e) Trovare w tale che : $\{x : |x_j| \leq j^j\} \subset \ell^2(w)$

SOLUZIONE

ⓐ Verifichiamo che $\|\cdot\|_w$ sia una norma

$$\|x\|_w = \underbrace{\|w_j^{1/2} x_j\|_{\ell^2}}_{} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |w_j^{1/2} x_j|^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} w_j |x_j|^2\right)^{1/2}$$

= questa è quella che conosco $\qquad$ questa è quella dell'esercizio

Quindi posso ricavarmi le prop. di norma dalla $\|\cdot\|_2$ che conosco

1. $\|x\|_w \geq 0$ perché so che lo è $\|\cdot\|_2$

$\|0\| = 0$ e $\|x\|_w = 0 \Rightarrow \|w_j^{1/2} x_j\|_2 = 0 \Rightarrow w_j^{1/2} x_j = 0 \ \forall j \Rightarrow x_j = 0 \ \forall j$

è sempre un numero strettamente positivo per ipotesi

2. $\alpha \in \mathbb{C}$, $x \in \ell^2(w)$ omogeneità rispetto agli scalari

$$\|\alpha x\|_w = \|(\alpha w_j^{1/2} x_j)\|_2 = |\alpha| \, \|w_j^{1/2} x_j\|_2 = |\alpha| \|x\|_w$$

3. $x, y \in \ell^2(w)$

$$\|x + y\|_w = \|w_j^{1/2}(x_j + y_j)\|_2 \leq \|w_j^{1/2} x_j\|_2 + \|w_j^{1/2} y_j\|_2 = \|x\|_w + \|y\|_w$$

$\rightarrow$ Ho verificato che è una norma

ⓑ Dobbiamo trovare un prodotto scalare che mi induce la norma

$$\langle x, y \rangle_w = \sum_{j=1}^{\infty} w_j x_j \overline{y_j}$$ dalla definizione di prodotto scalare su ℓ^2

$$\langle x, x \rangle_w = \sum_{j=1}^{\infty} w_j x_j \overline{x_j} = \sum_{j=1}^{\infty} w_j |x_j|^2 = \|x\|_w^2$$

Ecco il prodotto scalare che mi induce la norma, ora bisognerebbe verificare che sia un prod scalare

ⓒ Devo vedere se $(\ell^2(w), \|\cdot\|_w)$ completo

$\{x_n\} \subset \ell^2(w)$ successione di Cauchy

Scelgo $\beta := \begin{cases} \dfrac{|\langle x,y\rangle|}{\langle y,x\rangle} & \text{con } \langle y,x\rangle \neq 0 \\ 1 & \text{con } \langle y,x\rangle = 0 \end{cases}$

$|\beta| = 1$

è uno scalare particolare

pongo $\alpha = t\beta$ con $t \in \mathbb{R}^+$ ora andiamo a sostituire in quello che ci rimaneva: $t^2\|y\|^2 - t\dfrac{|\langle x,y\rangle|}{\langle y,x\rangle} \cdot \langle x,y\rangle - t\dfrac{|\langle x,y\rangle|}{\langle y,x\rangle}\langle x,y\rangle \geq 0$

↳ tutto questo vale se $\langle y,x\rangle \neq 0$

$t^2\|y\|^2 - 2t|\langle x,y\rangle| \geq 0$

$|\langle x,y\rangle| \leq \dfrac{t^2}{2t}\|y\|^2$ Possiamo passare al limite per $t \to 0^+$:

$0 \leq |\langle x,y\rangle| \leq 0 \to |\langle x,y\rangle| = 0 \implies \langle x,y\rangle = 0$

Ma questo è assurdo perchè avevo posto $\neq 0$, quindi in conclusione

$\langle x,y\rangle = 0 \ \forall y \in Y \implies x \in Y^\perp$ $\square$

Spazi di Hilbert

Definizione: si dice spazio di Hilbert, un spazio con prodotto scalare $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ completo rispetto alla norma indotta dal prodotto scalare.

Esempi (di spazi di Hilbert)

1. $\mathbb{R}^n$ $\langle x,y\rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$
2. $\mathbb{C}^n$ $\langle x,y\rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{y_j}$
3. $\ell^2(\mathbb{F})$ $\langle x,y\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \overline{y_j}$
4. $L^2_{\mathbb{F}}(a,b)$ $\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,dx$

Osservazione: gli spazi di Hilbert sono una sottoclasse degli spazi di Banach sono spazi normati indotti da prodotto scalare completi.

$\delta^2 \leq \|p-q\|^2 < \delta^2 \Rightarrow$ deve essere $\Rightarrow \|p-q\| = \delta$ che è proprio la mia distanza
$\Rightarrow \exists$ la proiezione!!

2° passo = verifichiamo l'unicità della proiezione

Per ASSURDO siano $q_1 \neq q_2$ con $q_1, q_2 \in A$ tali che =

$\|p-q_1\| = \|p-q_2\| = \delta$ ← vado ad applicare come prima l'identità del parallelogramma.

$$\|(\cancel{p}-q_1)-(\cancel{p}-q_2)\|^2 + \|(p-q_1)+(p-q_2)\|^2 = 2\|p-q_1\|^2 + 2\|p-q_2\|^2$$

$$\|q_2-q_1\|^2 = 2\|p-q_1\|^2 + 2\|p-q_2\|^2 - \|2p-q_1-q_2\|^2$$

$$= 2\delta^2 + 2\delta^2 - 4\Big\|p - \underbrace{\left(\frac{q_1+q_2}{2}\right)}_{\in A \text{ sempre perché } A \text{ convesso}}\Big\|^2 \leq 4\delta^2 - 4\delta^2 = 0$$

Ho ottenuto quindi:

$0 \leq \|q_2-q_1\|^2 \leq 0 \Rightarrow q_1 = q_2$ ma questo è ASSURDO va contro le ipotesi $\Rightarrow$ quindi q deve essere unico $\square$

Teorema (di decomposizione ortogonale) =

Sia H spazio di Hilbert. Sia Y sottospazio vettoriale, chiuso, non vuoto e Y è convesso. Allora $\forall x \in H$:

$\exists! \, y \in Y$, $\exists! \, z \in Y^\perp$ tale che:
- $x = y + z$
- $\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2$

Decomposizione ortogonale di x rispetto a Y!! ←

Dimostrazione =

Preso $x \in H$

1° passo = verifica sull'esistenza di y e z

Per il teorema della proiezione: $\exists! \, y \in Y$ proiezione di x su Y cioè tale che:

$$\|x-y\| = \inf\{\|x-w\|, w \in Y\}$$

Sia $z = x - y \in H$ ↷ vogliamo provare che $z \in Y^\perp$

Basi Ortonormali

05/11/2019

Lezione 13

$(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ $\{e_u\}_{u\in I}$ insieme ortonormale

DOMANDA: dato $x \in X$, $\sum_{u\in I} \langle x, e_u\rangle e_u$ converge? Se sì converge ad x?

in dimensione finita sì, ma in dimensione infinita?

↳ se è una base

Proposizione (Disuguaglianza di Bessel):

Sia X spazio con prodotto scalare. Sia $\{e_u : u\in \mathbb{N}\}$ insieme ortonormale

$\forall x \in X$

$$\sum_{m\in\mathbb{N}} |\langle x, e_u\rangle|^2 \le \|x\|^2$$

$\Rightarrow$ quindi la serie converge e ne più conosciamo un maggiorando

Dimostrazione: $\forall k \in \mathbb{N}$

$$y_k := \sum_{u=1}^{k} \langle x, e_u\rangle e_u$$ ← lo posso fare perché è una somma finita, posso sempre fare una combinazione lineare finita

$$\|y_k\|^2 = \sum_{u=1}^{k} |\langle x, e_u\rangle|^2$$

questo segue dal teorema di Pitagora generalizzato

$$\|x - y_k\|^2 = \langle x-y_k, x-y_k\rangle = \|x\|^2 - \langle y_k, x\rangle - \langle x, y_k\rangle + \|y_k\|^2$$

$$= \|x\|^2 - \langle x, \sum_{u=1}^{k}\langle x, e_u\rangle e_u\rangle - \langle \sum_{u=1}^{k}\langle x, e_u\rangle e_u, x\rangle + \sum_{u=1}^{k} |\langle x, e_u\rangle|^2$$

$$= \|x\|^2 - \cancel{\sum_{u=1}^{k} \overline{\langle x, e_u\rangle}\langle x, e_u\rangle} - \cancel{\sum_{u=1}^{k} \langle x, e_u\rangle\underbrace{\langle e_u, x\rangle}_{\overline{\langle x, e_u\rangle}}} + \sum_{u=1}^{k} |\langle x, e_u\rangle|^2$$

$$= \|x\|^2 - \sum_{u=1}^{k} |\langle x, e_u\rangle|^2 \ge 0 \quad \forall k\in\mathbb{N}$$

perché ho una norma al quadrato

Ne deduco allora:

$$\sum_{u=1}^{k} |\langle x, e_u\rangle|^2 \le \|x\|^2 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$ quindi passando al limite $k \to \infty$

$$\sum_{u=1}^{\infty} |\langle x, e_u\rangle|^2 \le \|x\|^2 \quad \square$$

(perche' avevo posto $\langle x, e_n \rangle = \alpha_n$)

"$\Leftarrow$" Sia $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 < +\infty$ chiamo S_k la k-esima somma parziale

$S_k := \sum_{n=1}^{k} \alpha_n e_n$ con $k \in \mathbb{N}$. Proviamo che S_k e' una successione di Cauchy:

pongo $k > j$ e ci scriviamo la distanza

$$\|S_k - S_j\|^2 = \left\| \sum_{j+1}^{k} \alpha_n e_n \right\|^2 = \sum_{n=j+1}^{k} |\alpha_n|^2 \leq \sum_{n=j+1}^{\infty} |\alpha_n|^2$$

E' il resto j-esimo di una serie numerica convergente

$\Rightarrow \forall \varepsilon \ \exists J_\varepsilon$ tale che $k > j > J_\varepsilon$ $\|S_k - S_j\| < \varepsilon$

Poiche' H e' completo: $\exists x$ tale che $\lim_{k \to \infty} S_k = x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$

Sappiamo già che: $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 \leq \|x\|^2$ voglio l'uguaglianza

Osservo che: $\|x\|^2 = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n \right\|^2 = \left\| \lim_{k \to \infty} \sum_{n=1}^{k} \alpha_n e_n \right\|^2$

lo posso fare perche' la norma e' continua $= \lim_{k \to \infty} \left\| \sum_{n=1}^{k} \alpha_n e_n \right\|^2 = \lim_{k \to \infty} \sum_{n=1}^{k} |\alpha_n|^2$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 \quad \square$$

Corollario: H spazio di Hilbert, $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ insieme ortonormale in H e $x \in H$ generico. E' sempre vero:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n \text{ converge}$$

Dimostrazione: prendo un generico $x \in H$, $\alpha_n = \langle x, e_n \rangle$

So che: $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2$ converge per la disuguaglianza di Bessel

$\rightarrow$ quindi per il teorema appena dimostrato:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n \quad \text{quindi converge.} \ \square$$

$$\langle y, e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle - \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle \langle e_n, e_k \rangle$$ solo quando $n=k$ ottengo

$$= \langle x, e_k \rangle - \langle x, e_k \rangle = 0 \Rightarrow \langle y, e_k \rangle = 0$$

$\rightarrow y \in \{e_n : n \in \mathbb{N}\}^{\perp} \underset{\text{per ipotesi}}{=} \{0\} \rightarrow y = 0$ quindi nell'ortogonale ho solo lo zero

③ $\Rightarrow$ ② preso un generico $x \in H$, preso ogni elemento x in H è il

$\underbrace{\lim_{n\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \langle x, e_n \rangle e_n}_{\in \text{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}} = x$ il limite dello span $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ sta nella chiusura dello $\overline{\text{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}}$

quindi ho visto che ogni elemento di H sta nella $\overline{\text{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}}$ che è tutto H. $\Rightarrow \overline{\text{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}} = H$

③ $\Rightarrow$ ④ se $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$ dal teorema possiamo scrivere:

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2$$ - già dimostrato -

② $\Rightarrow$ ① $y \in \{e_n : n \in \mathbb{N}\}^{\perp}$ questo vuol dire che $\langle y, e_n \rangle = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

$\rightarrow \{e_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \{y\}^{\perp} \Rightarrow \text{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \{y\}^{\perp}$

sappiamo che l'ortogonale è sempre un sottospazio vettoriale, quindi se contiene degli elementi contiene anche tutto lo span di questi.
Inoltre sappiamo che è chiuso quindi contiene anche:

$\underset{= H}{\overline{\text{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}}} \subset \{y\}^{\perp}$ in particolare y è ortogonale a se stesso: $\langle y, y \rangle = 0 \Rightarrow y = 0$

④ $\Rightarrow$ ① Supponiamo che $y \in \{e_n : n \in \mathbb{N}\}^{\perp}$ per la prop ④
sappiamo che:
$$\|y\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle y, e_n \rangle|^2 = 0 \Rightarrow y = 0 \quad \square$$

• $\langle \cos(nx), 1 \rangle = \int_0^{\pi} \cos(nx)\,dx = \frac{\sin(nx)}{n}\Big|_0^{\pi} = 0$

$\Rightarrow$ le componenti sono a due a due ortogonali. Adesso vediamo se la norma soddisfa le condizioni:

• $\left\| \frac{1}{\sqrt{\pi}} \right\|_2^2 = \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^2 dx = 1 \qquad \|\cos(nx)\|_2^2 = \int_0^{\pi} (\cos(nx))^2 dx = \frac{1}{n}\int_0^{\pi n} \cos^2 t\,dt = 1$

pongo $nx = t \to dx = \frac{dt}{n}$

Abbiamo verificato che questa famiglia è un insieme ortonormale! Vogliamo sapere se è anche una base? Voglio vedere se è completo cioè vediamo se: $\overline{\text{span}\{1, \cos(nx) : n \in \mathbb{N}\}} = L^2_{\mathbb{R}}[0,\pi]$

L'OBIETTIVO sarà far vedere che ogni funzione di $L^2_{\mathbb{R}}[0,\pi]$ si può scrivere come limite di funzioni che stanno nello span.

1° passo: $g \in C_{\mathbb{R}}[0,\pi]$ mostro che $g \in \overline{\text{span}\{1, \cos(nx) : n \in \mathbb{N}\}}$

$\arccos : [-1,1] \longrightarrow [0,\pi]$ continua e biettiva

$t \longmapsto \arccos$ vado a fare una composizione

$h = g \circ \arccos \in C_{\mathbb{R}}[-1,1]$ per il teorema di Stone-Weierstrass

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists P_\varepsilon$ polinomio tale che:

$$\|h - P_\varepsilon\|_\infty = \sup_{t \in [-1,1]} |h(t) - P_\varepsilon(t)| < \varepsilon$$

Noi abbiamo che $h = g \circ \arccos \quad g = h \circ \cos \Rightarrow$ chiamo $Q_\varepsilon = P_\varepsilon \circ \cos$

con $P_\varepsilon = \sum_{j=1}^{d} c_j t^j$ quindi avrò: $Q_\varepsilon(x) = \sum_{j=1}^{d} c_j (\cos x)^j = \sum_{j=1}^{d} \alpha_j \cos(jx)$

se è così questo è un elemento dello span$\{1, \cos(nx) : n \in \mathbb{N}\}$

Quindi proviamo a stimare:

$$\|g - Q_\varepsilon\|^2_{L^2(0,\pi)} = \int_0^{\pi} |g(x) - Q_\varepsilon(x)|^2 dx \le \sup_{x \in [0,\pi]} |g(x) - Q_\varepsilon(x)| \int_0^{\pi} dx$$

$$= \pi \|g - Q_\varepsilon\|^2_{C[0,\pi]} \overset{\text{per la biiezione}}{=} \pi \|h - P_\varepsilon\|^2_{C[-1,1]} < \pi \varepsilon^2$$

Ho dimostrato che lo span è denso in $L^2_{\mathbb{R}}[0,\pi]$

$\langle \cos(nx), \cos(mx) \rangle$ con $n \neq m$ come prima

$$\langle \sin(nx), \sin(mx) \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} \cdot \frac{e^{imx} - e^{-imx}}{2i} dx = 0$$ come prima

Facciamo vedere le norme: $\int \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^2 dx = 1$ e via dicendo con le altre componenti

Come prima la parte difficile è far vedere che è una base, usiamo un altro procedimento, usiamo una delle proprietà viste:

$f \in \{1, \cos(nx), \sin(nx) : n \geq 1\}^{\perp}$ si ha che $f \equiv 0$ (Non ci metto le costanti tanto è uguale)

$$\langle f, 1 \rangle = 0 = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\pi} f(x)dx = -\int_{\pi}^{0} f(-t)dt + \int_{0}^{\pi} f(x)dx$$

$-t = x$ cambio variabile

$$= \int_0^{\pi} [f(x) + f(-x)]dx = 0$$

- $$\langle f, \cos(nx) \rangle = 0 = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \int_{-\pi}^{0} f(x)\cos(nx)dx + \int_{0}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx$$

$$= -\int_{\pi}^{0} f(-t)\cos(nt)dt + \int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \int_0^{\pi} [f(x) + f(-x)]\cos(nx)dx = 0$$

quindi $f(x) + f(-x) = 0$ in $L^2_{\mathbb{R}}(0,\pi) \Rightarrow f(x) + f(-x) = 0$ q.o in $(0,\pi)$

- $$\langle f, \sin(nx) \rangle = 0 = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = \int_0^{\pi} [f(x) + f(-x)]\sin(nx)dx = 0$$

quindi $f(x) - f(-x) = 0$ in $L^2(0,\pi) \Rightarrow f(x) - f(-x) = 0$ (q.o) in $(0,\pi)$

$\rightarrow f(x) = 0$ q.o in $(-\pi, \pi)$

4. $\left\{ \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} : n \in \mathbb{Z} \right\}$ è una base ortonormale di $L^2_{\mathbb{C}}[-\pi, \pi]$

- $$\int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} \right|^2 dx = \frac{1}{\cancel{2\pi}} \cancel{2\pi} = 1$$ la norma è sistemata → Ricordati del risultato dell'integrale

- $$\langle e^{inx}, e^{imx} \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} e^{imx} \cdot \overline{e^{-imx}} dx = \left. \frac{e^{i(n-m)x}}{n-m} \right|_{-\pi}^{\pi} = 0$$ anche il prodotto va bene

con $n \neq m$

ATTENZIONE = ho fatto $e^{imx} \cdot \overline{e^{imx}}$ perché sono su $\mathbb{C}$

$E = \text{span}\{\varphi_1, \varphi_2\}$ $\quad f(\theta) = \cos\theta$

$P_E(f) = ?$ ($\hookrightarrow$ cioè voglio la proiezione di f su E)

- E è sottospazio vettoriale? Sì perché è uno span
- E è chiuso? Sì perché dimensione finita
- $f \notin E$, perché non è combinazione lineare delle φ_i

Posso costruirmi una base ortonormale di E, devo normalizzare le φ_i perché così come sono non sono norme $= 1$

$$\int_0^{2\pi} |e^{i\theta}|^2 d\theta = 2\pi \qquad \int_0^{2\pi} |e^{i2\theta}|^2 d\theta = 2\pi$$

$\langle\varphi_1, \varphi_2\rangle = 0$ sono ortogonali $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{i\theta} \cdot e^{-2i\theta} d\theta = \left(\frac{e^{-i\theta}}{-i}\right|_0^{2\pi} = 0$

φ_1, φ_2 sono ortogonali, ma non hanno norma 1, perciò li normalizzo io per ottenere una base ortonormale

$\left\{\frac{\varphi_1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\varphi_2}{\sqrt{2\pi}}\right\}$ è una base ortonormale di E

$P_E(f) = \left\langle f, \frac{\varphi_1}{\sqrt{2\pi}}\right\rangle \frac{\varphi_1}{\sqrt{2\pi}} + \left\langle f, \frac{\varphi_2}{\sqrt{2\pi}}\right\rangle \frac{\varphi_2}{\sqrt{2\pi}}$ $\leftarrow$ la proiezione cercata

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \cos\theta\, e^{-i\theta} d\theta \cdot e^{i\theta} + \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \cos\theta\, e^{-2i\theta} d\theta \cdot e^{+2i\theta}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right) e^{-i\theta} d\theta\, e^{i\theta} + \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right) e^{-2i\theta} d\theta\, e^{2i\theta}$$

$$= \ldots = \alpha e^{i\theta} + \beta e^{2i\theta}$$

Esercitazione Ortogonalità

8/11/2019

Lezione 15

Esercizio ① Tema d'esame

$X = \{x \in \ell^2 \;\; x_k = 0 \;\; \forall k \text{ dispari}\}$ Ho solo i pari

$Y = \{y \in \ell^2 \;\; y_k = 0 \;\; \forall k \text{ pari}\}$ Ho solo i dispari

Quindi $e_k \in Y$ ma $\langle z, e_k \rangle = z_k = 0$ allora
vuol dire che $z \in X$

Osservazione: X e' chiuso perche' $X = Y^\perp$ per le proprieta'
$X^\perp = (Y^\perp)^\perp$ perche' Y e' sottospazio vettoriale chiuso

(c) $z_k = \frac{1}{2^k}$ devo calcolare la distanza $d(z, X)$

$d(z, X) = \| z - P_X(z) \|$ per il teorema della proiezione
↳ devo calcolarmela

$\{e_{2m} : m \geq 1\}$ e' una base ortonormale di X (siamo in ℓ^2 sempre comodo)

$P_X(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle z, e_{2n} \rangle e_{2m} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^{2n}} e_{2m}$ questo quando $k = 2m$

Quindi $\| z - P_X(z) \|_2 = \left\| \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^k} e_k - \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^{2m}} e_{2n} \right\|_2$

Da tutti tolgo i pari salvo i dispari

$$= \left\| \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^4}, \dots \right) - \left(0, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{2^4}, 0, \dots \right) \right\|_2$$

$$= \left\| \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2^3}, 0, \frac{1}{2^5}, 0, \dots \right) \right\|_2 = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{k+1}} \right)^2 \right)^{1/2}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{4k}} \right)^{1/2}$$

converge perche' e' la serie geometrica

Esercizio (2) Esercizio proiezioni su funzioni

Sia $H = L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$ prese: $\varphi_1(t) = t$ $\varphi_2(t) = t^2$ $X = \operatorname{span}\{\varphi_1, \varphi_2\}$

$h(t) = t + \frac{t^2}{2}$, $g(t) = t^3$, $f(t) = t^2 + t^3$

Vogliamo sapere: $P_X(h), P_X(g), P_X(f)$

1. Vediamo subito che $h \in X$, perche' combinazione lineare
quindi $P_X(h) = h$
2. $g \notin X$ verifichiamo se φ_1 e φ_2 sono ortogonali:

$$\int_0^1 t^3 \, dt = \frac{1}{4} t^4 \Big|_0^1 = \frac{1}{4} \neq 0 = \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle$$ non sono ortogonali non posso normalizzare!!

(Non posso fare come nell'esempio)

$$\begin{cases} \partial_\alpha F = 0 \\ \partial_\beta F = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{3}\alpha - \frac{2}{5} + \frac{\beta}{2} = 0 \\ \frac{2}{5}\beta - \frac{1}{3} - \frac{\alpha}{2} = 0 \end{cases}$$

e come prima lo svolgo e mi trovo il minimo di $F(\alpha,\beta)$

Esercizio (8) Tema d'esame

$H = L^2_{\mathbb{R}}(1,2)$ $\quad E = \left\{ f \in H : \int_1^2 \frac{f(t)}{t} = 1 \right\}$ quindi $E \neq \emptyset$ perche' $t \in E$

(a) E e' un sottospazio ?

(b) E e' chiuso?

(c) E e' convesso?

(d) Dimostrare che ha un unico elemento di norma minima

$$\|x\| = \inf\{\|z\| : z \in E\}$$

SOLUZIONE

(a) NO E non e' sottospazio, $0 \notin E$, inoltre $\alpha \neq 1$ αf non appartiene ad E! E e' un sottoinsieme

(b) Solita strategia per la chiusura!

Prendo $\{f_n\} \subset E$ e dico che $f_n \longrightarrow f$ in $L^2(1,2)$ mi chiedo $f \in E$?

$$\left| 1 - \int_1^2 \frac{f(t)}{t} dt \right| = \left| \int_1^2 \frac{f_n(t)}{t} dt - \int_1^2 \frac{f(t)}{t} dt \right| = \left| \int_1^2 \frac{f_n(t) - f(t)}{t} dt \right|$$

Devo vedere se sto integrale fa 1

$$\leq \int_1^2 |f_n(t) - f(t)| \frac{1}{t} dt \leq \|f_n - f\| \left(\int_1^2 \frac{1}{t^2} dt \right)^{1/2} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

Ho un prodotto

Ho applicato Cauchy-Schwartz

questa e' la norma di $\frac{1}{t}$ in L^2 ed e' un numero non da fastidio!!

Ho maggiorato con qualcosa che tende a zero!!

$$\Rightarrow \left| 1 - \int_1^2 \frac{f(t)}{t} dt \right| = 0 \Rightarrow \int_1^2 \frac{f(t)}{t} dt = 1$$ ma allora $f \in E$!

$\Rightarrow$ E e' chiuso

Capitolo 4: Operatori lineari limitati

11/11/2019
Lezione 16

Definizione = X, Y spazi normati. Un operatore $T: X \to Y$ si dice operatore lineare limitato se =

1. T è lineare, cioè: $T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F} \ \forall x, y, z \in X$
2. T è limitato, cioè: $\exists c > 0$ tale che: $\|Tx\|_Y \leq c\|x\|_X \quad \forall x \in X$

Teorema = Dati X, Y spazi normati e $T: X \to Y$ lineare sono fatti equivalenti:

05:16

1. T è limitato
2. $\exists c > 0$ tale che $\|Tx\|_Y \leq c \quad \forall x \in X, \|x\|_X \leq 1$
3. T è uniformemente continuo
4. T è continuo
5. T è continuo in 0.

Dimostrazione =

① ⇒ ② segue dalla definizione di limitatezza, $\exists c > 0$ tale che:

$\|Tx\|_Y \leq c\|x\|_X \quad \forall x \in X$ se considero $x \in X$, $\|x\|_X \leq 1$

$\|Tx\|_Y \leq c\|x\|_X \leq 1 \cdot c = c$

② ⇒ ① $x \in X$, $x \neq 0$ lo posso normalizzare $\left\|\frac{x}{\|x\|_X}\right\|_X = 1$ per la prop ②

$$\left\|T\left(\frac{x}{\|x\|_X}\right)\right\|_Y \leq c = \left\|\frac{1}{\|x\|_X} Tx\right\|_Y = \frac{1}{\|x\|_X}\|Tx\|_Y$$

Lineare; la norma è omogenea rispetto agli scalari

$\Rightarrow \|Tx\|_Y \leq c\|x\|_X \quad \forall x \in X, x \neq 0$

Inoltre $\|T0\|_Y = \|0\|_Y \leq c\|0\|_X \to$ la prop ① vale anche per lo 0

① ⇒ ③ $\exists c > 0$ tale che $\|Tx\|_Y \leq c\|x\|_X \quad \forall x \in X$ - Vogliamo dimostrare la continuità uniforme -

sia $\varepsilon > 0$ e $x_0 \in X$:

$\|Tx - Tx_0\|_Y = \|T(x - x_0)\|_Y \leq c\|x - x_0\|_X$ Ho usato la linearità della norma.

$$:= \sup_{x;\, \|x\|_X \le 1} \|Tx\|_Y$$

sono tutte definizioni equivalenti

$$:= \sup_{x;\, \|x\|_X = 1} \|Tx\|_Y$$

Esempi (di operatori limitati lineari e non)

① $T: C_{\mathbb{R}}[0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \ (=Y)$ ci chiediamo se T è lineare e limitato

$f \longmapsto Tf = f(0)$

- T lineare $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $f, g \in C_{\mathbb{R}}[0,1]$

$T(\alpha f + \beta g) = (\alpha f + \beta g)(0) = \alpha f(0) + \beta g(0) = \alpha Tf + \beta Tg$ ok

- T limitato $f \in C_{\mathbb{R}}[0,1]$

$|Tf| = |f(0)| \le \max_{t \in [0,1]} |f(t)| = \|f\|_{C_{\mathbb{R}}[0,1]}$ $\Rightarrow$ questa è la norma nello spazio di partenza

$\Downarrow$

questa è la norma dello spazio d'arrivo $\Rightarrow \|T\| \le 1$ (E' controllato da una costante)

Osservazione: la norma $\|T\| = 1$ perché se prendo $g(t) = 1 \ \forall t \in [0,1]$

$|Tg| = |g(0)| = 1 = 1 \cdot \|g\|_{C_{\mathbb{R}}[0,1]}$ $\rightarrow$ (perché g è cost e il suo max è 1!)

se faccio il $\sup_{\|f\|=1} |Tf| \le 1$, ma $|Tg| = 1$ $\rightarrow$ il sup è proprio uguale a 1!

② H spazio di Hilbert su $\mathbb{F}$

$T: H \longrightarrow \mathbb{F}$ $\qquad x_0 \in H$ fissato in partenza

$x \longmapsto \langle x, x_0 \rangle$ prodotto scalare con elemento fissato

- T lineare: T è lineare perché il prodotto scalare è lineare per la prima componente - posso sempre scriverlo -

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F} \quad \forall x, y \in H$

$T(\alpha x + \beta y) = \langle x\alpha + \beta y, x_0 \rangle = \alpha \langle x, x_0 \rangle + \beta \langle x, x_0 \rangle = \alpha Tx + \beta Ty$ ok

- T limitato: preso $x \in H$ e vado a stimare la norma dell'immag.

$|Tx| = |\langle x, x_0 \rangle| \le \|x\|_X \cdot \|x_0\|_X$ ($\rightarrow$ Ho usato la disug. Cauchy-Schwartz)

$k: [a,b] \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{F}$ nucleo integrale dell'operatore T

$(x,y) \longmapsto k(x,y)$

T si dice operatore integrale con nucleo k

- T e' ben definito $\rightarrow$ (cioe' l'integrale si puo' fare?)

$f \in C_{\mathbb{F}}[a,b]$, $x \in [a,b]$ $\int_a^b k(x,y) f(y) dy$ ha senso perche' k e' continua rispetto ad entrambe le variabili in particolare rispetto a:

$y \longmapsto k(x,y) f(y)$ e' continua su $[a,b]$ e quindi e' integrabile

$\forall f \in C_{\mathbb{F}}[a,b] \rightarrow Tf \in C_{\mathbb{F}}[a,b]$ questo va verificato:

vediamo se Tf e' continua; preso $x_0 \in [a,b]$ Tf e' continua in x_0 perche': $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta = ??$ tale che $|x - x_0| < \delta$ con $x_0 \in [a,b]$

$\rightarrow |Tf(x) - Tf(x_0)| < \varepsilon$ dobbiamo capire che cos'e' δ:

$$|Tf(x) - Tf(x_0)| = \left| \int_a^b k(x,y) f(y) dy - \int_a^b k(x_0,y) f(y) dy \right| =$$

$$= \left| \int_a^b [k(x,y) - k(x_0,y)] f(y) dy \right| \le \int_a^b |k(x,y) - k(x_0,y)| |f(y)| dy$$

sfrutto la continuita' di k:

$\exists \delta$ tale che $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |k(x,y) - k(x_0,y)| < \varepsilon$

(Nota Bene: k e' proprio uniformemente continuo su $[a,b] \times [a,b]$)

Quindi:

$\exists \delta$ tale che $\|(x,y) - (x',y')\|_{\mathbb{R}^2} < \delta \Rightarrow \|k(x,y) - k(x',y')\| < \varepsilon$

$\forall y \in [a,b]$, $|x - x_0| < \delta$ allora:

$$\|(x,y) - (x_0,y)\|_{\mathbb{R}^2} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{la seconda comp e' sempre la stessa}}}{=} |x - x_0| < \delta \Rightarrow |k(x,y) - k(x_0,y)| < \varepsilon$$

quindi ho ottenuto: $|Tf(x) - Tf(x_0)| \le \int_a^b \varepsilon |f(y)| dy = \varepsilon \underbrace{\int_a^b |f(y)| dy}_{\text{e' un numero!}}$

Per arbitrarieta' di ε ho dimostrato che T e' continuo!!

$$\int_a^b \left(\int_a^b |k(x,y)|^2 \right) dx\,dy < \infty = \|k\|^2_{L^2_{\mathbb{F}}((a,b)\times(a,b))}$$

- T è ben definito
- T è lineare (identica a prima)
- T limitato: presa $f \in L^2(a,b)$

$$\|Tf\|^2_{L^2(a,b)} = \int_a^b |Tf(x)|^2 dx$$ preso $x \in (a,b)$ esattamente come prima

$$|Tf(x)| = \left| \int_a^b k(x,y) f(y)\, dy \right| \le \int_a^b |k(x,y)||f(y)|\, dy$$ ← Applico Hölder o Cauchy-Schwartz perché siamo in uno spazio di Hilbert

$$\le \left(\int_a^b |k(x,y)|^2 dy \right)^{1/2} \underbrace{\left(\int_a^b |f(y)|^2 dy \right)^{1/2}}_{\text{questa è proprio la norma di } f \text{ su } L^2(a,b)}$$ la applico rispetto alla variabile y

A me serviva $|Tf(x)|^2 \le \int_a^b |k(x,y)|^2 dy\, \|f\|^2_{L^2(a,b)}$

Ho fatto proprio la stima che volevo!! Quindi ho trovato:

$$\|Tf\|^2_{L^2(a,b)} = \int_a^b |Tf(x)|^2 dx \le \underbrace{\int_a^b \int_a^b |k(x,y)|^2 dx\,dy}_{\text{questo integrale è finito}} \cdot \|f\|^2_{L^2(a,b)}$$

$$\le \|k\|^2_{L^2(a,b)} \cdot \|f\|^2_{L^2(a,b)} \Rightarrow T \text{ è limitato ok}$$

$$\|T\| \le \|k\|_{L^2(a,b)\times(a,b)}$$ La norma si controlla con la norma del nucleo

Anche in questo esempio non siamo in grado di calcolare esattamente la norma!!

11/11/2019

Lezione 17

⑥ - Operatore non limitato - Buon Esempio

$$T : \left(C^1_{\mathbb{R}}[0,1], \|\cdot\|_{C_{\mathbb{R}}[0,1]} \right) \longrightarrow \mathbb{R}$$

- Non riesco a trovare una costante c universale che vada bene per tutte le funzioni -

Proprietà (di operatori lineari limitati):

1. $T: X \to Y$ lineare, se $\dim X = n \in \mathbb{N}$ finita $\Rightarrow$ T limitato

Dimostrazione: $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$

definiamo su X una nuova norma:

$\|x\|_1 := \|x\|_X + \|Tx\|_Y$ è una nuova norma su X $\Rightarrow \|\cdot\|_1 = \|\cdot\|_X$ (sono equivalenti) $\Rightarrow \exists c > 0$ tale che $\|x\|_1 \leq c\|x\|_X \quad \forall x \in X$

$\rightarrow \|Tx\|_Y \leq \|x\|_1 \leq c\|x\|_X \quad \forall x \in X \rightarrow$ T limitato □

- Su spazi di dimensione finita tutte le norme sono equivalenti -

Osservazione: se $T: X \to Y$ lineare, dim Y finita, non so niente su X

$\not\Rightarrow$ T limitato (vedi esempio ⑥ $\mathbb{R}$ era di dim finita)

$T: C^1_{[0,1]} \longrightarrow \mathbb{R} = Y \quad \dim Y = 1$ (finito quindi)

$f \longmapsto f'(0)$ T è lineare e illimitato

Esempio (di operatore non limitato) Buon Esempio

$T: \left(\mathbb{R}[x], \|\cdot\|_{C[0,1]}\right) \longrightarrow \mathbb{R}$

$p \longmapsto p'(1)$ (derivata prima di polinomi)

- T lineare: è lineare per la linearità della derivata
- T non è limitato: prendo $p_n(x) = x^n \rightsquigarrow p_n'(x) = n x^{n-1}$

$p_n'(1) = n$

Quindi $|Tp_n| = n \qquad \|p_n\| = \max_{x \in [0,1]} |p_n| = 1$

Allora $\frac{|Tp_n|}{\|p_n\|} = \frac{n}{1} \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty$ esattamente come nell'altro esempio

2. $T: X \to Y$ è lineare e limitato $\Rightarrow$ ker T è chiuso

(il ker T è sempre un sottospazio normato limitato e chiuso)

Dimostrazione:

Come sempre per vedere la chiusura in uno spazio normato:

$\{x_n\} \subset \ker T \qquad Tx_n = 0 \quad \forall n$

2° verifica = le proprietà di norma

1. $\|T\| \geq 0$ ok (perché è un inf di costanti positive)

- $\|T\| = 0 \Rightarrow \sup_{\|x\|_X=1} \|Tx\|_Y = 0 \Rightarrow \|Tx\|_Y = 0 \quad \forall x, \|x\|_X = 1$
$\Rightarrow Tx = 0 \quad \forall x \in X, \|x\|_X = 1$

$\Rightarrow \forall z \in X, z \neq 0 \quad \left\| \frac{z}{\|z\|_X} \right\|_X = 1$

$\frac{1}{\|z\|_X} \cdot Tz = T\left(\frac{z}{\|z\|_X}\right) = 0 \Rightarrow Tz = 0 \rightsquigarrow T0 = 0$ perché T è lineare
$\Rightarrow Tz = 0 \ \forall z \Rightarrow T = 0 \ \forall z \neq 0$

- Ogni elemento non nullo si può normalizzare e quindi andrà a finire in zero e ci va per forza perché è lineare -

- $\|0\| = 0$ perché: $\sup_{\|x\|_X=1} \|0(x)\|_Y = 0$ operatore nullo

2. $T \in B(X,Y)$ e $\alpha \in \mathbb{F}$

$\|\alpha T\| = \sup_{\|x\|_X=1} \|\alpha \cdot Tx\|_Y = \sup_{\|x\|_X=1} |\alpha| \, \|Tx\|_Y = |\alpha| \sup_{\|x\|_X} \|Tx\|_Y = |\alpha| \, \|T\|$

3. $T, S \in B(X,Y)$ disuguaglianza triangolare

$\|T+S\| = \sup_{\|x\|_X=1} \|(T+S)x\|_Y = \sup_{\|x\|_X=1} \|Tx + Sx\|_Y \leq \sup_{\|x\|_X=1} \|Tx\|_Y + \sup_{\|x\|_X=1} \|Sx\|_Y$
$= \|T\| + \|S\|$

Abbiamo dimostrato che $B(X,Y)$ rimane uno spazio normato □

Notazione = si scrive $B(X,X) = B(X)$

Teorema = Dato X spazio normato e Y spazio di Banach
$\Rightarrow B(X,Y)$ è uno spazio di Banach (eredita la completezza)

Dimostrazione =

Sia $\{T_n\} \subset B(X,Y)$ di Cauchy - Vado a testare la completezza nel solito modo -

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon$ tale che $n,m > N_\varepsilon \quad \|T_n - T_m\| < \varepsilon$

$\Rightarrow$ Il nostro obiettivo è vedere che converge ad un elemento di $B(X,Y)$ ←

Allora $\forall x \in X$:

$\|T_n x - T_m x\|_Y = \|(T_n - T_m)x\|_Y \leq \|T_n - T_m\| \, \|x\|_X$
$< \varepsilon \|x\|_X$

Teorema (Principio di Uniforme Limitatezza) = 12/11/2019

Teorema (di Banach - Steinhaus) = Lezione 18

X spazio di Banach, Y spazio normato. Sia $\mathcal{F} = \{T_\alpha : \alpha \in A\} \subset B(X,Y)$ (famiglia di operatori lineari e limitati) se $\mathcal{F}$ è puntualmente limitata (cioè $\forall x \in X \ \sup_\alpha \|T_\alpha x\|_Y < \infty$) allora $\mathcal{F}$ è limitata in $B(X,Y)$ (cioè $\exists c > 0$ tale che $\|T_\alpha\| \leq c \ \forall \alpha \in A$)

Lemma (di Baire) = (M,d) spazio metrico completo, K_n $n \in \mathbb{N}$ sottoinsiemi chiusi tali che: $M = \bigcup_n K_n$ allora $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $\mathring{K}_{n_0} \neq \emptyset$ (Ne esiste almeno uno).

Dimostrazione (Lemma)

Per ASSURDO sia $\mathring{K}_n = \emptyset \ \forall n \in \mathbb{N}$. Costruiamo $\{x_n\} \subset M$ come segue:

passo $n=1$ $\exists x_1 \in M \setminus K_1$ è aperto (perché K_1 è chiuso) quindi:

$\exists r_1 \in (0,1)$ tale che: $\overline{B_1(x_1, r_1)} = \overline{B_1} \subset M \setminus K_1$

passo $n=2$ $\exists x_2 \in B_1 \setminus K_2$ anche questo aperto, quindi:

$\exists r_2 \in (0, 1/2)$ tale che $\overline{B_2(x_2, r_2)} = \overline{B_2} \subset B_1 \setminus K_2$

⋮ iterando i passaggi

⋮

Dati $x_1, x_2, \dots x_{n-1}$ e $r_1, r_2, \dots r_{n-1}$ $\exists x_n \in B_{n-1} \setminus K_n$ (in questo modo ho costruito la successione $\{x_n\}$) $\exists r_n \in (0, \frac{1}{n})$ tale che:

$\overline{B_n(x_n, r_n)} = \overline{B_n} \subset B_{n-1} \setminus K_n$. $\{x_n\}$ è di Cauchy $\forall n > m$

$x_n, x_m \in \overline{B_m}$ allora $d(x_n, x_m) \leq \frac{1}{m}$ (segue dalla costruzione)

Essendo per ipotesi (M,d) spazio metrico completo $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x \in M$ (quindi un limite esiste e sta dentro M) Ma per come abbiamo fatto la costruzione $x \notin \bigcup_n K_n$ perché:

$$x_n \in \bigcap_{k=1}^{n-1} \overline{B_k} \text{ (lo abbiamo costruito passo per passo)}$$

$n \to \infty$

$$x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{B_k}$$ questo vuol dire che anche x sta in ogni palla chiusa

$\|T_\alpha z\|_Y \le \frac{1}{\tau}\|T_\alpha(\tau z + x_0)\|_Y + \frac{1}{\tau}\|T_\alpha x_0\|_Y$ → E' sempre maggiorata da m_0

$\le \frac{1}{\tau}\cdot m_0 + \frac{1}{\tau} m_0 = \frac{2}{\tau} m_0$ ⇒ Rimane maggiorata da un numero!

$\rightarrow \|T_\alpha\| \le \frac{2}{\tau} m_0 \quad \forall \alpha \in A$

☐ Domanda da orale

DOMANDA: la completezza di X e' essenziale per la validità del teorema? Assolutamente sì

Vediamo un controesempio:

prendo $X = c_{00}$ e $Y = \mathbb{R}$, devo trovare una famiglia almeno numerabile di operatori $T_n \in B(c_{00}, \mathbb{R})$ ($= c_{00}'$ il duale)

$\{T_n\}$ puntualmente limitata, non uniformemente limitata

$T_n x = \sum_{j=1}^{n} x_j$

- T_n e' lineare
- $\forall x \in c_{00}, n \in \mathbb{N}$

$|T_n x| = \left|\sum_{j=1}^{n} x_j\right| \le \sum_{j=1}^{n} |x_j| \le n\|x\|_{c_{00}}$

→ T_n e' limitato

⇒ $T_n \in B(c_{00}, \mathbb{R})$

⇒ $\|T_n\| \le n$ voglio vedere se questa norma e' proprio n

Prendo $z = (\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{n\text{-posizioni}}, 0, 0, \dots 0) \in c_{00}$ $\quad \|z\|_{c_{00}} = 1$

$T_n z = \underbrace{1+1+1+\dots+1}_{\text{sempre } n\text{-volte}} = n$ ⇒ $\|T_n\| = n$! Sì e' proprio n

$\nexists\, c > 0$ tale che $\|T_n\| \le c$ $\{T_n\}$ non e' uniformemente limitata

Fissato $x \in c_{00}$, $\exists N_x \in \mathbb{N}$ tale che $x_j = 0$ con $j > N_x$

cioe' $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_{N_x}, 0, \dots 0)$

$|T_n x| = \left|\sum_{j=1}^{N_x} x_j\right| \le \sum_{j=1}^{N_x} |x_j| \le N_x \cdot \|x\|_{c_{00}}$ ⇒ e' un numero e' controllato!!

→ $\sup_n |T_n x| < \infty$

$\{T_n\}$ e' puntualmente limitata, ma non uniformemente limitata

c_{00} non e' completo infatti → il teorema di uniforme limitatezza non vale!