centroappunti.it
CORSO LUIGI EINAUDI, 55/B - TORINO

Appunti universitari
Tesi di laurea
Cartoleria e cancelleria
Stampa file e fotocopie
Print on demand
Rilegature

NUMERO: **2467A**

ANNO: 2020

# A P P U N T I

STUDENTE: Miniotti Isabella

MATERIA: Fenomeni di trasporto 2 - Raccolta temi di esame svolti (2012-2020) - Prof. D. Marchisio

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell’autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.
Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTI E NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 116

# TEMI D'ESAME SVOLTI 2012-2020 FENOMENI DI TRASPORTO 2

## MARCHISIO DANIELE

La seguente raccolta di temi d'esame svolti sarà costituita da una prima parte dove i testi saranno copiati nella loro interezza ed una seconda parte di risoluzione.
Siccome molti testi si sono ripetuti negl'anni, quest'ultimi non verranno ripetuti, bensì menzionati per avere un quadro completo.
Si faccia dunque riferimento alla seguente leggenda (dove i temi non sono tutti in ordine di anno!):

### 2014

| | |
|---|---|
| 29/01/2014 | (simile all'es 2 del 26/06/2014) |
| 26/06/2014 | ( " ) |
| 15/07/2014 | (es 2 = es 3 del 23/06/2015) |
| 12/09/2014 | (= 26/01/2015) |

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 116

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 5 di 116

# FORMULE TIE

$A = sup$

$\dot{m} = \rho \dot{V}$ dove $\dot{V} = \int_A U_z(r) \cdot r$ se sono in cartesiane invece nulla, se sono in sferiche $r^2 \sin\theta$

portata

mentre $\dot{V}_{media}$ o $\bar{V} = \frac{\dot{V}}{AREA}$

lo sforzo $\sigma$ è quello $\perp$ alla velocità radiale per cui $\sigma_{r\theta} = -\tau_{r\theta}$, se $\sigma_{rz} = \tau_{rz}$

Se devo det. la coppia applicata $\mathcal{C} = \sigma|_{R_{est}} \cdot \overbrace{2\pi R L}^{volume} \cdot R$ braccio

$Re = \frac{\rho \Omega_0 d}{\mu}$ o cmq $Re = \frac{\rho \bar{U} d}{\mu}$ Diametro (cioè R che gira)

trasporto di energia: convezione se c'è velocità
conduzione (diffusione) $J_n$

$\dots + \mu \Phi_v$ è sempre nullo se non diversam. specificato

$\bar{J}_{q_x} = -K \frac{dT}{dr}$ ma $\dot{J}_q = A \cdot J_{q_x}$ flusso di calore

velocità di:
evaporaz., sublim, ecc: se $T_{nf} \equiv T_{eboll/evap/fusion.} \Rightarrow$ il calore scambiato è solo quello latente $\lambda$

$\Rightarrow \dot{J}_{qr} = \frac{\dot{m}}{PM} \cdot \lambda$ $\dot{m}$ = velocità! calore scambiato dal fluido

$\dot{J}_{q_r} = \dot{m} \hat{C}_p \Delta T = h_{ein} \cdot A \cdot \Delta T_{me} = \frac{(T_w - T_{in}) - (T_w - T_{out})}{\ln\left(\frac{T_w - T_{in}}{T_w - T_{out}}\right)}$

$Re = \frac{\rho \langle v \rangle D}{\mu} = \frac{\rho D}{\mu} \cdot \frac{\dot{m}}{\rho S}$ $Pr = \frac{\mu \hat{C}_p}{K}$

$\langle v \rangle \Rightarrow$ deriva da $\dot{m} = \rho S \langle v \rangle$

$Nu = \frac{h_{elm} \cdot D}{K} = 1{,}86 \cdot \left(Re \cdot Pr \cdot \frac{D}{L}\right)^{1/3} = 2 + 0{,}6\, Re^{1/2} \cdot Pr^{1/3}$

$\rho = \frac{MM \cdot P}{RT}$ gas

⚠ se qualche equaz. non è lineare la soluzione va per tentativi

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 5 di 116

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 7 di 116

# 29/01/2014

1

## ES 1

Si consideri una sfera di raggio R immersa in un fluido di densità $\rho$ e viscosità $\mu$ che si muove di moto relativo lungo z con velocità pari a $V_\infty$. Le uniche forze nette agenti sulla sfera sono in direzione z: negativa (verso il basso) quelle di gravità e positiva (verso l'alto) quelle relative agli sforzi viscosi e di pressione. La componente lungo z di quest'ultima viene valutata (grazie alla teoria di Stockes) tramite lo sforzo viscoso ($N \cdot m^{-2}$) che in coordinate sferiche risulta essere:

$$\sigma_z = \rho g r \cos^2\theta + \frac{3\mu V_\infty}{R}\left[\left(\frac{R}{r}\right)^2 - \left(\frac{R}{r}\right)^4\right]\cos^2\theta + \frac{3\mu V_\infty}{2R}\cos^2\theta + \frac{3\mu V_\infty}{2R}\left(\frac{R}{r}\right)^4 \sin^2\theta$$

$0 \le \theta \le \pi$

$0 \le \phi \le 2\pi$

$g$ = cost. acc. grav.

Sapendo che un elemento superf. infinitesimo in coord. sferiche e' definito come segue:

$$ds = r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi$$

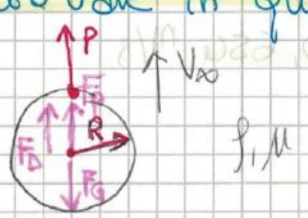
Calcolare la forza totale che il fluido esercita sulla superficie della sfera ($r = R$) in direzione z. Si ricorda inoltre che:

$$\int \cos^2\theta \sin\theta \, d\theta = -\frac{\cos^3\theta}{3}, \quad \int \sin^3\theta \, d\theta = -\cos\theta + \frac{\cos^3\theta}{3}$$

La forza e' costituita da due componenti, che significato fisico hanno?

$r = 1$ cm $\quad \rho_s = 4000 \, kg \, m^{-3}$ immersa in liq $\rho_e = 1000 \, kg \, m^{-3}$ $\mu = 1 \frac{kg}{m\,s}$

La sfera comincia a muoversi verso il basso con moto accelerato fino al raggiungimento di una velocità costante = vel. terminale. Quanto vale in questo caso tale velocità?




forza totale (= forza archimede + f. drag)

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 7 di 116

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 9 di 116

# ES 2

②

Si considerino 2 lastre piane parallele poste alla distanza b. Una delle due si trova in movimento rispetto all'altra con una velocità $v_b$. La lastra inferiore si trova alla temperatura $T_0$, mentre quella sup. alla temp. $T_b$. Nell'intercapedine fra le 2 lastre è contenuto un fluido incomprimib. (densità $\rho$) e Newtoniano (visc. $\mu$). Trascurando l'effetto della gravità, gli effetti inerziali e convettivi e assumendo la pressione costante lungo z, det. il profilo di temperatura nell'intercapedine fra le 2 lastre in condiz. stazionarie.

Prendendo un sist. di rif. cartesiano bidimensionale in cui x è la coordinata ortogonale alle lastre e z quella parallela alle lastre, le equazioni di continuità, N-S e bilancio entalpico saranno:

$$\frac{dv_z}{dx} + \frac{dv_z}{dz} = 0$$

$$\rho\left(v_x \frac{dv_x}{dx} + v_z \frac{dv_x}{dz}\right) = -\frac{dp}{dx} + \mu\left(\frac{d^2 v_x}{dx^2} + \frac{d^2 v_x}{dz^2}\right)$$

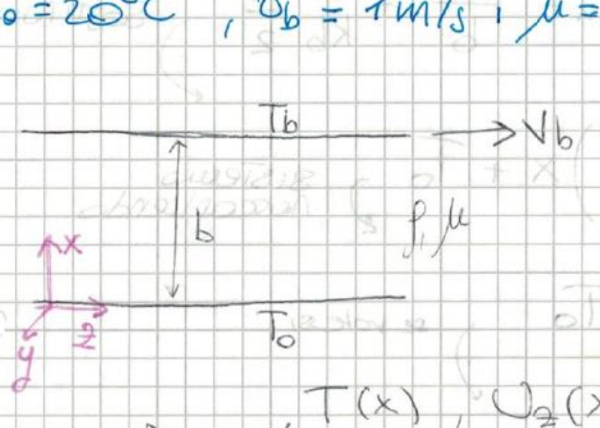
$$\rho\left(v_x \frac{dv_z}{dx} + v_z \frac{dv_z}{dz}\right) = -\frac{dp}{dz} + \mu\left(\frac{d^2 v_z}{dx^2} + \frac{d^2 v_z}{dz^2}\right)$$

$$\rho C_p\left(v_x \frac{dT}{dx} + v_z \frac{dT}{dz}\right) = K\left(\frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{d^2 T}{dz^2}\right) + \mu \phi_v$$

termine di dissipazione viscosa

$$\phi_v = 2\left[\left(\frac{dv_x}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dv_z}{dz}\right)^2\right] + \left[\frac{dv_x}{dz} + \frac{dv_z}{dx}\right]^2$$

Determ. infine la $T_{max}$ raggiunta nel fluido con $T_b = 30°C$
$T_0 = 20°C$, $v_b = 1\ m/s$, $\mu = 10\ Kg/ms$, $K = 0{,}1\ W/mK$




Hp
- no gravità
- Newtoniano + incompr ($\rho, \mu$ = cost)
- $p(z)$ = cost
- no aspetti inerziali, convettivi

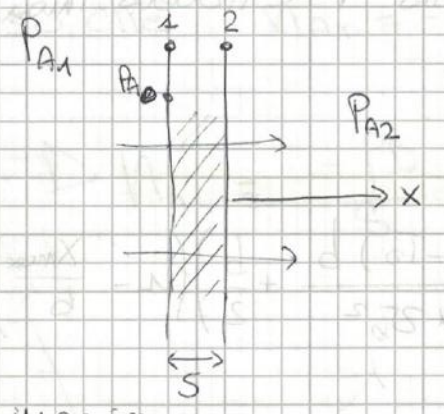
Det. $T(x)$, $v_z(x)$; $T_{max}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 9 di 116

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 11 di 116

# ES 3

Calcolare il flusso massico ($kg\ m^{-2} s^{-1}$) a $T = 500°C$ di elio attraverso una parete piana di $10^{-2}$ mm di spessore di vetro pirex ($D = 0{,}2 \times 10^{-7}\ cm^2 s^{-1}$) e *trascurando il contributo convettivo. La prex parziale dell' $He$ da un lato della parete piana e' 1 atm, mentre la corrispondente concentrazione di equilibrio nel vetro pirex e' 0,0084 volte minore. Si assume la conc. di elio dall'altro lato della parete pari a zero.



$n_A = Kg/m^2 s$

$T = 500\ °C$

$He$

$S = 10^{-2}\ m^2/s$

$D = 0{,}2 \cdot 10^{-7}\ cm^2 s^{-1}$

$P_{A1} = 1\ atm$

$P_{A0} = 0{,}0084\ atm$

$P_{A2} = 0$

forse $1 - W_A \approx 1$ perché *

massimo

$$\frac{d n_{Ax}}{dx} = 0 \qquad n_{Ax} = C_1 \quad e \quad \overset{def.:}{n_{Ax} = J_{Ax} + W_A \underset{\overset{\parallel}{N_{Ax} + \underset{\overset{\parallel}{0}}{N_{Bx}}}}{N_{TOT}}} \rightarrow n_{Ax} = \frac{J_{Ax}}{1 - W_A}$$

$$\text{def. } J_{Ax} \rightarrow J_{Ax} = -D \frac{d \rho W_A}{dx}$$

$$n_{Ax} = -\frac{D\rho}{1 - W_A} \frac{d W_A}{dx} \xrightarrow[\text{in}]{\text{sostituisco}} n_{Ax} = C_1$$

$$-\frac{\rho D}{1 - W_A} \frac{d W_A}{dx} = C_1 \xrightarrow{\text{integro}} \int -\frac{\rho D}{1 - W_A} d W_A = \int C_1\, dx$$

$$\rightarrow \rho D \ln(1 - W_A) = C_1 x + C_2 \qquad CAC \begin{cases} x = 0 & W_A = W_{A0} \\ x = S & W_A = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \rho D \ln(1 - W_{A0}) = C_2 \\ \rho D \cancel{\ln(1)} = C_1 S + \rho D \ln(1 - W_{A0}) \Rightarrow C_1 = -\frac{\rho D}{S} \ln(1 - W_{A0}) \end{cases}$$

sostit.

$$\rho D \ln(1 - W_A) = -\frac{\rho D}{S} \ln(1 - W_{A0}) x + \rho D \ln(1 - W_{A0})$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 11 di 116

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 13 di 116

$$\ln \frac{1-w_A}{1-w_{A0}} = \left[\ln\left(\frac{1}{1-w_{A0}}\right)\right]^{x/S}$$

$$\Rightarrow \frac{1-w_A}{1-w_{A0}} = \left(\frac{1}{1-w_{A0}}\right)^{x/\delta}$$

so che $n_{Ax} = -\frac{\rho D}{1-w_A} \frac{dw_A}{dx}$

$$\Rightarrow n_{Ax} = \frac{-\rho D}{S} \cdot \ln(1-w_{A0})$$ (uguale al $C_1$)

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 13 di 116

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 15 di 116

Devo verificare che $v_z(x,y) = \frac{\Delta P B^2}{4\mu L}\left[1-\left(\frac{x}{B}\right)^2\right]\left[1-\left(\frac{y}{B}\right)^2\right]$ e' soluzione.

quindi:

- $\frac{dv_z}{dx} = \frac{\Delta P B^2}{4\mu L}\left(-\frac{1}{B^2}\right)\cdot 2x = \frac{\Delta P}{2\mu L}x\left(1-\left(\frac{y}{B}\right)^2\right)$
- $\frac{d^2v_z}{dx^2} = \frac{\Delta P}{2\mu L}\left(1-\left(\frac{y}{B}\right)^2\right)$
- $\frac{d^2v_z}{dy^2} = \frac{\Delta P}{2\mu L}\left(1-\left(\frac{x}{B}\right)^2\right)$

le sostituisco

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\Delta P}{L} + \nu\frac{\Delta P}{2\mu L}\left[\left(1-\left(\frac{y}{B}\right)^2\right)+\left(1-\left(\frac{x}{B}\right)^2\right)\right] \Rightarrow$$

NON E' SOLUZIONE PERCHE DOVREBBE VENIRE 0=0

Provo ad inserire le cdc $\begin{cases} x=0 & \frac{dv_z}{dx}=0 \\ x=\pm B & v_z=0 \end{cases}$ $\begin{cases} y=0 & \frac{dv_z}{dy}=0 \\ y=\pm B & v_z=0 \end{cases}$

se prendo

$$\frac{dv_z}{dx} = \frac{\Delta P B^2}{4\mu L}\left(-\frac{1}{B^2}\right)2x = \frac{\Delta P}{2\mu L}\left(1-\left(\frac{y}{B}\right)^2\right)x \Rightarrow 0=0 \checkmark$$

e $\frac{dv_z}{dy} = \dots \Rightarrow 0=0 \checkmark$

rispetta le cdc

se prendo invece

$$v_z = \frac{\Delta P B^2}{4\mu L}\left[1-\left(\frac{x}{B}\right)^2\right]\left[1-\left(\frac{x}{B}\right)^2\right] \rightarrow 0=0 \checkmark$$

(b) Portata media di acqua $\rightarrow \langle v \rangle$

$$\langle v \rangle \Rightarrow \text{def} = \frac{1}{S}\int_{-B}^{B}\int_{-B}^{B} v_z(x,y)\,dx\,dy$$

$$\Rightarrow \langle v \rangle = \frac{1}{S}\int_{-B}^{B}\int_{-B}^{B}\frac{\Delta P}{4\mu L}B^2\left[1-\left(\frac{x}{B}\right)^2\right]\left[1-\left(\frac{y}{B}\right)^2\right]dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{S}\frac{\Delta P B^2}{4\mu L}\iint\left[1-\left(\frac{x}{B}\right)^2\right]\left[1-\left(\frac{y}{B}\right)^2\right]dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{S}\frac{\Delta P B^2}{4\mu L}\cdot\left(\int_{-B}^{B}1-\left(\frac{x}{B}\right)^2dx\right)\left(\int_{-B}^{B}1-\left(\frac{y}{B}\right)^2dy\right) =$$

$$= \frac{\Delta P B^2}{S4\mu L}\cdot\left[x-\frac{1}{B^2}\frac{x^3}{3}\right]_{-B}^{B}\cdot\left[y-\frac{1}{B^2}\frac{y^3}{3}\right]_{-B}^{B} =$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 15 di 116

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 17 di 116

# ES 2

ES 2 e' SIMILE all'esercizio 2 del 29/01/2014

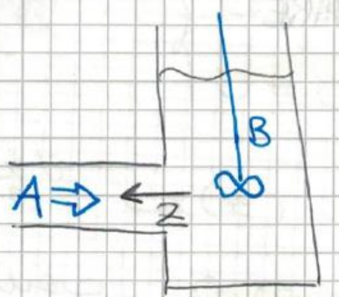
$A_2$ dopo questo

# ES_3

Si consideri il reattore schematizzato in figura: un reagente A viene alim. al reattore contenente il reag. B dove avviene una reazione con cinetica di pseudo-primo ordine. Nel condotto di alim. parte del reagente B diffonde e reagisce prima di aver raggiunto il reattore.
Det. il profilo di concentr. del reag. B nel reattore, usando il sist. di riferimento indicato, si considerino variazioni lungo la coord. z. Si consideri inoltre un profilo di velocità piatto nel condotto, e pari a U nella direzione indicata dalla freccia azzurra. Si ricorda che l'eq. di variazione del comp. B viene scritta come:

$$\frac{dC_B}{dt} + v_j \frac{dC_B}{dx_j} = \frac{d}{dx_j}\left(D\frac{dC_B}{dx_j}\right) - KC_B$$

dove D e' il coefficiente di diffusione e K e' la cost. di reaz.




Hp
- stazionario
- prof. vel. piatto = U
- pseudo primo ordine
- variazioni solo lungo z

$$\cancel{\frac{dC_B}{dt}} + v_j \frac{dC_B}{dx_j} = \frac{d}{dx_j}\left(D\frac{dC_B}{dx_j}\right) - KC_B$$

$= U_z = U = -U$ (perche A ⇒ mentre ← z)

$$\to -U\frac{dC_B}{dz} = \frac{d}{dz}\left(D\frac{dC_B}{dz}\right) - KC_B \to \cancel{D}\frac{d^2C_B}{dz^2} + \frac{U}{D}\frac{dC_B}{dz} - \frac{KC_B}{D} = 0$$

eq. diff. di 2° grado: $\lambda^2 + \frac{U}{D}\lambda - \frac{K}{D} = 0 \to \lambda_{1,2} = \frac{-\frac{U}{D} \pm \sqrt{\frac{U^2}{D^2} + 4\frac{K}{D}}}{2}$

$C_B(z) = C_1 \exp(\lambda_1 z) + C_2 \exp(\lambda_2 z)$

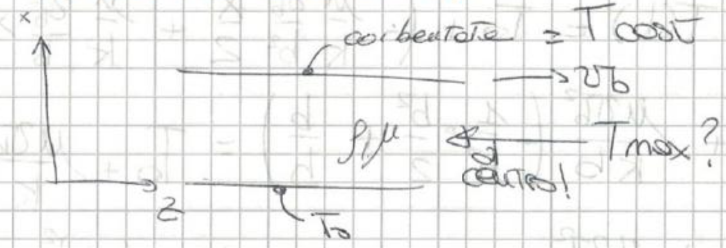
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 17 di 116

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 19 di 116

# ES 2

e' molto simile all' es 2 del 29/01/2014
Il testo e' uguale se non per: (6)
"La lastra inferiore si trova alla temp. $T_0$, mentre quella superiore e' coibentata in modo da garantire flusso termico nullo" (invece che essere a $T_b$)

Per cui inizio uguale




Hp:
- stazio
- fluido incompr. Newtoniano
- $v_z(x)$
- $T(x)$

→ allego: $\cancel{\mu} \dfrac{d^2 v_z}{dx^2} = 0$

cdc
$$\begin{cases} x = 0 & v_z = 0 \\ x = b & v_z = v_b \end{cases}$$

integro

$$\cancel{\mu} \frac{d^2 v_z}{dx} = C_1 \xrightarrow{\text{integro}} \cancel{\mu} v_z = C_1 x + C_2 \rightarrow \begin{cases} 0 = C_2 \\ v_b = C_1 b \rightarrow C_1 = \dfrac{v_b}{b} \end{cases}$$

sostituisco

$$\Rightarrow v_z(x) = v_b \frac{x}{b} \qquad \rightarrow \frac{dv_z}{dx} = \frac{v_b}{b}$$

- bilancio entalpico $\quad 0 = k \dfrac{d^2 T}{dx^2} + \mu \left( \dfrac{dv_z}{dx} \right)^2$

$$\rightarrow 0 = k \frac{d^2 T}{dx^2} + \mu \frac{v_b^2}{b^2} \xrightarrow{\text{integro 2 volte}}$$

qui cambia:

cdc
$$\begin{cases} x = 0 & T = T_0 \\ x = b & k \dfrac{dT}{dx} = 0 \end{cases} \qquad \left( T = \text{cost} \rightarrow \frac{dT}{dx} = 0 \right)$$

int
$$\rightarrow 0 = k \frac{dT}{dx} + \cancel{\mu} \frac{v_b^2}{b^2} x + C_1 \Rightarrow C_1 = -\cancel{\mu} \frac{v_b^2}{b}$$

int
$$\rightarrow 0 = kT + \cancel{\mu} \frac{v_b^2}{b^2} \frac{x^2}{2} - \cancel{\mu} \frac{v_b^2}{b} x + C_2 \Rightarrow C_2 = -kT_0$$

sost
$$\Rightarrow 0 = kT + \cancel{\mu} \frac{v_b^2}{b^2} \frac{x^2}{2} - \cancel{\mu} \frac{v_b^2}{b} x - kT_0$$

$$\Rightarrow T(x) = -\frac{\cancel{\mu}}{k} \frac{v_b^2}{b^2} \frac{x^2}{2} + \frac{\cancel{\mu}}{k} \frac{v_b^2}{b} x + \cancel{k} T_0$$

profilo di Temp.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 19 di 116

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 21 di 116

# 15/07/2014

## ES 1

In un condotto cilindrico orizzontale a sezione circolare scorre dell'acqua a temperat. ambiente. In condiz. di flusso laminare il profilo di velocità assiale dipende dalla coordinata radiale secondo il ben noto andamento parabolico:

dove z è la coord. assiale (in coord. cilindriche) $U_z(r) = v_{max}\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)$

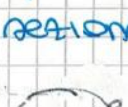
r è " radiale

In moto turbolento il prof. di velocità (mediato sec. Reynolds) diventa:

Det. la relazione fra $v_{max}$ $\quad \langle U_z(r)\rangle = v_{max}\left(1-\frac{r^7}{R^7}\right)$

e velocità media $\bar{V}$ mediata lungo una sezione z (cioè integrata fra $r=0$, $r=R$) in condiz. laminari e turbolenti. Il teorema di Bernoulli dice inoltre che se vengono trascurate le perdite di en. meccanica per fenom. viscosi la seguente quantità, muovendosi lungo un filetto fluido in direzione orizzontale rimane costante: $H(r) = \frac{1}{2}U_z^2(r) + \frac{P}{\rho}$

Considerando costante la pressione lungo la direz. radiale, determinare il valore medio di H lungo una generica sezione z. Det. infine la variazione di pressione ($\Delta p = p_2 - p_1$) nel passaggio dell'acqua da una sezione $z_1$ con una velocità $= 1\ m\,s^{-1}$ ad una $z_2$ a $0,5\ m\,s^{-1}$



LAMINARE

$$\bar{v} = \frac{\int_0^{2\pi}\int_0^R v_{max}\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right) r\,dr\,d\theta}{\int_0^{2\pi}\int_0^R r\,dr\,d\theta} = \frac{2\pi\int_0^R v_{max}\left(r-\frac{r^3}{R^2}\right)dr}{2\pi\frac{R^2}{2}} =$$

$$= \frac{\cancel{2\pi}\, v_{max}\left(\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4R^2}\right)_0^R}{\cancel{2\pi}\frac{R^2}{2}} = \frac{2v_{max}}{R^2}\left(\frac{R^2}{2}-\frac{R^4}{4R^2}\right) = \frac{2v_{max}}{R^2}\left(\frac{R^2}{2}-\frac{R^2}{4}\right) =$$

$$= \frac{2v_{max}}{\cancel{R^2}}\cdot\frac{\cancel{R^2}}{4} = \frac{v_{max}}{2} \Rightarrow \bar{v} = \frac{v_{max}}{2} \quad \text{opp} \quad \frac{\bar{v}}{v_{max}} = \frac{1}{2}$$

TURBOLENTO

$$\langle\bar{V}\rangle = \frac{\int_0^{2\pi}\int_0^R v_{max}\left(1-\frac{r^7}{R^7}\right) r\,dr\,d\theta}{\int\int^R r\,dr\,d\theta} =$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 21 di 116

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 23 di 116

# ES 2

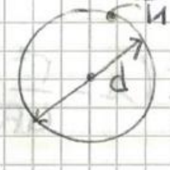
In un cilindro a sezione circolare costituito da un solido con conducib. termica pari a $K = 25\ W\,m^{-1}K^{-1}$ viene generata una q.tà di calore uniforme pari a $\dot{q} = 350\ kW\,m^{-3}$. La sup. interna del cilindro e' mantenuta alla $T = 80°C$. Det. la temp. max all' interno del cilindro sapendo che il $D = 8$ cm.
Quanto vale la $T_{max}$ se la generaz. di calore varia con la coordinata radiale come segue: $\dot{q}(r) = 350\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)\ kW\,m^{-3}$
Si ricorda che per un solido l'eq. di variaz. della temp. cilindrica e': $\frac{K}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) + \frac{K}{r^2}\frac{d^2T}{d\phi^2} + K\frac{d^2T}{dz^2} + \dot{q}$ (7)

$K = 25\ W/mK$

$\dot{q} = 350\ kW/m^3$

$T = 80°C$

$d = 8\ cm \quad R = \frac{0{,}08\ m}{2} = 0{,}04\ m$



$$\frac{K}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) + \dot{q} = 0 \rightarrow$$

Hp • $T(r)$

$$\rightarrow \frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) + \frac{\dot{q}r}{K} = 0$$

cac
$$\begin{cases} r = 0 & \frac{dT}{dr} = 0 \quad (\text{coerenbientato} = \text{no flusso termico } T = \text{cost}) \\ r = R & T = T_1 \end{cases}$$

int
$$\rightarrow r\frac{dT}{dr} + \frac{\dot{q}}{K}\frac{r^2}{2} = C_1 \rightarrow \frac{dT}{dr} + \frac{\dot{q}}{K}\frac{r}{2} = \frac{C_1}{r}$$

int
$$\rightarrow T + \frac{\dot{q}}{K}\frac{r^2}{4} = C_1\ln(r) + C_2 \rightarrow T = -\frac{\dot{q}}{K}\frac{r^2}{4} + C_1\ln(r) + C_2$$

$$\begin{cases} C_1 = 0 \\ T_1 = -\frac{\dot{q}}{K}\frac{R^2}{4} + C_2 \rightarrow C_2 = T_1 + \frac{\dot{q}}{K}\frac{R^2}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow T = -\frac{\dot{q}}{K}\frac{r^2}{4} + T_1 + \frac{\dot{q}}{K}\frac{R^2}{4} \rightarrow T = T_1 + \frac{\dot{q}}{4K}(R^2 - r^2)$$

• $T_{max}$? $\rightarrow \frac{dT}{dr} = \frac{\dot{q}}{4K}(-2r) = \frac{\dot{q}}{K}\frac{r}{2} = 0 \Rightarrow$ av. $r = 0$

$$T_{max} = T(0) = T_1 + \frac{\dot{q}}{K}\frac{R^2}{4} = \underset{(80+273{,}15)K}{T_1} + \frac{350 \cdot 1000\ W\,m^{-3}}{25\ W\,m^{-1}K^{-1}}\frac{(0{,}04\ m)^2}{4}$$

$T_{max} = 358{,}75\ K = 85{,}6$

• $T_{max}$ con $\dot{q} \neq cost$?

$$\frac{K}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) + 350\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) = 0$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 23 di 116

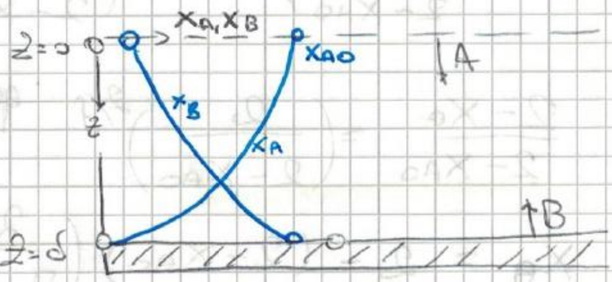
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 25 di 116

# ES3

In un reattore catalitico avviene la reazione istantanea $2A \rightarrow B$. Considerando il sistema sottostante (dove $z=\delta$ rappresenta la sup. catalitica): supponendo nota la frazione molare di reag. A per $z=0$ ($x_A = x_{A0}$) det. il profilo di frazione molare del reagente A ed il flusso totale di materia del reagente A. Si ricorda che le eq. di variazione del reagente A e B in coord. cartesiane (not. indic.) sono: (8)

$$\frac{dC_A}{dt} + v_i \frac{dC_A}{dx_i} = \frac{d}{dx_i}\left(D_{AB}\frac{dC_A}{dx_i}\right) + S_A$$

$$\frac{dC_B}{dt} + v_i \frac{dC_B}{dx_i} = \frac{d}{dx_i}\left(D_{AB}\frac{dC_B}{dx_i}\right) + S_B$$




- profilo di $x_A$
- flusso totale di materia $N_{Ax}$

$2A \rightarrow B \Rightarrow R_A = -2R_B$

def. flusso $N_{Az} = \text{cost} \Rightarrow \frac{dN_{Az}}{dz} = 0$

$$N_{Az} = J_{Az} + x_A N_{TOT\,z} = J_{Az} + x_A \frac{N_{Az}}{2} \rightarrow \text{raccolgo } N_{Az}$$

$$N_{Az} + N_{Bz} = N_{Az} - \frac{N_{Az}}{2} = \frac{N_{Az}}{2}$$

$$R_B = -\frac{R_A}{2}$$

(A)

$$N_{Az} = \frac{J_{Az}}{1-\frac{x_A}{2}} = -\frac{D_{AB}C}{1-\frac{x_A}{2}} \cdot \frac{dx_A}{dz} = -\frac{2D_{AB}C}{2-x_A} \cdot \frac{dx_A}{dz}$$

$$\text{ma } J_{Az} = -D_{AB}\frac{dC_A}{dz} = -D_{AB}C\frac{dx_A}{dz}$$

(MG)

$$\frac{dN_{Az}}{dz} = 0 \rightarrow N_{Az} = C_1 \rightarrow -\frac{2D_{AB}C}{2-x_A} \cdot \frac{dx_A}{dz} = C_1$$

$$\xrightarrow{\text{int}} -\int \frac{dx_A}{2-x_A} = \int \frac{C_1}{2D_{AB}C}dz \rightarrow \ln(2-x_A) = \frac{C_1}{2D_{AB}C}z + C_2$$

CdC
$$\begin{cases} z=0 & x = x_{A0} \\ z=\delta & x_A = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_2 = \ln(2-x_{A0}) \\ \ln 2 = \frac{C_1}{2D_{AB}C}\delta + \ln(2-x_{A0}) \end{cases}$$

$$\hookrightarrow C_1 = \ln\left(\frac{2}{2-x_{A0}}\right) \cdot \frac{2D_{AB}C}{\delta}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 25 di 116

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 27 di 116

# 12/09/2014

9

## ES 1

La teoria della penetrazione permette di stimare il coeff. di scambio relativo all'$O_2$ per una bolla d'aria dispersa in acqua tramite la seguente equazione: $K_L = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{D}{\tau}}$
dove $D = 1\cdot 10^{-9}\ m^2 s^{-1}$ e' il coeff. di diffusione dell'ossigeno in acqua e $\tau$ e' il tempo di rinnovam. superficiale degli elementi fluidi sulla sup. della bolla. Questo tempo viene calcolato come il rapporto fra il diametro della bolla d e la sua velocità terminale $U_t$. La velocità terminale e' a sua volta calcolata dal bilancio peso, galleggiamento e di trascinamento (o drag). Supponendo di essere in condiz. di creeping flow, per le quali la forza di trascinamento e' stimabile con la formula di Stokes. $F_{drag} = 3\pi\mu_1 d U_t$
dove $\mu_1 = 1\cdot 10^{-3}\ Kg\ m^{-1} s^{-1}$
e' la viscosità del liquido $\rho_{H_2O} = 1000\ Kg\ m^{-3}$ $\rho_{aria} = 1\ Kg\ m^{-3}$
Det. il coeff. di scambio di una bolla di 500 μm di diametro

$K_L = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{D}{\tau}}$

Bilancio delle forze: $F_P = F_G + F_D$

sezione che si oppone al moto

fattore di forma $C_D$

$AKF$

$\frac{\rho v_\infty^2}{2}$

a noi la dà

$$\rho_s V_{sf}\, g = \rho_g V_b\, g + 3\pi\mu_1 d U_t$$

$$\rho_s \frac{4}{3}\pi r^3 g = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_g g + 3\pi\mu_1 d\, U_t$$

$$U_t = \frac{\rho_s \frac{4}{3}\pi r^3 g - \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_g g}{3\pi\mu_1 \underbrace{d}_{2r}} = \frac{2r^2\rho_s g - 2r^2\rho_g g}{9\mu_1}$$

$$= \frac{2r^2 g}{9\mu_1}(\rho_s - \rho_g) = \frac{2}{9}\,\frac{(0{,}25\cdot 10^{-3})^2\, 9{,}81}{1\cdot 10^{-3}}\cdot(999) = 0{,}136\ m/s$$

$$\tau = \frac{d}{U_t} = \frac{0{,}5\cdot 10^{-3}}{0{,}136} = 0{,}367\cdot 10^{-2}\ s$$

$$K_L = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\sqrt{\frac{D}{\tau}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\sqrt{\frac{10^{-9}}{0{,}367\cdot 10^{-2}}} = 5{,}88\cdot 10^{-4}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 27 di 116

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 29 di 116



$P_V = x_{A0} P_{TOT} \rightarrow x_{A0} = \frac{P_V}{P_{TOT}} = \frac{1{,}03}{747} = 1{,}38 \cdot 10^{-3}$

$W_{A0} = x_{A0} \frac{M_A}{M_{ARIA}} = 1{,}38 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{254}{28{,}8} = 0{,}0122$

$\rho$ ? $\quad n = \frac{PV}{RT} \rightarrow \frac{n}{V} = \frac{P}{RT} \rightarrow \frac{m/M}{V} = \frac{P}{RT} \rightarrow \frac{m}{V} = \frac{PM}{RT}$

$\rho = \frac{P \cdot M}{RT} = \frac{747 \cdot 28{,}8}{8{,}314 \cdot 313} = \frac{0{,}9829\ atm \cdot 28{,}8\ g/mol}{8{,}2057 \cdot 10^{-5}\ \frac{m^3\ atm}{K\ mol} \cdot 313 K} = 1102{,}15\ g/m^3 = 1{,}102\ kg/m^3$

$\dot{m} = 4\pi\ 0{,}5 \cdot 10^{-2} \cdot 1{,}102 \cdot 0{,}0888 \cdot 10^{-4} \cdot 0{,}0122 =$
$= 7{,}5 \cdot 10^{-9}\ kg/s$

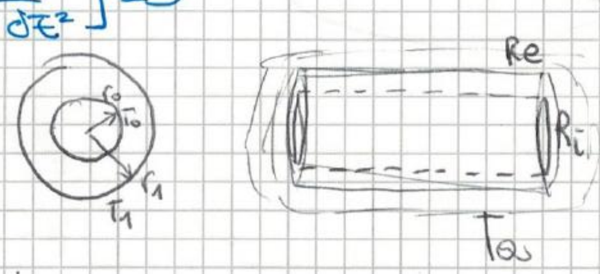
$\dot{n} = \frac{\dot{m}}{M} = \frac{7{,}5 \cdot 10^{-9}}{254} = 2{,}95 \cdot 10^{-11}\ \frac{kmol}{s} = 1{,}063 \cdot 10^{-4}\ \frac{mol}{hr}$

# ES 3

Det. la quantità di calore dispersa da un tubo cilindrico a sezione circolare contenente del vapore a 120°C (raggio interno di 1 cm ed esterno 2cm) a contatto con aria a 20°C.
Il tubo è costituito da un materiale coibente con conducib. termica pari a $K = 0{,}22\ W\ m^{-1} K^{-1}$. Si ricorda che per un solido in assenza di generazione di calore e in condizioni stazionarie l'eq. di variazione della temperatura in coord. cilindriche:

$$K\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{d^2T}{d\theta^2} + \frac{d^2T}{dz^2}\right] = 0$$

$T_0 = 120°C \quad T_1 = 20°C$
$r_0 = 0{,}01\ m \quad r_1 = 0{,}02\ m$
$K = 0{,}022\ W/mK$




$\dot{q}$? $\quad T(r)$? $\quad$ semplifico l'eq.:

$K \frac{1}{r} \frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) = 0 \rightarrow \frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) = 0$

$\xrightarrow{int} r\frac{dT}{dr} = C_1 \rightarrow \frac{dT}{dr} = \frac{C_1}{r}$

$\xrightarrow{int} T = C_1 \ln r + C_2$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 29 di 116

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 31 di 116

# 26/01/2015 = 12/09/2014

# 23/06/2015

11

Film di maionese spesso $\delta$ aderente ad una parete verticale. Maionese descritta come fluido di Bingham, quindi poniamo come:

$$\tau_{xy} = \tau_0 + \mu \frac{dv_x}{dy}$$ dove a temp. amb. $\tau_0 = 100\ Pa$, $\mu = 8\ Pa\,s$

L'espressione è valida supponendo la direz. x parallela alla parete e y ortogonale. Det. lo spessore massimo di maionese che rimane aderente alla parete senza muoversi, conoscendo la $\rho = 900\ kg\,m^{-3}$ ed avendo a disposizione la seguente eq.:

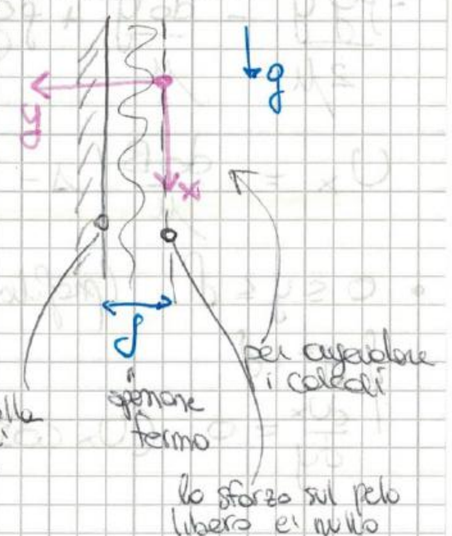
$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}$$

Nel caso di $\delta = 4\ mm$ tracciare un diagramma qualitativo del profilo di velocità. A che spessore il profilo di velocità div. costante? Diagram. inoltre qualitativ. il grafico di $\tau_{xy}$ in funzione di $dv_x/dy$ per un fluido dilatante e pseudo-plastico e spiegarne il signif. fisico.

Fluido di Bingham: si muove solo se lo stato supera un certo sforzo: $\tau_{xy} = \tau_0 + \mu \frac{dv_x}{dy}$

$\tau_0 = 100\ Pa$ $\quad \mu = 8\ Pa\,s$ $\quad \rho = 900\ kg\,m^{-3}$

⚠ al sist. di rif. per i calcoli:




• $\tau_{xy}$ ?

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial y} + \cancel{v_y \ldots} = \rho g_y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \cancel{\ldots}$$

ottengo

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial y} = \rho g_y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}$$

Suppongo $v_x$ nullo o cmq costante perché devo trovare lo spessore fermo

$$0 = \rho g + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \xrightarrow{\text{int}} C_1 = \rho g y + \tau_{xy}$$

CdC $\begin{cases} \text{quando } y = 0 \\ \tau_{xy} = 0 \end{cases}$ $\rightarrow C_1 = 0 + 0 \Rightarrow 0 = \rho g y + \tau_{xy}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 31 di 116

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 33 di 116

# ES 2

Per proteggere i propri maglioni dalle tarme, Ulrich posiziona nell'armadio delle sfere di canfora $R = 1\,cm$. $\omega_A$ canfora di equilibrio (legata alla sua tensione di vapore) in aria a $T_{amb}$ e' $\omega_A = 4{,}55 \cdot 10^{-6}$ e che il coeff. di diffusione della canfora in aria e' $D_{AB} = 1{,}23 \cdot 10^{-9}\, m^2 s^{-1}$, det la velocità massica di sublimazione della canfora. (12)

Sist. infinitamente diluito, $\rho_{aria} = 1{,}1\, kg \cdot m^{-3}$ e si usi la seguente equaz. di bilancio di materia locale:

$$\frac{d\omega_A}{dt} + v_r \frac{d\omega_A}{dr} + \frac{v_\theta}{r}\frac{d\omega_A}{d\theta} + \frac{v_\phi}{r\sin\theta}\frac{d\omega_A}{d\phi} = D_{AB}\left[\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{d\omega_A}{dr}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta \frac{d\omega_A}{d\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{d^2\omega_A}{d\phi^2}\right]$$

Hp
- sist. inf. diluito
- B stagnante
- sist. stazio
- $W_A(r)$


$W_A(r)$?

Semplificando ottengo: $0 = \cancel{D_{AB}}\, \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{d\omega_A}{dr}\right)$

$$\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{d\omega_A}{dr}\right) = 0 \xrightarrow{int} \cancel{r^2}\frac{d\omega_A}{dr} = \frac{C_1}{r^2} \xrightarrow{int} \omega_A = -\frac{C_1}{r} + C_2$$

cdc

$$\begin{cases} r = R & \omega_A = \omega_{A0} \\ r = \infty & \omega_A = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \omega_{A0} = -\frac{C_1}{R} + 0 \rightarrow C_1 = -\omega_{A0} R \\ C_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \omega_A(r) = \frac{\omega_{A0} R}{r} \rightarrow \frac{d\omega_A}{dr} = -\frac{\omega_{A0} R}{r^2}$$

Diffusione: $N_{Ar} = -D_{AB}\,\rho \frac{d\omega_A}{dr} = D_{AB}\,\rho \frac{\omega_{A0} R}{r^2}$

$$v_{sublimazione} = 4\pi R^2 \cdot N_{Ar}\Big|_{r=R} = 4\pi \cancel{R^2}\, D_{AB}\,\rho \frac{\omega_{A0} R}{\cancel{R^2}}$$

$$v_{sub} = 4\pi D_{AB}\,\rho\, \omega_{A0} R = 4\pi \cdot 1{,}23 \cdot 10^{-9} \cdot 1{,}1 \cdot 4{,}55 \cdot 10^{-6} \cdot 0{,}01$$

$$= 7{,}74 \cdot 10^{-16}\ m/s$$

# ES 3

= es 2 del 15/07/2014

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 33 di 116

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 35 di 116

13

$$U_z(r) = \frac{(-\Delta P)}{4\mu L}\left[R^2 - r^2\right]$$

$$\frac{K}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) + \mu\left(\frac{dU_z}{dr}\right)^2 = 0$$

$$\left(\frac{dU_z}{dr}\right)^2 = \left(\frac{(-\Delta P)}{2\mu L}\right)^2 \cdot r^2$$

$$\Rightarrow \frac{K}{\cancel{r}}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) + \frac{\mu}{K}\left(\frac{(-\Delta P)}{2\mu L}\right)^2 r^{3} = 0 \xrightarrow{int} r\frac{dT}{dr} + \frac{\mu}{K}\left(\frac{(-\Delta P)}{2\mu L}\right)^2 \frac{r^4}{4} = C_1$$

$$T = -\frac{(-\Delta P)^2}{4\mu K L^2}\cdot\frac{r^4}{16} + C_1 \ln r + C_2$$

CdC
$r = 0$ $\quad \frac{dT}{dr} = 0 \rightarrow C_1 = 0$
$r = R$ $\quad T = T_w$

$$T_w = -\frac{(-\Delta P)^2}{4\mu K L^2}\frac{R^4}{16} + C_2 \rightarrow C_2 = T_w + \frac{(-\Delta P)^2}{4\mu K L^2}\cdot\frac{R^4}{16}$$

$$\Rightarrow T = T_w + \frac{(-\Delta P)^2}{64\mu K L^2}\left(R^4 - r^4\right)$$

messo in funzione di $\bar{v}_m$

$$\bar{v}_m = \frac{\int_0^{2\pi}\int_0^R U_z(r)\, r\, dr\, d\theta}{\int_0^{2\pi}\int_0^R r\, dr\, d\theta} = \frac{(-\Delta P)R^2}{4\mu L}\int_0^R\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) r\, dr \cdot \frac{2\pi}{2\pi\frac{R^2}{2}}$$

$$= \frac{(-\Delta P)}{2\mu L}\left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4R^2}\right]_0^R = \frac{(-\Delta P)}{2\mu L}\left[\frac{R^2}{2} - \frac{R^2}{4}\right] = \frac{(-\Delta P)}{8\mu L}R^2 \xrightarrow{\wedge 2} \frac{(-\Delta P)^2 R^4}{64\mu^2 L^2}$$

$$T = T_w + \frac{(-\Delta P)^2}{64\mu K L^2}\left(R^4 - r^4\right) \Rightarrow T(r) = T_w + \frac{\mu \bar{v}_m^2}{K}\left(1 - \frac{r^4}{R^4}\right)$$

- $T_{max}$? $\rightarrow T_{max} = T(0) = T_w + \frac{\mu \bar{v}_m^2}{K} = 300 + \frac{100\cdot 2{,}45^2}{K} = 300 + \frac{600{,}5}{K}$

- $Br = \frac{\mu v^2}{K\Delta T}$ $\qquad \Delta T = \langle T\rangle - T_w$

$$\langle T\rangle = \frac{\int_0^{2\pi}\int_0^R T(r)\, r\, dr\, d\theta}{\int_0^{2\pi}\int_0^R r\, dr\, d\theta} = \frac{\cancel{2\pi}\int_0^R\left(T_w + \frac{\mu v_m^2}{K} - \frac{\mu v_m^2}{K}\frac{r^4}{R^4}\right) r\, dr}{\cancel{2\pi}\frac{R^2}{2}} =$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 35 di 116

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 37 di 116



= cambio variabili $\quad y-\delta = t, \; dt = dy \Rightarrow \int \left(\frac{\rho g_x}{k}\right)^{1/n} t^{1/n}\, dt =$

$$= \left(\frac{\rho g_x}{K}\right)^{1/n} \frac{t^{1/n+1}}{\frac{1}{n}+1} = \left(\frac{\rho g_x}{K}\right)^{1/n} \frac{n}{1+n} (y-\delta)^{\frac{n+1}{n}} + C_2$$

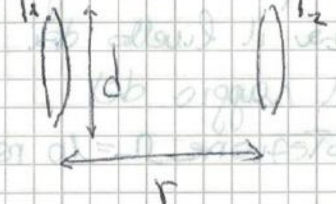
CdC $\begin{cases} y=0 & v_x = 0 \\ y=\delta & \frac{dv_x}{dy} \Rightarrow \end{cases} \longrightarrow 0 = \left(\frac{\rho g_x}{K}\right)^{1/n} \left(-\delta^{\frac{n+1}{n}}\right) \frac{n}{1+n} + C_2$

$$C_2 = -\frac{n}{1+n}\left(\frac{\rho g_x}{K}\right)^{1/n}\left(-\delta^{\frac{n+1}{n}}\right)$$

$$v_x(y) = \left(\frac{\rho g_x}{K}\right)^{1/n} \frac{n}{1+n}\left[(y-\delta)^{\frac{n+1}{n}} - (-\delta)^{\frac{n+1}{n}}\right]$$

# ES3

Due dischi del diametro di 2 m sono posti uno di fronte all'altro alla dist di 4 m. Det. la quantità di calore (energia) scambiata per irraggiamento sapendo che i due dischi si trovano rispettiv. a 800 K e 1200 K. La costante di Stefan-Boltzmann $\sigma = 5{,}670373 \times 10^{-8}\ W/m^2K^4$



$q^{irr}$?

$$Q = A_1 F_{12}\, \sigma \left(T_1^4 - T_2^4\right)$$

$$A_1 = \frac{\pi}{4} D^2 = \frac{\pi}{4} \cdot 4 = \pi \ m^2$$

$F_{12}$ da grafico $\begin{cases} R = \frac{2\,m}{4\,m} = 0{,}5 \\ \text{grafico} \end{cases} \Rightarrow F_{1,2} = 0{,}05$

$$Q = \underset{m^2}{\pi} \cdot 0{,}05 \cdot \underset{W/m^2K^4}{5{,}670373 \cdot 10^{-8}} \cdot (\underset{K^4}{1200^4} - \underset{K^4}{800^4}) = 14821{,}2\ W$$

# ES4

Descrivere la distribuzione della velocità di Maxwell-Boltzmann. Sotto quali condizioni questa distribuz. è valida?

$$F(v) = \frac{f}{m}\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} \exp\left(\frac{-c^2 m}{2 k_B T}\right)$$

valida in condizioni di equilibrio, cioè quando il termine adimensionale è pari a zero.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 37 di 116

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 39 di 116

15

$\Rightarrow v_\theta = 2\Omega \frac{r}{2} \rightarrow v_\theta(r) = \Omega r$

• profilo di prex

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial r} = \rho \frac{v_\theta^2}{r} \\ 0 = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{dp}{dr} = \rho \Omega^2 r \\ 0 = -\frac{dp}{dz} - \rho g \end{cases} \xrightarrow{\text{int}} \begin{cases} p(r) = \rho \Omega^2 \frac{r^2}{2} + p_1(z) \\ p(z) = -\rho g z + p_2(r) \end{cases}$$

$g_z = -g$

ora le uguaglio: $\rho \Omega^2 \frac{r^2}{2} + p_1(z) = -\rho g z + p_2(r) \rightarrow$

$\rightarrow p(r,z) = \rho \Omega^2 \frac{r^2}{2} - \rho g z + C$

CdC $\begin{cases} r = 0 \\ z = z_0 \\ p = p_{atm} \end{cases}$

$p_{atm} = \rho \Omega^2 \cancel{\frac{0^2}{2}} - \rho g z_0 + C$

$C = p_{atm} + \rho g z_0 \Longrightarrow p(r,z) = \rho \Omega^2 \frac{r^2}{2} - \rho g z + p_{atm} + \rho g z_0$

sistemo

$\rightarrow \underbrace{p(r,z) - p_{atm}}_{\Delta p} = \frac{1}{2}\rho \Omega^2 r^2 - \rho g (z - z_0)$

• innalz. liquido

$p = p_{atm} \rightarrow p_{atm} - p_{atm} = \frac{1}{2}\rho \Omega^2 r^2 - \rho g (z - z_0)$

$\rightarrow 0 = \frac{1}{2}\cancel{\rho}\Omega^2 r^2 - \cancel{\rho} g (z - z_0) \rightarrow z - z_0 = \frac{1}{2g}\Omega^2 r^2$

• Volume fluido fermo: $V = \pi R^2 H$

• Volume fluido in movimento: $V = \int_0^{2\pi}\int_0^R z(r)\, r\, dr\, d\theta = 2\pi \int_0^R \left[z_0 + \frac{\Omega^2 r^2}{2g}\right] r\, dr =$

$= 2\pi z_0 \frac{R^2}{2} + \frac{\pi \Omega^2}{g}\frac{R^4}{4}$

per ricavare z eguaglio: $\cancel{\pi R^2} H = 2\cancel{\pi} z_0 \frac{R^2}{2} + \frac{\cancel{\pi}\Omega^2}{} \frac{R^4}{4}$

$z_0 - H = -\frac{\Omega^2}{4g}R^2 \quad \rightarrow$ innalzamento: $z - z_0|_R = \frac{\Omega^2 R^2}{2g}$

$z - z_0 + z_0 - H = \frac{\Omega^2 R^2}{2g} - \frac{\Omega^2 R^2}{4g} \Longrightarrow z - H = \frac{1}{4}\frac{\Omega^2 R^2}{g}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 39 di 116

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 41 di 116

Flusso diffusivo: $N_{Ar} = -D_{AB}\rho \frac{d\omega_A}{dr} \Rightarrow N_{Ar} = D_{AB}\rho\,\omega_{A1}\frac{R}{r^2}$ 16

$$\frac{d\omega_A}{dr} = -\frac{\omega_{A1}R}{r^2}$$

$$\dot{m} = N_{Ar}|_R \cdot 4\pi R^2 = 4\pi\,\omega_{A1} D_{AB}\,\rho\, R = 2{,}5\cdot 10^{-6}\cdot R \ \ kg/s$$

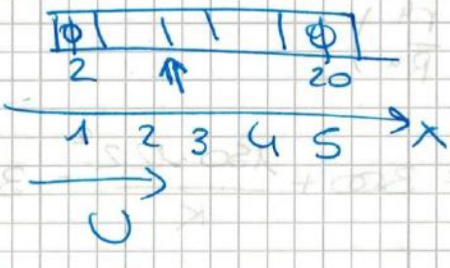
$m^2/s \quad kg/m^3 \quad m$

(A) manca la seconda domanda = fatte 25/06/2018

# ES3

NO! fluidodinamica

Si consideri il problema monodimensionale Φ calcolato con il metodo dei volumi finiti.




Discretizza. regolare con griglia uniforme ed usando i valori di Φ al centro delle celle riportati in figura, det. il valore della proprietà Φ al centro della faccia compresa fra le celle 2 e 3 utilizzando i metodi:

(a) First-order upwind (b) central D-S (c) 2° ORD. UP (d) QUICK

(a) $\phi = \phi_2 = 4$

(b) $\phi = \frac{8+4}{2} = 6$

(c) $\phi = 4 + \frac{(3-2)}{2} = 6$

(d) $\phi = \frac{3}{5}\cdot 2 + \frac{6}{8}\cdot 4 - \frac{1}{8}\cdot 8 = \frac{11}{4}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 41 di 116

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 43 di 116

# 05/07/2016

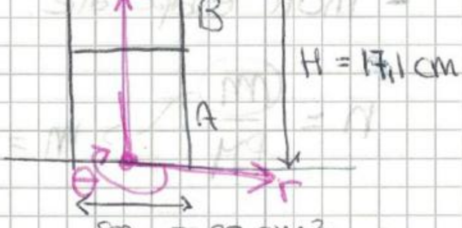
17

es 1 NO (fluido.)

## ES 2

Calcolare il coeff. di diffusione binario della coppia $O_2 - CCl_4$ sapendo che 0,0208 $cm^3$ di $CCl_4$ evaporano in 10 hr, quando inseriti in un tubo cilindrico alto 17,1 cm con sez. circolare di 0,82 $cm^2$. La tensione di vapore del $CCl_4$ è di 33 mmHg, la pressione totale è 755 mmHg e $\rho_{CCl_4} = 1,629 \; g\,cm^{-3}$. Giustificare tutte le Hp

$D_{O-CCl_4}$ ?




$P_{VAP_{CCl_4}} = 33 \; mmHg \qquad P_{TOT} = 755 \; mmHg$

$\rho_{CCl_4} = 1,629 \; g/cm^3$

$\hat{\Phi}_{CCl_4 \, evap} = 0,0208 \; cm^3 \qquad t = 10 \; hr$

Convezione:

$N_A = J_q + N_{TOT} X_A \quad \longrightarrow \quad N_A = J_q + N_A X_A$

$N_{TOT} \to N_A + \underbrace{N_B}_{\to 0}$ (stagnante)

$\longrightarrow N_A (1 - X_A) = J_q \longrightarrow N_A = \dfrac{J_q}{1 - X_A}$

Def. Fick

$$J_q = -D_{AB} \cdot \frac{dC_A}{dz} = -D_{AB} \, C_{TOT} \frac{dX_A}{dz}$$

$$\Rightarrow N_A = \frac{-D_{AB} \, C_{TOT}}{1 - X_A} \cdot \frac{dX_A}{dz} \xrightarrow{\text{int}} N_A z \Big|_0^H = -D_{AB} C_{TOT} \cdot \Big[\ln(1 - X_A)\Big]_{X_{A1}}^{0}$$

CdC

$$\begin{cases} z = H \to X_A = 0 \\ z = 0 \to X_A = X_{A1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow N_A H = D_{AB} C_{TOT} \ln(1 - X_{A1})$$

manca

$$\Rightarrow D_{O-CCl_4} = \frac{N_A \; H}{C_{TOT} \cdot \ln(1 - X_{A1})}$$

manca — manca

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 43 di 116

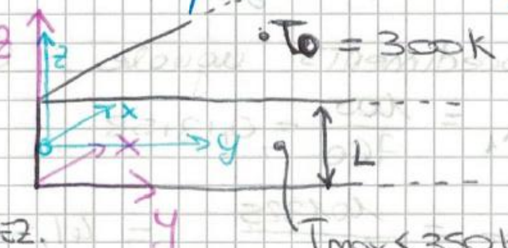
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 45 di 116

# ES 3

18

Si consideri una lastra d'acciaio con conducibilità termica di $K = 16\ W/mK$ in cui si ha una generazione di calore costante $q_0 = 1\ KW/m^3$.
La lastra ha spessore pari a $L$ e la temperatura esterna è mantenuta pari a $T_0 = 300\ K$.
Det. lo spessore della lastra $L$ che garantisce una $T_{max}$ interna alla lastra INFERIORE a 350 K. Si consideri la lastra infinitam. lunga nelle altre due direzioni (solo probl. monodim.)

meglio adottare il sist. di rif al centro




$K = 16\ \frac{W}{mK}$

$\dot{q}_0 = 1\ KW/m^3$

Hp:
- stazio
- $\rho$, K cost
- $T(z)$
- No convez.

L'eq. di variazione termica: $\rho \hat{c}_p \left( \frac{dT}{dt} + \cancel{v_x \frac{dT}{dx} + v_y \ldots} \right) = K \left( \cancel{\frac{d^2T}{dx^2}} + \cancel{\frac{d^2T}{dy^2}} + \frac{d^2T}{dz^2} \right) + \cancel{\mu \Phi_v}$

$$\Rightarrow 0 = K \frac{d^2T}{dz^2} + \dot{q}_0$$

$$\xrightarrow{int} C_1 = K \frac{dT}{dz} + \dot{q}_0 z \xrightarrow{int} C_1 z + C_2 = KT + \dot{q}_0 \frac{z^2}{2}$$

cdc
$$\begin{cases} z = 0 \rightarrow \frac{dT}{dz} = 0 \ (T_{max}) \rightarrow C_1 = 0 \\ z = L/2 \rightarrow T = T_0 \rightarrow C_2 = K T_0 + \dot{q}_0 \frac{(L/2)^2}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow K T_0 + \dot{q}_0 \frac{L^2}{8} = KT + \dot{q}_0 \frac{z^2}{2} \rightarrow T - T_0 = \frac{\dot{q}_0}{8K} (L^2 - 4z^2)$$

$$T(z) = T_0 + \frac{q_0}{8K} (L^2 - 4z^2)$$

$T_{max}$ è al centro

$$T_{max} = T(0) = T_0 + \frac{q_0 L^2}{8K}$$

$$L = \sqrt{\frac{(T_{max} - T_0) \cdot 8K}{q_0}} = \sqrt{\frac{(350-300)K \cdot 8 \cdot 16 \frac{W}{mK}}{1 \cdot 1000 \frac{W}{m^3}}} = \sqrt{6{,}4} = 2{,}53\ m$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 45 di 116

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 47 di 116

# 22/02/2013

19

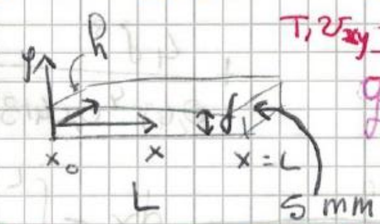
## ES 1

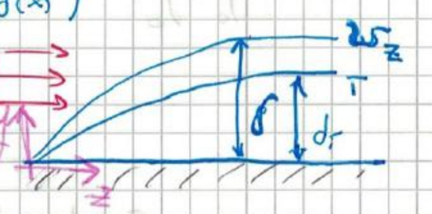
Si consideri una piastra metallica dello spessore di 5 mm e con lunghezza e larghezza uguali ad 1 m. La piastra è immersa in un fluido con conducib. term. $K = 0{,}5\ W m^{-1} K^{-1}$, viscosità cinematica $\nu = 10^{-6}\ m^2 s^{-1}$, $\rho = 1000\ Kg/m^3$ calore specifico $c_p = 4181\ J/Kg \cdot K$. Il profilo di temperat. che si sviluppa è descritto dalla seguente equazione:

$$\frac{T_W - T(x,y)}{T_W - T_\infty} = 2\left(\frac{y}{\Delta \delta(x)}\right) - 2\left(\frac{y}{\Delta \delta(x)}\right)^3 + \left(\frac{y}{\Delta \delta(x)}\right)^4$$ secondo le cond:

dove $\Delta = P_r^{-1/3}$

$$\delta(x) = \sqrt{\left(\frac{1260}{37}\right)\left(\frac{\nu x}{v_\infty}\right)}$$





Sapendo che il fluido si muove a 2 cm s-1 con una T = 15°C e che la piastra viene mantenuta a 80°C calcolare la potenza termica smaltita (quantità di calore scambiata dalla piastra nell'unità di tempo).

$$P_r = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{\nu}{K}\rho c_p = \frac{10^{-6} \cdot 10^3 \cdot 4181}{0{,}5} = 8{,}362 \Rightarrow P_r^{-1/3} = 0{,}49$$

VEDI DIETRO PER → SOL 2
→ SOL 1

$$\text{def. } \dot{Q} = 2\int_0^W\int_0^L \left(-K \left.\frac{dT}{dy}\right|_{y=0}\right) dx\, dz$$

$$\frac{dT}{dy} = (T_\infty - T_W)\left[2\frac{1}{\Delta\delta(x)} - 6\cdot\frac{y^2}{(\Delta\delta(x))^3} + 4\frac{y^3}{(\Delta\delta(x))^4}\right]$$

calcolo il calore dissipato al bordo della lastra quindi $y = 0$ (forse $y=\delta$)

$$\Rightarrow \left.\frac{dT}{dy}\right|_{y=0} = (T_\infty - T_W)\cdot\frac{2}{\Delta\delta(x)} = (15-80)\cdot\frac{2}{P_r^{-1/3}\cdot\sqrt{\frac{1260}{37}\cdot\frac{\nu x}{v_\infty}}}$$

$10^{-6}$ ; $0{,}02$

$$= \frac{2\,(15-80)}{0{,}49\cdot 0{,}0413\sqrt{x}} = -6423{,}88\cdot x^{-1/2}$$

$$\dot{Q} = 2\int_0^W\int_0^L +6423{,}88\, K\, x^{-1/2}\, dx\, dz = 2W\left[6423{,}88\cdot 0{,}5\cdot 2\, x^{1/2}\right]_0^L =$$

$$= 2\cdot 1\cdot 6423{,}88\cdot 0{,}5\cdot 2\cdot 1^{1/2} = 12847{,}75\ W$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 47 di 116

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 49 di 116

Sol. 2

Uguale a lei fino a:

$$\left.\frac{dT}{dy}\right|_{y=0} = (T_\infty - T_w)\frac{2}{P_r^{-1/3}\sqrt{\frac{1260}{37}\cdot\frac{\nu x}{v_\infty}}} \quad \text{poi:}$$

$$= \frac{2(T_\infty - T_w)}{P_r^{-1/3}}\cdot\sqrt{\frac{37}{1260}\frac{V_\infty}{\nu x}} = \frac{2(T_\infty - T_w)}{P_r^{-1/3}}\sqrt{\frac{37}{1260}\frac{V_\infty}{\nu}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\dot{Q} = 2\int_0^W dz \int_0^L -K\,\frac{2(T_\infty - T_w)}{P_r^{-1/3}}\sqrt{\frac{37}{1260}\frac{V_\infty}{\nu}}\cdot\int_0^L x^{-1/2}\,dx$$

$$= 2W\cdot(-K)\,2\cdot\frac{(T_\infty - T_w)}{P_r^{-1/3}}\sqrt{\frac{37}{1260}\frac{V_\infty}{\nu}}\left[\frac{x^{1/2}}{1/2}\right]_0^L \leftarrow 2L^{1/2}$$

$$= 8\,\frac{\overset{1m}{W}\,(-\overset{0{,}5}{K})(\overset{288}{T_\infty}-\overset{353}{T_w})}{\underset{8{,}362}{P_r^{-1/3}}}\cdot\sqrt{\frac{37}{1260}\cdot\frac{2\cdot 10^{-2}}{10^{-6}}}\;\underset{1}{\sqrt{L}} = 12\,847{,}75\text{ W}$$

$T_w = 80 + 273 = 353\text{K}$

$T_\infty = 15 + 273 = 288\text{K}$

$$P_r = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{\nu}{\frac{K}{\rho\hat{C}_p}} = \frac{\nu\rho\hat{C}_p}{K} = \frac{10^{-6}\cdot 1000\cdot 4181}{0{,}5} = 8{,}362$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 49 di 116

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 51 di 116

$$0 = \lambda \exp(\lambda L) - \lambda C_2 \exp(\lambda L) - \lambda C_2 \exp(-\lambda L)$$

$$\rightarrow C_2 = \frac{\cancel{\lambda} \exp(\lambda L)}{\cancel{\lambda}[\exp(\lambda L) + \exp(-\lambda L)]} = \frac{\exp(\lambda L)}{2\cosh(\lambda L)}$$

$$\rightarrow C_1 = \frac{\exp(-\lambda L)}{2\cosh(\lambda L)}$$

$$\theta = \frac{\exp(\overbrace{-\lambda L + \lambda z}^{\lambda(z-L)})}{2\cosh(\lambda L)} + \frac{\exp(\overbrace{\lambda L - \lambda z}^{-\lambda(z-L)})}{2\cosh(\lambda L)} = \frac{\cancel{2}\cosh(\lambda(z-L))}{\cancel{2}\cosh(\lambda L)}$$

$$\theta = \frac{\cosh\left(\sqrt{\frac{h}{kB}}L\left(\frac{z}{L}-1\right)\right)}{\cosh\left(\sqrt{\frac{h}{kB}} \cdot L\right)} = \frac{\cosh\left(\sqrt{\frac{hL^2}{Bk}}\left(\frac{z}{L}-1\right)\right)}{\cosh\left(\sqrt{\frac{hL^2}{Bk}}\right)}$$

$$\sqrt{Bi} \cdot \sqrt{\frac{L}{B}} = \sqrt{\frac{hL}{k}} \cdot \sqrt{\frac{L}{B}} = \sqrt{\frac{120 \cdot (0,2)^2}{60 \cdot 0,007}} = 3,3606$$

$$\theta(z) = \frac{\cosh\left(\sqrt{Bi}\sqrt{\frac{L}{B}} \cdot \left(\frac{z}{L}-1\right)\right)}{\cosh\left(\sqrt{Bi} \cdot \sqrt{\frac{L}{B}}\right)} = \frac{\cosh\left(3,3606 \cdot \left(\frac{z}{L}-1\right)\right)}{\cosh(3,3606)}$$

$$T = T_a + (T_w - T_a) \cdot \left[\frac{\cosh\left(3,3606 \cdot \left(\frac{z}{L}-1\right)\right)}{\cosh(3,3606)}\right]$$

$$T_1 = T_a + (T_w - T_a)\left[\frac{\cosh\left(3,3606\left(\frac{L}{L}-1\right)\right)}{\cosh(3,3606)}\right] =$$

$$= T_a + (T_w - T_a)\left[\frac{1}{\cosh(3,3606)}\right]$$

$$500 = T_a + (350 - T_a) \cdot \frac{1}{\cosh(3,3606)} \Rightarrow T_a = 510,9°C$$

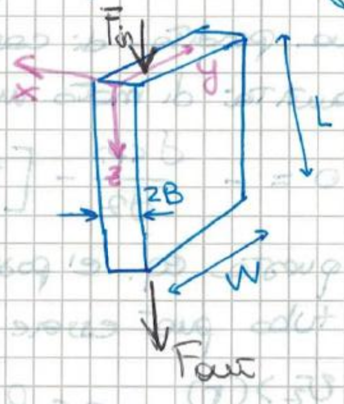
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 51 di 116

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 53 di 116

# 25/06/2013

## ES 1

Si consideri il condotto di sezione rettangolare (con $B \ll W \ll L$):




1) Det. il profilo di velocità nel condotto per un fluido Non-Newtoniano che segue la seguente legge di potenza:

$$\tau_{xz} = \begin{cases} m\left(-\frac{dv_z}{dz}\right)^n & \text{per } 0 \le x \le B \\ -m\left(\frac{dv_z}{dz}\right)^n & \text{per } -B \le x \le 0 \end{cases}$$

Le equaz. di bilancio di qdm in coord. cartesiane sono:

$$\rho\left(\frac{dv_z}{dt} + v_x\frac{dv_z}{dx} + v_y\frac{dv_z}{dy} + v_z\frac{dv_z}{dz}\right) = -\frac{dp}{dz} - \left[\frac{d\tau_{xz}}{dx} + \frac{d\tau_{xz}}{dy} + \frac{d\tau_{xz}}{dz}\right]$$

2) Calcolare la portata Totale

3) Verificare che se $n=1 \rightarrow m=\mu$ per un fluido Newtoniano

Semplifico: $0 = -\frac{dP}{dz} - \frac{d\tau_{xz}}{dx} \xrightarrow{\text{ma}} 0 = -\frac{\Delta P}{L} - \frac{d\tau_{xz}}{dx}$

- $0 \le x \le B$ ho: $0 = -\frac{\Delta P}{L} - \frac{d}{dx}\left(m\left(-\frac{dv_z}{dx}\right)^n\right)$

$\rightarrow \frac{\Delta P}{L} = -\frac{d}{dx}\left(m\left(-\frac{dv_z}{dx}\right)^n\right) \xrightarrow{\text{int}} m\left(-\frac{dv_z}{dx}\right)^n = -\frac{\Delta P}{L}x + C_1$

$\left(-\frac{dv_z}{dx}\right)^n = -\frac{\Delta P}{L}\frac{x}{m} + \frac{C_1}{m} \longrightarrow C_1 = 0$

CdC

$\begin{cases} x = 0 & \frac{dv_z}{dx} = 0 \\ x = B & v_z = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \left(-\frac{dv_z}{dx}\right)^n = -\frac{\Delta P}{L}\frac{x}{m}$

$\rightarrow -\frac{dv_z}{dx} = \left(-\frac{\Delta P}{mL}\right)^{1/n} \cdot x^{1/n} \xrightarrow{\text{int}} v_z = -\left(\frac{-\Delta P}{mL}\right)^{1/n}\frac{x^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n}+1} + C_2$

$\xrightarrow{\text{cdc}} 0 = -\left(\frac{-\Delta P}{mL}\right)^{1/n} \cdot \frac{B^{1/n+1}}{1/n+1} + C_2 \rightarrow C_2 = \left(\frac{-\Delta P}{mL}\right)^{1/n} \cdot \frac{B^{1/n+1}}{1/n+1}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 53 di 116

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 55 di 116

Allora $\dot{V} = A_1 + A_2$ (A)

$$\dot{m} = \rho \cdot \left[ W \left(-\frac{\Delta P}{mL}\right)^{1/n} \cdot \frac{n}{n+1} \cdot (B)^{\frac{n+1}{n}+1} \left(1 - \frac{n}{2n+1}\right) + W \left(\frac{\Delta P}{mL}\right)^{1/n} \cdot \frac{n}{n+1} (-B)^{\frac{n+1}{n}+1} \left(\frac{n}{2n+1} - 1\right) \right]$$

- Verifica $n = 1$ $m = \mu$, fluido Newtoniano

$$\dot{V} = W\left(-\frac{\Delta P}{L\mu}\right) \cdot \frac{1}{2} B^3 \left(1 - \frac{1}{3}\right) + W\left(\frac{\Delta P}{L\mu}\right) \frac{1}{2} (-B)^3 \left(\frac{1}{3} - 1\right)$$

$$= B^3 W \left(-\frac{\Delta P}{L\mu}\right) \cdot \frac{2}{3}$$

Fluido Newtoniano: $\tau_{xy} = -\mu \frac{dU_z}{dx}$ metto in: $\frac{\Delta P}{L} x = \underbrace{\mu \frac{dU_z}{dx}}_{\tau_{xy}}$

$$\rightarrow \frac{\Delta P}{L} \frac{x^2}{2} + C_1 = \mu U_z \qquad \begin{cases} x = B \\ U_z = 0 \end{cases} \rightarrow C_1 = -\frac{\Delta P}{L\mu} \frac{B^2}{2}$$

$$\Rightarrow U_z = \frac{\Delta P}{\mu L} \cdot \frac{1}{2} (x^2 - B^2)$$

calcolo $\dot{V} = \int_0^W \int_{-B}^{B} \frac{\Delta P}{L\mu} \cdot \frac{1}{2} (x^2 - B^2)\, dx\, dy =$

$$= \frac{\Delta P}{2L} \cdot \frac{W}{\mu} \cdot \left[ \frac{x^3}{3}\Big|_{-B}^{B} - B^2 x \Big|_{-B}^{B} \right] = \frac{\Delta P}{2L} \frac{W}{\mu} \left[ \frac{B^3 + B^3}{3} - B^2 (B + B) \right] =$$

$$= \frac{\Delta P}{2L} \frac{W}{\mu} \left[ \frac{2}{3} B^3 - 2B^3 \right] = -\frac{\Delta P\, W}{L\mu} \cdot B^3 \frac{2}{3} \quad \checkmark$$

(A)

$$\dot{m} = \rho W \left(\frac{\Delta P}{mL}\right)^{1/n} \frac{n}{\cancel{n+1}} (B)^{\frac{2n+1}{n}} \underbrace{\left(1 - \frac{n}{2n+1}\right)}_{\frac{2n+1-n}{2n+1} = \frac{\cancel{n+1}}{2n+1}} - \rho W \left(\frac{\Delta P}{mL}\right)^{1/n} \frac{n}{\cancel{n+1}} (-B)^{\frac{2n+1}{n}} \underbrace{\left(1 - \frac{n}{2n+1}\right)}_{\frac{\cancel{n+1}}{2n+1}}$$

$$= \rho W \left(\frac{\Delta P}{mL}\right)^{1/n} \frac{n}{2n+1} B^{\frac{2n+1}{n}} + \rho W \left(\frac{\Delta P}{mL}\right)^{1/n} \frac{n}{2n+1} (-B)^{\frac{2n+1}{n}}$$

$$= 2\rho W \left(\frac{\Delta P}{mL}\right)^{1/n} \frac{n}{2n+1} B^{\frac{2n+1}{n}}$$

$(-)^{\frac{2n+1}{n}}$ PARI dispari = dispari

posso tirarlo fuori

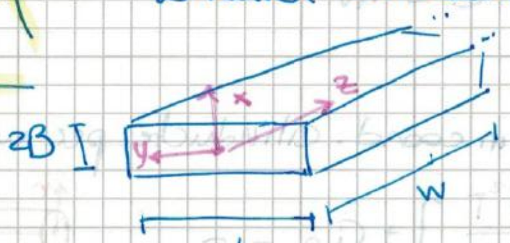
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 55 di 116

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 57 di 116

# 16/07/2013

## ES 1

2 fluidi immiscibili e incomprimibili




$W >> 2B$ ; (y trascurabili)

$\frac{P_0 - P_L}{L} = cost$

I° fluido $\rho^I, \mu^I$ fluisce sul fondo con spessore $= B$

II° fluido: fluisce nella parte superiore con spessore B

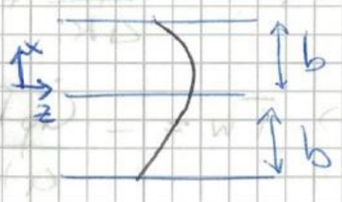
$\rho^I > \rho^{II}$
$\mu^I > \mu^{II}$

Calcolare il profilo di velocità dei 2 fluidi $U_z^I$ e $U_z^{II}$

Eq. di N-S:

$$\rho \frac{\partial U_i}{\partial t} + \rho U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_i} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j^2}$$

Hp
- stazio
- i fluidi si muovono suff. lentamente in modo da evitare instabilità
- $U_z(x)$ moto laminare lungo z




semplifico

$$\begin{cases} I & 0 = -\frac{\Delta P}{L} + \mu^I \frac{d^2 U_z^I}{dx^2} \xrightarrow{int} \frac{d^2 U_z^I}{dx^2} = \frac{\Delta P}{\mu^I L} \\ II & 0 = -\frac{\Delta P}{L} + \mu^{II} \frac{d^2 U_z^{II}}{dx^2} \xrightarrow{int} \frac{d^2 U_z^{II}}{dx^2} = \frac{\Delta P}{\mu^{II} L} \end{cases}$$

$$\begin{cases} I & \frac{dU_z}{dx} = \frac{\Delta P}{\mu L} \cdot x + C_1^I \\ II & \frac{dU_z}{dx} = \frac{\Delta P}{\mu L} x + C_2^I \end{cases} \rightarrow \begin{cases} U_z^I = \frac{\Delta P}{\mu L} \cdot \frac{x^2}{2} + C_1^I x + C_2^I \\ U_z^{II} = \frac{\Delta P}{\mu L} \cdot \frac{x^2}{2} + C_1^{II} x + C_2^{II} \end{cases}$$

cdc

$$\begin{cases} x = 0 & U_z^I = U_z^{II} = cost \rightarrow \frac{dU_z^I}{dx} = \frac{dU_z^{II}}{dx} \\ x = B & U_z^I = 0 \\ x = -B & U_z^{II} = 0 \end{cases}$$

in questo modo
$C_1^I = C_1^{II}$
$C_2^I = C_2^{II}$

$$\begin{cases} \frac{\Delta P}{2\mu^I L} B^2 + C_1 B + C_2 = 0 \\ \frac{\Delta P}{2\mu^{II} L} B^2 - C_1 B + C_2 = 0 \end{cases} \rightarrow C_2 = \frac{(-\Delta P)}{2\mu^I L} B^2 - C_1 B$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 57 di 116

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 59 di 116

# ES2

In un condotto cilindrico a sez. circolare scorre un fluido Newtoniano che sviluppa un profilo di velocità parabolico, in coord. cilindriche diventa:

$U_z(r) = U_{max}\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$ dove $U_{max}$ è la velocità massima (al centro del condotto) del fluido, R è il raggio del condotto e z e r sono le coordinate assiali e radiali. Utilizzando la seguente equazione di variazione di T:

$$\rho c_p\left(\frac{\partial T}{\partial t}+U_r\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{U_\theta}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta}+U_z\frac{\partial T}{\partial z}\right)=K\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right]$$

ed effettuando le opportune semplificazioni è stata trovata la soluzione:

$$T(r,z)=\frac{4q_0}{\rho C_p U_{max} R}z+\frac{q_0}{KR}r^2-\frac{1}{4}\frac{q_0}{KR^3}r^4-\frac{7}{24}\frac{q_0 R}{K}+T_1$$

dove $q_0$ è il flusso termico alla parete e $T_1$ la T ingr. condotto.

Det. il CUP-MIXING TEMP. per una sezione ad una generica posizione assiale z.

Det. il numero di Nusselt locale.

1) Il mixing cup temp. è def $\langle T\rangle = \dfrac{\int_0^{2\pi}\int_0^R r\,dr\,d\theta\, T(r,z)\,U_z(r)}{\int_0^{2\pi}\int_0^R U_z(r)\,r\,dr\,d\theta}$

$$\langle T\rangle = \frac{I_1}{I_2}$$

$$I_2 : \int_0^{2\pi}\int_0^R U_z(r)\,r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^R U_{max}\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]r\,dr\,d\theta =$$

$$= 2\pi U_{max}\left[\int_0^R\left(r-\frac{1}{R^2}r^3\right)dr\right] = 2\pi U_{max}\left[\frac{r^2}{2}-\frac{1}{R^2}\cdot\frac{r^4}{4}\right]_0^R =$$

$$= 2\pi U_{max}\frac{R^2}{4} = \frac{\pi U_{max}R^2}{2}$$

$$I_1 : \int_0^{2\pi}\int_0^R T(r,z)U_z(r)\,r\,dr\,d\theta =$$

$$= 2\pi\int_0^R\left(\frac{4q_0 z}{\rho c_p U_{max}R}+\frac{q_0}{KR}r^2-\frac{1}{4}\frac{q_0}{KR^3}r^4-\frac{7}{24}\frac{q_0 R}{K}+T_1\right)\cdot\left(U_{max}-U_{max}\frac{r^2}{R^2}\right)r\,dr$$

$= \rightarrow$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 59 di 116

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 61 di 116

$$\Rightarrow T_W = T_1 + \frac{11}{24}\frac{q_0 R}{k} + \frac{4 q_0 z}{\rho c_p U_{max} R}$$

$$T_W - \langle T \rangle = \cancel{T_1} + \frac{11}{24}\frac{q_0 R}{k} + \cancel{\frac{4 q_0 z}{\rho c_p U_{max} R}} - \cancel{\frac{4 q_0 z}{\rho c_p U_{max} R}} - \cancel{T_1}$$

$$T_W - \langle T \rangle = \frac{11}{24}\frac{q_0 R}{k}$$

$$h_{loc} = \frac{q_0}{\frac{11}{24}\cdot\frac{q_0 R}{k}} = \frac{24 k}{11 R} \Rightarrow Nu_{loc} = \frac{24 k}{11 R}\cdot\frac{2R}{k} = 4,364$$

## ES 3 ?

Una goccia sferica di raggio R di un liquido volatile A evapora in un componente stagnante B. L'equazione di variazione della concentrazione del componente A in coord. sferiche è la seguente:

$$\frac{\partial \rho_A}{\partial t} + U_r \frac{\partial \rho_A}{\partial r} + \frac{U_\theta}{r}\frac{\partial \rho_A}{\partial \theta} + \frac{U_\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial \rho_A}{\partial \phi} = D_{AB}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \rho_A}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial \rho_A}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 \rho_A}{\partial \phi^2}\right] + r_A$$

$\rho_{TOT}$ = cost → in coord. sferiche l'eq. di continuità diventa: $\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 U_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(U_\theta \sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}(U_\phi) = 0$

Det. allo stato stazio. (in assenza di reazione e assumendo che la goccia rimanga di raggio R) il profilo di conc. monica del componente A sapendo che esso è pari a $\rho_A = \rho_1$ sulla sup. della goccia e $\rho_A = 0$ a dist = ∞ dalla sup. della goccia.

Hp $U_r \neq 0$, $\rho_A(r)$

$$\begin{cases} \text{eq. cont: } \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2 U_r) = 0 \\ \text{eq. } \Delta C_A: U_r \frac{d\rho_A}{dr} = D_{AB}\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{d\rho_A}{dr}\right) \rightarrow r^2 U_r \frac{d\rho_A}{dr} = D_{AB}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{d\rho_A}{dr}\right) \end{cases}$$

2° porto dentro la derivata: $0 = \frac{d}{dr}\left(D_{AB} r^2 \frac{d\rho_A}{dr} - r^2 U_r \rho_A\right)$

$$0 = \frac{d}{dr}\left[r^2\left(D_{AB}\frac{d\rho_A}{dr} - U_r \rho_A\right)\right]$$

$$\left\{ \frac{d}{dr}(r^2 U_r \rho_A) = r^2 U_r \frac{d\rho_A}{dr} + \rho_A \frac{d}{dr}(\overset{\nearrow 0}{r^2 U_r}) \right.$$

vedo $D_{AB}\frac{d\rho_A}{dr} - U_r \rho_A = N_{Ar}$

$$\frac{\Sigma \rho_\alpha U_\alpha}{\Sigma \rho_\alpha} = \frac{N_{Ar} + \overset{\nearrow 0}{N_{Br}}}{\rho_{TOT}}$$ 0 xk STAGNANTE

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 61 di 116

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 63 di 116

# ES 2 = es 2 del 16/07/2013

# ES 3 = es 3 del 16/07/2013

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 63 di 116

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 65 di 116

2) Se esiste una $U_y = U_0$

eq. cont. $\frac{\partial U_x}{\partial x} + \cancel{\frac{\partial U_y}{\partial y}} = 0$

$\hookrightarrow 0 \quad U_y = \text{cost}$

N-S per x : $\frac{\partial U_x}{\partial t} + \cancel{U_x \frac{\partial U_x}{\partial x}} + U_y \frac{\partial U_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \cancel{\frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2}} + \frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2} \right)$

$$\rightarrow U_y \frac{\partial U_x}{\partial y} = \frac{1}{\rho}\frac{\Delta P}{L} + \nu \frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2}$$

$$U_0 \frac{\partial U_x}{\partial y} = \frac{1}{\rho}\frac{\Delta P}{L} + \nu \frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2}$$

3) Trovare la soluzione: ?

$$\nu \lambda^2 - U_0 \lambda = 0 \rightarrow \lambda(\nu\lambda - U_0) = 0 \quad \lambda = 0, \quad \lambda = \frac{U_0}{\nu}$$

$$U_x(y) = C_1 e^{0y} + C_2 e^{\left(\frac{U_0}{\nu} \cdot y\right)}$$

$$U_x(y) = C_2 e^{\left(\frac{U_0}{\nu} \cdot y\right)} + C_1$$

CdC

$$\begin{cases} U_x = 0 & y = 0 \rightarrow 0 = C_2 + C_1 \rightarrow C_1 = -C_2 \\ U_x = U_{max} & y = B/2 \rightarrow U_{max} = C_2 e^{\left(\frac{U_0}{\nu}\cdot\frac{B}{2}\right)} + C_1 = -C_2 \end{cases}$$

$$U_{max} = C_2 \left( e^{\frac{U_0}{\nu}\cdot\frac{B}{2}} - 1 \right) \rightarrow \begin{cases} C_2 = \dfrac{U_{max}}{e^{\frac{U_0 B}{2\nu}} - 1} \\ C_1 = -\dfrac{U_{max}}{e^{\frac{U_0 B}{2\nu}} - 1} \end{cases}$$

dove

? $U_{max} = \frac{\Delta P}{\rho L}$

$$\Rightarrow U_x(y) = -\frac{U_{max}}{e^{\left(\frac{U_0 B}{2\nu}\right)} - 1} + \frac{U_{max}}{e^{\left(\frac{U_0 B}{2\nu}\right)} - 1} e^{\left(\frac{U_0}{\nu}\cdot y\right)}$$

$$U_x(y) = \frac{U_{max}}{e^{\left(\frac{U_0 B}{2\nu}\right)} - 1} \left( e^{\left(\frac{U_0}{\nu}\cdot y\right)} - 1 \right)$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 65 di 116

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 67 di 116

int $\int_{x_{A1}}^{x_{A2}} -\frac{D\,C_{TOT}}{(1-x_A)}\,dx = \int_{r_1}^{r_2} \frac{C_1}{r^2}\,dr$

CASO 1 (mmmh.....)

posso fare così perché il testo mi dà le cdc

$\rightarrow +D\,C_{TOT}\,\ln(1-x_A)\Big|_{x_{A1}}^{x_{A2}} = C_1 \cdot -\frac{1}{r}\Big|_{r_1}^{r_2}$

$\rightarrow \ln\left(\frac{(1-x_{A2})}{(1-x_{A1})}\right) = \frac{C_1}{D\,C_{TOT}}\cdot\left(-\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_1}\right) \rightarrow$ ottengo $C_1$

$\rightarrow C_1 = \ln\left(\frac{1-x_{A2}}{1-x_{A1}}\right)\cdot D\,C_{TOT}\cdot\frac{1}{\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)}$

$\Rightarrow D\,\cancel{C_{TOT}}\,\ln(1-x_A) = \frac{\ln\left(\frac{1-x_{A2}}{1-x_{A1}}\right)D\,\cancel{C_{TOT}}}{\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)}\left(-\frac{1}{r}\right)$

$\rightarrow \ln(1-x_A) = -\frac{1}{r\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)}\ln\left(\frac{1-x_{A2}}{1-x_{A1}}\right)$

$\ln(1-x_A) = \ln\left(\frac{1-x_{A2}}{1-x_{A1}}\right)^{-\frac{1}{r\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)}}$ $\qquad -\frac{1}{r\frac{r_2-r_1}{r_1r_2}} = -\frac{r_1r_2}{(r_2-r_1)r}$

$(1-x_A) = \left(\frac{1-x_{A2}}{1-x_{A1}}\right)^{-\frac{r_1r_2}{r(r_2-r_1)}}$

$\Rightarrow x_A = 1-\left(\frac{1-x_{A2}}{1-x_{A1}}\right)^{-\frac{r_1r_2}{r(r_2-r_1)}}$

$\Rightarrow x_A = 1-\left(\frac{1-x_{A1}}{1-x_{A2}}\right)^{\frac{r_1r_2}{r(r_2-r_1)}}$

modo 2 (meglio)

$\int -\frac{D\,C_{TOT}}{(1-x_A)}\,dx = \int\frac{C_1}{r^2}\,dr \rightarrow -D\,C_{TOT}\ln(1-x_A) = C_1\left(-\frac{1}{r}\right) + C_2$

cdc

$\begin{cases} r=r_1 & x_A = x_{A1} \\ r=r_2 & x_A = x_{A2} \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} -D\,C_{TOT}\ln(1-x_{A1}) = -\frac{C_1}{r_1}+C_2 \\ -D\,C_{TOT}\ln(1-x_{A2}) = -\frac{C_1}{r_2}+C_2 \end{cases}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 67 di 116

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 69 di 116

2) Velocità di evap.

$$\dot{m} = N_{Ar}\Big|_R \cdot 4\pi R^2 \qquad \text{dove } N_{AR} = \frac{-DC_{TOT}}{(1-x_A)}\frac{dx_A}{dr} \; *$$

devo derivare

$$\frac{dx_A}{dr} = \frac{C_1}{r^2}\cdot\left(-\frac{DC_{TOT}}{(1-x_A)}\right)^{-1} \qquad -\frac{DC_{TOT}\ln\left(\frac{1-x_{A2}}{1-x_{A1}}\right)\cdot r_1 r_2}{r_2-r_1}$$

$$= \cancel{-DC_{TOT}}\frac{r_1 r_2}{r_2-r_1}\ln\left(\frac{1-x_{A2}}{1-x_{A1}}\right)\cdot\frac{1}{r^2}\cdot\left(\frac{1-x_A}{\cancel{-DC_{TOT}}}\right)$$

$$= \frac{r_1 r_2}{r^2(r_2-r_1)}\cdot(1-x_A)\cdot\ln\left(\frac{1-x_{A2}}{1-x_{A1}}\right)$$

$$N_{Ar} = -\frac{DC_{TOT}}{\cancel{(1-x_A)}}\cdot\frac{r_1 r_2}{r^2(r_2-r_1)}\cancel{(1-x_A)}\cdot\ln\left(\frac{1-x_{A2}}{1-x_{A1}}\right)$$

$$N_{Ar}\Big|_{r=r_1} = -\frac{DC_{TOT}\, r_2}{r_1(r_2-r_1)}\ln\left(\frac{1-x_{A2}}{1-x_{A1}}\right)$$

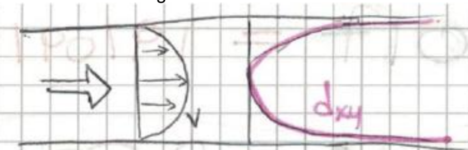
$$\dot{m} = -\frac{DC_{TOT}\, r_2}{\cancel{r_1}(r_2-r_1)}\ln\left(\frac{1-x_{A2}}{1-x_{A1}}\right)\cdot 4\pi r_1^{\cancel{2}} = -\frac{4\pi DC_{TOT}\, r_1 r_2}{(r_2-r_1)}\ln\left(\frac{1-x_{A2}}{1-x_{A1}}\right)$$

$$\dot{m} = +\frac{4\pi DC_{TOT}\, r_1 r_2}{(r_1-r_2)}\ln\left(\frac{1-x_{A2}}{1-x_{A1}}\right)$$

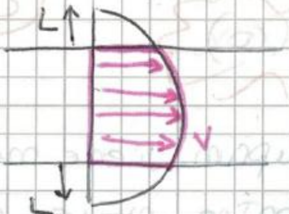
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 69 di 116

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 71 di 116

2)




3)




parto sempre da: $0 = -\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dy} + \nu\left[\frac{d^2 v_y}{dx^2}\right]$

Stessi passaggi e arrivo a:

$$\nu v_y = -\frac{1}{\rho}\frac{\Delta P}{L}\frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$$

CdC
$$\begin{cases} x=0 & \frac{dv_y}{dx}=0 \rightarrow C_1=0 \\ x=H+\ell & v_y=0 \end{cases}$$

$$\rightarrow 0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\Delta P}{L}\frac{(H+\ell)^2}{2} + C_2$$

$$\rightarrow C_2 = \frac{1}{2\rho}\frac{\Delta P}{L}(H+\ell)^2$$

$$\Rightarrow v_y = \frac{1}{2\mu}\frac{\Delta P}{L}\left((H+\ell)^2 - x^2\right) \quad \text{(slip)}$$

è la profondità

4) $\text{En factor} = \frac{\dot{m}_{slip}}{\dot{m}_{non\text{-}slip}} = \frac{\cancel{\rho}\dot{V}_1}{\cancel{\rho}\dot{V}_2} = \frac{\int_0^W \int_{-H}^{H} v_{y_s}(x)\,dx\,dz}{\int_0^W \int_{-H}^{H} v_{y_{n\text{-}s}}(x)\,dx\,dz}$

$$\dot{V}_1 = W\int_{-H}^{H} \frac{1}{2\mu}\frac{\Delta P}{L}\left((H+\ell)^2 - x^2\right) = \quad \left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-H}^{H} = -\frac{H^3}{3} + \frac{H^3}{3} = \frac{2H^3}{3}$$

$$= W\left[\frac{\Delta P}{2\mu L}\left[(H+\ell)^2 \cdot 2H - \frac{2}{3}H^3\right]\right]$$

$$(H^2 + 2H\ell + \ell^2)\cdot 2H - \frac{2}{3}H^3$$
$$2H^3 + 4H^2\ell + 2H\ell^2 - \frac{2}{3}H^3$$
$$\frac{6H^3 - 2H^3}{3} = \frac{4}{3}H^3 + 4H^2\ell + 2H\ell^2$$
$$\frac{4}{3}H\left(H^2 + 3H\ell + \frac{3}{2}\ell^2\right)$$

$$= \frac{W\Delta P}{\cancel{2}\mu L}\cdot\frac{\cancel{4}^{2}}{3}H\left(H^2 + 3H\ell + \frac{3}{2}\ell^2\right)$$

$$\dot{V}_2 = W\int_{-H}^{H} \frac{1}{2\mu}\frac{\Delta P}{L}(H^2 - x^2) = \frac{W\Delta P}{2\mu L}\left(H^2\cdot 2H - \frac{2}{3}H^3\right) = \frac{W\Delta P}{\cancel{2}\mu L}\frac{\cancel{4}^{2}}{3}H^3$$

$$\text{En.f.} = \frac{\cancel{\frac{W\Delta P}{\mu L}}\cancel{\frac{2}{3}}\cancel{H}\left(H^2 + 3H\ell + \frac{3}{2}\ell^2\right)}{\cancel{\frac{W\Delta P}{\mu L}}\cancel{\frac{2}{3}}H^{\cancel{3}\,2}} = 1 + 3\frac{\ell}{H} + \frac{3}{2}\frac{\ell^2}{H^2}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 71 di 116

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 73 di 116

$$T(r) = T_e + \frac{(T_i - T_e)}{\log(R/_{R+d})} \cdot \ln\left(\frac{r}{R+d}\right)$$

oppure se sostituivo nelle prima: $T(r) = T_i + \frac{(T_i - T_e)}{\log(R/_{R+d})} \cdot \ln\left(\frac{r}{R}\right)$

$$J_q = -k \left.\frac{dT}{dr}\right|_R = -\frac{k}{R}\frac{(T_i - T_e)}{\ln(R/_{R+d})}$$

$$= \frac{C_1}{r} = \frac{T_i - T_e}{\ln R/_{R+d}} \cdot \frac{1}{R} = \frac{(T_i - T_e)}{R} \cdot \ln\frac{R+d}{R}$$

$$\rightarrow -J_q \frac{R}{k} \frac{1}{(T_i - T_e)} = \ln\frac{R+d}{R} \rightarrow e^{\wedge}\left(\frac{J_q R}{k(T_e - T_i)}\right) = \frac{R+d}{R}$$

$$\Rightarrow d = R\left(e^{\wedge}\left(J_q R/k(T_e - T_i)\right) - 1\right)$$

$$= 0{,}2\left(e^{\wedge}\frac{15\,\frac{W}{m^2} \cdot 0{,}2\,m}{0{,}035\,\frac{W}{mK}(90-50)} - 1\right)$$

$$= 0{,}2\left(e^{\wedge 2{,}142857143} - 1\right) = 1{,}505\,m$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 73 di 116

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 75 di 116

$$-\frac{C_1}{mr^2} = \left(\cancel{r^2}\frac{dv_\theta}{dr}\cdot\frac{1}{\cancel{r^2}}\right)^n \rightarrow -\frac{C_1}{mr^2} = \left(\frac{dv_\theta}{dr}\right)^n$$

$$\rightarrow \sqrt[n]{-\frac{C_1}{mr^2}} = \frac{dv_\theta}{dr} \rightarrow \sqrt[n]{-\frac{C_1}{m}}\cdot r^{-2/n}\,dr = dv_\theta$$

$$\rightarrow \sqrt[n]{-\frac{C_1}{m}}\cdot\frac{r^{-2/n+1}}{-\frac{2}{n}+1} = v_\theta \rightarrow v_\theta = \sqrt[n]{-\frac{C_1}{m}}\cdot\frac{n}{n-2}\,r^{\frac{n-2}{n}} + C_2$$

$$\frac{-2+n}{n}$$

CdC

$$\begin{cases} r = KR & v_\theta = 0 \\ r = R & v_\theta = \Omega_o R \end{cases}$$

$$-\begin{cases} 0 = \sqrt[n]{-\frac{C_1}{m}}\cdot\frac{n}{n-2}(KR)^{\frac{n-2}{n}} + C_2 \\ \Omega_o R = \sqrt[n]{-\frac{C_1}{m}}\cdot\frac{n}{n-2}\cdot R^{\frac{n-2}{n}} + C_2 \end{cases}$$

$$= \overline{\quad -\Omega_o R = \sqrt[n]{-\frac{C_1}{m}}\cdot\frac{n}{n-2}\left(KR^{\frac{n-2}{n}} - R^{\frac{n-2}{n}}\right)}$$

$$\rightarrow \frac{+\Omega_o R}{\left(-KR^{\frac{n-2}{n}} + R^{\frac{n-2}{n}}\right)}\cdot\frac{n-2}{n} = \sqrt[n]{-\frac{C_1}{m}} \rightarrow -m\left(\frac{\Omega_o R}{R^{\frac{n-2}{n}} - KR^{\frac{n-2}{n}}}\right)^n\left(\frac{n-2}{n}\right)^n = C_1$$

$$0 = \sqrt[n]{\frac{+\cancel{m}\left(\frac{n-2}{n}\cdot\frac{\Omega_o R}{R^{\frac{n-2}{n}} - KR^{\frac{n-2}{n}}}\right)^n}{\cancel{m}}}\cdot\frac{n}{n-2}(KR)^{\frac{n-2}{n}} + C_2$$

$$0 = \frac{\cancel{n-2}}{\cancel{n}}\cdot\frac{\Omega_o R}{R^{\frac{n-2}{n}} - KR^{\frac{n-2}{n}}}\cdot\frac{\cancel{n}}{\cancel{n-2}}(KR)^{\frac{n-2}{n}} + C_2$$

$$C_2 = \frac{\Omega_o R\cdot\cancel{(KR)^{\frac{n-2}{n}}}}{\cancel{(KR)^{\frac{n-2}{n}}}\left(1 - \left(\frac{R}{KR}\right)^{\frac{n-2}{n}}\right)} \rightarrow C_2 = \frac{\Omega_o R}{\left(1 - K^{-\frac{n-2}{n}}\right)}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 75 di 116

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 77 di 116

# 27/06/2018



## ES 1

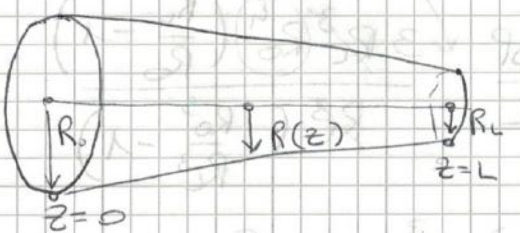
Si consideri un fluido incomprimibile e Newtoniano che scorre in una ~~tub~~. cil. a sez. costante. Per questo sistema vale: $\dot{Q} = \frac{\pi R^4}{8\mu} \cdot \frac{\Delta P}{L}$ dove $\mu$ è il coeff. di viscosità dinamico e $R$ raggio della tubazione, $\dot{Q}$ la portata volumica e $\frac{\Delta P}{L}$ la caduta di prex per unità di lunghezza.

Si assume la perdita di pressione lineare con la coordinata assiale, $z$:

$$\frac{\Delta P}{L} = -\frac{dP}{dz} = \cancel{-}\frac{8\mu\dot{Q}}{\pi}\,\frac{1}{R^4}$$

Si immagini ora che la sezione del tubo rimanga circolare e si restringa linearmente da un raggio $R_0$ a $z=0$ ad un raggio $R_L$ a $z=L$. La variazione di raggio con la coordinata assiale diventa: $\frac{dR}{dz} = \frac{R_L - R_0}{L}$

1) Det. la relazione fra portata e perdite di prex in questo caso
2) Definendo $\lambda = R_L/R_0$ det. il fattore correttivo da applicare alla prima eq. per ottenere la portata corretta
3) Verificare che per $\lambda = 1$ il fattore correttivo $\to 1$




$$\frac{R_L - R_0}{L}$$
$$\downarrow$$

$$-\frac{dP}{dz} = \frac{8\mu\dot{Q}}{\pi}\cdot\frac{1}{R^4} \;\to\; -\frac{dP}{dR}\,\frac{dR}{dz} = \frac{8\mu Q}{\pi}\cdot\frac{1}{R^4}$$

$$\to\; -dP \cdot \frac{R_L - R_0}{L} = \frac{8\mu\dot{Q}}{\pi}\cdot\frac{1}{R^4}\,dR \xrightarrow{\text{INT}}$$

$$\to \int_{P_0}^{P_L} -dP\,\frac{R_L - R_0}{L} = \frac{8\mu\dot{Q}}{\pi}\int_{R_0}^{R_L}\frac{1}{R^4}\,dR$$

$$\cancel{-}(P_L - P_0)\cdot\frac{(R_L - R_0)}{L} = \frac{8\mu\dot{Q}}{\pi}\cdot\frac{1}{\cancel{-}3R^3}\Bigg|_{R_0}^{R_L}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 77 di 116

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 79 di 116

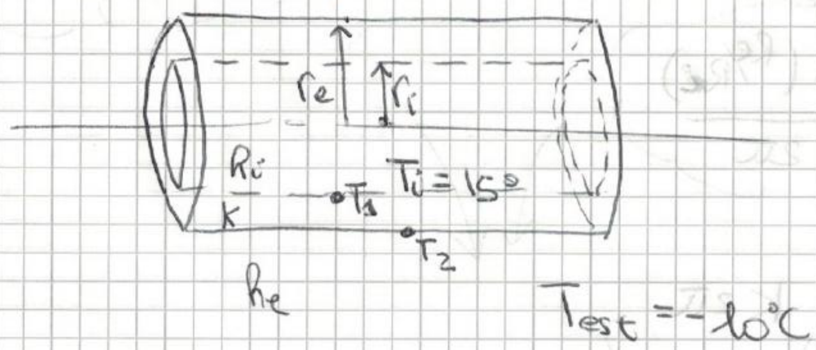
# ES2

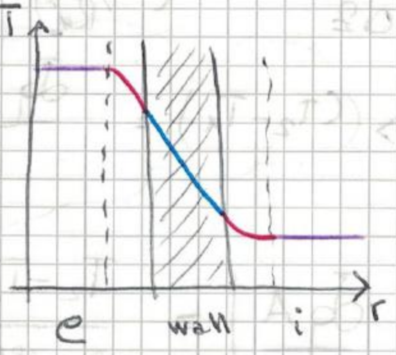


Dell' acqua scorre in un tubo a sezione circolare di acciaio ($k = 50$ W/m K) con un diametro esterno di 104 mm e uno spessore di 2 mm. Il coeff. di scambio di calore relativo alla parte interna e' di 30 kW/m²K mentre quello relativo alla parte esterna di 20 kW/m²K. Si ricorda che l'equazione di bilancio di energia per un solido in coordinate cilindriche:

$$\rho \hat{c}_p \left( \frac{dT}{dt} \right) = k \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dT}{dr} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{d^2 T}{d\theta^2} + \frac{d^2 T}{dz^2} \right]$$

Determ. la perdita di calore per metro lineare per una temp. interna dell'acqua 15°C e una $T_{est}$ dell'aria $-10$°C.




$$\frac{Q}{Sp} = h_i (T_i - T_1)$$

$$\frac{Q}{Sp} = h_e (T_2 - T_e)$$

Posso semplificando: $0 = \frac{\cancel{k}}{\cancel{r}} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dT}{dr} \right)$

$\xrightarrow{int} r \frac{dT}{dr} = C_1 \rightarrow \frac{dT}{dr} = \frac{C_1}{r}$

$\xrightarrow{int} T = C_1 \ln(r) + C_2$

$\underline{cdc} \begin{cases} r = R_i & T = T_1 \\ r = R_e & T = T_2 \end{cases}$

$\rightarrow \begin{cases} T_1 = C_1 \ln R_i + C_2 \rightarrow C_2 = T_1 - C_1 \ln R_i \\ T_2 = C_1 \ln R_e + C_2 \rightarrow T_2 = C_1 \ln R_e + T_1 - C_1 \ln R_i \end{cases}$

$\rightarrow T_2 - T_1 = C_1 \ln \frac{R_e}{R_i} \rightarrow C_1 = \frac{T_2 - T_1}{\ln R_e/R_i}$

$\Rightarrow C_2 = T_1 - \frac{T_2 - T_1}{\ln R_e/R_i} \cdot \ln R_i$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 79 di 116

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 81 di 116

$$\frac{\delta_Q A}{dz}\cdot\left[\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\ln(Re/Ri)}{k}+\frac{1}{h_iR_i}+\frac{1}{R_eh_e}\right)\right]=T_i-T_e$$

$$\rightarrow \frac{Q}{L}=\frac{2\pi(T_i-T_e)}{\frac{\ln(Re/Ri)}{k}+\frac{1}{h_iR_i}+\frac{1}{h_eR_e}}$$

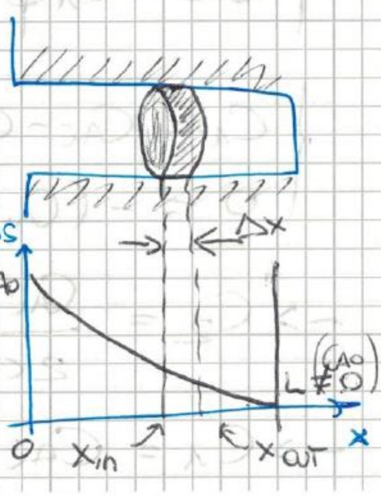
$$\rightarrow \frac{Q}{L}=\frac{\overbrace{2\cdot\pi(15+10)}^{157,0796633}}{\underbrace{\frac{\ln(0{,}052/0{,}05)}{50}}_{0{,}000340667}+\underbrace{\frac{1}{30000\cdot 0{,}05}}_{0{,}0006667}+\underbrace{\frac{1}{20000\cdot 0{,}052}}_{0{,}0009615}}=79\,781\ \frac{W}{m}\cong 79\ \frac{kW}{m}$$

Il professore però ha calcolato un'altro risultato che deriva dal porre $h_e$ = <u>20 W</u> e non 20 kW facendo così viene 163 W/m

# ES3

Si consideri la reazione irreversibile di conversione di un reagente A in un poro di un catalizzatore. Si consideri solo la diffusione del componente A (e si trascuri quindi il Trasp. Convettivo) e si consideri il poro come un cilindro di raggio R e lungh. L. La cinetica di reazione catalitica superficiale e' governata da $R' = -k'C_A$ dove R e' misurato in kmol/m² s mentre $C_A$ e' una concentraz. molare (kmol/m³). Trascurando il trasporto radiale l'eq. di bilancio di A:

$$\frac{dC_A}{dt}+u_x\frac{dC_A}{dx}=D\frac{d^2C_A}{dx^2}+R \leftarrow \text{termine di reazione volumico kmol/m}^3\text{s}$$




1) Ricavare il termine R da R'
2) Risolvere l'eq. per trovare il profilo di concentrazione $C_A(x)$
3) Det. il flusso di materia in ingresso al poro

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 81 di 116

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 83 di 116

37

$$\Rightarrow C_A = C_{Ai}\left(1 - \frac{e^{-\phi L}}{2\cosh(\phi L)}\right)e^{-\phi z} + \frac{C_{Ai}\, e^{-\phi L}}{2\cosh(\phi L)} \cdot e^{\phi z}$$

$$C_A = C_{Ai} + \frac{C_{Ai}\, e^{-\phi L}}{2\cosh(\phi L)} e^{\phi z} - C_{Ai}\frac{e^{-\phi L}}{2\cosh(\phi L)} e^{-\phi z}$$

$$C_A = C_{Ai} + \frac{C_{Ai}\, e^{-\phi L}}{2\cosh(\phi L)}\left(e^{\phi z} + e^{-\phi z}\right)$$

$$C_A = C_{Ai} + \frac{C_{Ai}\, e^{-\phi L}}{\cancel{2}\cosh(\phi L)} \cdot \cancel{2}\cosh(\phi z)$$

$$C_A = C_{Ai}\left(1 + \frac{e^{-\phi L}\cosh(\phi z)}{\cosh(\phi L)}\right)$$

[oppure: il professore ha messo che $C_A = C_{Ai}\left(1 - \frac{e^{\phi L}}{2\cosh\phi L}\right)$... e non so come si sia usato positivo... così facendo viene dentro al $\cosh(\phi L - \phi z)$]

$$J_A = -D_A \left.\frac{dC_A}{dz}\right|_{z=0}$$

$$C_A \to \frac{dC_A}{dz} = -C_1\phi \cancel{e^{-\phi z}} + C_2\phi \cancel{e^{\phi z}}$$

$1 \quad 1$ in $z=0$

$$\left.\frac{dC_A}{dz}\right|_{z=0} = -C_{Ai}\left(1 - \frac{e^{-\phi L}}{2\cosh(\phi L)}\right)\phi + C_{Ai}\frac{e^{-\phi L}}{2\cosh(\phi L)}\cdot\phi =$$

$$= -C_{Ai}\phi + C_{Ai}\phi\frac{e^{-\phi L}}{2\cosh(\phi L)} + C_{Ai}\phi\frac{e^{-\phi L}}{2\cosh(\phi L)} =$$

$$\Rightarrow \left.\frac{dC_A}{dz}\right|_{z=0} = -C_{Ai}\phi + C_{Ai}\phi\frac{e^{-\phi L}}{\cosh(\phi L)} = C_{Ai}\phi\left(\frac{e^{-\phi L}}{\cosh(\phi L)} - 1\right)$$

$$\Rightarrow J_A = -D_A \cdot C_{Ai}\phi\left(\frac{e^{-\phi L}}{\cosh(\phi L)} - 1\right)$$

<u>OPPURE:</u> $C_A = C_{Ai} = \frac{\cosh[\phi L(1 - \frac{z}{L})]}{\cosh \phi L}$

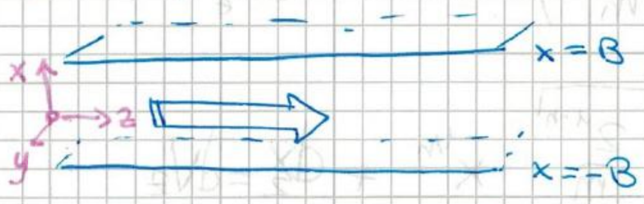
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 83 di 116

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 85 di 116

05/09/2018 = 09/07/2018 (38)

# ES 1

Si consideri un fluido incomprimibile che scorre fra due piastre piane poste a distanza 2B come riportato in figura:




Trascurare l'effetto della forza gravitazionale e assumere che la variazione di pressione è lineare lungo z

$\frac{dp}{dz} = -\frac{\Delta P}{L}$ dove L è la lungh. del tratto considerato e che il flusso è stazionario.

Assumere che $V_x = 0$ e $V_z = V_z(x)$. Fluido non-Newtoniano e segue la legge di potenza: $\tau_{ij} = -2m\,|S_{ij}|^{n-1} S_{ij}$

do $S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{dV_i}{dx_j} + \frac{dV_j}{dx_i}\right)$

1) Det. il profilo di velocità (utilizzare le eq. di cont. e di bilancio di qdm)

2) Sapendo che la profondità delle piastre è W det. la portata massica che scorre attraverso le piastre.

3) $n = 2$ $B = 10\,cm$ $W = 1\,m$ $\rho = 1000\,kg/m^3$ $\Delta P/L = 1000\,Pa/m$
$\dot{m} = 1\,kg/s$ Det. la viscosità apparente m (e unità di misura)

- $V_x = 0$, $V_y = 0$
- $V_z(y)$, $V_z(z) = 0$

eq. cont: $\frac{dV_z}{dz} = 0$

bilancio:

$$\rho\left[V_x\frac{dV_z}{dx} + V_y\frac{dV_z}{dy} + V_z\frac{dV_z}{dz}\right] = -\frac{\Delta P}{L} + \left[\frac{d\tau_{zx}}{dx} + \frac{d\tau_{zy}}{dy} + \frac{d\tau_{zz}}{dz}\right]$$

$$0 = -\frac{\Delta P}{L} + \frac{d\tau_{zx}}{dx} \leftarrow \left(0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\Delta P}{L} + \frac{1}{\rho}\frac{d\tau_{zx}}{dx}\right)$$ rifarlo con $\frac{1}{\rho}$!

$$S_{zx} = \frac{1}{2}\left(\frac{dV_z}{dx}\right) \rightarrow \tau_{zx} = -2m\left(\frac{1}{2}\frac{dV_z}{dx}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{2}\frac{dV_z}{dx} = -2m\left(\frac{1}{2}\frac{dV_z}{dx}\right)^n$$

$$0 = -\frac{\Delta P}{L}\cdot\frac{d}{dx}\left(-2m\left(\frac{1}{2}\frac{dV_z}{dx}\right)^n\right) \rightarrow -\frac{\Delta P}{L} + \frac{d}{dx}\left(-m\cdot 2\,\frac{1}{2^n}\left(\frac{dV_z}{dx}\right)^n\right)$$

$$\frac{\Delta P}{L} = \frac{d}{dx}\left(-m\,2^{n-1}\left(\frac{dV_z}{dx}\right)^n\right)$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 85 di 116

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 87 di 116

$$= W G \left[ 2 B^{\frac{1+2n}{n}} \cdot \left( \frac{n}{1+2n} - 1 \right) \right] \quad \left( \frac{n-1-2n}{1+2n} \right) = \frac{-1-n}{1+2n} = -\frac{1+n}{1+2n}$$

39

$$= W \frac{1}{2} \sqrt[n]{-\frac{\Delta P}{L} \frac{2}{m}} \cdot \frac{n}{1+n} \left( -\frac{1+n}{1+2n} \right) \cdot 2 B^{\frac{1+2n}{n}} \Rightarrow$$

$$\dot{m} = -\rho W \sqrt[n]{-\frac{\Delta P}{L} \frac{2}{m}} \cdot \frac{n}{1+2n} \cdot B^{\frac{1+2n}{n}}$$

3) $$\dot{m} = -\rho \sqrt{-\frac{\Delta P}{L} \frac{2}{m}} \cdot \frac{2}{5} \cdot B^{5/2} \rightarrow -\frac{\dot{m}}{\rho} \cdot \frac{5}{2} \cdot B^{-5/2} = \sqrt{-\frac{\Delta P}{L} \frac{2}{m}}$$

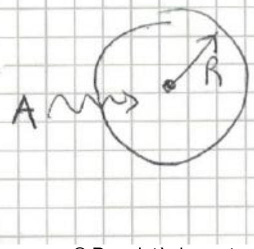
$$\rightarrow \left( -\frac{\dot{m}}{\rho} \frac{5}{2} B^{-5/2} \right)^2 = -\frac{\Delta P}{L} \frac{2}{m} \rightarrow m = -\frac{\Delta P}{L} 2 \cdot \frac{1}{\left( -\frac{\dot{m}}{\rho} \frac{5}{2} B^{-5/2} \right)^2} =$$

$$= -\frac{\Delta P}{L} \left( \frac{\rho}{\dot{m}} \right)^2 \frac{8}{25} \cdot B^5 = -1000 \frac{Pa}{m} \cdot \frac{8}{25} \cdot \left( \frac{1000}{1} \frac{kg}{m^3} \cdot \frac{s}{kg} \right)^2 = -3200 \frac{Pa\, s^2}{m^2}$$

# ES2

Si consideri una sfera di catalizzatore di raggio R. La sfera e' costituita da materiale poroso in cui un componente A diffonde (muovendosi solo per mecc. diffusivo). Assumere costante e pari a D il coeff. di diff. di A nella sfera. A reagisce secondo una cinetica di ordine zero ($r_A = -K_r$) con costante cinetica $K_r$ nota, partecipando ad una reazione esotermica con calore di reazione $\Delta H_r$ noto. Il calore viene trasportato solo per meccanismo conduttivo. Assumere costante e pari a K la conducibilità della sfera.

1) Det. il profilo di T e di $C_A$ all'interno della sfera.
2) $R = 1$ cm $\quad k_r/D = 1$ kmol$/m^5$ $\quad (-\Delta H_r) k_r / K = 6 \cdot 10^6$ K$/m^2$ $\quad C_{Ai} = 400$ K. Det le conc. del componente A e la temp. al centro della sfera.




$$C_A: \quad 0 = \frac{d}{dr}\left( r^2 \frac{dC_A}{dr} \right) - k_r \frac{r^2}{D}$$

$$T: \quad 0 = \frac{d}{dr}\left( r^2 \frac{dT}{dr} \right) + \frac{k_r(-\Delta H_r)}{K} r^2$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 87 di 116

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 89 di 116

# 25/06/2019

# V2

# ES 1

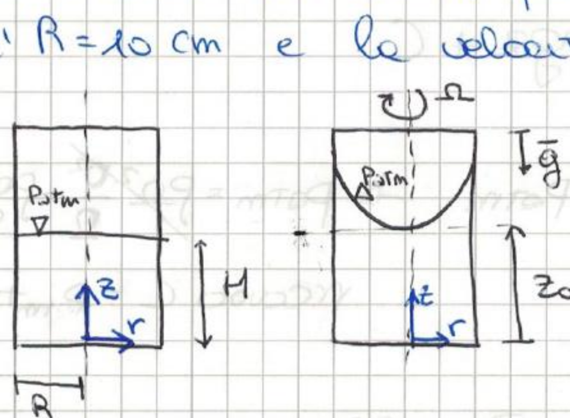
40

Dell'acqua e' posta in un contenitore cilindrico posto in rotazione. Det. il profilo di velocità dell'acqua allo stazionario, sapendo che in coord. cilindriche si ha:

$$\rho\left(\frac{dv_z}{dt} + v_r\frac{dv_z}{dr} + \frac{v_\theta}{r}\frac{dv_z}{d\theta} + v_z\frac{dv_z}{dz}\right) = -\frac{dp}{dz} + \mu\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv_z}{dr}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{d^2v_z}{d\theta^2} + \frac{d^2v_z}{dz^2}\right] + \rho g_z$$

Si assuma: $v_r = v_z = 0$ e $v_y = v_y(r)$, P dipende solo da r e z.

Det. inoltre il profilo di pressione nell'acqua. Si usi $P = P_{atm}$ quando $z = z_0$. Sapendo che la pressione sul pelo libero dell'acqua uguaglia la press atm, determinare di quanto si innalza il livello del liquido rispetto al livello iniziale H quando il raggio del contenitore e' R = 10 cm e la velocità di rotaz. e' $\Omega = 10\ \frac{rad}{s}$




Hp
- $v_r = 0$
- $v_z = 0$
- $v_\theta(r)$
- $p(z, r)$
- $g_r = g_\theta = 0$

semplifico

1) $-\frac{\rho v_\theta^2}{r} = -\frac{dp}{dr} + \cancel{\rho g_r}$

2) $0 = \mu\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r v_\theta)\right) + \cancel{\rho g_\theta}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 89 di 116

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 91 di 116



- innalzamento liquido

$$p = p_{atm} \rightarrow p_{atm} - p_{atm} = \frac{1}{2}\rho\Omega^2 r^2 + \underbrace{\rho g(z_0 - z)}_{\text{innalz. liq.}}$$

$$0 = \frac{1}{2}\cancel{\rho}\Omega^2 r^2 - \cancel{\rho} g(z - z_0)$$

$$(z - z_0) = \frac{\Omega^2 r^2}{2g}$$

dov'e' che ho il massimo innalzamento: $r = ?$

- Volume fluido fermo: $V = \pi R^2 H$
- Volume fluido in movimento: $V = \int_0^{2\pi}\int_0^R z(r)\, r\, dr\, d\theta =$

$$= 2\pi \int_0^R \left[z_0 + \frac{\Omega^2 r^2}{2g}\right] r\, dr = 2\pi z_0 \frac{R^2}{2} + \frac{\pi\Omega^2}{g}\frac{R^4}{4}$$

ricavo z eguagliando queste 2 espressioni di $V$:

$$\cancel{\pi}\cancel{R^2}H = \cancel{2}\cancel{\pi}z_0\frac{\cancel{R^2}}{\cancel{2}} + \cancel{\pi}\,\Omega^2\frac{R^{\cancel{4}\,2}}{4g} \rightarrow H = z_0 + \Omega^2\frac{R^2}{4g}$$

$$\overbrace{z_0 - H}^{\text{innalzam.}} = -\frac{\Omega^2 R^2}{4g} \rightarrow z_0 = H - \frac{\Omega^2 R^2}{4g}$$

$$\rightarrow z\Big|_R - H + \frac{\Omega^2 R^2}{4g} = \frac{\Omega^2 r^2}{2g}\Big|_R \rightarrow z - H = \frac{1}{4}\frac{\Omega^2 R^2}{g}$$

$$z - H = \frac{10^2 \cdot 0{,}1^2}{4 \cdot 9{,}81} = 0{,}025\,m = 2{,}5\,cm$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 91 di 116

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 93 di 116

$$\rightarrow 0 = \frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{d\omega_A}{dr}\right) \xrightarrow{int} \frac{C_1}{r} = r^2 \frac{d\omega_A}{dr} \xrightarrow{int} C_2 - \frac{C_1}{r} = \omega_A(r)$$

42

CAC
$$\begin{cases} r = R & w_A = w_{A1} \\ r \to \infty & w_A = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} w_{A1} = -\frac{C_1}{R} \rightarrow C_1 = -w_{A1} R \\ C_2 = 0 \end{cases}$$

SOST $\Rightarrow w_A(r) = \dfrac{w_{A1} R}{r}$

Flusso diffusivo: $N_{Ar} = -D_{AB}\rho \left(\dfrac{d\omega_A}{dr}\right)$

$$\frac{d(w_A(r))}{dr} = \frac{d}{dr}\left(\frac{w_{A1} R}{r}\right) = -\frac{w_{A1} R}{r^2}$$

$\Rightarrow N_{Ar} = +D_{AB}\rho \cdot \dfrac{w_{A1} R}{r^2}$

PORTATA:

$$\dot{m} = N_{Ar}\Big|_R \cdot 4\pi R^2$$

$$\dot{m} = D_{AB}\rho \frac{w_{A1} R}{\cancel{R^2}} \cdot 4\pi \cancel{R^2} = D_{AB}\rho\, w_{A1} 4\pi R = 2{,}5 \cdot 10^{-6} \cdot R \quad \frac{kg}{s}$$

2) DIFF. DI T

$$0 = k \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dT}{dr}\right) \xrightarrow{int} r^2 \frac{dT}{dr} = C_1 \xrightarrow{int} T(r) = -\frac{C_1}{r} + C_2$$

CAC
$$\begin{cases} r = R & T = T_0 \\ r \to \infty & T = T_\infty \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_1 = (T_\infty - T_0) R \\ C_2 = T_\infty \end{cases} \Rightarrow$$

SOST $\Rightarrow T(r) = -\dfrac{R}{r}(T_\infty - T_0) + T_\infty \rightarrow \dfrac{dT}{dr} = +\dfrac{R}{r^2}(T_\infty - T_0)$

FLUSSO CONDUTTIVO:

$$J_{q_r} = -k \frac{dT}{dr} = -k \frac{R}{r^2}(T_\infty - T_0)\Big|_R = -\frac{k}{R}(T_\infty - T_0)$$

FLUSSO DIFFUSIVO: EVAPORAZIONE:

$$N_{Ar}\Big|_R = +D_{AB}\rho \frac{w_{A1}}{R} \rightarrow = -D_{AB}\rho \frac{w_{A1}}{R} \lambda_{ev}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 93 di 116

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 95 di 116

# 25/06/2019

# V1

40 b

# ES1

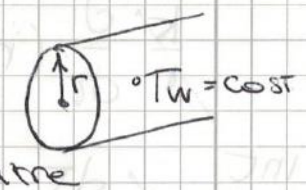
In una tubazione cilindrica a sez. circolare $D = 20$ cm scorre un fluido incomprim. con velocità media $v_m = 2{,}45\ m\,s^{-1}$, di viscosità $\mu = 100$ Pa s e conducibilità $k = 11{,}5$ W/mK.
Le pareti vengono raffreddate, per esportare il calore generato dalla dissipaz. viscosa $T_w = 300$ K cost.

(a) Det. il profilo di temp. radiale assumendo tubo ∞ lungo (trascurare effetti di imbocco e sbocco) e trascurando ogni dipendenza da z.

(b) Det. la $T_{max}$ al centro del tubo

(c) Nel caso di tubazione orizzontale con $L = 10$ m Det. la $\Delta P$

Hp
- stazionario
- laminare
- $U_z(r)$ → le altre = 0 o non variano
- $T(r)$ → non variano le altre




(a) PROFILO DI TEMP. RADIALE

Semplifico le equazioni:

$$1)\quad \frac{k}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) + \mu\left[\frac{dU_z}{dr}\right]^2 = 0$$

$$2)\quad 0 = -\frac{dp}{dz} + \mu\left[\frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dr}\left(r\frac{dU_z}{dr}\right)\right] + \cancel{\rho g_z}$$

NO DIP.

↳ da questa ricavo $U_z$ e la inserisco nella 1)

$$\Rightarrow 0 = -\frac{r}{\mu}\frac{dp}{dz} + \frac{d}{dr}\left(r\frac{dU_z}{dr}\right)$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 95 di 116

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 97 di 116

SOST $T = T_W + \frac{(-\Delta P)^2}{64 \mu K L^2} (R^4 - r^4)$ (4b)

⚠ Posso anche metterlo in funzione di $\overline{v}_m$

$$\overline{v}_m = \frac{\int_0^{2\pi}\int_0^R v_z(r)\, r\, dr\, d\theta}{\int_0^{2\pi}\int_0^R r\, dr\, d\theta}$$

$$= \frac{\frac{(-\Delta P)}{4\mu L} R^2 \int_0^R \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) r\, dr \cdot 2\pi}{2\pi \cdot \frac{R^2}{2}}$$

$$= \frac{(-\Delta P)}{2\mu L}\left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4R^2}\right]_0^R = \frac{(-\Delta P)}{8\mu L} R^2$$

$$T = T_W + \underbrace{\frac{(-\Delta P)^2}{8^2 \mu K L^2} R^2}_{\overline{v}_m}{}^2 \left(1 - \frac{r^4}{R^4}\right)$$

→ sarebbe $\overline{v}_m^2$ ma manca $\frac{1}{\mu}$

quindi:

$$T = T_W + \frac{\mu \overline{v}_m^2}{K}\left(1 - \frac{r^4}{R^4}\right)$$

(b) $T_{MAX}$ al centro

$T = T_{max} \rightarrow \frac{dT}{dr} = 0 \rightarrow$ ecc. trovo che $r = 0$ cioè al centro

la max temp. si ha:

(ma questo me lo diceva il testo, quindi posso subito fare)

CAC $\begin{cases} r = 0 \rightarrow T = T_{max} \\ \xrightarrow{SOST} T_{max} = T_W + \frac{\mu \overline{v}_m^2}{K}(1 - \cancel{0}) \end{cases}$

$$T_{max} = 300 + \frac{100 \cdot 2{,}45^2}{11{,}5} = 352{,}2\ K$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 97 di 116