



**Appunti universitari**

**Tesi di laurea**

**Cartoleria e cancelleria**

**Stampa file e fotocopie**

**Print on demand**

**Rilegature**

**NUMERO: 2454A**

**ANNO: 2020**

# **A P P U N T I**

**STUDENTE: Ferrari Fabio**

**MATERIA: Meccanica del Volo Spaziale - Prof. Battipede**

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.  
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

## Le leggi di Keplero

①

Le leggi formulate da Keplero hanno spodestato secoli di pensiero, infatti, fino a quei tempi il senso comune era quello di Aristotele, il quale insegnava che il moto circolare era l'unico moto naturale e perfetto, per cui gli astri, in quanto divini, dovevano muoversi su traiettorie circolari o combinazioni di cerchi più grandi e cerchi più piccoli. Per astri, all'epoca s'intendevano pianeti e stelle mobili.

Keplero, abile e paziente osservatore dotato di un'innata percezione matematica trovò molto difficile riconoscere tale pensiero aristotelico nelle osservazioni del suo amico Tycho Brahe. Egli provò per anni a cercare forme geometriche che andavano bene (all'inizio per Marte), finché non scoprì che una traiettoria ellittica produceva un errore di soli 8 minuti d'arco ( $\frac{8}{60}$  di grado) rispetto alle osservazioni. Da ciò Keplero tirò fuori a una a una le sue tre leggi, dal 1609 al 1619:

### 1° Legge di Keplero:

L'orbita di ogni pianeta è un'ellisse con il sole ad uno dei fuochi e l'altro fuoco vuoto.

### 2° Legge di Keplero:

La linea che unisce i pianeti al sole spazza aree uguali in tempi uguali. Il che implica velocità areolare costante  $\frac{dA}{dt} = \text{cost}$ , più il raggio è grande, più si va lenti (nella stessa orbita).

### 3° Legge di Keplero:

Il quadrato del periodo orbitale è proporzionale al cubo della distanza media dal sole, la quale è funzione del semiasse maggiore dell'ellisse.

Le leggi di Keplero erano comunque solo una descrizione, fu Newton mezzo secolo più tardi a dimostrarle matematicamente e Halley a scoprire la sua scoperta che Newton aveva ignorato.

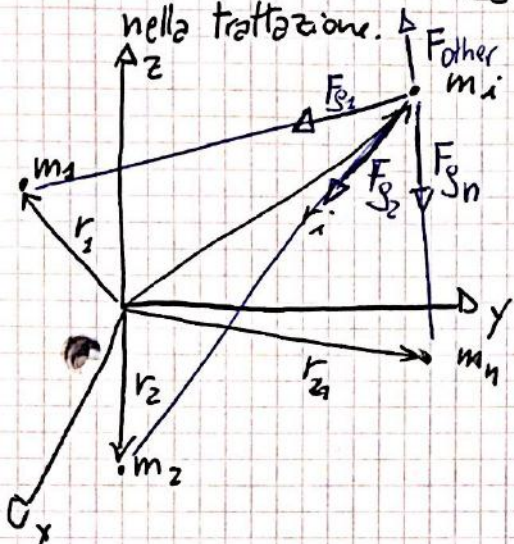
A Newton si devono tre leggi fondamentali della fisica, pubblicate nel "Principia", libro della sua teoria. Esse, come si capì più tardi, sono leggi che valgono solo nei sistemi di riferimento inerziali, in quelli in moto possono comparire contributi "apparenti", come la forza centrifuga e di Coriolis. Ciò si evince in particolare dalla seconda legge, che vale solo nel caso di massa costante, se non lo è andrà generalizzata ancora.

## Il problema degli N-corpi

(3)

È il problema di un veicolo spaziale, o in generale, un corpo che viaggia nello spazio (ad esempio nel sistema solare). Ad ogni tempo il corpo è assoggettato a N diverse forze gravitazionali da parte di N corpi diversi (dotati di masse gravitazionali).

Il corpo può essere soggetto ad altri campi e forze, che vengono trascurate



Si considera un insieme di n masse ( $m_1, m_2, \dots, m_i, \dots, m_n$ ) in uno spazio euclideo, in cui il corpo in oggetto è uno dei tanti presenti. Si fanno le seguenti ipotesi:

1. Simmetria sferica di geometria e di massa
2. masse costanti nel tempo
3. Forza di gravità è l'unica agente

Da queste quindi si possono considerare le masse come punti materiali con masse concentrate nel baricentro del corpo, che non variano. Inoltre tutte le forze diverse da quella gravitazionale sono state raggruppate vettorialmente in  $\vec{F}_{other}$ , che secondo la terza ipotesi verrà infine trascurata.

Per ricavare l'equazione del moto bisognerà trovare la risultante totale delle forze. Si noti che le forze gravitazionali, radiali, sono state ricavate dalla legge di gravitazione universale di Newton.

La seconda ipotesi dice che il corpo è Kepleriano, se non fosse vero, e quindi per esempio fosse un razzo che espelle massa, la trattazione dovrebbe tenere in conto di ciò, rendendola più generale.

Una forza non ancora introdotta è quella dovuta alla non sfericità dei corpi celesti, la distribuzione di massa differente crea effetti: gradi precessioni e nutazioni, regressione della linea dei nodi, rotazione della linea degli apsidi.

Un ultimo problema riguarda i sistemi di riferimento: ogni sistema è secondo un certo grado "non inerziale", tuttavia buone approssimazioni possono essere fatte (come il sistema di riferimento "a stelle fisse").

Nello schema ogni forza gravitazionale è del tipo

$$\vec{F}_{gi} = -\frac{G m_n m_i}{r_{ni}^2} \vec{r} \quad \text{con } n \neq i \quad \text{e} \quad \vec{r}_{ni} = \vec{r}_i - \vec{r}_n$$

espandendo si può scrivere, ricordando che  $\vec{r}_{is} = -\vec{r}_{si}$  (5)

$$\ddot{\vec{r}}_{is} = - \frac{G (m_i + m_s)}{r_{is}^3} \vec{r}_{is} - \sum_{\substack{n \neq i \\ n \neq s}} G m_n \left( \frac{\vec{r}_{ns}}{r_{ns}^3} - \frac{\vec{r}_{ni}}{r_{ni}^3} \right)$$

dove il primo termine rappresenta la forza tra due corpi e l'altro i "disturbi gravitazionali" degli altri corpi.

Alla fine si sono trovate  $n$  equazioni vettoriali differenziali del secondo ordine, in  $n-1$  incognite vettoriali. Il loro problema risolutivo è che sono tutte accoppiate con tutte, per cui l'unica soluzione (approssimata) è quella numerica. Esse vanno integrate tutte insieme.

Se deve notare che  $\vec{r}_{is}$  è il moto relativo tra i corpi  $i$  e  $s$ , per cui la dinamica è relativa. Se ~~due~~ <sup>uno</sup> dei corpi sono molto grande rispetto all'altro, si parla di "problema degli  $n$ -corpi ristretto", se i disturbi degli altri corpi sono piccoli si parla di "problema degli due corpi" e, in analogia, "problema dei due corpi ristretto".

## Il problema dei due corpi

il problema degli  $n$ -corpi è facilmente semplificabile ad un sistema composto da soli due corpi, questo è ragionevole per satelliti in orbita terrestre per via dei piccoli contributi di forza provenienti da altri corpi celesti. Per un satellite in orbita bassa per esempio i corpi del sistema solare imprimono accelerazioni pari a:

- Terra  $0.89 \text{ g}$
- Sole  $6.0 \times 10^{-4} \text{ g}$
- Luna  $3.33 \times 10^{-6} \text{ g}$
- Perturb. Terrestri  $10^{-3} \text{ g}$

gli altri pianeti influiscono con accelerazioni dell'ordine di  $10^{-8} \div 10^{-12} \text{ g}$ .

È evidente come tutti i contributi possano essere trascurati eccetto quello dalla Terra.

Si riprende la formula degli  $n$ -corpi e si aggiungono le seguenti ipotesi semplificative:

1. Simmetria di massa di tipo sferico  $\rightarrow$  masse concentrate
2. Nessuna forza interna o esterna al sistema esiste, se non la gravità
3. Uno dei due corpi ha massa molto minore rispetto all'altro  $m \ll M$

L'ultima è l'equazione dei due corpi che verrà usata in seguito. Si ricordi che vale se e solo se le 3 ipotesi enunciate sono valide, in particolare se  $M \gg m$ . Se non è vero allora  $\mu = (M+m)G$  e dipenderà anche dalla massa del corpo piccolo.

### Proprietà del moto in campo gravitazionale

Dalle nozioni di Fisica, si sa che il campo gravitazionale è conservativo, cioè è un campo in cui i corpi, se non sono soggetti ad altre forze, non perdono e non guadagnano energia meccanica nel loro movimento. Tuttavia tale energia cambia spesso forma: da energia cinetica si può passare a energia potenziale e viceversa.

L'energia meccanica non è l'unica quantità a conservarsi, infatti, poiché la forza di gravità è radiale, il momento della quantità di moto resta anch'esso costante. Per variarlo infatti si necessita di una forza in direzione tangenziale al moto.

Si procede ora a dimostrare quanto detto:

#### • Conservazione energia Meccanica

Si parte dall'equazione del moto e la si proietta sulla <sup>direzione di</sup>  $\vec{r}$

$$\vec{r} + \frac{\mu}{r^3} \vec{r} = 0 \Rightarrow \vec{r} \cdot \vec{r} + \frac{\mu}{r^3} \vec{r} \cdot \vec{r} = 0$$

Si sa che  $\vec{a} \cdot \vec{a} = a^2$ , per cui:

$$\hookrightarrow \dot{a} \frac{\vec{a}}{a} + a \frac{d}{dt} \left( \frac{\vec{a}}{a} \right) \rightarrow \text{componente } \perp \text{ ad } a$$

$$\boxed{V \dot{V} + \frac{\mu}{r^2} \dot{r} = 0}$$

Questa espressione è costantemente pari a 0. Si nota che  $\frac{d}{dt} \left( \frac{V^2}{2} \right) = V \dot{V}$  e che  $\frac{d}{dt} \left( -\frac{\mu}{r} \right) = \frac{\mu}{r^2} \dot{r}$

per cui si possono sostituire nell'equazione, ottenendo

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{V^2}{2} \right) + \frac{d}{dt} \left( -\frac{\mu}{r} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{V^2}{2} - \frac{\mu}{r} \right) = 0$$

per avere un'espressione generale, visto che la derivata di una costante è nulla, si può scrivere che:

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left( \frac{V^2}{2} - \frac{\mu}{r} + C \right) = 0} \Rightarrow \frac{V^2}{2} - \frac{\mu}{r} = E \rightarrow \text{costante} \rightarrow \text{energia meccanica specifica}$$

Si noti che tutte le grandezze ottenute sono scritte per unità di massa, per cui sono specifiche. Nella relazione è presente l'energia cinetica per unità di massa e l'energia potenziale per unità di massa.

alternativamente si poteva arrivare alla stessa formula assumendo che la forza è solo  $\odot$  radiale, per cui l'accelerazione tangenziale non c'è, è nulla:

$$a_{te} = (2 \dot{r} \dot{r} + r \ddot{r}) \hat{u}_e = 0 \rightarrow$$

ciò che resta costante è

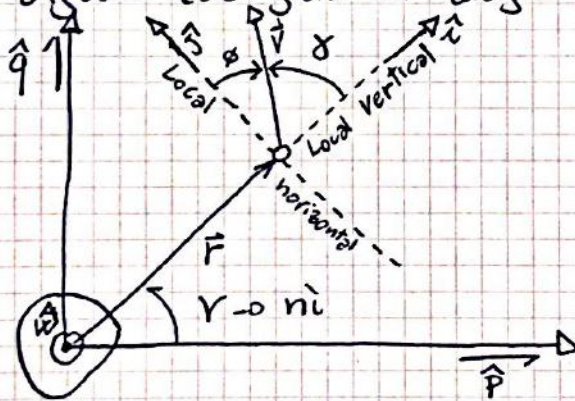
$$\frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\gamma}) = 0 \Rightarrow r \frac{(r \dot{\gamma})}{v_t} = \text{cost} \Rightarrow r \cdot V \cos \phi = \text{cost}$$

con  $\phi$  flight path angle, angolo tra la tangente (la velocità) e la perpendicolare alla radiale.

Si faccia attenzione che, la direzione tangente è alle volte riferita alla direzione perpendicolare al raggio e non alla tangente alla traiettoria vera e propria.

Il vettore  $\vec{h}$  è il momento angolare specifico e rimane costante su una determinata orbita. La sua costanza vale per il modulo, la direzione e il verso. Esso è, inoltre, un vettore sempre perpendicolare a  $\vec{r}$  e a  $\vec{v}$ , i quali quindi sono vincolati a restare su un piano  $\rightarrow$  orbite piane, sul piano detto "piano orbitale".

Per dimostrare l'equivalenza delle due forme della conservazione del momento angolare basta guardare il disegno seguente:



si fa notare che  $\vec{v}$  è sempre tangente alla traiettoria ma differisce dalla direzione perpendicolare al raggio.

$\hat{p}$  e  $\hat{q}$  non sono vettori rotanti, ma sono fissi.  $\hat{x}$  e  $\hat{z}$  ruotano e sono coordinate polari:  $\hat{x} = \frac{\vec{r}}{r}$ ,  $\hat{z} \perp \hat{x}$ . Inoltre

non è importante come il satellite sia orientato, è sempre possibile definire

un orizzonte e una verticale, e quindi un sopra e un sotto. La verticale locale sta sulla direzione radiale, mentre l'orizzonte sarà sua perpendicolare.

il vettore velocità viene individuato con un angolo dalla verticale chiamato  $\gamma$ , l'angolo di Zenit. L'angolo tra la velocità e l'orizzonte è chiamato invece  $\phi$ , il flight path angle. Dal prodotto vettoriale (definizione) si trova che

$$h = r v \sin \gamma = r v \cos \phi$$

dalla geometria si dimostra che le formule sono equivalenti

$$\frac{d}{dt} (\vec{r} \wedge \vec{h}) = \mu \frac{d}{dt} \left( \frac{\vec{r}}{r} \right) \xrightarrow{\mu = \text{cost}} \vec{r} \wedge \dot{\vec{h}} = \mu \frac{\vec{r}}{r} + \vec{B} \quad (11)$$

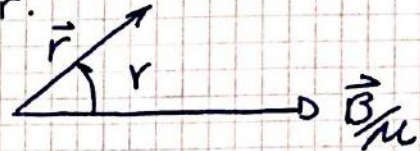
Tale equazione vale solo se  $\mu$  e  $h$  sono costanti, quindi se le masse sono costanti, e agiscono solo forze di tipo conservativo (solo forza gravitazionale), se un razzo accende i motori cambia sia massa che momento delle quantità di moto.

Le traiettorie descritte da questa equazione sono dette "Newtoniane"

$\vec{B}$  è una costante vettoriale di integrazione, perché integrando scompare il termine in  $\vec{r}$  ma compaiono solo  $\vec{r}$  e  $\dot{\vec{r}}$ .

Proiettando tutto sulla radiale si ottiene:

$$\vec{r} \cdot (\vec{r} \wedge \dot{\vec{h}}) = \vec{r} \cdot \left( \mu \frac{\vec{r}}{r} + \vec{B} \right)$$



visto che  $a \cdot b \wedge c = a \wedge b \cdot c$ , allora:

$$\underbrace{(\vec{r} \wedge \dot{\vec{r}})}_h \cdot \vec{h} = \mu r + B r \cos \gamma = h^2$$

È sparito anche il termine in  $\dot{\vec{r}}$ , risolvendo in  $r$  si ottiene che

$$r = \frac{h^2/\mu}{1 + \frac{B}{\mu} \cos \gamma}$$

con  $\frac{B}{\mu} < 1$  altrimenti si annullerebbe il denominatore per qualche  $\gamma$

$r_{\min} \rightarrow \gamma = 0 \rightarrow \vec{B}$  indica la direzione del periastro, per cui  $\gamma$  è

l'angolo che c'è tra il periastro e il raggio  $\vec{r}$ .  $\gamma$  viene chiamata anomalia vera (true anomaly) perché è l'unico parametro orbitale a cambiare nel tempo mentre gli altri sono costanti.

### L'equazione polare della sezione conica

L'equazione  $r = \frac{h^2/\mu}{1 + \frac{B}{\mu} \cos \gamma}$  e l'equazione della traiettoria in coordinate

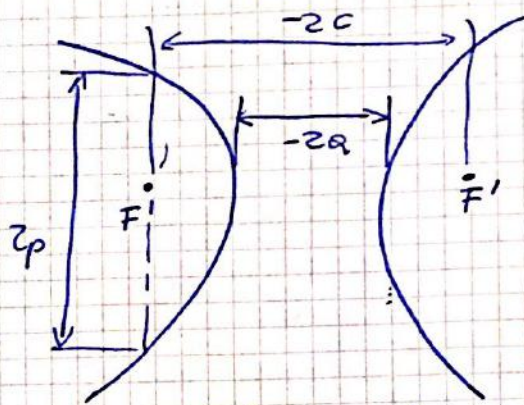
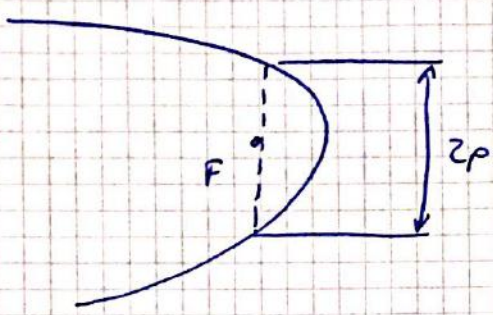
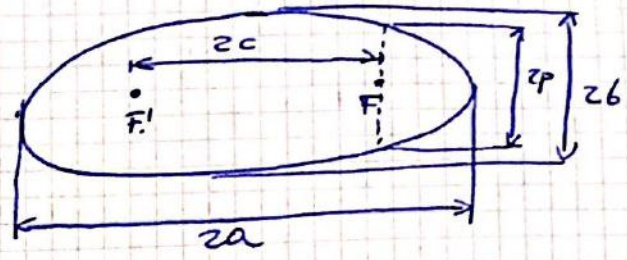
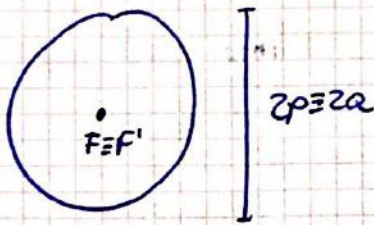
polari, dove l'angolo polare,  $r$  è misurato dal vettore  $\vec{B}$  a  $\vec{r}$ , per sapere che tipo di curva è, bisogna comparare questa espressione con l'equazione generica di una conica in forma polare, con fuoco coincidente con la massa  $M$  (origine) e  $\gamma$  angolo tra periastro e raggio.

Si dimostrerà che la conica ha forma del tipo

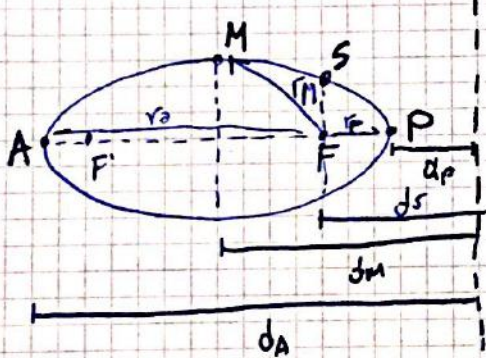
$$r = \frac{p}{1 + e \cos \gamma} \rightarrow \text{semi-latus rectum} \rightarrow \text{costante}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{eccentricità}} \rightarrow \text{costante}$





Si prenda come esempio significativo l'ellisse e alcuni punti notevoli su di essa, in particolare A, M e P:



$$\frac{r_P}{d_P} = \frac{r_M}{d_M} = \frac{r_A}{d_A} = e = \frac{c}{a}$$

$$p = a(1 - e^2)$$

Dimostrazione:

$$e = \frac{r_P}{d_P} \rightarrow d_P = \frac{a-c}{e} \quad r_A/d_A = \frac{2c+(a-c)}{d_A} = e \Rightarrow d_A = \frac{c+a}{e}$$

$$d_A - d_P = 2a = \frac{c+a}{e} - \frac{a-c}{e} \Rightarrow \frac{2a}{2c} = \frac{1}{e} \Rightarrow e = \frac{c}{a} \quad \text{C.V.D.}$$

$$\frac{r_M}{d_M} = e = \frac{\sqrt{b^2+c^2}}{a+d_P} = \frac{\sqrt{b^2+c^2}}{a+\frac{a-c}{e}} \Rightarrow e = \frac{\sqrt{(b^2+c^2)e}}{a\frac{1+e}{e}-c} \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 \quad \text{C.V.D.}$$

$$\frac{r_S}{d_S} = e = \frac{P}{a-c+\frac{a-c}{e}} \Rightarrow P = (a-c)(1+e) = a(1+e)(1-e) = a(1-e^2) \quad \text{C.V.D.}$$

Combinando queste relazioni si trova che:

$$r_{\min} = r_P = \frac{P}{1+e} = a(1-e) \quad ; \quad r_{\max} = r_A = \frac{P}{1-e} = a(1+e)$$

Ricordando che  $r_p = a(1-e)$  e che,  $h^2 = \mu p = \mu a(1-e^2)$  si ricava? (15)

$$\xi = -\frac{\mu}{2a}$$

che è valida per ogni conica e informa sul fatto che  $E$  dipende solo dalla lunghezza del semiasse maggiore, il quale è univocamente determinato da quanta energia possiede il sistema. Si ricordi che per le iperboli  $a < 0$ , quindi hanno energia positiva, mentre l'energia su un'orbita parabolica è nullo. Si è visto quindi che

$$h \longleftrightarrow p \qquad \xi \longleftrightarrow a$$

la combinazione dei due invece determina  $e$

$$h, \xi \longleftrightarrow e = \sqrt{1 - \frac{p}{a}} = \sqrt{1 + \frac{2Eh^2}{\mu^2}}$$

Si noti anche qui che se  $\xi < 0$ ,  $e$  è minore di 1, se  $\xi = 0$  allora  $e = 0$ , se è positivo  $e > 1$ .

Per  $h = 0$ , qualunque sia il valore di  $\xi$  si incorre in una conica degenerata  $\rightarrow$  una linea retta.

### L'orbita Ellittica

L'orbita di tutti i pianeti nel sistema solare e di tutti i satelliti attorno alla terra sono ellittiche. Essa è una curva chiusa, idealmente un corpo percorre sempre la stessa traiettoria periodo dopo periodo.

In antichità l'ellisse si tracciava con due chiodi e uno spago, i due chiodi vincolano lo spago ai due fuochi. Ciò matematicamente si traduce nella costanza della somma dei raggi uscenti dai due fuochi: in particolare, quando si è sulla linea degli apsi, la somma dei raggi eguaglia  $2a$ :

$$r' + r = 2a$$

Ciò si dimostra matematicamente partendo dall'equazione di un'ellisse in forma cartesiana:

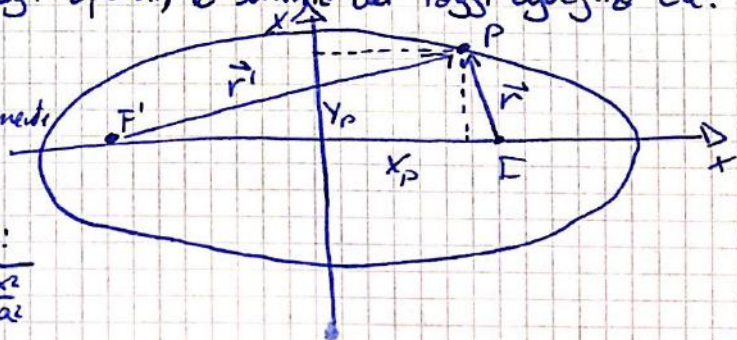
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow y = \pm b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

si era dimostrato che  $b^2 = a^2 - c^2 = a^2 - e^2 a^2 = a^2(1 - e^2)$ , per cui:

$$y^2 = (1 - e^2)x^2 + a^2(1 - e^2)$$

Dalla figura si evince inoltre che

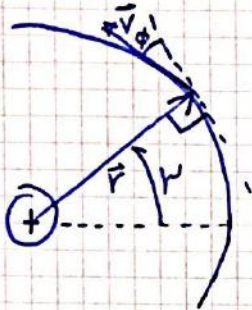
$$r^2 = (c - x)^2 + y^2 = a^2 e^2 + x^2 - 2aex + y^2 = a^2 e^2 + x^2 - 2aex - x^2 + e^2 x^2 + a^2 - a^2 e^2 = e^2 x^2 + a^2 - 2aex = (a - ex)^2$$



Confrontando le due relazioni risultano identiche, per cui si è dimostrato che l'orbita Kepleriana può essere ellittica. In particolare:

$p = \frac{h^2}{\mu}$  ;  $\frac{B}{\mu} = e$  ;  $\vec{\sigma} = \frac{\vec{B}}{\mu}$  in direzione del peristro

Altre considerazioni sull'orbita ellittica



Si vuole determinare  $\phi = f(r)$ . Si può scrivere che  $\tan \phi = \frac{N_r}{N_t} = \frac{\dot{r}}{r\dot{w}}$  e  $r = \frac{p}{1+e\cos w} \Rightarrow r(1+e\cos w) = p$

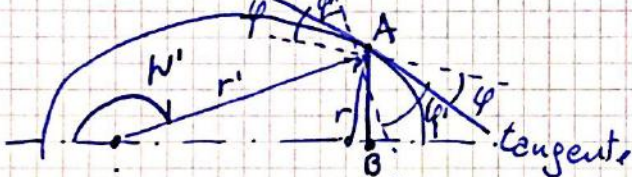
differentiando la seconda si ottiene:

$\dot{r} + e\dot{r}\cos w - er\dot{w}\sin w = \dot{p} = 0$

perché il semilatus rectum è costante. Da qui si ricava che

$\frac{\dot{r}}{r\dot{w}} = \left(\frac{1+e\cos w}{e\sin w}\right)^{-1} = \tan \phi$  dalla prima espressione.

si è trovato ciò che si cercava:  $\phi = \arctan\left(\frac{e\sin w}{1+e\cos w}\right)$



sia  $\psi$  l'angolo tra la perpendicolare al raggio e la tangente e  $\psi'$  tra la perpendicolare a  $r'$  e la tangente.

$\psi$  è proprio il flight path angle, complementare all'angolo di zenith

$AB = |\vec{r}| \sin(w) \Rightarrow |\vec{r}'| \sin(\pi - w') = |\vec{r}'| \sin w'$

si moltiplicano entrambe per e e si dividono per p

$\frac{e}{p} r \sin w = \frac{e}{p} r' \sin w' \Rightarrow \frac{e \sin w}{1+e\cos w} = \frac{e \sin w'}{1+e\cos w'}$

all'inizio del paragrafo è stato dimostrato che ciò equivale alla tangente di  $\phi$ . Per cui:

$\tan \psi = \tan \psi'$

inoltre si può dimostrare che  $\psi + \psi' = 2\psi = \angle F'AF \Rightarrow \psi$  è bisettrice perché geometricamente.



$90 - \psi + 90 - \psi' + \angle F'AF = 180^\circ$   
 $\Rightarrow 2\psi = \angle F'AF$

## L'orbita Circolare

Il cerchio è un caso particolare dell'ellisse in cui i due fuochi coincidono e  $e=0$ . Le relazioni ricavate per l'ellisse valgono anche in questo caso con alcune modifiche. Il semiasse maggiore è uguale a quello minore e pari al raggio dell'orbita. L'equazione del periodo dunque è:

$$T_p = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} r_{cs}^{3/2}$$

Per una traiettoria circolare si ha che

$$\vec{r} = \dot{\vec{r}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ r\dot{\varphi} \end{Bmatrix} ; \quad \ddot{\vec{r}} = \dot{\vec{v}} = \begin{Bmatrix} -r\dot{\varphi}^2 \\ r\ddot{\varphi} \end{Bmatrix} ; \quad \vec{F} = -\frac{\mu}{r^3} \vec{r}$$

per cui

$$-r\dot{\varphi}^2 = -\frac{\mu}{r^2} \Rightarrow r^2\dot{\varphi}^2 = \frac{\mu - v_c^2}{r} \Rightarrow \text{velocità circolare del satellite}$$

quando  $r = R_{\oplus}$  si raggiunge il limite superiore della velocità circolare, più si sale poi, più  $v_c$  diminuisce. Essa è definibile come la velocità necessaria per mettere un satellite in una certa orbita circolare ad un certo raggio. Ovviamente il satellite deve essere lanciato in direzione orizzontale a una quota pari a quella voluta.

La velocità circolare è calcolabile anche dall'energia:

$$\mathcal{E} = \frac{v_{cs}^2}{2} - \frac{\mu}{r_{cs}} = -\frac{\mu}{2a} = -\frac{\mu}{2r_{cs}} \Rightarrow v_{cs} = \sqrt{\frac{\mu}{r_{cs}}}$$

più il raggio è grande, meno velocità ci sarà.

## L'orbita parabolica

L'orbita parabolica è caratterizzata da uno dei due fuochi che tende all'infinito, con  $e=1$  e  $c \rightarrow \infty$ .

Esse è un'orbita molto rara da trovare in natura, anche se molte comete hanno orbite approssimabili come tali. È un caso limite tra traiettorie chiuse e aperte, un corpo in orbita parabolica non percorrerà lo stesso percorso la stessa volta, ma è in un viaggio di sola andata verso l'infinito.

essendo  $e=1$ , dalla formula del semilatus rectum si trova che

$$p = 2r_p \Rightarrow r_p \text{ è il raggio del periastro}$$

non esiste nessun apoastro perché esso tende all'infinito

L'equazione cartesiana dell'iperbole è:

(21)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

per  $y=0$   $x=a$  e  $x=-a$

si sceglie  $x=-a$  (si noti che  $e = \frac{c}{a}$ )

ho  
otto  
io

$$x = c - r_p = -a$$

perché  $e = \frac{r_p}{d_p} \rightarrow -a$

direttrice è centrale

allora  $c = -a(1+e)$

è il nuovo  $e > 1$

$$e = \frac{c}{a} > 1 \quad c^2 = a^2 + b^2 \quad \Rightarrow \quad c = -\sqrt{a^2 + b^2}$$

da infinito si ha una discontinuità e  $c$  diventa negativo:

Dal disegno si può scrivere che

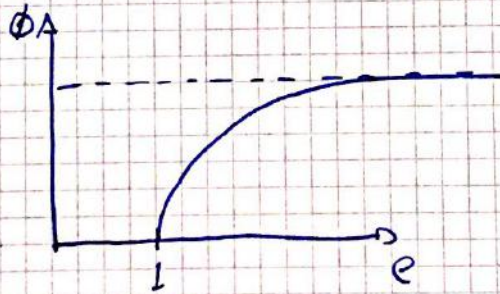
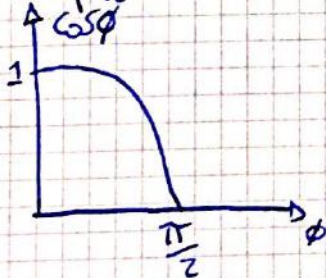
$$\begin{cases} p \cos \alpha = x \\ p \sin \alpha = y \end{cases} \Rightarrow \frac{p^2}{a^2} \cos^2 \alpha - \frac{p^2}{b^2} \sin^2 \alpha = 1$$

$$p^2 b^2 \cos^2 \alpha - p^2 a^2 \sin^2 \alpha = a^2 b^2 > 0$$

$$b^2 \cos^2 \alpha > a^2 \sin^2 \alpha \Rightarrow \tan^2 \alpha < \frac{b^2}{a^2} = \tan^2 \phi = \frac{c^2 - a^2}{a^2} = e^2 - 1$$

$$\rightarrow \frac{1}{e^2} = \cos^2 \phi$$

Graf. Lomente:



Velocità iperbolica  $\rightarrow$  ecceso iperbolico di velocità

Con la velocità di fuga, una sonda avrà a mala pena l'energia per scappare dal campo gravitazionale,  $v_{\infty} \rightarrow 0$ .

Se si dà più energia,  $v_{\infty} \rightarrow K$  una certa costante positiva, questo è l'eccesso iperbolico di velocità, tale si può calcolare tramite l'energia che si conserva tra Burnout e infinito:

## Velocità Cosmiche

(23)

Le velocità cosmiche sono 4 e vengono prese come velocità di riferimento. Esse sono riferite a missioni non realistiche ma limite.

1. La velocità che un satellite dovrebbe avere per avere un'orbita circolare di raggio terrestre.

$$v_c = \sqrt{\frac{\mu_{\oplus}}{R_{\oplus}}} = 7.91 \text{ Km/s} \Rightarrow v_1$$

che è la velocità cosmica circolare massima che si può ottenere sulla terra.

2. La velocità che un satellite deve avere per uscire dalla sfera d'influenza del campo gravitazionale terrestre partendo dalla superficie.

$$v_{esc} = \sqrt{2} v_c = \sqrt{2 \frac{\mu_{\oplus}}{R_{\oplus}}} = 11.2 \text{ Km/s} \Rightarrow v_2$$

3. La velocità che un satellite dovrebbe avere sulla superficie terrestre per uscire dalla sfera d'influenza dell'intero sistema solare. Con la velocità 2 si esce solo dalla sfera d'influenza della terra, e come se si finisse sull'orbita terrestre ma fuori della terra. Esso avrà un raggio di:  $1 \text{ UA} \approx 149.5 \cdot 10^6 \text{ km}$ . Con una velocità circolare di:  $v_{c,earth} = \sqrt{\frac{\mu_{\oplus}}{1 \text{ UA}}}$ , da cui

$$v_{c,earth} = 29.77 \text{ Km/s}$$

La velocità di fuga dall'orbita terrestre sarà  $\sqrt{2} v_{c,earth}$

$$v_{esc,earth} = 42.10 \text{ Km/s}$$

L'eccesso iperbolico di velocità del satellite uscente dall'orbita terrestre sarà  $v_{hyp} = v_{esc,earth} - v_{c,earth} = 12.33 \text{ Km/s}$

La terza velocità cosmica sarà dunque:

$$v_{esc,sist} = \sqrt{2 \frac{\mu_{\oplus}}{R_{\oplus}} + v_{hyp}^2} = 16.65 \text{ Km/s} \Rightarrow v_4$$

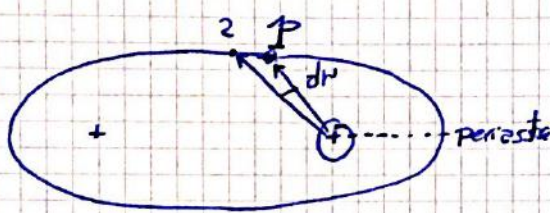
dove si è fatto un bilancio di energia tra un punto sulla superficie terrestre e  $R \rightarrow \infty$  rispetto alla terra.

# Posizione e Velocità in funzione del tempo

ES

Più avanti si parlerà di "anomalia vera" e "anomalia eccentrica", parametri utilizzati per descrivere l'orbita dei pianeti. Tali nomi sono rimasti invariati dai tempi di Keplero, il quale li conios nei propri studi. Egli non era a conoscenza della possibilità di avere orbite paraboliche o iperboliche, tuttavia tali concetti sono facilmente applicabili anche a tali traiettorie.

È possibile derivare equazioni del tempo orbitale in maniera analitica, utilizzando solo la dinamica e l'integrazione numerica  
Equazioni per l'orbita ellittica



$$v_t = r \dot{W}$$

$$h = r \cdot v_t = r^2 \dot{W} = \frac{h}{r^2}$$

Per un cerchio:  $A = \frac{\pi R^2 W}{2\pi} \Rightarrow \frac{R^2}{2} W \rightarrow$  area del settore circolare percorso  
 si è divisa l'area totale per l'angolo totale e moltiplicato per l'anomalia vera  $W$ .

In un'orbita circolare l'angolo  $dW$  può essere calcolato analogamente:

$$\frac{R^2}{2} dW = \frac{dA}{dt} dt \Rightarrow \frac{R^2}{2} \dot{W} = \frac{dA}{dt}$$

Per un'ellisse il discorso è analogo, perché dalla seconda legge di Keplero la velocità areolare è costante:

$$\frac{dA}{dt} = \text{cost} = \left(\frac{h}{2}\right) = \frac{A_{tot}}{T_p} \Rightarrow T_p = 2 \frac{A_{tot}}{h}$$

L'area dell'ellisse è pari a  $A_{tot} = \pi ab$

il momento angolare è pari a  $h = \sqrt{\mu p} = \sqrt{\mu a(1-e^2)}$

Sostituendo:

$$T_p = \frac{2\pi ab}{\sqrt{\mu a(1-e^2)}} = \frac{(2\pi)^2 a^2 b^2}{\mu a(1-e^2)} = \frac{2\pi b \sqrt{a}}{\sqrt{\mu(1-e^2)}} = \frac{2\pi \sqrt{a^2 \cdot a^2(1-e^2)}}{\sqrt{\mu a(1-e^2)}}$$

$$= \frac{2\pi \sqrt{a^3 \mu}}{\mu}$$

→ Ciò ha dimostrato la terza legge di Keplero, ovvero che il quadrato del periodo è proporzionale alla distanza media

$$a = \frac{r_p + r_a}{2}$$

L'ultima è solo una parte del settore circolare COP, la cui area è: (22)

$$COP = \frac{1}{2} a^2 E \quad (\text{si noti che per } 2\pi = E \rightarrow \pi a^2)$$

in particolare:

$$ICP = COP - OIC = \frac{1}{2} a^2 E - \frac{1}{2} a^2 \cos E \sin E$$

per cui

$$IP1 = \frac{b}{a} a^2 \left( \frac{1}{2} E - \frac{1}{2} \cos E \sin E \right) = \frac{ab}{2} (E - \sin E \cos E)$$

e quindi:

$$A_1 = ab \left[ \frac{1}{2} (E - \sin E \cos E) - \frac{1}{2} (e \sin E - \sin E \cos E) \right]$$

$$A_1 = \frac{ab}{2} (E - e \sin E)$$

per calcolare il tempo  $t_1$ :

$$t_1 = \frac{A_1}{A_{ellisse}} T_p = \frac{\frac{ab}{2} (E_2 - e \sin E_2)}{ab \pi} \cdot 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} (E_2 - e \sin E_2)$$

$$t_{12} = t_2 - t_1 = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} (E_2 - E_1 - (e \sin E_2 - e \sin E_1))$$

il tempo viene calcolato dal periastro, per cui, da un angolo all'altro viene calcolato per differenza.

Si definisce "anomalia media"  $M$  la funzione:

$$M = E - e \sin E$$

Se si chiamasse  $n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$ , si può scrivere

$$M = n (t - T_p k)$$

questa è detta l'Equazione di Keplero.

Il passo finale della trattazione è relazione l'anomalia vera con l'anomalia eccentrica:

$$\cos E = \frac{a e + r \cos w}{a}$$

si sa che il raggio  $r$  è pari a:

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos w}, \text{ si può scrivere: } \cos E = \frac{e + \cos w}{1 + e \cos w}$$

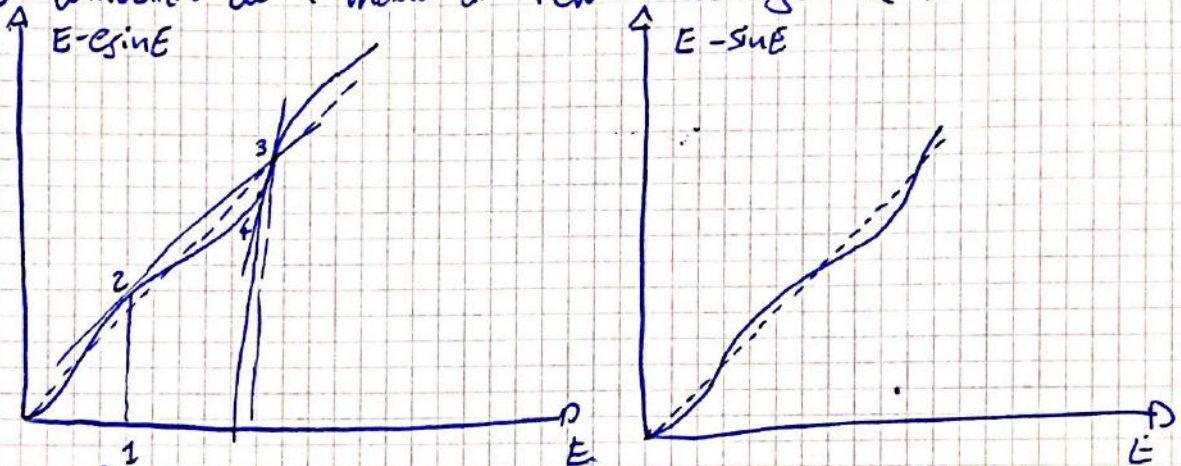


per cui:

$$h(t-T) = \frac{P}{\sqrt{1-e^2}} \int_0^E r dE = \frac{Pa}{\sqrt{1-e^2}} \int_0^E (1 - e \cos E) dE = \frac{Pa}{\sqrt{1-e^2}} (E - e \sin E) \quad (28)$$

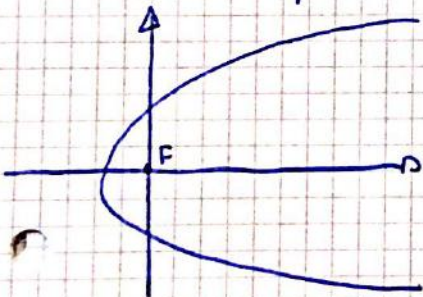
si noti che  $h = \sqrt{\mu p}$ , sostituendo si ritrova quanto trovato in discreto.

Il problema può essere risolto benissimo per via numerica perché è dimostrato che il metodo di Newton converge con ordine 2:



Generalizzazione del problema temporale a orbite paraboliche e iperboliche

Per un'orbita parabolica, il tempo può essere trovato per via analitica

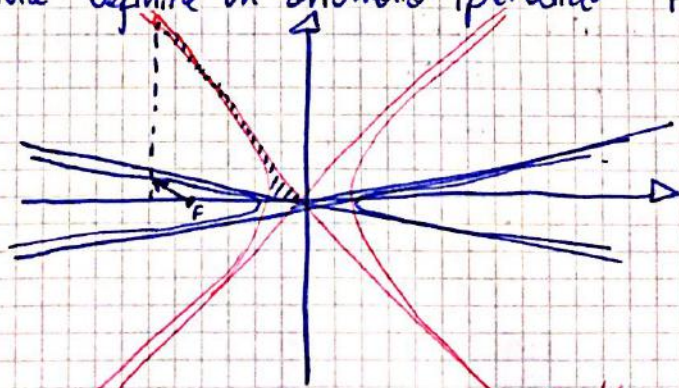
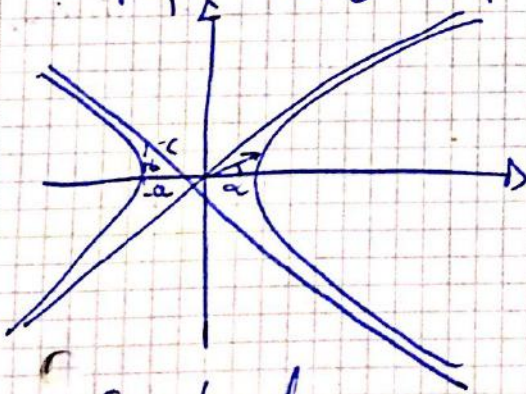


come:

$$t-T = \frac{1}{2\sqrt{\mu}} \left[ pD + \frac{1}{3} D^3 \right]$$

con  $D = \sqrt{p} \tan \frac{w}{2}$ , ovvero funzione solo dell'anomalia vera una volta fissate l'orbita. La D viene chiamata "anomalia eccentrica parabolica".

In perfetta analogia è possibile definire un'"anomalia iperbolica" F



Saputo che per una iperbole:

$$\begin{aligned} x &= \cosh(w) \\ y &= \sinh(w) \end{aligned}$$

• Sistema Eliocentrico/Eclittico (31)

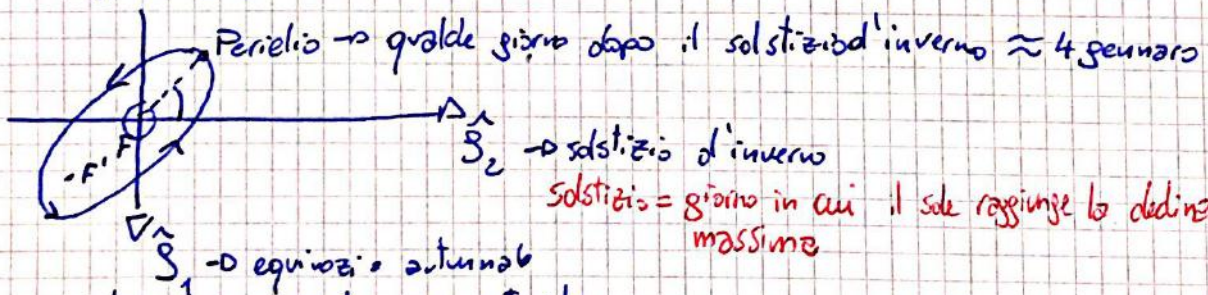
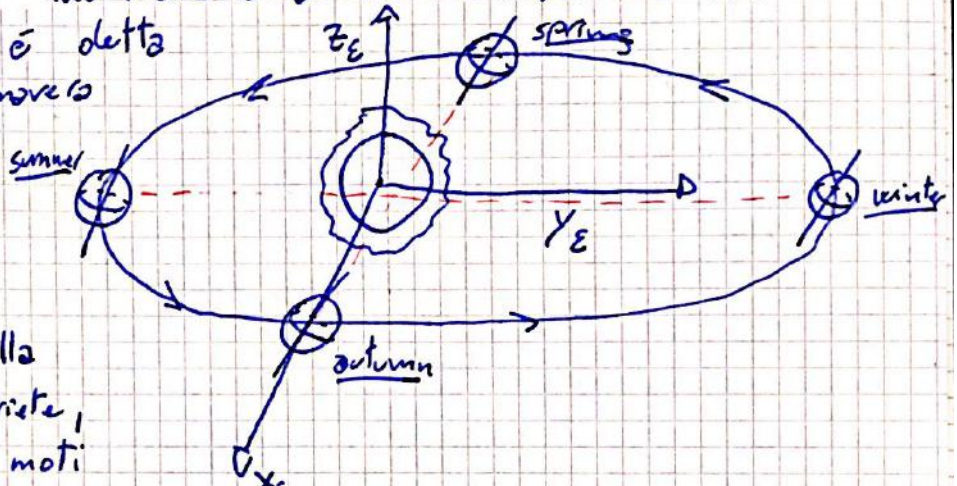
Come suggerisce il nome esso è centrato nel centro di massa del sole e il piano fondamentale è quello dell'eclittica, ovvero il piano orbitale terrestre.

La direzione  $x$  è data dall'intersezione dell'eclittica con il piano equatoriale terrestre (linea degli equinozi). Nel primo giorno di primavera, il vettore che parte dalla terra e punta il sole individua la direzione e il verso di tale asse.

La direzione  $x$  è detta equinozio di primavera (vernal equinox),

in astronomia è indicato con il simbolo  $\Upsilon$  perché puntava sempre alla costellazione dell'ariete, tuttavia, per i moti millenari, la terra sposta il suo asse degli equinozi nel giro di secoli, per via del moto detto "precessione" degli equinozi.

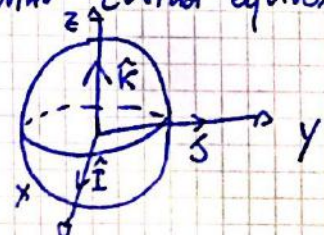
Ciò è un fattore che indica la non-inerzialità del sistema eliocentrico ma in prima approssimazione va bene. Se si desidera una precisione molto alta sarà necessario definire  $x-y-z$  rispetto alle stelle fisse, oppure come sistema eliocentrico in una determinata epoca celeste.



• Sistema geocentrico-equatoriale

Esso ha come origine il centro di massa terrestre, il piano fondamentale è l'equatore e l'asse  $x$  punta l'equinozio d'autunno (vernal equinox)

L'asse  $z$  punta nella direzione del polo nord. Si noti che come suo stati definiti: gli assi che il sistema non è solidale alla terra e non ruota con essa, ma è fissa. (N.B. trasloca con la terra)



# La Misura del Tempo

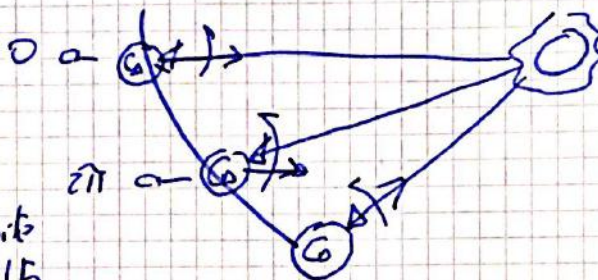
(33)

Il tempo viene misurato in ore - minuti - secondi, tale tipo di tempo viene detto "tempo solare medio" ed è quello indicato dagli orologi.

Esiste un altro tipo di tempo, detto "siderale". Si vedrà ora come sono definiti.

Essendo il sole l'elemento che crea i cicli di giorno e di notte, è possibile trovare un "giorno solare apparente" come il tempo per cui il sole transita due volte sopra lo stesso meridiano. Apparente perché in realtà la terra deve ruotare un po' più di 2π perché

ciò avvenga, perché anche la terra si muove attorno al sole, ogni giorno si muove di circa  $\frac{1}{365}$  dell'angolo giro (perché l'orbita terrestre ha eccentricità molto prossima allo 0).



Il giorno siderale consiste di 24 ore siderali ed è definito dal tempo che impiega la terra a percorrere 2π attorno al suo asse di rotazione. Il giorno solare apparente definito prima è quello utilizzato negli orologi ed è formato da 24 ore solari.

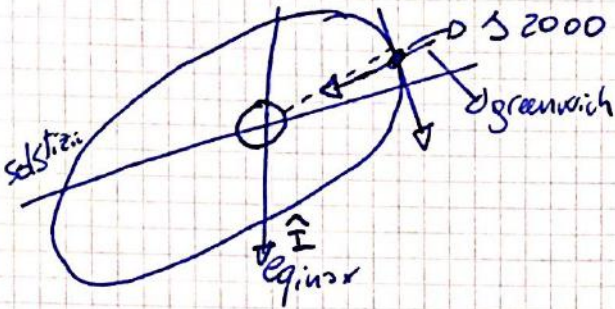
24 ore siderali	=	23h 56 min 4 sec	ore solari
1,002737 giorni sid.	=	1 giorno solare	
24h 03m 56s siderali	=	24 ore solari	
1 giorno siderale	=	0,9972685664	giorni solari

In realtà, da come è definito il tempo solare, non saranno mai due giorni uguali in durata durante l'anno, perché l'orbita è leggermente ellittica e perché l'equatore non giace sull'orbita.

Perché il tempo su cui si definiscono le 24 ore solari è quello "Medio" sull'anno.

La Terra è divisa in 24 spicchi larghi 15°, ognuno dei quali ha un ora solare di ±1 ora rispetto agli spicchi adiacenti, il riferimento è il meridiano di Greenwich (Greenwich Mean Time GMT) detto anche Tempo universale.

Un giorno importante per il sistema di riferimento inerziale è il J2000, ovvero il mezzogiorno (UT) del 1° gennaio dell'anno 2000 del calendario gregoriano, ovvero il 2451 545esimo giorno del calendario giuliano. Al J2000 vengono definiti gli assi di un sistema di riferimento



ECI, in modo da calcolare l'inclinazione del meridiano di Greenwich rispetto a questa terra secondo la distanza temporale tra il punto da misurare e il J2000.

Il Tempo astronomico dunque inizia dal J2000 e si misura in anni giuliani, onde se, essi sono giorni del calendario gregoriano. Il giuliano sta ad indicare il giorno di partenza - Julian day.

$$J = 2000 + X = 2000 + \frac{\text{giorni} - 2451545}{36525}$$

Loanno (cal. gregoriano)      Cal. giuliano

il sistema di riferimento J2000 sarà inclinato di un certo angolo rispetto all'ECI di quel giorno che varia tra l'altro inclinazione per via della precessione degli equinozi. → **280,46 gradi**

### Ciclo Giuliano

Il ciclo giuliano è il giorno di inizio del periodo giuliano, un periodo di 7880 anni che parte da lunedì 1° gennaio dell'anno 4713 A.C. del calendario giuliano (4714 A.C., 24 novembre del calendario gregoriano).

Il giorno giuliano (Julian Day) è importante perché è l'inizio di diversi cicli astronomici (ciclo lunare, ciclo solare, ciclo di indicizzazione). Il primo è anche detto ciclo mebanico, dura ≈ 18 anni (235 mesi lunari di ≈ 29,5 giorni), è il ciclo con cui la luna e il giorno coincidono (luna in un determinato punto a una determinata ora). Il secondo è il ciclo solare (4x7=28 anni) in cui il primo giorno della settimana coincide col 29 di febbraio, giorno aggiuntivo dell'anno bisestile. L'ultimo ciclo riguarda l'indicizzazione dei documenti nel medioevo.

Tale posizione, per via dello spostamento degli equinozi, viene raggiunta circa 18 minuti prima di una rivoluzione completa (N.B. 18min per 26000 anni = 1 anno).

L'anno siderale è il tempo che il sole impiega a ritornare nella stessa posizione relativa nei confronti della terra rispetto alle stelle fisse. Esso corrisponde al periodo orbitale.

Anno Siderale = 365 gg, 6 ore, 9 min, 10 sec. SOLARI

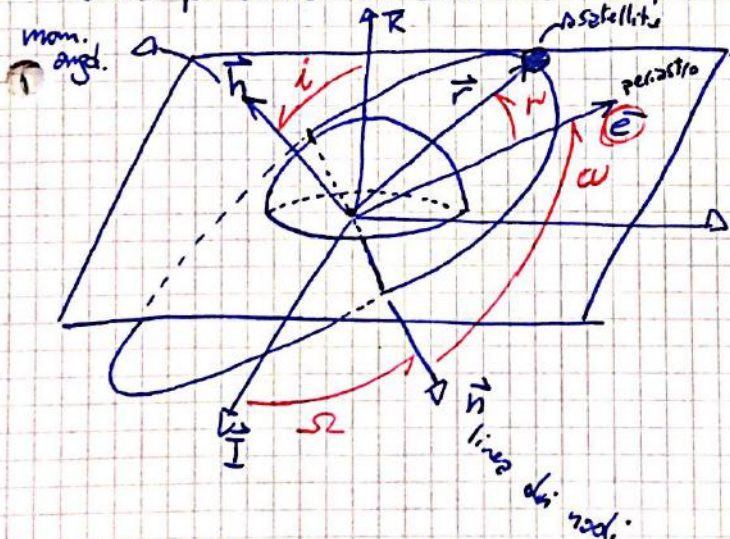
Il calendario gregoriano si basa sul ciclo delle stagioni, quindi sul tempo solare e sull'anno tropico (o solare)

Anno tropico = 365 gg, 5h, 48min, 46 secondi SOLARI  
per compensare le 5h e 48min, ogni 4 anni si

aggiunge un giorno (anno di 366 giorni). Per compensare gli 11 minuti in "eccesso" dell'anno bisestile, ogni 128anni l'anno bisestile ha 365 giorni come gli anni normali. in particolare 3anni bisestili ogni 400 anni solo di 365giorni: quelli multipli di 100 ma non di 400.

### Parametri Orbitali Classici

Bastano solo 5 parametri indipendenti per descrivere un'orbita in termini di dimensione, forma e orientamento nello spazio tridimensionale. Un sesto parametro aggiuntivo è necessario per puntare il satellite e individuare la sua posizione ad un determinato tempo.



- $a$  → semiasse maggiore
- $e$  → eccentricità
- $i$  → inclinazione (tra  $\vec{r}$  e  $\vec{h}$ )
- $\Omega$  → longitudine nodo ascendente ( $\vec{I}-\vec{n}$ )
- $\omega$  → argomento periastrone ( $\vec{n}-\vec{e}$ )
- $\nu$  → anomalia vera ( $\vec{e}-\vec{r}$ )

La longitudine del nodo ascendente è l'angolo nel piano equatoriale tra il vettore  $\vec{I}$  e il punto in cui il satellite fora il piano equatoriale verso nord. L'argomento del Periastrone è l'angolo tra la linea dei nodi e il periastrone, misurato in verso di movimento del satellite.

## Determinazione dei parametri orbitali (da $\vec{r}$ e $\vec{v}$ )

33

Si sa che da energia e momento angolare si possono ricavare rispettivamente  $a$  e  $p$ , da cui  $p = a(1 - e^2)$  si può ricavare l'eccentricità. Quest'ultima è possibile calcolarla anche tramite il vettore costante d'integrazione come:

$$\frac{\vec{B}}{\mu} = \frac{\vec{v} \wedge \vec{h}}{\mu} - \frac{\vec{r}}{r} = \vec{e}$$

Si noti che tutti e tre questi parametri ( $p, a, e$ ) sono calcolabili una volta noti  $\vec{r}$  e  $\vec{v}$ .

$$\vec{r}, \vec{v} \begin{cases} \rightarrow \vec{h} \rightarrow p \\ \rightarrow \vec{e} \rightarrow a \\ \rightarrow \frac{\vec{B}}{\mu} \rightarrow e \end{cases} \quad \vec{h} \rightarrow \frac{\vec{h} \times \vec{K}}{|\vec{h} \times \vec{K}|} = -\vec{n} \rightarrow \text{vettore dei nodi}$$

Per chiudere il problema di determinazione dei parametri orbitali bisogna trovare gli angoli tra i vettori, per fare ciò si ricorda che:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \alpha \rightarrow \cos \alpha = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{AB}$$

alò quale si deve aggiungere un'altra condizione visto che il  $\cos \alpha$  ha due soluzioni genericamente ( $\alpha$  e  $-\alpha$ )

$$\bullet \Omega = \arccos(\vec{I} \cdot \vec{n}) \begin{cases} \in (0, \pi) \text{ se } n_y \text{ è positivo} \\ \in (\pi, 2\pi) \text{ se } n_y \text{ è negativo} \end{cases}$$

$$\bullet \omega = \arccos(\vec{n} \cdot \vec{p}) \begin{cases} \in (0, \pi) \text{ se } p_z \text{ è positivo} \\ \in (\pi, 2\pi) \text{ se } p_z \text{ è negativo} \end{cases}$$

$$\bullet i = \arccos\left(\frac{\vec{K} \cdot \vec{h}}{|\vec{h}|}\right) \begin{cases} \in (0, \frac{\pi}{2}) \text{ se } w_z \text{ è positivo} \\ \in (\frac{\pi}{2}, \pi) \text{ se } w_z \text{ è negativo} \end{cases}$$

$$\bullet \nu = \arccos\left(\frac{\vec{r} \cdot \vec{p}}{r}\right) \begin{cases} \in (0, \pi) \text{ se } \vec{r} \cdot \vec{v} > 0 \\ \in (\pi, 2\pi) \text{ se } \vec{r} \cdot \vec{v} < 0 \end{cases}$$

## Determinazione di $\vec{r}$ e $\vec{v}$ (da parametr. orbitali)

È il problema inverso del paragrafo precedente, si assume che consistere tutti e 6 i parametri orbitali e si vogliono calcolare posizione e velocità. Esso serve per aggiornare la posizione di un satellite nel tempo, conoscendo la sua orbita. Si noti che 5 parametri su 6 sono fissi, l'unica variabile è l'anomalia vera.

Ma il modulo, la direzione e il verso del vettore non cambiano. (4)

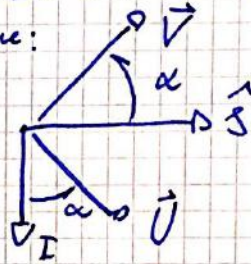
Si noti che se si ragiona solidamente al sistema di riferimento, una trasformazione va a variare la direzione relativa, ma non il modulo, non il verso, non il punto di applicazione del vettore. Il cambiamento di base può essere effettuato moltiplicando i vettori per una matrice detta "di trasformazione".

Si supponga di avere un sistema ISK e uno UVW, un vettore  $\vec{a}$  è espresso secondo ISK come:

$$\vec{a} = a_I \hat{I} + a_S \hat{S} + a_K \hat{K}$$

e secondo UVW come

$$\vec{a} = a_U \hat{U} + a_V \hat{V} + a_W \hat{W}$$



Si supponga che venga effettuata una trasformazione tramite una semplice rotazione <sup>positiva</sup> attorno all'asse  $\hat{K} \equiv \hat{W}$ , che fa coincidere ISK con UVW. Si può scrivere che

$$\begin{Bmatrix} \hat{U} \\ \hat{V} \\ \hat{W} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \hat{I} \cos \alpha + \hat{S} \sin \alpha \\ -\hat{I} \sin \alpha + \hat{S} \cos \alpha \\ \hat{K} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{I} \\ \hat{S} \\ \hat{K} \end{Bmatrix}$$

$$\vec{a} = a_U \hat{U} + a_V \hat{V} + a_W \hat{W} = a_U (\hat{I} \cos \alpha - \hat{S} \sin \alpha) + a_V (\hat{I} \sin \alpha + \hat{S} \cos \alpha) + a_W \hat{K}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_U \cos \alpha - a_V \sin \alpha = a_I \\ a_U \sin \alpha + a_V \cos \alpha = a_S \\ a_W = a_K \end{cases}$$

$$\begin{Bmatrix} a_I \\ a_S \\ a_K \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ +\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_U \\ a_V \\ a_W \end{Bmatrix}$$

$$L_{ISK-UVW} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ +\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = L_{UVW-ISK}^T$$

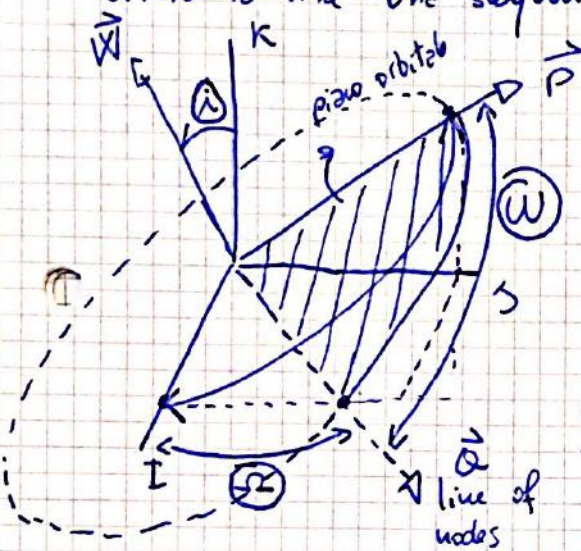
In seguito  $L_i^s$  indicherà la matrice di rotazione attorno all'iesimo asse e sarà la rotazione numero s.

Generalizzando per tutti e tre gli assi, si può scrivere che:

$$L_3^T = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ +\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad L_2^T = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & +\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad L_1^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & +\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

Gli angoli trovati,  $\phi, \Omega, \psi$  sono detti angoli di Eulero, bastano solo tre rotazioni per far coincidere due sistemi di riferimento. (43)

I tre assi descritti nelle rotazioni hanno senso geometrico, ma non orbitale. Si immagina nuovamente di passare dal sistema geocentrico equatoriale a un sistema perifocale (in questa rotazione chiamato  $\hat{P}\hat{Q}\hat{W}$ ) È possibile la trasformazione tramite una matrice di rotazione  $[R]$  definite stavolta non come  $L_3^1 - L_2^2 - L_1^3$  ma come  $L_3^1 L_2^2 - L_1^3$  ovvero tramite una sequenza 3-1-3.



1. Si ruota la terna in modo da portare  $\hat{I}$  sulla linea dei nodi
2. Si ruota  $\hat{K} \equiv \hat{K}'$  in modo da inclinare il piano  $\hat{P}\hat{Q}$  di  $i$ , inclinazione
3. Si ruotano  $\hat{P}$  e  $\hat{Q}$  in modo da portare  $\hat{P}$  in direzione del periastrio

Così facendo, la matrice di trasformazione tra un sistema e l'altro si può calcolare come:

$$\vec{p}_{paw} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos \omega & \sin \omega & 0 \\ -\sin \omega & \cos \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\hat{I}'' \equiv \hat{P}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & \sin i \\ 0 & -\sin i & \cos i \end{bmatrix}}_{\hat{K}'' \equiv \hat{W}} \underbrace{\begin{bmatrix} \cos \Omega & \sin \Omega & 0 \\ -\sin \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\hat{I}' \equiv \text{nodes}} \cdot \vec{a}_{ISK} \rightarrow [R]^T$$

Il cui prodotto è:

$$[R] = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Omega \cos \omega - \sin \Omega \sin \omega \cos i & -\cos \Omega \sin \omega - \sin \Omega \cos \omega \cos i & \sin \Omega \sin i \\ \sin \Omega \cos \omega + \cos \Omega \sin \omega \cos i & -\sin \Omega \sin \omega + \cos \Omega \cos \omega \cos i & -\cos \Omega \sin i \\ \sin \omega \sin i & \cos \omega \sin i & \cos i \end{bmatrix}$$

Un metodo alternativo per ricavare la matrice è proiettare i vettori di base del sistema perifocale sugli assi ISK

$$[R] = \begin{bmatrix} \hat{I} \cdot \vec{P} & \hat{I} \cdot \vec{Q} & \hat{I} \cdot \vec{W} \\ \hat{J} \cdot \vec{P} & \hat{J} \cdot \vec{Q} & \hat{J} \cdot \vec{W} \\ \hat{K} \cdot \vec{P} & \hat{K} \cdot \vec{Q} & \hat{K} \cdot \vec{W} \end{bmatrix} : \vec{a}_{ISK} = [R] \vec{a}_{paw}$$

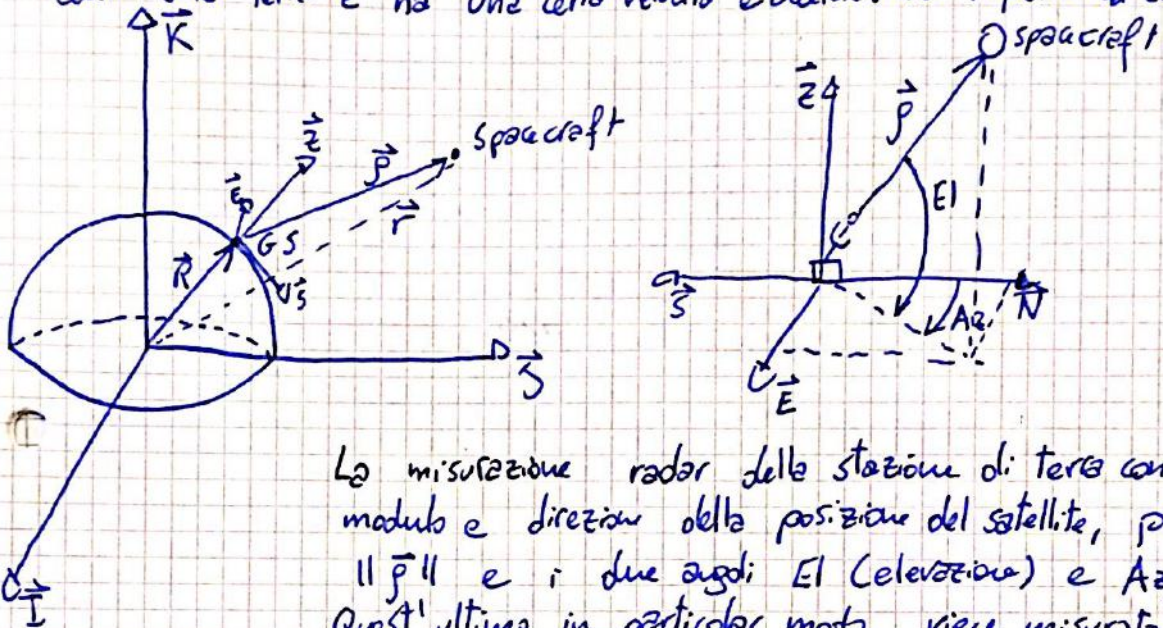
È possibile dimostrare l'equivalenza delle due semplicemente ricordando le regole dei seni nei triangoli sferici:  $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$



## Determinazione dell'orbita con una sola misurazione Radar

(45)

Il problema proposto in questo paragrafo è la determinazione del raggio e della velocità del satellite relativamente a una stazione di terra, e tramite essa trovarne i valori inerziali sapendo che essa non si trova al centro della terra e ha una certa velocità e accelerazione rispetto ad essa.



La misurazione radar della stazione di terra consiste di modulo e direzione della posizione del satellite, per cui  $\|\vec{p}\|$  e i due angoli EI (Elevation) e Az (Azimuth). Quest'ultimo in particolar modo viene misurato in senso orario dalla direzione nord (angolo all'heading).

Se la stazione è capace di misurare lo shift di frequenza del beacon che manda, la stazione può conoscere anche il valore di  $\dot{p}$ , mentre il rate di spostamento dell'antenna a terra riesce a risolvere anche Az. e EI.

È quindi possibile esprimere i vettori velocità e posizione nel sistema SEZ, come segue:

$$\begin{cases} p_S = -p \cos EI \cos Az \\ p_E = p \cos EI \sin Az \\ p_Z = p \sin EI \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{p}_S = -\dot{p} \cos EI \cos Az + EI \dot{p} \sin EI \cos Az + Az \dot{p} \cos EI \sin Az \\ \dot{p}_E = \dot{p} \cos EI \sin Az - EI \dot{p} \sin EI \sin Az + Az \dot{p} \cos EI \cos Az \\ \dot{p}_Z = \dot{p} \sin EI + p \cos EI \dot{EI} \end{cases}$$

Per quanto riguarda la posizione, una semplice relazione non basta, i due sistemi sono centrati in punti diversi, per cui sussisterà una relazione del tipo

$$\vec{r} = \vec{R}_\oplus + \vec{p} \quad ; \quad \text{dove } \vec{R}_\oplus = R_\oplus \hat{z} \quad \text{in assi SEZ}$$

ovviamente è solo un'approssimazione se la terra venisse approssimata ad una sfera. Ciò non è vero purtroppo, per non incorrere in errori di migliaia sulle posizioni  $\vec{r}$ , sarà necessario sviluppare un modello più accurato.

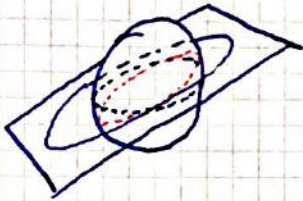
# Ground Track of a satellite

(7)

Oltre a calcolare e visualizzare un'orbita partendo dai parametri orbitali o dagli avviamenti, è anche molto importante la traccia che il satellite lascia sulla Terra. Infatti sapere dove il satellite passerà o dove è passato serve in molte applicazioni: militari e civili.

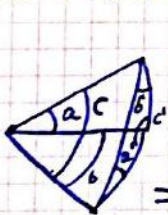
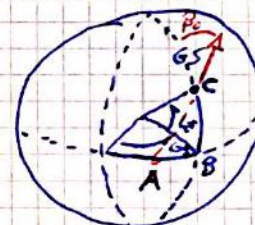
## Caso semplice: Terra NON rotante

Si sa che l'orbita di un corpo Kepleriano sta sempre nel piano orbitale in un sistema ECI, la intersezione con la superficie terrestre di tale piano è un grande cerchio. Nel caso in cui la Terra non ruoti il satellite ritraccerebbe sempre la stessa curva over and over, ovvero passerebbe sempre sugli stessi punti terrestri. Bisogna inoltre notare che la latitudine massima della ground track è proprio pari all'inclinazione dell'orbita  $i$  (per retrograde  $180^\circ - i$ ). Inoltre essa dipende dal sito di lancio del satellite, in particolare:

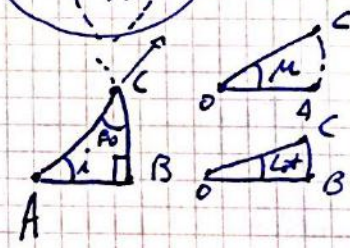


Ground Track

Supponendo che un satellite sia stato lanciato da un punto C caratterizzato da una Latitudine  $Lat_0$  e una longitudine  $Long$  e che il lancio sia avvenuto con un azimuth  $\beta_0$ , il punto A è quello in cui la Ground Track buca l'equatore terrestre e ha inclinazione  $i$ . Dalle relazioni dei triangoli sferici, si può ricavare che:



$$\begin{cases} \cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha \\ \cos b = \dots \\ \cos c = \dots \\ \Rightarrow \cos c' = -\cos b' \cos b + \sin b' \sin b \cos C \end{cases}$$



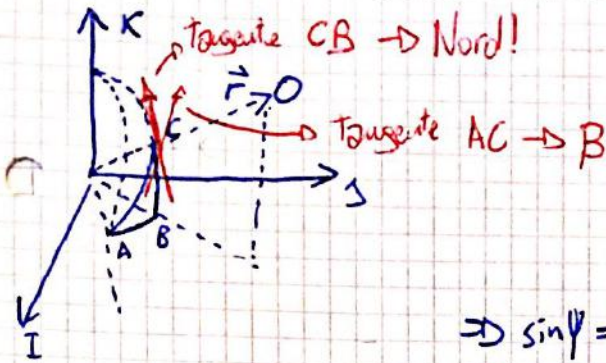
per cui

nel nostro caso:

$$\cos i = -\cos 90^\circ \cos \beta_0 + \sin \beta_0 \sin 90^\circ \cos Lat = \sin \beta_0 \cos(Lat)$$

Da questa relazione si evince che:

- per orbite dirette  $\cos i > 0 \Rightarrow \beta_0 \in [0^\circ, 180^\circ]$  (Lat è definito da  $-90$  a  $90$   $\rightarrow$  è sempre positivo il cos)
- l'inclinazione minima ottenibile per  $\beta_0$  deve essere massimizzato  $\rightarrow$  per  $\beta_0 = 90^\circ \rightarrow Lat = i$
- se  $Lat \neq 0 \rightarrow$  orbita non può essere equatoriale  $\rightarrow$  manovre successive per cambiare  $i \rightarrow$  molto dispendiosa.



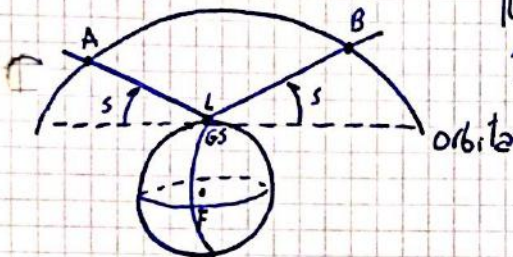
le due rette tangenti sono inclinate di un angolo  $\psi \rightarrow$  Angolo di Heading

$$\frac{\sin(\pi - \psi)}{\sin \frac{\pi}{2}} = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - i)}{\sin(\frac{\pi}{2} - \text{Lat})} \quad \text{stessa da prima } (49)$$

$$\Rightarrow \sin \psi = \frac{\cos i}{\cos \text{Lat}} \rightarrow \text{punto più alto della ground track } i = \text{Lat} \rightarrow \psi = 90^\circ$$

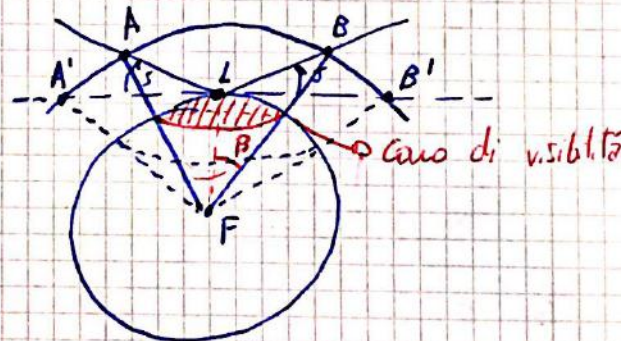
Approfondimento  $\rightarrow$  Trazzatorie Ortodromiche

Cono di Visibilità



Il cono di visibilità è un cono con semiangolo  $\beta$  e Raggio  $R_\oplus$  che ha vertice nel centro della terra e marca una certa area della superficie terrestre. Tale area è pari all'area di mappa in cui un generico satellite risulta in vista dalla stazione di terra (se la ground track passa dentro tale area).

Nel caso ideale in cui la terra sia una sfera perfetta senza rilievi, tale cono sarebbe quello tratteggiato, in quanto il satellite diventa visibile.

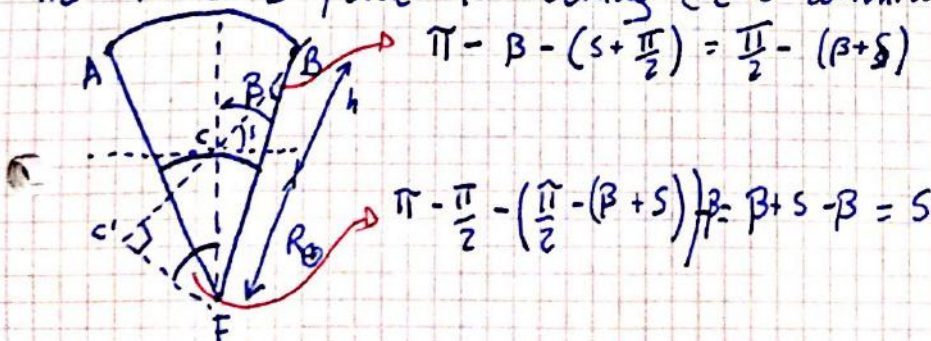


a elevazione: nulla  $\delta = s \approx 0^\circ$ .

In verità ciò non avviene per via dei rilievi terrestri e i vari effetti di diffrazione/rifrazione ottica dell'atmosfera e basse elevazioni. In realtà quindi:

$$\delta = s > 0^\circ \quad s \approx 20^\circ \div 30^\circ$$

Se lo spacecraft si trova nel semicirco AFL  $\rightarrow$  orbitalmente si trova tra A e B, allora il tracking (e la comunicazione) risulta possibile



$$\pi - \frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{2} - (\beta + s)) = \beta + s - \beta = s$$

Il  $\delta$  può essere calcolato in maniera semplice come:

$$\vec{OL} \cdot \vec{OM} = |\vec{OL}| |\vec{OM}| \cos \delta$$

$$\Rightarrow \delta = \arccos \left( \frac{\vec{OL} \cdot \vec{OM}}{R_{\oplus}^2} \right)$$

se  $\vec{OM}$  non è noto, si usa  $\vec{r}$

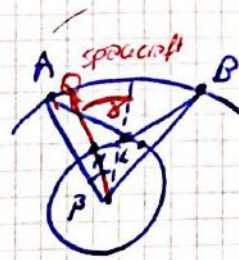
$$\vec{OL} \cdot \vec{r} = |\vec{OL}| |\vec{r}| \cos \delta$$

$$\Rightarrow \delta = \arccos \left( \frac{\vec{r} \cdot \vec{OL}}{|\vec{r}| \cdot R_{\oplus}} \right)$$

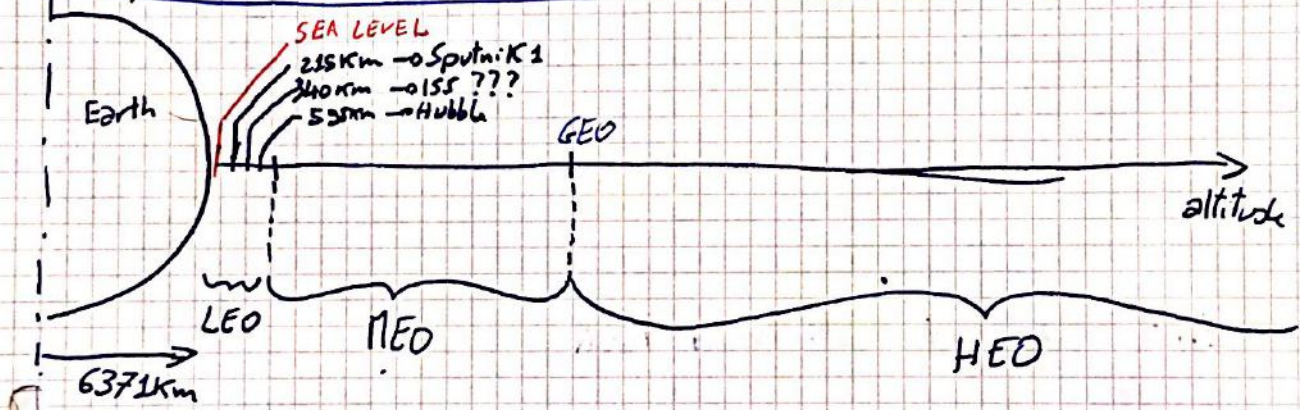
In particolare si trova che:

$$\vec{OL} = \begin{cases} |\vec{OL}| \cos(\text{Lat}_{\oplus}) \cos(\text{Long}_{\oplus}) \\ |\vec{OL}| \cos(\text{Lat}_{\oplus}) \sin(\text{Long}_{\oplus}) \\ |\vec{OL}| \sin(\text{Lat}_{\oplus}) \end{cases}$$

$$\vec{OM} = \begin{cases} |\vec{OM}| \cos(\text{Lat}_M) \cos(\text{Long}_M) \\ |\vec{OM}| \cos(\text{Lat}_M) \sin(\text{Long}_M) \\ |\vec{OM}| \sin(\text{Lat}_M) \end{cases}$$



### Tipi di Orbita e rispettive missioni importanti



Lo spazio orbitale nei dintorni della terra è diviso in:

- LEO (Low Earth Orbit): da 130 km a circa 2000 km (fino all'inizio di Van Allen)
- MEO (Medium Earth Orbit): da 2000 km a GEO (Geosynchronous orbit)
- HEO (High Earth Orbit): oltre l'orbita geosincrona (fuori atmosfera e van Allen)

L'orbita geosincrona sta ad un'altitudine di 35786 km  $\rightarrow a = 42164$  km ed è quell'orbita per la quale il periodo coincide con un giorno siderale.

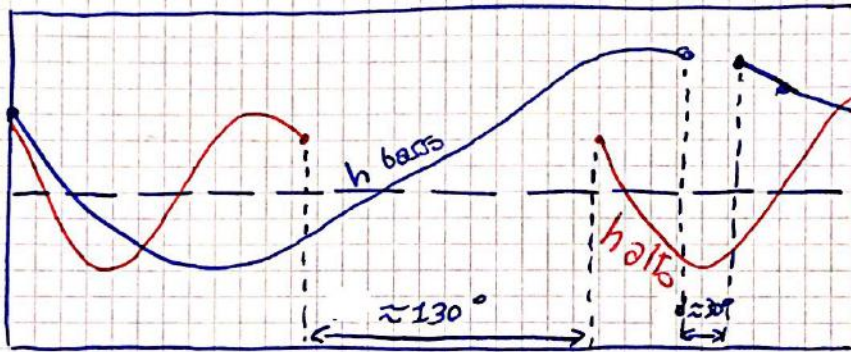
Se l'orbita è equatoriale e circolare  $\rightarrow$  Geostazionaria.

Altre orbite notevoli sono:

- Orbita polare  $\rightarrow$  che passa sopra (o quasi) entrambi i poli terrestri.
- Orbita eliosincrona  $\rightarrow$  con piano orbitale solido con la radiale del sole
- Orbita della luna  $\rightarrow$  384403 km di altitudine media
- Graveyard Orbit  $\rightarrow$  usata per cimitero satellitari
- Decaying orbit  $\rightarrow$  orbita molto bassa che fa cadere i satelliti per resistenza aerodin.

Il moto retrogrado - progredito è "Apparente" perché relativo al moto di rotazione terrestre. (53)

Ciò fa capire come un'orbita più alta abbia una Ground Track molto diversa da un satellite in orbita bassa. In particolare per satelliti in orbita ellittica, la GT non sarà una sinusoidale perfetta ma sarà schiacciata all'apogeo e allungata all'Perigeo. Più l'altitudine cresce, più la velocità angolare terrestre diventa preponderante, il satellite vorrebbe andare verso east, ma la terra gira pure in quella direzione e si oppone a questo moto. Più h sale, più la ground track è schiacciata in longitudine.



$$T = \frac{360^\circ - \Delta N}{15^\circ/h}$$

$u_0$

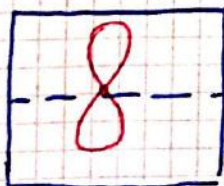
$\Delta N \rightarrow$  distanza tra un nodo ascendente e il successivo

In figura è rappresentata una ground track a h basso e uno a h alto. Per h basso in un periodo (piccolo) la terra copre una distanza angolare piccola (circa  $30^\circ$ ). Per h alto il periodo è lungo e in quel periodo la terra gira parecchio (circa  $130^\circ$ ), ciò giustifica le distanze angolari diverse.

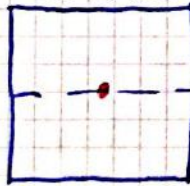
Si noti che le orbite rappresentate sono circolari in quanto non è stato evidenziato l'effetto della variazione di quota internamente a un'orbita.

Si noti che per orbite alte, i nodi (intersezione della Ground Track con l'equatore) si avvicinano. Ciò avviene per periodi  $\leq 24h$ , punto in cui i nodi si sovrappongono e la Ground Track, per orbite circolari inclinate, diventa una linea d'otto. Se l'orbita è equatoriale essa degenera in un punto, per orbite inclinate ed ellittiche l'otto risulta inclinato.

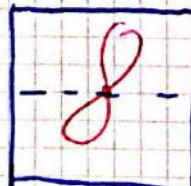
**GEOSTAZIONARIA**



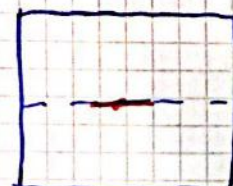
$i \neq 0$   
Circolare  
Geosincrona



Circolare  
Geosincrona  
equatoriale



$i \neq 0$   
Ellittica  
Geosincrona

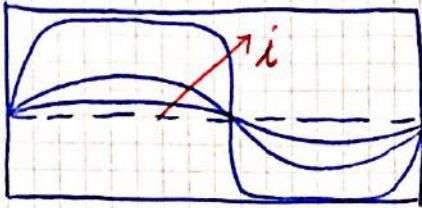


Ellittica  
Geosincrona  
equatoriale

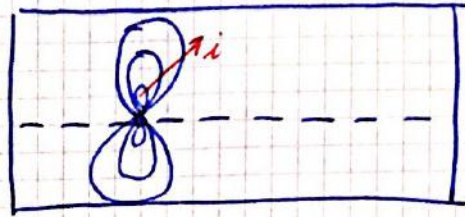
## Effetto dell'inclinazione

SS

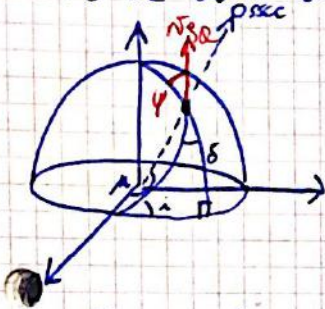
• orbite non geosincrona



• Orbite geosincrone



Ma da dove deriva la forma a 8?



$\psi \rightarrow$  angolo di Heading

$v_{gst} \rightarrow$  velocità ground track

$$v_{gsa} = \frac{2\pi R_{\oplus}}{86164.08} \rightarrow \text{Vel. su ground track}$$

$v_{gsa}$  è la velocità del satellite sulla mappa della terra  $\rightarrow$  velocità con cui si muove sulle ground track. ( $\omega_{\text{satellite}} = \omega_{\oplus}$ )

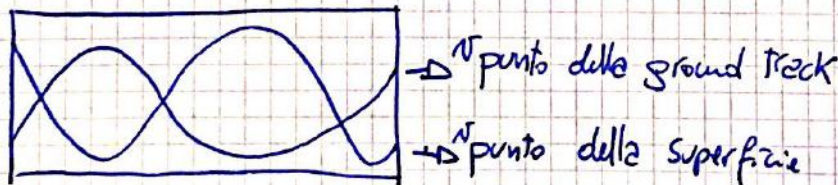
Visto che si ipotizza che la traiettoria non sia equatoriale, si ha che

$$\begin{cases} v_{gs\text{est}} = v_{gsa} \sin \psi = \omega_{\oplus} R_{\oplus} \frac{\cos i}{\cos \delta} \\ v_{gs\text{sd}} = -v_{gsa} \cos \psi \end{cases} \quad \psi \text{ varia tra } -i \text{ e } +i$$

Anche la superficie terrestre d'altro canto ha una velocità, che è

$$\begin{cases} v_{Es\text{sd}} = 0 \\ v_{Ee\text{est}} = \omega_{\oplus} R_{\oplus} \cos \delta \end{cases}$$

Sottraendo le due si trova esattamente l'otto.



## Effetto dell'eccentricità

Se l'orbita è ellittica, essa non avrà la stessa forma sopra e sotto l'equatore, perché apogeo e perigeo hanno diverse distanze. Al perigeo il satellite ha  $\omega$  più grande  $\Rightarrow$  ground track allungata longitudinalmente. Al contrario per l'apogeo. Si noti che, se il perigeo si trova sulla linea dei nodi si avrà una simmetria longitudinale ma non equatoriale.

## Perturbazioni Orbitali



Una perturbazione è una deviazione da una condizione normale. Ci si aspetta che il corpo segua una certa direzione ma devia.  
Le perturbazioni a livello orbitale (dei parametri orbitali) possono essere create da forze di disturbo (magnetica, aerodinamica, pressione solare) oppure dal fatto che su tempi lunghi l'approssimazione del problema dei due corpi cade. Nel caso della terra ciò che fa cadere tale teoria è:

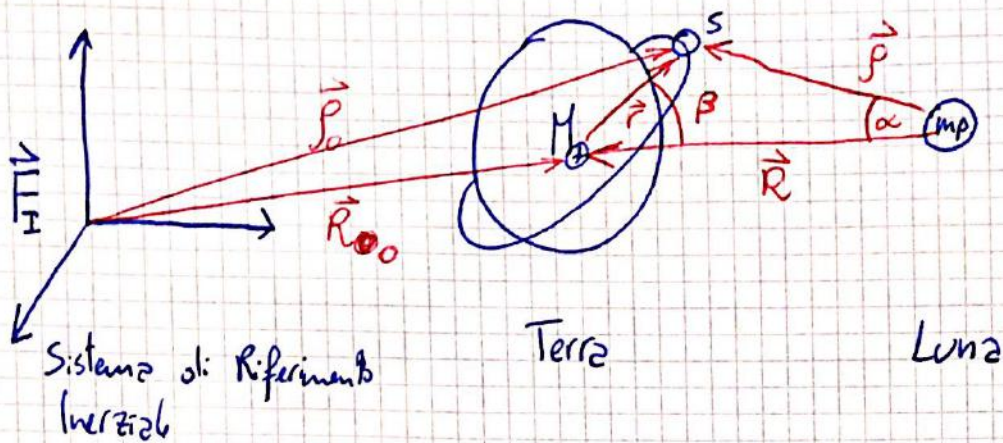
- La presenza di un terzo corpo → Luna o sole
- La non sfericità terrestre → effetto J2

Le perturbazioni in orbita sono molto spesso quantificabili e trattabili, quelle non modellizzabili vengono trattate per via stocastica (impatto meteoriti, venti solari, etc...).

Tali perturbazioni non devono essere trattate come piccole, perché in certe situazioni (emblematiche sono le missioni interplanetarie) esse risultano persino più intense delle forze di attrazione primaria.

Senza analizzare la non-sfericità terrestre, ogni satellite avrebbe un'orbita imprevedibile. Trascurando effetti di ordine superiore non si potrebbe dire nulla sulle perturbazioni dell'orbita lunare. Osservando le perturbazioni sull'orbita di Nettuno è stata ipotizzata la presenza di Urano.

In generale esistono due tecniche con cui è possibile trattare le perturbazioni:



Sistema di Riferimento Inerziale  
 $\vec{r} = \vec{p}_0 - \vec{R}_0 = \vec{p} - \vec{R}$  ;  $R = \rho \cos \alpha + r \cos \beta$   
 Sistema di equazioni del moto Terra-satellite

Earth  $\begin{cases} m \ddot{\vec{p}}_0 = G \frac{M m}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} - G \frac{m p m}{\rho^2} \frac{\vec{p}}{\rho} \\ M \ddot{\vec{R}}_0 = G \frac{M m}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} - G \frac{M m p}{R^2} \frac{\vec{R}}{R} \end{cases}$

Sottraendo membro a membro

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{p}}_0 - \ddot{\vec{R}}_0 = -G \frac{M+m}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} - G \frac{m p}{\rho^2} \frac{\vec{p}}{\rho} + G \frac{m p}{R^2} \frac{\vec{R}}{R}$$

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} + \underbrace{\left( -\frac{M p}{\rho^2} \frac{\vec{p}}{\rho} + \frac{M p}{R^2} \frac{\vec{R}}{R} \right)}_{\vec{a}_p}$$

E si integra numericamente. Bisogna considerare che se l'orbita è molto vicina al corpo più grande (o molto più grande) bisogna prendere passi di integrazione molto piccoli → bassa efficienza e alto tempo di risoluzione.

Metodo di ENCKE

È un metodo più complesso rispetto a Cowell. Mentre in Cowell le accelerazioni vengono integrate insieme, nel metodo di Encke viene integrata la differenza tra l'accelerazione primaria e tutte le accelerazioni perturbative.

Si definisce quindi un'orbita di riferimento, ovvero quella dell'oggetto in assenza di perturbazioni (probabilmente una conica) e poi vengono calcolati  $\vec{r}$  e  $\dot{\vec{r}}$  rispetto a tale orbita di riferimento.

Orbita di riferimento → Orbita osculatrice



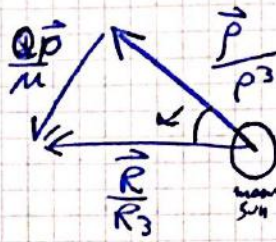
Ritornando al problema terra-satellite luna, si era detto che

60

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{M}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} - \frac{M_P}{p^2} \frac{\mathbf{p}}{p} + \frac{M_P}{R^2} \frac{\mathbf{R}}{R}$$

$$\Rightarrow \mathcal{Q}\dot{\mathbf{p}} = M_P \left( \frac{\mathbf{R}}{R^3} - \frac{\mathbf{p}}{p^3} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{\mathcal{Q}\dot{\mathbf{p}}}{M_P} = \frac{\mathbf{R}}{R^3} - \frac{\mathbf{p}}{p^3}$$



Dal teorema di Carnot

$$\left| \frac{\mathcal{Q}\dot{\mathbf{p}}}{M_P} \right| = \sqrt{\frac{1}{R^4} + \frac{1}{p^4} - \frac{2}{p^2 R^2} \cos \alpha}$$

$$|\mathcal{Q}\dot{\mathbf{p}}| = \frac{M_P}{p^2} \sqrt{1 + \frac{p^4}{R^4} - \frac{2p^2}{R^2} \cos \alpha}$$

• se  $\vec{p} \ll \vec{R} \Rightarrow \mathcal{Q}\dot{\mathbf{p}} = \frac{M_P}{p^2}$

• se  $\vec{p} \approx \vec{R} \Rightarrow R = p \cos \alpha + r \cos \beta \Rightarrow \cos \alpha = \frac{R - r \cos \beta}{p} = \frac{R}{p} - \frac{r}{p} \cos \beta$

allora  $\frac{p}{R} \cos \alpha = 1 - \frac{r}{R} \cos \beta$

$\frac{r}{R} = \epsilon \Rightarrow \frac{p}{R} \cos \alpha = 1 - \epsilon \cos \beta$

$$\mathcal{Q}\dot{\mathbf{p}} = \frac{M_P}{p^2} \sqrt{1 + \frac{p^4}{R^4} - \frac{2p}{R} (1 - \epsilon \cos \beta)} = \frac{M_P}{R^2} \frac{R^2}{p^2} \sqrt{\dots}$$

$$p^2 = r^2 + R^2 - 2rR \cos \beta \Rightarrow \frac{p^2}{R^2} = 1 + \frac{r^2}{R^2} - \frac{2r}{R} \cos \beta = 1 - \frac{2\epsilon \cos \beta + \epsilon^2}{x}$$

$$\left( \frac{p^4}{R^4} = \left[ \left( \frac{p^2}{R^2} \right)^2 = (1+x)^2 = 1 + 2x + x^2 + o(x^2) \right. \right.$$

$$\left. \frac{p}{R} = \left[ \frac{p^2}{R^2} \right]^{\frac{1}{2}} = (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{8} x^2 + o(x^2) \right.$$

$$\left. \left( \frac{R}{p} \right)^2 = \left[ \left( \frac{p}{R} \right)^2 \right]^{-1} = (1+x)^{-2} = 1 - x + x^2 + o(x^2) \right.$$

lo mi vergogno...

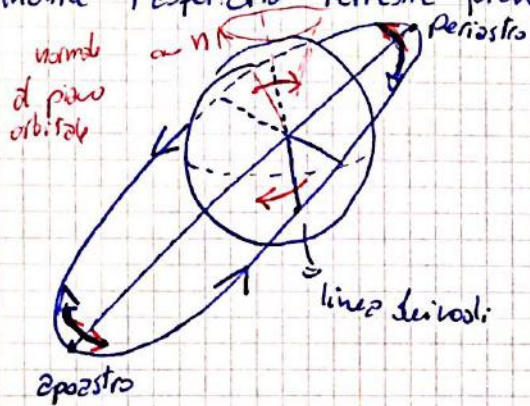
$$\left| \frac{\mathcal{Q}\dot{\mathbf{p}}}{M_P} \right| = \frac{M_P}{R^2} \left( \frac{R^2}{p^2} \right) \sqrt{x + \frac{5}{4} x^2 + 2\epsilon \cos \beta + x\epsilon \cos \beta}$$

$$= \frac{M_P}{R^2} \frac{R^2}{p^2} \sqrt{-2\epsilon \cos \beta + \epsilon^2 + 5\epsilon^2 \cos^2 \beta + 2\epsilon \cos \beta - 2\epsilon^2 \cos^2 \beta}$$

$$= \frac{M_P}{R^2} \frac{R^2}{p^2} \sqrt{\epsilon^2 + 3\epsilon^2 \cos^2 \beta} = \frac{M_P}{R^2} \sqrt{\frac{R^4}{p^4} \epsilon^2 (1 + 3\cos^2 \beta)}$$

piccola coppia attorno al centro di massa della terra (fuoco orbitale)  
 I satelliti si sentono attratti verso l'equatore e quindi fuori dal piano orbitale.  
 Il piano orbitale in particolare reagisce a quest'azione con una precessione  
 facendo muovere la linea dei nodi verso ovest (per orbite <sup>retrograde</sup>) e  
 verso est (per orbite <sup>directe</sup>).

Inoltre l'asfericità terrestre provoca una rotazione della linea degli apsi.



La terra, con buona approssimazione può essere assimilata ad un ellissoide con le seguenti caratteristiche:

- $e = 0.0034$  → eccentricità
- $a = 6378 \text{ km}$  → semiasse maggior.
- $b = 6357 \text{ km}$  → semiasse minor.

In realtà però la terra è un Geoide, che per definizione è quel solido definito come una superficie equipotenziale del campo gravitazionale terrestre. Tale superficie approssima nei sensi dei minimi quadrati il livello medio del mare su tutto il mondo.

La Geodesia rappresenta il campo di accelerazione gravitazionale come una sommatoria infinita di armoniche sferiche pesate. In particolare, il campo di accelerazione può essere scritto come il gradiente di una certa funzione scalare (potenziale gravitazionale)

$$\vec{a} = \nabla E_g \quad \text{dove } E_g \text{ è della forma:}$$

$$E_g = -\frac{\mu}{r} \left\{ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n(\sin(\theta_0)) - \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=2}^n J_{n,m} P_n^m(\sin(\theta_0)) \cos(m(\theta_0 - \theta_{0,m})) \right\}$$

che quindi descrive il potenziale gravitazionale terrestre nel sistema geocentrico equatoriale WGS84 (aggiornato dalla NGA agency)

Le funzioni  $P_n(x)$  sono i polinomi di Legendre di grado  $n$ , mentre  $P_n^m$  sono polinomi di Legendre di grado  $n$  e ordine  $m$

Il potenziale newtoniano  $-\frac{\mu}{r}$  è accompagnato dunque da una serie infinita di polinomi <sup>armonici</sup> caratterizzati dai coefficienti  $J_n$  e  $J_{n,m}$ :

- $J_n$  sono le armoniche zonali
- $J_{n,m}$  per  $n \neq m$  sono le armoniche tesserali
- $J_{n,m}$  per  $n = m$  sono le armoniche settoriali

Se il metodo generale delle perturbazioni ( $\Omega, K_2$ ) viene applicato (64) trascurando tutto tranne il termine  $\Omega_2$ , in una rivoluzione orbitale si ottiene che:

$$\Delta \Omega = -3\pi \Omega_2 \left(\frac{R_{\oplus}}{P}\right)^2 \cos i < 0 \quad \text{per } i \in [0, 90]$$

$$\Delta \omega = \frac{3}{2}\pi \Omega_2 \left(\frac{R_{\oplus}}{P}\right)^2 (5\cos^2 i - 1) < 0 \quad \text{per } \arccos\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right) > i \geq \arccos\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$$

$$\Delta M = nT_d + 3\pi \Omega_2 \left(\frac{R_{\oplus}}{P}\right)^2 \cos i \frac{(1+e\cos\omega)^3}{1-e^2}$$

↳ periodo Draconiano (o nodale)

$$\dot{\Omega} = \frac{\Delta \Omega}{T_p} = -3\pi \Omega_2 \left(\frac{R_{\oplus}}{P}\right)^2 \cos i \frac{1}{T_p} \quad \text{rad/s}$$

Se  $i \in [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow$  regressione delle linee dei nodi

Se  $i \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \rightarrow$  precessione delle linee dei nodi

Considerando un'orbita GEO, si trova che

$$\dot{\Omega} = -2,32 \cdot 10^{-4} \text{ rad/day} = -0,0133 \text{ gradi/day}$$

Un grado ogni 75 giorni, il che risulta molto influente e ha effetti sulla ground track  $\rightarrow$  i satelliti non stanno più fissi su un punto, non stazionano ma si muovono, per cui lo Station Keeping est-ovest è necessario.

Per le orbite LEO (ad esempio con  $h=660\text{ km}$ ) si ha

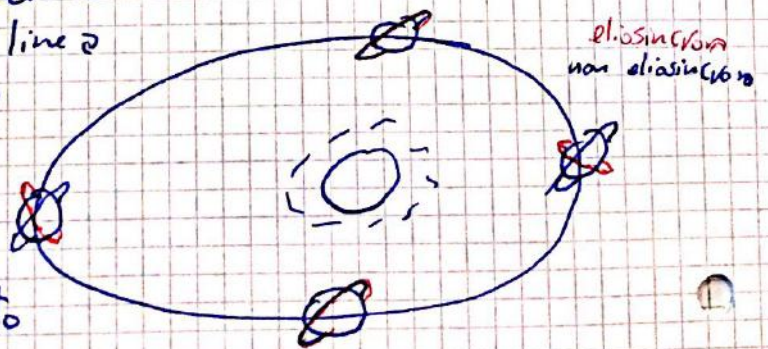
$$\dot{\Omega} = -8,8 \text{ gradi al giorno}$$

$\rightarrow$  più vicini si è alla terra, più il campo non è uniforme.

### Orbite Eliosincrone

Una orbita si dice Eliosincrona (Sun-synchronous) se è sincronizzata con il sole, in quanto la linea dei nodi ruota di un angolo giro in un anno siderale.

In questo modo l'orbita ha sempre la stessa inclinazione rispetto al sole (alla radiale del sole). Questo è possibile se  $\dot{\Omega} = 0,986^\circ/\text{day}$ , ovvero la velocità angolare media della terra attorno al sole.



EGM sta per "Earth geopotential model", è un modello preciso del campo gravitazionale terrestre in cui il numero di nodi ~~è~~ <sup>è</sup> 66 i punti in cui si effettuano le misurazioni → si sa il valore del campo ~~esattamente~~ esattamente, sono i punti di interpolazione.  $n, m$  sono invece i gradi dei coefficienti  $S$ .

Secondo effetto di  $S_2$ : precessione della linea degli apsi:

Angolo  $\dot{\omega}$  varia per via del  $S_2$ . Si trova che

$$\dot{\omega} = \frac{3}{2} \pi S_2 \left( \frac{r_0}{p} \right)^2 (5 \cos^2 i - 1) \cdot \frac{2\pi a^3}{T_p^2} \text{ rad/s}$$

per capire il segno di  $\dot{\omega}$  bisogna vedere quanto  $5 \cos^2 i - 1 > 0$

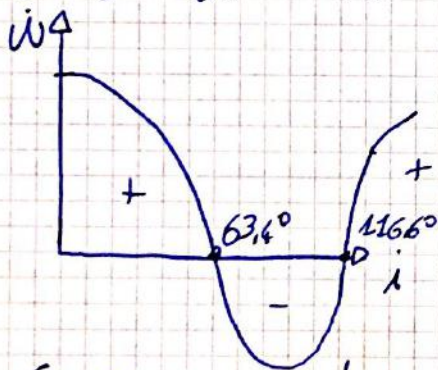
Se  $i = 0 \quad \dot{\omega} > 0$

Se  $i$  è bassa  $\dot{\omega} > 0$

Se  $i$  è sufficientemente alto,  $\dot{\omega} < 0$

Se  $i = \frac{\pi}{2} \quad \cos i = 0 \rightarrow \dot{\omega} < 0$

$\dot{\omega}$  si annulla in  $i = \arccos\left(\sqrt{\frac{1}{5}}\right) \Rightarrow i = \pm 63.4^\circ, 116.6^\circ$



Se  $\dot{\omega} > 0 \rightarrow$  precessione linea degli apsi.

Se  $\dot{\omega} < 0 \rightarrow$  regressione linea degli apsi.

Ci sono quindi due punti notevoli per i quali la perturbazione non ha effetto e la linea degli apsi rimane fissa.

Un' inclinazione di  $63.4^\circ$  è abbastanza inclinata, infatti veniva usata dai satelliti Molniya.

che sono l'inverso dei coefficienti balistici, ovvero la capacità di un corpo di vincere la resistenza dell'atmosfera.

In generale:

$$\frac{d\vec{s}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( -\frac{M}{2a} \right) = \frac{\vec{F} \cdot \vec{v}}{m} \rightarrow \vec{v} = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta$$

$$\Rightarrow \frac{M}{2a} \cdot \dot{a} = F_r \dot{r} + F_\theta r \dot{\theta}$$

dove  $r = \text{cost}$  per orbite circolari,  $r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos \theta}$  per le ellittiche

## Pressione di Radiazione → Vedi Satellite Kepler

Esso può essere utilizzato come metodo di controllo d'assetto (un po' come tutti). Esso deriva dalla pressione del fascio di fotoni che incide sul corpo.

La dipendenza è data da:

- Inclinazione dei raggi solari;
- Se la superficie è specchio, se assorbe, se riflette e in che modo, se in maniera distribuita o diffusa.

Solitamente l'azione perturbativa della pressione di radiazione è piccola e trascurabile, se non per satelliti con volumi molto grandi rispetto alla massa. Questo perché la formula di tale forza è:

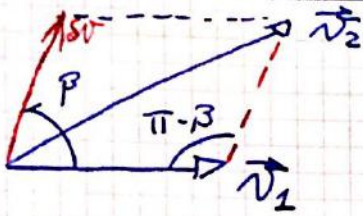
$$a_{RP} = P \frac{S}{m} = \frac{P V}{L m} \begin{matrix} \rightarrow \text{superficie esposta frontale} \\ \text{o massa} \end{matrix}$$

dove  $P = 4.5 \cdot 10^{-8} \text{ m}^3 \text{ Kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$

## Effetti Elettromagnetici

Il satellite potrebbe accumulare una certa carica elettrica data dagli ioni presenti in atmosfera alta. Inoltre le correnti interne dei circuiti o dei sottosistemi provocano dipoli indotti. → Interazioni con il campo magnetico terrestre.

Tali disturbi sono trascurabili perché influenzano molto di più l'assetto che l'orbita.



si deve dare un arco  $\Delta v$  per passare da una condizione a  $\vec{v}_1$  a un'altra a  $\vec{v}_2$  per il Teorema di Carnot si può scrivere che:

$$v_2^2 = v_1^2 + \Delta v^2 - 2v_1 \Delta v \cos(\pi - \beta)$$

$$= v_1^2 + \Delta v^2 + 2v_1 \Delta v \cos \beta$$

Per quanto detto, l'energia ~~potenziale~~ <sup>totale</sup> risultò essere:

$$\Delta E_g = E_{g2} - E_{g1} = \left[ \frac{v_2^2}{2} - \frac{\mu}{r} \right] - \left[ \frac{v_1^2}{2} - \frac{\mu}{r} \right] = \frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2} = \frac{1}{2} \Delta v (\Delta v + 2v_1 \cos \beta)$$

se  $\Delta E_{g \max}$  il delta energetico massimo che si può ottenere a parità di  $\Delta v$ , si vede vedere in due condizioni si può ottenere.

$$\Delta E_{g \max} = \frac{1}{2} \Delta v (\Delta v + 2v_1 \cos \beta) \Big|_{\max} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = v_1 |_{\max} \\ \beta = 0 \Rightarrow \vec{F} // \vec{v} \end{cases}$$

se si dà un  $\Delta v$  nel punto più veloce della traiettoria del satellite  $\Delta E$  sarà massimo. Inoltre, visto che ciò che concorre alla variazione di energia è solo la forza parallela al moto,  $\Delta E$  sarà massimo solo se  $\vec{F} // \vec{v}$ , perché  $\vec{F} \perp \vec{v}$  modifica la traiettoria senza dare alcun tipo di energia.

Si dice, quando  $v_1$  non è massimo, che si subiscono delle "perdite gravitazionali", mentre quando  $\vec{F}$  non è parallelo a  $\vec{v}$ , si dice che si subiscono delle perdite di disallineamento.

### Manovre ad Un impulso

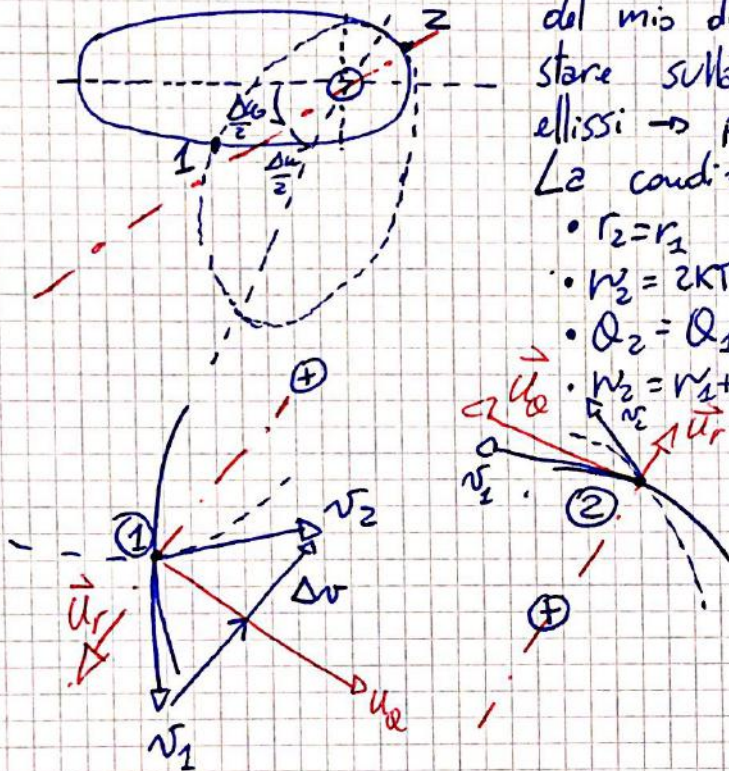
Un singolo impulso di velocità è sufficiente per cambiare tutti i parametri orbitali volendo. Sfortunatamente questo si traduce nel fatto che non è possibile, alle volte, variare solo un parametro per volta. Adib. d'esempio, si pensi ad un'orbita inizialmente circolare, non esiste una manovra impulsiva che ne faccia variare la lunghezza del semiasse maggiore mantenendo un'eccentricità nulla. È necessario in questo caso effettuare almeno due manovre impulsive ~~in~~ in successione.

Le manovre più semplici ad un impulso sono:

- aggiustamento del perigeo o dell'apogeo
- rotazione della linea degli apsi:
- cambiamento del piano orbitale

• Rotazione della linea degli apsi (72)

La linea degli apsi è determinata sul piano orbitale dall'angolo  $\omega$ . Si vuole ruotare tale linea di  $\Delta\omega$  con un impulso semplice senza variare altro. È quasi ovvio che perché ciò avvenga, le manovre devono essere effettuate in uno dei due punti di intersezione delle due ellissi che rappresentano la traiettoria. Che, a differenza del mio disegno di merda, devono stare sulla bisettrice tra le due ellissi  $\rightarrow$  per simmetria



La condizione di manovra è:

- $r_2 = r_1$
- $\omega_2 = 2K\pi + \omega_1 - \Delta\omega$   $K=0,1$
- $Q_2 = Q_1$
- $v_2 = v_1 + \omega_1 - \omega_2 = v_1 \ominus \Delta\omega$

L'energia e il momento angolare non cambiano durante la manovra, in particolare  $h$  è costante sia in modulo che in verso, per cui anche la velocità  $v$  si conserva in modulo e in verso della componente tangenziale

$$h = |\vec{r}| \cdot v_{\theta} = \text{cost} \Rightarrow v_{\theta} = \text{cost}$$

$$E_g = \frac{1}{2} v^2 = \text{cost} \Rightarrow v = \text{cost}$$

per cui il  $\Delta v$  è sulla direzione radiale  $\Delta v = v_r$

L'energia è costante perché  $E_g = \frac{v_1^2}{2} - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a}$  e

visto che  $a_1 = a_2 \Rightarrow E_{g1} = E_{g2} \Rightarrow |v_{\theta 1}| = |v_{\theta 2}|$

Il momento angolare è costante perché

$$|h| = \sqrt{\mu a} = \text{cost}$$

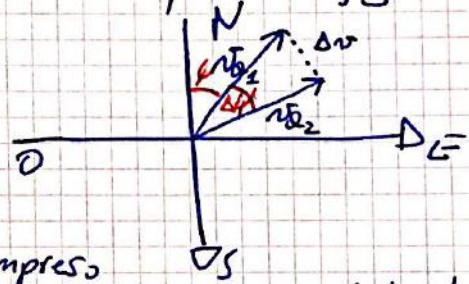
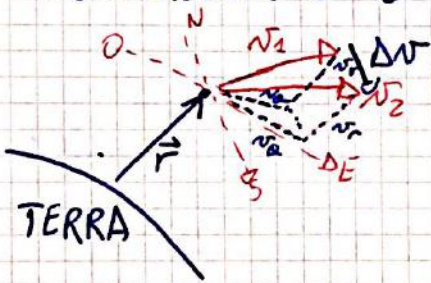
• Cambiamento del piano orbitale

il cambio del piano orbitale necessita di un  $\Delta \vec{v}$  che abbia una componente perpendicolare al piano orbitale iniziale. la manovra più semplice che fa ruotare il piano dell'orbita è una manovra ad un solo impulso, per la quale dunque  $r = \text{cost}$ . Visto che si vuole ottenere solo un cambio di piano, la forma e la dimensione dell'orbita devono rimanere costanti, per cui:

$$\left. \begin{aligned} E_g = \text{cost} &\Rightarrow Q = \text{cost} \Rightarrow v^2 = \text{cost} \\ h = \text{cost} &\Rightarrow p = \text{cost} \Rightarrow v a = \text{cost} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{anche } v_r = \text{cost}$$

i moduli di  $v$ ,  $v_a$ ,  $v_r$  restano dunque costanti; ciò che varia nella manovra è la direzione di  $v_a$  di un angolo  $\Delta \psi$  (heading)

Visto sul piano Nord-sud-est-ovest quello che si vede è quello in figura



per cui l'angolo  $\Delta \psi$  è l'angolo compreso tra le due velocità tangenziali  $v_{a1}$  e  $v_{a2}$ . è possibile trovare una relazione del tipo:

$$\Delta v = 2 v_a \sin \frac{\Delta \psi}{2}$$

$PER e \approx 0$

semplicemente dal triangolo  $v_{a1}, v_{a2}, \Delta v$ .

Si ricorda l'equazione, già vista, che mette in relazione l'inclinazione dell'orbita, la latitudine e  $\psi$ :

$$\cos i = \cos \delta \sin \psi$$

ci dice che se  $\delta \neq 0$  allora  $\Delta \psi > \Delta i$ , per cui il cambio di inclinazione non è efficace al massimo, tuttavia, per  $\delta = 90^\circ$  si può cambiare piano, ma la traiettoria rimarrà sempre polare. Inoltre, il  $i_2$  non può essere più bassa della latitudine, in quanto si dovrebbe comunque passare dal punto dove avviene la manovra, che avrà sulla ground track un  $\delta \leq i$ .

Solitamente, una manovra di questo tipo cambia sia l'inclinazione che la longitudine del nodo ascendente



Casi particolari ne cambiano solo uno: (75)

- manovre sul polo cambiano solo  $\omega \rightarrow$  manovra + efficace
- manovre sull'equatore cambiano solo  $i \rightarrow$  manovra + efficace

• Solitamente, una rotazione del piano richiede un  $\Delta V$  notevole, per  $5,73^\circ$  di rotazione  $\Delta V = 10\%$  di  $v_1$  e i costi in termini di combustibile sono notevoli.

Le perdite gravitazionali sono trascurabili per la manovra, e questa risulta più efficace se effettuata nel punto a più bassa velocità, (e quindi all'apostro) perché con un piccolo  $\Delta V$  si ottiene un grande  $\Delta \psi$ .

Solitamente si può "scroccare"  $\Delta V$  per fare questa manovra da un  $\Delta V$  che serve per una manovra atta a variare l'energia dell'orbita, ad esempio facendo una manovra combinata di cambio orientazione dell'orbita e altitudine di un apside.

Per i motivi spiegati in precedenza, converrebbe effettuare la manovra di rotazione prima dell'incremento da  $|v_1|$  a  $|v_2|$ . In questo caso

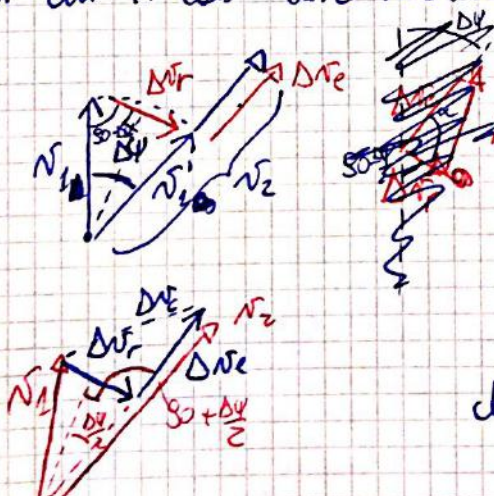
$$\Delta V_S = \Delta V_r + \Delta V_e = 2v_1 \sin \frac{\Delta \psi}{2} + (v_2 - v_1)$$

che, però non sono sulla stessa direzione, per cui, se fossero effettuate insieme, si ha più:

$$|\Delta V_C| = \sqrt{v_2^2 + v_1^2 - 2v_1 v_2 \cos \Delta \psi}$$

il vantaggio ottenuto se i due  $\Delta V$  fossero dati insieme sarebbe  $\Delta V_S - \Delta V_C$

• N.B. se  $\psi \approx 0$   $\Delta V_C \approx v_2 - v_1$   
per cui il costo della rotazione del piano è in pratica nullo.



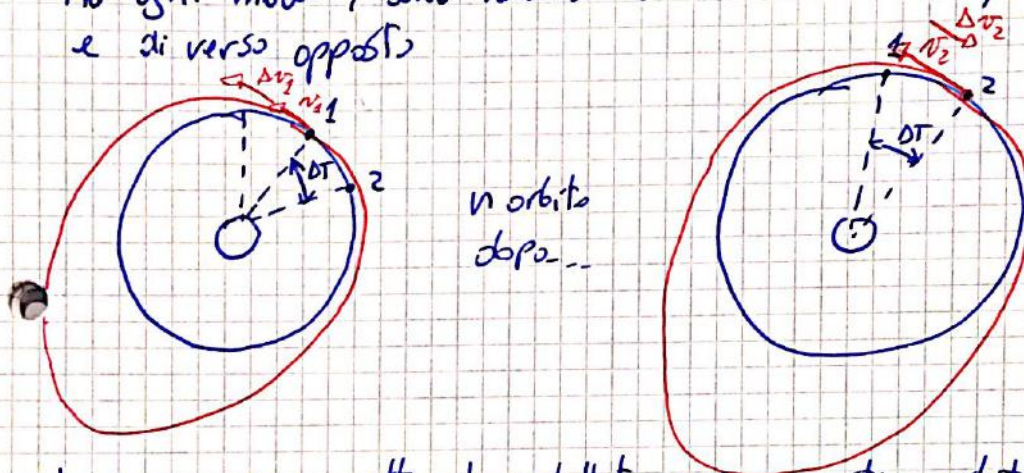
$$\Delta V_C = \sqrt{\Delta V_r^2 + \Delta V_e^2 - 2\Delta V_r \Delta V_e \cos(90 + \frac{\Delta \psi}{2})}$$

che è minore di  $\Delta V_S = |\Delta V_r| + |\Delta V_e|$

Si deve inoltre notare che se  $\Delta T > \frac{\Delta T_p}{2}$  è conveniente 72 mandare il satellite in un'orbita più bassa e fare un "catch up" dalla posizione invece che un "waiting".

- Il catching deve essere ponderato, in quanto se si abbassa di troppo l'altezza del perigeo della waiting orbit si rischia di avere effetti dannosi sulla traiettoria dovuti alla resistenza aerodinamica.

Ad ogni modo, sono necessari due incrementi  $\Delta v$ , di uguale modulo e di verso opposto



il primo  $\Delta v$  mette il satellite nella waiting orbit, il secondo ripristina l'orbita iniziale. Per un  $\Delta T < \frac{\Delta T_p}{2}$  il primo  $\Delta v$  è applicato in verso concorde con  $v_1$  per aumentare  $a$  e quindi  $T_p$ , il secondo in verso discorde per ripristinare l'orbita.

N.B. le manovre sono controintuitive: si rallenta per avvicinarsi al chaser, si accelera per allontanarsi da esso

- Trasferimenti tra orbite circolari:

Si considerano in questo caso orbite circolari di raggio  $r_1$  e  $r_2$  e si deve passare da una all'altra.

Assumiamo che  $r_2 > r_1$ , in quanto il viceversa implica semplicemente impulsi della stessa entità ma in verso opposto.

L'orbita di trasferimento, per poter effettuare le manovre, deve intersecare l'orbita 1 e 2, in particolare:

$$r_{p_t} = \frac{P_t}{1+e_t} \leq r_1 \quad ; \quad r_{a_t} = \frac{P_t}{1-e_t} \geq r_2$$

- ovvero il periastrio deve stare sotto l'orbita bassa e l'apoastrio sopra l'orbita alta. Si può fare un diagramma e porre questi limiti per trovare un'area in cui i valori di semi-latus rectum e eccentricità sono accettabili.

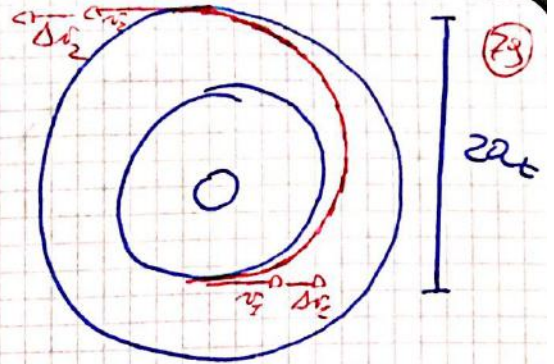
il secondo impulso sarà di:

$$\Delta v_2 = v_{c2} - v_2 = v_{c2} \left( 1 - \sqrt{\frac{2r_1}{r_1+r_2}} \right)$$

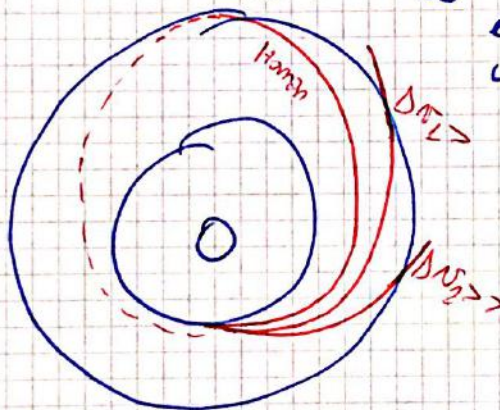
il tempo di manovra è esattamente la metà del periodo dell'orbita di trasferta:

$$\Delta T_E = \frac{T_E}{2} = \pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}$$

$$\Delta v_{tot} |_{\text{Hohmann}} = \Delta v_1 + \Delta v_2 = \text{minimo } \Delta v$$



in pratica è la manovra a due impulsi più conveniente in termini di carburante utilizzato, ma, d'altro canto, è l'orbita più lunga in assoluto per raggiungere l'orbita finale. Ad esempio se si desse un  $\Delta v_1$  maggiore, lo spazio percorso sarà minore e ~~la~~ sarebbe percorso da una velocità in media superiore.



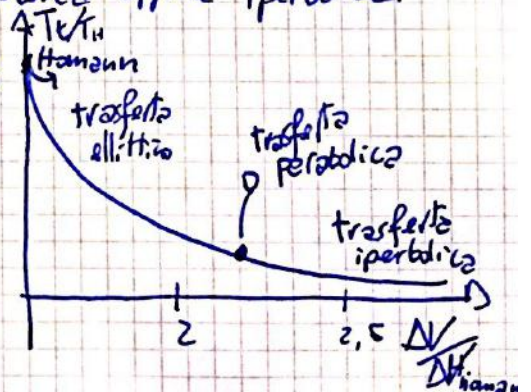
tuttavia  $\Delta v_1$  deve essere maggiore e anche  $\Delta v_2$  deve essere maggiore perché la  $v_2$  non risulterà tangente all'orbita finale della trasferta.

Si noti che se viene dato abbastanza

$\Delta v_1$  la trasferta può risultare parabolica oppure iperbolica.

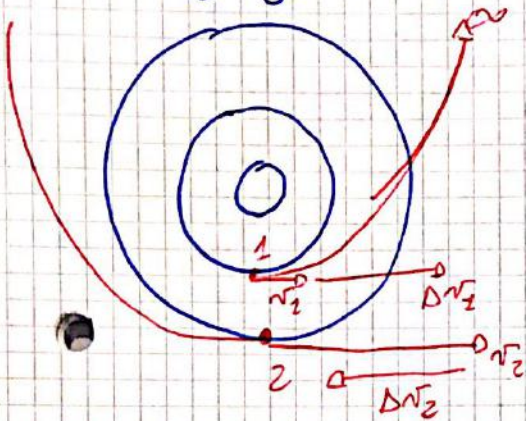
- Trasferta di Hohmann non planare  
Viene analizzata sempre una trasferta tra orbite circolari  $r_2 > r_1$ , perché qui la manovra più usata è la GTO (geo-stationary transfer orbit), che muove un satellite dall'orbita LEO inclinata in un'orbita GEO equatoriale.

L'asse dell'ellisse di Hohmann è dato dall'intersezione tra le due orbite (i loro piani). I due impulsi prevedono una combinazione di cambi di altezza di un epocle e inclinazione del piano orbitale, anche se la variazione più grande viene effettuata nel punto 2 perché



un primo impulso trasferisce il satellite dall'orbita 1 ad un punto 3 (orbita di fuga minima) un secondo posto all'infinito, tramite una traiettoria parabolica (minima velocità di fuga).

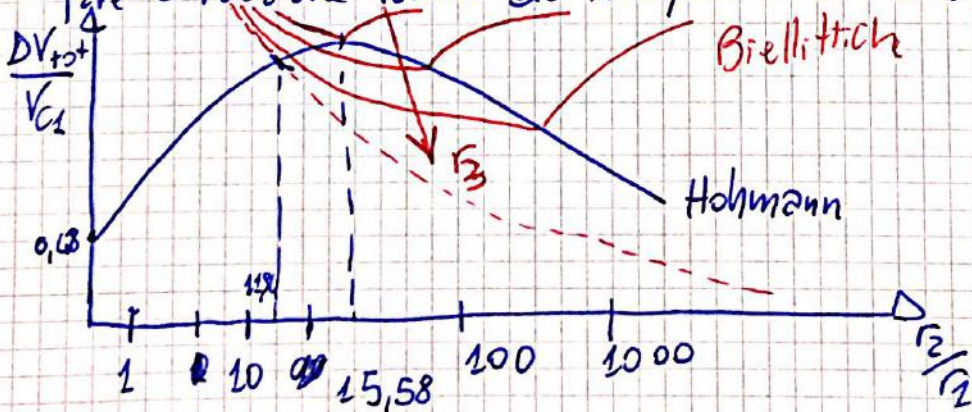
Dall'infinito, dove la velocità è nulla, il satellite viene posto su una parabola leggermente traslata tramite un secondo impulso  $\Delta v_2$  tale parabola risulta tangente all'orbita finale, quando il satellite la raggiunge un terzo impulso circolarizza l'orbita e la trasferta è completa. È una trasferta teorica e non pratica perché richiederebbe un tempo infinito per completarla. La trasferta biparabolica sarebbe preferibile per  $r_2 > 11,84 r_1$   $r_b = r_2 = 11,84 r_1$  è il raggio limite. Se  $r < r_b$  allora la manovra più conveniente in assoluto è la Hohmann.



se  $r > r_b$  si preferisce sempre una biellittica con  $r_3$  sufficientemente grande per i costi minori (ma i tempi maggiori) il risparmio massimo della trasferta biparabolica si ha per  $r_2/r_1 = \infty$  ed è di circa l'8%.

Tuttavia, se le orbite sono coplanari, una trasferta a 3 impulsi non viene quasi mai utilizzata per via dello svantaggio temporale.

Diverso è il caso dei cambi di piano per i quali è più conveniente fare la rotazione lontano da terra, dove la velocità è bassa



• Cambio di piano a 3 impulsi

(83)

il camb. di piano viene effettuato tramite una Hohmann perché più lontano si è, più la velocità è bassa, meno si spende per cambiare piano.

Esso può essere ottenuto usando due trasferite simmetriche, che muovono il satellite verso e da un punto lontano dove si può fare una manovra economica.

In teoria all'∞ si può fare ogni tipo di rotazione con un ΔV infinitesimo.

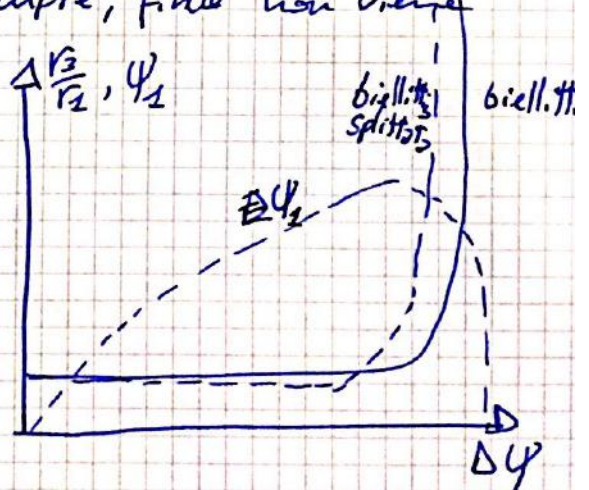
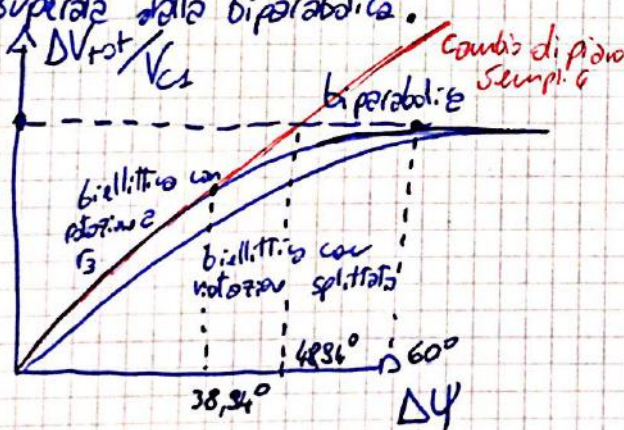
Si valuta la fattibilità della manovra; confrontando il ΔV di una generica rotazione di piano in orbita bassa e il ΔV per arrivare a un'orbita parabolica.

$$\Delta V_r = 2 v_{c1} \sin \frac{\Delta \psi}{2}$$

$$\Delta V_p = 2(v_{esc} - v_{c1}) = 2(v\sqrt{2} - 1)$$

Si trova che una manovra biperabolica per cambiare piano (simile a quelle biperaboliche  $\Delta v_3 \approx 0$ ) è conveniente per  $\Delta \psi > 48,84^\circ$ . Inoltre, una trasferite biellittica è conveniente rispetto a una manovra ad un impulso con  $\Delta \psi = 38,84 \approx 60^\circ$ .

Ruotando un po' il piano con  $\Delta v_2$  e  $\Delta v_2$ , la manovra biellittica risulta conveniente sempre, finché non viene superata dalla biperabolica.



Concetti simili si applicano per trasferite da r a r si cambia sia r che ψ → orbite non coplanari, in questo caso l'ottimo della trasferite biellittica si avvicina sempre più al crescere di r<sub>2</sub>/r<sub>1</sub>

Ovviamente anche le influenze delle lune e della massa del satellite stesso vengono comunque trascurate. (85)

Numericamente, si può dimostrare che anche orbite all'interno della sfera sono instabili a lungo termine, ma devono stare all'interno di  $\frac{1}{2} \div \frac{1}{3}$  della di influenza.

Le orbite retrograde risultano più stabili che quelle prograde.

Per Laplace, si arriva ad avere che

$$p_L = \left( \frac{m_2}{m_1} \right)^{\frac{2}{5}} r_{12}$$

per i vari pianeti:

• Mercurio	$1,12 \cdot 10^5$ Km
• Venere	$6,16 \cdot 10^5$ Km
• Terra	$8,28 \cdot 10^5$ Km
• Marte	$5,78 \cdot 10^5$ Km
• Giove	$4,82 \cdot 10^7$ Km
• Saturno	$5,45 \cdot 10^7$ Km
• Urano	$5,18 \cdot 10^7$ Km
• Nettuno	$8,68 \cdot 10^7$ Km
• Plutone	$3,41 \cdot 10^7$ Km

La formula per la sfera d'influenza di Hill sarà

$$p_H = R \sqrt[3]{\frac{m_2}{3m_1}} \quad \text{ovvero } R = r_{12}$$

Vedi avanzini per ulteriori informazioni.

La natura del sistema solare è eliocentrica e i pianeti distano dal sole seguendo la legge di Bode:

$$R_i = \frac{n_i + 4}{10} \quad \text{con } n_i = 2n_{i-1} \text{ per } i \geq 3 \quad \begin{matrix} n_1 = 0 \\ n_2 = 3 \end{matrix}$$

Le orbite, a parte plutone <sup>e mercurio</sup> sono tutte quasi circolari, in quanto e  $e$  molto basse esse, a parte sob plutan, sono considerate coplanari perché hanno inclinazione rispetto all'eclittica molto bassa.

Ci sono ipotesi che dicano che plutan è un satellite scappato da Nettuno, in quanto si trova nella  $i=8$  posizione con Nettuno e il suo perielio giace sull'orbita di quest'ultimo.

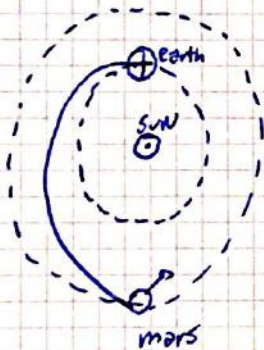
(relativa al pianeta) con cui il veicolo entra nella sfera di influenza del pianeta. 52

Un'altra approssimazione che si fa consiste nel dire che la grandezza della sfera di influenza è trascurabile rispetto alla lunghezza della traiettoria, per cui si assume che i punti di arrivo e partenza di quest'ultima siano proprio i pianeti di arrivo e partenza.

Nonostante queste approssimazioni, è necessario valutare i parametri di ogni manovra con un'accuratezza molto alta per ottenere il risultato desiderato ed evitare disastri: piccolissimi errori sull'orbita di partenza o sulle condizioni iniziali della traiettoria possono portare errori notevoli sull'arrivo. Per questo motivo, nel fuel budget è necessario includere propellente per manovre correttive durante il viaggio.

Anche considerando orbite coplanari, il minimo consumo di  $\Delta v$  è reso costosissimo dalle altissime velocità in gioco in una manovra planetaria.

La manovra più conveniente per il tratto eliocentrico è assolutamente la traiettoria di Hohmann dove l'ellisse della traiettoria eliocentrica è tangente a tutte e due le orbite dei pianeti (arrivo e partenza). Tuttavia bisogna beccare il pianeta target in quella esatta posizione, per cui non si può lanciare sempre, ma solo quando i due pianeti hanno una certa fase. Per cui esiste una finestra di lancio per effettuare la Hohmann.



Il tutto dipende dal moto relativo tra i due pianeti al momento del lancio, considerando il tempo di manovra. Si dice "elongation" la fase del pianeta di arrivo rispetto a quello di partenza.

È necessario notare che l'angolo necessario per la Hohmann è uno solo, perso quello, la nuova finestra di lancio si avrà un periodo sinodico dopo, ovvero il periodo dopo cui i due pianeti e il sole sono nella stessa configurazione relativa. I due pianeti si muovono con velocità angolare medie:

$$n_1 = \frac{2\pi}{T_1} = \sqrt{\frac{\mu_0}{a^3}} \quad ; \quad n_2 = \frac{2\pi}{T_2} = \sqrt{\frac{\mu_0}{a^3}}$$

se  $n_1 > n_2$ , il periodo sinodico si può calcolare come:

$$n_1 \tau - n_2 \tau = 2\pi \Rightarrow \tau = \frac{2\pi}{n_1 - n_2}$$

è tanto più grande quanto  $n_1$  e  $n_2$  sono vicine

Si noti che per trasferire verso pianeti interni all'orbita terrestre, è necessario lanciare il veicolo in direzione opposta a  $N_{\oplus}$ . (88)

$$a_H = \frac{r_{\oplus} + r_{\infty}}{2} = 188,77 \cdot 10^6 \text{ km}$$

$$\Delta t_H = T_{H/2} = 2\pi \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a^3}{\mu_{\oplus}}} = 258,98 \text{ giorni}$$

Inoltre, dal disegno si può intuire che:

$$\begin{aligned} \frac{v_{\oplus}}{v_{\infty}} &= \frac{\gamma(t_1) + \gamma_{\oplus} + \gamma(t_2)}{\gamma_{\oplus} - \gamma(t_2) + \gamma(t_2)} \\ &\Rightarrow \Delta v = \gamma(t_2) - \gamma_{\oplus} \end{aligned}$$

(io non ho capito cosa intende per  $\Delta v$ )  $\Rightarrow \Delta v = \sigma_2 - \sigma_1$

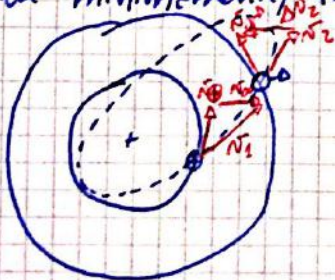
angolo di partenza il veicolo spaziale

Hohmann da terra verso:

• mercurio	$\tau = 0,312y$	$a_H = 0,68 \text{ AU}$	$\Delta t = 0,288y$	$\delta_1 = -25^\circ$
• venere	$\tau = 1,588y$	$a_H = 0,86 \text{ AU}$	$\Delta t = 0,4y$	$\delta_1 = -5^\circ$
• marte	$\tau = 2,135y$	$a_H = 1,26 \text{ AU}$	$\Delta t = 0,708y$	$\delta_1 = 44^\circ$
• Giove	$\tau = 1,092y$	$a_H = 3,10 \text{ AU}$	$\Delta t = 2,73y$	$\delta_1 = 97^\circ$
• Saturno	$\tau = 1,035y$	$a_H = 5,26 \text{ AU}$	$\Delta t = 6,04y$	$\delta_1 = 106^\circ$
• urano	$\tau = 1,012y$	$a_H = 10,08 \text{ AU}$	$\Delta t = 16,036y$	$\delta_1 = 111^\circ$
• nettuno	$\tau = 1,006y$	$a_H = 15,53 \text{ AU}$	$\Delta t = 30,61y$	$\delta_1 = 113^\circ$
• plutone	$\tau = 1,004y$	$a_H = 20,24 \text{ AU}$	$\Delta t = 45,53y$	$\delta_1 = 113^\circ$

In una situazione pratica, i tempi di arrivo e partenza sono scelti indipendenti  $\rightarrow$  una conica generica passante per due punti in modo da ottimizzare il tempo, il costo e il payload fissando un certo momento a cui si vuole partire. È sconsigliato aspettare 2 anni tra un lancio e l'altro.

Si ricorda che durante la fase di trasferimento è necessario effettuare una manovra da parte il veicolo sulla pia orbita del target che risulta, anche minimamente, inclinata rispetto a quella terrestre



ellissi con semiasse scelte in base all'ottimizzazione in un certo tempo di partenza



Ad ogni modo  $V_1 - V_{\oplus} = \Delta V_1$  di partenza, pari alle velocità di eccesso iperbolico del satellite in orbita attorno alla terra. (S1)

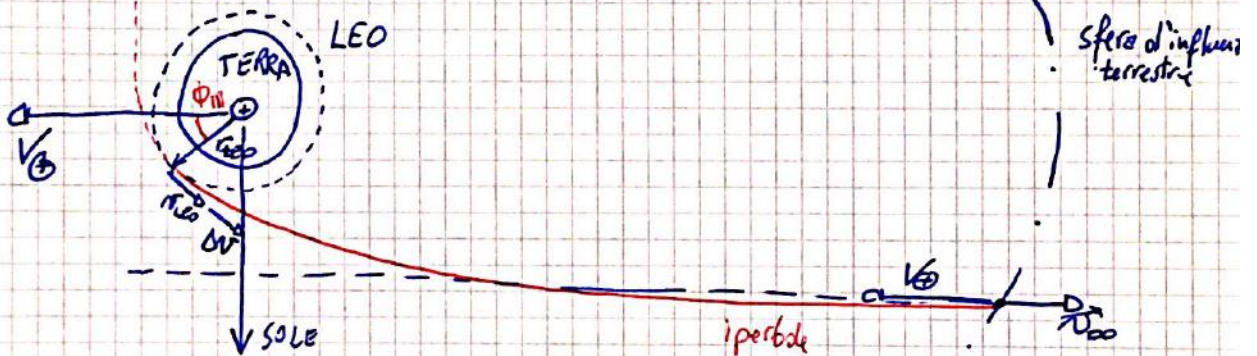
1° fase planetocentrica: fuga dalla sfera d'influenza terrestre

Una volta selezionata la traiettoria eliocentrica, quindi  $V_1$  e  $V_2$  equindi  $\Delta V_1$  rispetto alla terra, si può calcolare l'iniezione in orbita che porta la sonda a lasciare l'orbita (o la superficie terrestre) e raggiungere l'eccesso iperbolico di velocità desiderato nella direzione voluta.

La sfera d'influenza terrestre è circa  $10^6$  km, per cui si può assumere che  $V_{\infty} \approx \Delta V_1$  in buona approssimazione.

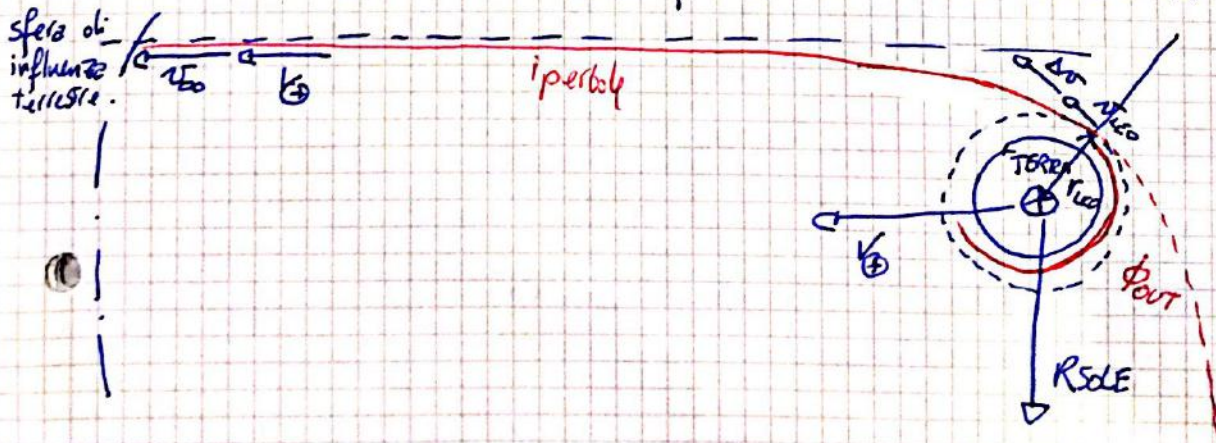
Per semplicità si studi il caso di traiettoria verso un inner planet, ogni considerazione si può riportare su una traiettoria verso un outer planet in modo molto semplice.

$V_1 < V_{\oplus} \Rightarrow V_{\infty}$  in verso opposto al moto della terra.



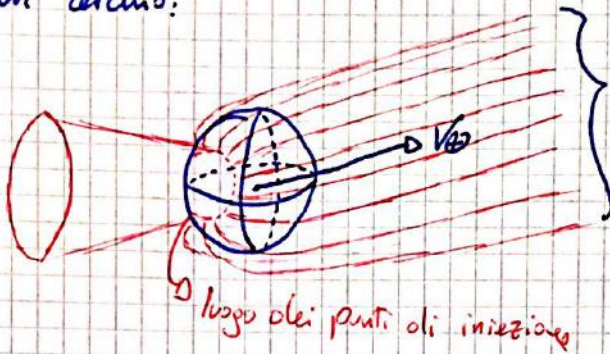
$\vec{V}_1 = \vec{V}_{\oplus} + \vec{V}_{\infty} \iff |\vec{V}_1| = |V_{\oplus}| - |V_{\infty}|$

Al satellite viene dato un  $\Delta V$  in un certo punto caratterizzato da una fase  $\phi_{in}$ , in modo da rendere l'uscita con  $\phi_2 = 0$ . Un uscita così viene detta Backdoor exit (uscita dal retro). Nel caso in cui si volesse andare su un outer planet, si avrebbe una Frontdoor exit



Bisogna anche notare che non è necessario che l'orbita di partenza giaccia sull'edittica, ma che solo l'asintoto dell'iperbole deve giacervi. Il luogo dei punti di partenza può essere rappresentato con un cerchio.

93



Asintoti tutti paralleli alla velocità del pianeta.

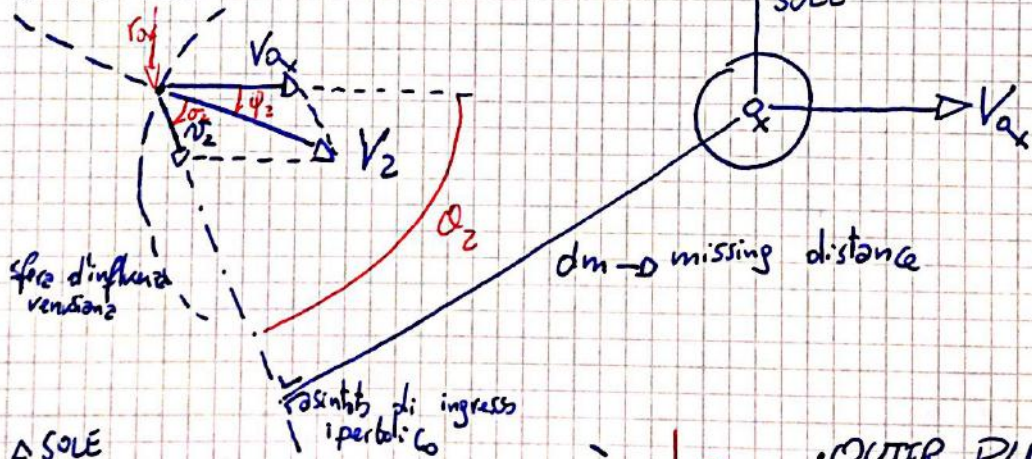
## 2° fase planetocentrica

Dalla fase 1 si è capito che la traiettoria eliocentrica sarà tangente alla velocità della terra, per prenderne tutto il vantaggio possibile. All'arrivo tuttavia, la velocità della sonda sarà disallineata con quella del pianeta e sarà presente un angolo  $\varphi_2 \neq 0$ .

Se  $E_t$  e  $h_t$  sono energia e momento angolare dell'orbita di trasferimento,  $v_2$  e  $\varphi_2$  possono essere calcolati.

$$v_2 = \sqrt{2\left(\frac{\mu_0}{r_2} + E_t\right)} \quad \text{e} \quad \varphi_2 = 2 \cos \frac{h_t}{r_0 v_2}$$

• INNER PLANET



• OUTER PLANET

