



Appunti universitari
Tesi di laurea
Cartoleria e cancelleria
Stampa file e fotocopie
Print on demand
Rilegature

NUMERO: 2453A

ANNO: 2020

A P P U N T I

STUDENTE: Sales Cristian

MATERIA: Geomatica - Prof. Cina

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

Domande geomatica (Cina)

$\hat{\mu} \hat{c} \hat{v}$

1. Metodo dei minimi quadrati : stima di (dimostrazione)
2. Test del χ^2
3. [ESERCITAZIONE] Si è partiti su una rete GPS che insiste sui punti. Come sono state ricavate le misure GPS? Spiegare il funzionamento
4. Sono importanti le differenze di errori $\Delta E, \Delta T, \Delta I$?
 Errore troposferico \rightarrow superiore a 5 m con cutoff $< 15^\circ$, allo zenit errore di 2m (secondo Hopfield)
 Errore ionosferico \rightarrow possono raggiungere anche i 10 m, gli errori maggiori sono in corrispondenza delle ore di picco del Sole, in quanto sono le radiazioni solari a generare una ionizzazione dei gas costituenti la zona ionosferica
 Errore di effemeridi \rightarrow Broadcast circa 1 m
 Ultrarapide \rightarrow 15 minuti prima della misura 5 cm
 Precise \rightarrow misura a posteriori 2.5 cm
 S/A \rightarrow degradava la precisione delle orbite satellitari alle utenze civile con errori di circa 100 m
5. L'eliminazione dell'errore sulle frequenze nel posizionamento differenziale è sempre valida? Quali costellazioni conosciamo?
 Glonass, frequenze diverse
6. Come deve essere l'ambiguità di fase? Può essere fissata? Come?
 Doppie differenze + triple differenze
 Combinazione Wide Lane
7. È possibile monitorare gli errori tramite il grafico dei DOP?
 Per il posizionamento assoluto usiamo i DOP, per il posizionamento relativo usiamo NDOP
8. Come di effettua la registrazione delle scansioni Laser? Come si uniscono le diverse scansioni?
9. Quale è la relazione che lega le scansioni con il sistema di riferimento globale?
10. Quali test vengono effettuati a monte delle singole misure? In cosa consiste il test sul residuo normalizzato?
11. Che significato ha esattamente l'MBD?
12. Quanto può variare la ridondanza locale? Come si calcola la matrice di ridondanza?
13. Che relazione c'è tra la varianza e lo scarto?
14. Quali matrici sono progettabili? L'MBD è progettabile? In quale caso potrebbe essere utile progettare l'MBD?
15. Orientamento relativo e assoluto, che equazioni si adoperano?
16. Posizionamento NRTK : vantaggi e differenze rispetto al posizionamento RTK
 NRTK ha reti di stazioni permanenti che scambiano dati tra loro, mentre nell'RTK le stazioni permanenti sono indipendenti, questo comporta di ottenere soluzioni in tempo reale solo nelle vicinanze della stazione permanente.
17. Tipologie di posizionamento RTK
18. [ESERCITAZIONE] Nel riportare le varie coordinate in un unico SR sono state adoperate varie trasformazioni. Fare una panoramica dei vari SR. Che cosa è l'ETRF2000? Che differenza c'è tra l'ETRF e l'ITRF?
 ETRS e ITRS coincidono all'anno 89, da allora si sono accumulate delle differenze di spostamento e velocità che all'epoca 05 sono di circa 68cm e la velocità varia di alcuni centimetri all'anno.
 WGS84 non parametri di trasformazione ufficiali, possono essere utilizzati i parametri del WGS84 con errori circa pari a 10cm.
19. Come si approccia il problema del cambio del SR? Che cosa fa CartLAB? Cosa contiene? Quali sono i parametri di trasformazione? Che tipo di funzione si adotta nella trasformazione?
 Supponiamo di conoscere i valori di isovarianza delle coordinate sui quattro spigoli di coordinate note di una cella quadrilatera e voler ricavare per interpolazione bilineare il valore, in un punto di coordinate (x_i, y_i) . Posso scrivere la relazione bilineare :

$$\Delta_i = a x_i + b y_i + c x_i y_i + d$$

TRATTAMENTO DELLE MISURE TOPOGRAFICHE

La **geomatica** si occupa di **ACQUISIZIONE**, **ELABORAZIONE**, **GESTIONE**, **ANALISI**, **RESTITUZIONE** di **dati di natura metrica** relativi alla superficie della Terra

↓
individuali dello **lbro**

POSIZIONE SPAZIALE

PRECISIONE

la **posizione spaziale** è definita dalle

Coordinate dei punti in un **S.R.**

oggi è possibile farlo con i **GPS**

ma Non sono MISURABILI DIRETTAMENTE (OSSERVABILI)

con gli strumenti a disposizione misuriamo grandezze funzionali della posizione (angoli, distanze, distlivelli, sfasamenti di onde) da sensori solidali al fenomeno da osservare

il legame tra le grandezze misurate e quelle incognite è espresso dalle equazioni d'osservazione

la misura deve essere **PRECISA**, **AFFIDABILE**, **ROBUSTA**

Tipologie di Misure

- DIRETTE { angoli, distlivelli } ⇒ LIVELLAZIONE GEOMETRICA
- INDIRETTE { coordinate, basi GPS } ⇒ LIVELLAZIONE TRIGONOMETRICA
- CONDIZIONATE { angoli interni di un triangolo }

l'operazione di misura è sempre affetta da **ERRORE**

Tipologie di Errore

- GROSSOLANI - outlier eliminabili effettuando 3 misurazioni
- SISTEMATICI (BIAS) - eliminabili con rettifiche strumento o con misure differenziali
- ACCIDENTALI
 avviene quando le procedure adottate spingono l'approssimazione ai limiti di capacità di misura dello strumento

VARIABILE CASUALE 1D

Le variabili casuali che si incontrano possono essere

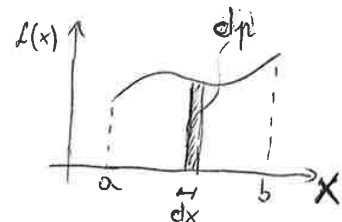
- DISCRETE con probabilità $p(x_i) = p_i$ e funzione di distribuzione a gradini $F(x_i) = p(x \leq x_i) = \sum_{j=1}^i p_j$
- CONTINUE con probabilità $p(x) = p$ e funzione di distribuzione continua $F(x) = p(x_0 \leq x) = \int_a^x f(t) dt$

Campionando una grandezza (misura, errore, ecc) in un INTERVALLO INFINITESIMO (dx) si ottiene la corrispondente

PROBABILITÀ INFINITESIMA

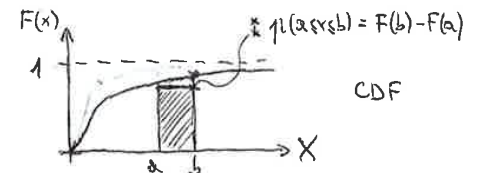
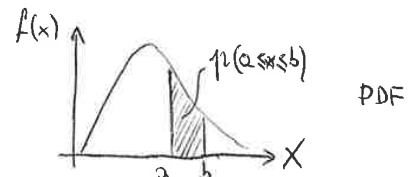
$dp = f(x) \cdot dx$
 |
 DENSITÀ DI PROBABILITÀ (PDF)

probabilità di estreme a caso della x un individuo il cui valore argomentale sia compreso nell'intervallo $[x, x+dx]$



mentre in un INTERVALLO FINITO $[a, b]$ sarebbe

$p(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$
 FUNZIONI DI PROBABILITÀ CUMULATA (CDF)



e di conseguenza

$f(x) \geq 0$
 $\int_a^b f(x) dx = 1$

Per rappresentare una v.c. 1D si introducono degli indici, cioè una serie di MOMENTI K-esimi rispetto ad un polo θ che ne rappresenta tutte le caratteristiche della distribuzione

$m_{k, \theta} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x_i - \theta)^k \cdot f(x) dx$
 $m_{k, \theta} = \sum_{i=1}^n (x_i - \theta)^k \cdot p_i$

MOMENTO DI PRIMO ORDINE ($k=1$)
 RISPETTO AL POLO $\theta=0$ ($\theta=0$)

MEDIA

$m_{1,0} = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx$
 $m_{1,0} = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i$

MOMENTO DI SECONDO ORDINE ($k=2$)
 RISPETTO AL POLO $\theta=0$ ($\theta=0$)

VALORE QUADRATICO MEDIO

$m_{2,0} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x) dx$
 $m_{2,0} = \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot p_i$

MOMENTO DI SECONDO ORDINE ($k=2$)
 RISPETTO ALLA MEDIA ($\theta=m$)

VARIANZA

$m_{2,m} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^2 \cdot f(x) dx$
 $m_{2,m} = \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 \cdot p_i$

VARIABLE CASUALE 2D e nD

Per V.C. 2D, come per la V.C. 1D, gli individui della popolazione sono raggruppati in classi in base ai valori argomentati dei loro attributi

La V.C. 2D è rappresentata da una tabella a doppia entrata:

FREQUENZA RELATIVA f_{ik} o PROBABILITÀ p_{ik}

$Y \backslash X \Rightarrow$	x_1	x_2	(x_i)	x_r	(somma riga)
y_1	p_{11}	p_{12}		p_{r1}	$\mu_{1\cdot}$
y_2	p_{21}	p_{22}		p_{r2}	$\mu_{2\cdot}$
$\vdots (y_k)$					
y_s	p_{s1}	p_{s2}		p_{rs}	$\mu_{s\cdot}$
(somma colonna)	$\nu_{\cdot 1}$	$\nu_{\cdot 2}$		$\nu_{\cdot r}$	$\sum = 1$

DISTRIBUZIONE CONDIZIONATA di X per $y=y_2$
 DISTRIBUZIONE MARGINALE DELLA Y
 DISTRIBUZIONE CONDIZIONATA di Y per $x=x_1$
 DISTRIBUZIONE MARGINALE DELLA X
 FREQUENZA TOTALE

Per V.C. nD si ha una distribuzione di probabilità in \mathbb{R}^n

Nel caso della V.C. 2D deve necessariamente valere

- per V.C. DISCRETE $p_{ik} \geq 0 \quad \sum_i \sum_k p_{ik} = 1$
- per V.C. CONTINUE $f(x,y) \geq 0 \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dx dy = 1$

Si definiscono i momenti di V.C. 2D (solo riportati per V.C. discrete) e continue

MEDIA

$$m_{1x} = \sum_i \sum_k x_i \cdot p_{ik} = \sum_i x_i \underbrace{\sum_k p_{ik}}_{\nu_i} = \sum_i x_i \nu_i$$

$$m_{2x} = \sum_k \sum_i y_i \cdot p_{ik} = \dots = \sum_k y_k \mu_k$$

$$m_{1x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x,y) dx dy$$

$$m_{2x} = \int y f(x,y) dx dy$$

VALORE QUADRATICO MEDIO

$$m_{2x} = \sum_i \sum_k x_i^2 \cdot p_{ik} = \sum_i x_i^2 \nu_i$$

$$m_{2y} = \sum_k \sum_i y_i^2 \cdot p_{ik} = \sum_k y_k^2 \mu_k$$

$$m_{2x} = \int x^2 f(x,y) dx dy$$

$$m_{2y} = \int y^2 f(x,y) dx dy$$

VARIANZA

$$\sigma_x^2 = \sum_i \sum_k (x_i - m_{1x})^2 \cdot p_{ik} = \dots = m_{2x} - m_{1x}^2$$

$$\sigma_y^2 = \sum_k \sum_i (y_k - m_{1y})^2 \cdot p_{ik} = \dots = m_{2y} - m_{1y}^2$$

$$\sigma_x^2 = \int (x - m_{1x})^2 f(x,y) dx dy = m_{2x} - m_{1x}^2$$

$$\sigma_y^2 = \int (y - m_{1y})^2 f(x,y) dx dy = m_{2y} - m_{1y}^2$$

MOMENTO MISTO

$$m_{xy} = \sum_i \sum_k x_i \cdot y_k \cdot p_{ik}$$

$$m_{xy} = \int x \cdot y \cdot f(x,y) dx dy$$

MOMENTO MISTO DELLO SCARTO

$$\sigma_{xy} = \sum_i \sum_k (x_i - m_{1x})(y_k - m_{1y}) \cdot p_{ik} = m_{xy} - m_{1x} m_{1y}$$

$$\sigma_{xy} = \int (x - m_{1x})(y - m_{1y}) \cdot f(x,y) dx dy = m_{xy} - m_{1x} m_{1y}$$

COVARIANZA

• **CORRELAZIONE LINEARE**

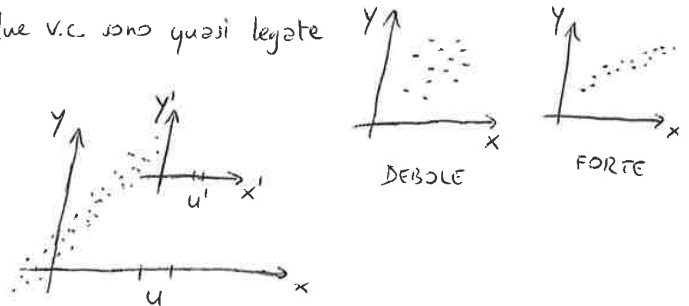
Le variabili x, y si dicono **CORRELATE** se $P(x=X, y=Y) \neq P(x=X) \cdot P(y=Y)$

le variabili x, y si dicono **INCORRELATE** se $P(x=X, y=Y) = P(x=X) \cdot P(y=Y)$, cioè si possono trattare come singole v.c. ID

La **CORRELAZIONE** tra due variabili è una specie di dipendenza, che può essere **FORTE** o **DEBOL**E: in una correlazione forte le due v.c. sono quasi legate da una dipendenza funzionale.

La **CORRELAZIONE** è:

- **INDIPENDENTE** dalla TRASLAZIONE del S.R.
- **INDIPENDENTE** dalla SCALA del S.R.
- **INDIPENDENTE** dal valore che assumono le variabili considerate, quindi si usano le **variabili SCARTO STANDARDIZZATE**

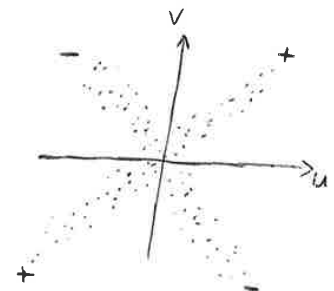


$$u_i = \frac{x_i - m_x}{\sigma_x} \quad v_i = \frac{y_i - m_y}{\sigma_y}$$

e il **COEFFICIENTE DI CORRELAZIONE (LINEARE)**

$$\rho = \frac{\sum_i u_i v_i}{N} = \frac{1}{N} \frac{\sum_i (x_i - m_x) \cdot (y_i - m_y)}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$$

n° osservazioni



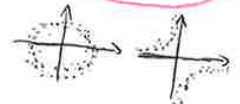
$$-1 \leq \rho \leq +1$$

se c'è forte correlazione **lineare**, il contributo può essere
 fortemente positivo (I e III)
 o
 fortemente negativo (II e IV)

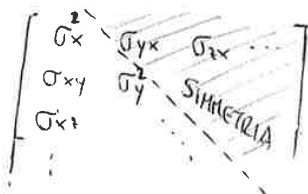
OPPURE

può esserci correlazione, ma **non lineare**

$$\rho = 0$$



• La **MATRICE DI VARIANZA-COVARIANZA** deve essere:



QUADRATA
 $n \times n$

SIMMETRICA

SEMIDEFINITA
POSITIVA
($\det \geq 0$)

$-1 \leq \rho \leq 1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4x3
non è Cxx
perché non quadrata

$$\begin{bmatrix} 1 & 0,5 & 0,2 \\ 0,5 & 2 & 0,3 \\ 0,2 & 0,3 & 3 \end{bmatrix}$$

non è Cxx

$$\begin{bmatrix} 1 & 0,5 & 0,2 \\ 0,5 & -2 & 0,3 \\ 0,2 & 0,3 & 3 \end{bmatrix}$$

non è Cxx
perché c'è
una **VARIANZA**
negativa

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0,1 \\ 3 & 4 & 0,2 \\ 0,1 & 0,2 & 5 \end{bmatrix}$$

non è Cxx
perché
 $\rho_{xy} = \frac{3}{\sqrt{2} \cdot 4} > 1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

può essere Cxx
ma ci sono
3 v.c. ID
perché le covarianze
sono tutte nulle

• STIMA con i MINIMI QUADRATI (DEGLI SCARTI)

L'obiettivo è la STIMA delle due caratteristiche (media m e varianza σ^2) o (media m e scarto quad. medio σ) della distribuzione normale mediante una relazione analitica, cioè lo STIMATORE.

La STIMA deve essere

$$\begin{aligned} \hat{m}_i &= h_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \hat{\sigma}_i^2 &= g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

valori stimati \leftarrow $\hat{m}_i, \hat{\sigma}_i^2$ stimatori \leftarrow h_i, g_i



• nel caso di misure con la STESSA PRECISIONE:

dopo aver estratto un campione o_1, o_2, \dots, o_n da una popolazione Normale di media m e Varianza σ^2 } VALORI TEORICI

la probabilità infinitesima di ottenere un valore o sarà

$$dp = f(o) do = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(o-m)^2}{2\sigma^2}} do$$

supponendo le misure o_1, o_2, \dots, o_n incorrelate/indipendenti la probabilità infinitesima dell'intero campione di n elementi

$$dP = f(o_1) \cdot f(o_2) \cdot \dots \cdot f(o_n) (do)^n$$

supponendo il campione come il più probabile, sto dicendo che le misure sono eseguite nel migliore dei modi

se si assumono come stime dei parametri i valori che massimizzano dP , si considera il campione come il più probabile in assoluto tra tutti quelli estraibili

la probabilità del campione di n elementi risulta

$$dP = P(o_1, o_2, \dots, o_n | m, \sigma^2) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{n}{2}}} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (o_i - m)^2} (do)^n$$

FUNZIONE DI VEROSIMIGLIANZA \checkmark

• nel caso di MISURE con PRECISIONE DIVERSA :

STIMA DELLA MEDIA

Suppongo il campione o_1, o_2, \dots, o_n
 e attribuisco i pesi p_1, p_2, \dots, p_n
 quindi la probabilità sarà massima

$$dP = \frac{\sqrt{p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n}}{(2\pi\sigma_0)^{n/2}} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma_0^2} \sum_{i=1}^n p_i (o_i - m)^2} (d_0)^n$$

FUNZIONE DI VEROSIMIGLIANZA $V \Rightarrow V = V_{MAX} \Rightarrow \sum_{i=1}^n p_i (o_i - m)^2 = \min$

PRINCIPIO DI MASSIMA VEROSIMIGLIANZA \Rightarrow PRINCIPIO DEI MINIMI QUADRATI DEGLI SCARTI

↳ si calcola il minimo annullando la derivata

$$\frac{\partial}{\partial m} \left[\sum_{i=1}^n p_i (o_i - m)^2 \right] = 0 \quad -2 \sum_{i=1}^n p_i (o_i - m) = 0 \quad \sum_{i=1}^n p_i o_i - m \sum_{i=1}^n p_i = 0$$

↳ la derivata nulla può indicare sia un massimo che un minimo: per essere sicuri che sia un MINIMO \Rightarrow la derivata II^a deve essere una costante positiva

$$\hat{m} = \frac{\sum_{i=1}^n p_i o_i}{\sum_{i=1}^n p_i}$$

MEDIA PESATA o PONDERATA
 (tende alle misure con maggior peso)

$$\frac{\partial^2}{\partial m^2} \left[\sum_{i=1}^n p_i (o_i - m)^2 \right] \geq 0 \quad 2 \sum_{i=1}^n p_i > 0 \quad \checkmark$$

• PROCEDIMENTO GENERALE DI MISURA

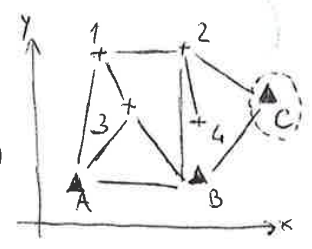
Le misure topografiche devono tenere conto di alcuni aspetti, che assumiamo come IPOTESI del procedimento di misura

- 1) si osservano PIU' GRANDEZZE CONTEMPORANEAMENTE
- 2) si eseguono in genere MISURE INDIRETTE (funzionali della posizione)
 - ↳ ad es. rilievo di coordinate attraverso misure dirette come angoli, distanze, distlivelli
- 3) si osservano MISURE CON DIVERSA PRECISIONE
 - ↳ devono essere omogeneizzate con opportuni pesi
- 4) si eseguono MISURE RIDONDANTI (ripetizione per controllo e affidabilità rilievo)
 - ↳ in questo modo si compensano le fluttuazioni accidentali

vertice di coordinate note

sistema ridondante $n - r = 5$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{Per esempio la stima delle coordinate dei punti } 1, 2, 3, 4 \\ \text{diventa un problema di } 4 \text{ punti} \times 2 \text{ incognite} = 8 \text{ incognite (r)} \\ \text{risolvibile con } 10 \text{ distanze} + 3 \text{ angoli} = 13 \text{ equazioni (n)} \end{array} \right.$

$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} - d_{12} = 0 \quad \vartheta_{ij} = \arctg \left(\frac{x_j - x_i}{y_j - y_i} \right)$



• applicando il PRINCIPIO DEI MINIMI QUADRATI :

$$\sum_i^n p_i v_i^2 = \min \rightarrow \text{questa funzione dipende da } n \text{ variabili } (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

e si ha la certezza che i punti rappresentano dei minimi perché la derivata seconda è costante positiva

$$I^a \quad \frac{\partial}{\partial \hat{m}} \left[\sum_i^n p_i v_i^2 \right] = \frac{\partial}{\partial \hat{m}} \left[\sum_i^n p_i (x_i - \hat{m})^2 \right] = -2 \sum_i^n p_i (x_i - \hat{m})$$

$$II^a \quad \frac{\partial^2}{\partial \hat{m}^2} \left[\sum_i^n p_i v_i^2 \right] = 2 \sum_i^n p_i \geq 0 \quad \checkmark$$

$$\begin{cases} 1 & \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\sum_i^n p_i v_i^2 \right] = 0 \\ \vdots & \vdots \\ n & \frac{\partial}{\partial x_n} \left[\sum_i^n p_i v_i^2 \right] = 0 \end{cases}$$

• Il sistema trovato è detto SISTEMA NORMALE

(moltiplicando $AX - l_0 = v$ per A^T è la soluzione finale)

$$N \cdot X = T_n$$

$$\hat{X} = N^{-1} \cdot T_n$$

valori stimati con principio di massima verosimiglianza

matrice normale inversa (simmetrica)

$$\begin{matrix} \boxed{N} & \cdot & \boxed{X} & = & \boxed{T_n} \\ n \times n & & n \times 1 & & n \times 1 \end{matrix}$$

MATRICE NORMALE (simmetrica)

VETTORE PARAMETRI INCONGNITI (STIMATI)

VETTORE NORMALIZZATO DEI TERMINI NOTI

*

con questo sistema, ogni volta che si presenta un problema di stima la procedura è:

- scrivere l'equazione $\sum_i^n p_i v_i^2$
- derivare l'equazione per trovare il minimo
- applicazione di calcolo automatico per invertire N
- stima dei parametri col sistema normale

nelle applicazioni topografiche e fotogrammetriche le grandezze da stimare contemporaneamente possono essere anche > 100

occorre una procedura più agevole,

si sfrutta il fatto che

N e T_n dipendono solo da A ed l del sistema originale

$$N = A^T \cdot A$$

$$T_n = A^T \cdot l_0$$

* noti i valori stimati \hat{X} , sostituendo nel sistema di partenza si generano gli

$$A \hat{X} - l_0 = \hat{V}$$

SCARTI STIMATI

• MODELLO DI GAUSS - STIMA DELLA VARIANZA DELL'UNITÀ DI PESO

Per calcolare la MATRICE DI VARIANZA-COVARIANZA C_{XX} \Rightarrow è necessario conoscere il valore di σ_0^2 o una stima $\rightarrow p_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2}$ (DOPO AVER EFFETTUATO LE MISURE!)

• dal campione di misure o_1, o_2, \dots, o_n si applica il PRINCIPIO DI MASSIMA VEROSIMIGLIANZA

fissato a priori perché NON ALTERA la stima dei parametri

si cerca qual è il max della funzione V al variare di σ_0^2

↓ scomporre in \hat{X}

$$\hat{X} = [A^T (\sigma_0^2 C_{LL}^{-1}) A]^{-1} [A^T (\sigma_0^2 C_{LL}^{-1}) l_0]$$

(IMPORTANTE!!)

$$V(o_1, o_2, \dots, o_n; m; \sigma_0^2) = \frac{\sqrt{p_1 p_2 \dots p_n}}{(2\pi \sigma_0^2)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_0^2} \sum p_i (o_i - m)^2}$$

per semplificare si applica il $\ln(V)$:

$$\ln(V) = \frac{1}{2} \ln(p_1 p_2 \dots p_n) - \frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \ln(\sigma_0^2) - \frac{1}{2\sigma_0^2} \sum_i p_i (o_i - m)^2$$

si cerca il minimo applicando la derivata e annullandola:

$$\frac{\partial}{\partial \sigma_0^2} (\ln V) = -\frac{n}{2} \frac{1}{\sigma_0^2} - \frac{1}{2} (-1) \cdot (\sigma_0^2)^{-2} \sum_i p_i (o_i - m)^2 = -\frac{n}{2\sigma_0^2} + \frac{1}{2\sigma_0^4} \sum p_i (o_i - m)^2 = 0$$

$$\frac{1}{2\sigma_0^4} \sum p_i (o_i - m)^2 = \frac{n}{2\sigma_0^2}$$

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\sum_i p_i (o_i - m)^2}{n}$$

→ questo stimatore (la funzione) non è corretto perché affetto da errore sistematico (BIASED)

si utilizza quindi un altro stimatore

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\sum_i p_i (o_i - m)^2}{n-1}$$

che nel caso generico di stima di R grandette

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\sum_i p_i (o_i - m)^2}{n-R} = \frac{\hat{V}^T P \hat{V}}{n-R}$$

↳ $\hat{\sigma}_0^2$ deve essere ragionevolmente vicino a quello fissato a priori arbitrariamente (σ_0^2)

dato che

$$\underbrace{(\sqrt{V_1} \sqrt{V_2} \sqrt{V_3})}_{V^T} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{V_1} \\ \sqrt{V_2} \\ \sqrt{V_3} \end{pmatrix}}_V = V_1 + V_2 + V_3$$

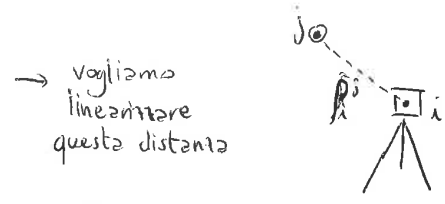
SCARTI STIMATI
 $\hat{V} = A\hat{X} - l_0$

↓
si verifica con il

TEST DI ADEGUATEZZA DEL MODELLO

- SOTTOCASO NON LINEARE → (servirà a p. 38)
(continua da p. 8)

Quando abbiamo a che fare con equazioni NON LINEARI,
ad esempio la misura di una distanza associata ad un angolo



→ vogliamo linearizzare questa distanza

$$\rho_i^j = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}$$

↳ l'errore cresce quanto più ci spostiamo dall'intorno di x_0



$$X = \underbrace{X^{(0)}}_{\text{misura}} + \underbrace{\Delta X_i}_{\text{correzione} \equiv \text{scarto } (x - x_{(0)})}$$

Si può scrivere la funzione con uno sviluppo in serie di Taylor, nell'intorno dei valori approssimati $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots$ e con l'ipotesi di scarti piccoli

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \underbrace{f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})}_{f^{(0)}} + \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_{(0)}}_{a_1} x_1 + \dots + \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_{(0)}}_{a_n} x_n + \text{termini II}^{\circ} \text{ ordine } \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}\right)_{(0)}$$

↳ trascurabili

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f^{(0)} + a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$$

i coefficienti sono contenuti nella matrice Jacobiana [J]

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)_{(0)} & \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)_{(0)} & \dots & \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_n}\right)_{(0)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_1}\right)_{(0)} & \dots & \dots & \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right)_{(0)} \end{bmatrix}$$

↳ nella misura della distanza ρ_i^j il generico coefficiente sarà

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial x_i}\right)_{(0)} = \frac{x(x_i - x_j)}{x \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}} = \frac{(x_i - x_j)}{\rho_i^j}$$

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial x_j}\right)_{(0)} = \dots = -\frac{(x_i - x_j)}{\rho_i^j}$$

↳ mentre i valori approssimati si possono ottenere da procedendo per ITERAZIONI:

- ↳ CARTOGRAFIA
- ↳ SCHEMI SEMPLIFICATI
- ↳ GPS

$$\begin{aligned} \hat{x}_1 &\Rightarrow \hat{x}_1^{(1)} = x^{(0)} + \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 &\Rightarrow \hat{x}_2^{(2)} = x^{(1)} + \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 &\Rightarrow \hat{x}_3^{(3)} = x^{(2)} + \hat{x}_3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

fino a $|x^n - x^{(n-1)}| \leq \epsilon$
 ↳ correzioni (scarti)

MODELLO DI GAUSS - STIMA DELLA MATRICE DI VARIANZA-COVARIANZA DEGLI SCARTI

Nota la matrice di ridondanza R \Rightarrow si determina la matrice di varianza-covarianza degli scarti $C_{\hat{w}}$ \rightarrow permette di valutare la bontà delle osservazioni

dall'espressione ottenuta per gli SCARTI STIMATI:

$$\hat{v} = \hat{l} - l_0 = -R \cdot (l_0)$$

$$C_{\hat{w}} = \hat{\sigma}_0^2 \cdot P^{-1}$$

si applica la PROPAGAZIONE DELLA VARIANZA

$\hat{v} = -R \cdot l_0$
operatore che applica la propagazione

dato $y = A \cdot x$ \rightarrow $(AB)^T = B^T A^T$
 $C_{yy} = A \cdot C_{xx} \cdot A^T$
 proprietà di simmetria \rightarrow
 $N \equiv N^T$
 $P \equiv P^T$

$$C_{\hat{w}} = (-R) \cdot C_{ll} \cdot (-R)^T$$

$$= (A \cdot N^{-1} \cdot A^T \cdot P - I) (\hat{\sigma}_0^2 \cdot P^{-1}) (A \cdot N^{-1} \cdot A^T \cdot P - I)^T$$

$$= \hat{\sigma}_0^2 [(A \cdot N^{-1} \cdot A^T \cdot P - I) P^{-1} (A \cdot N^{-1} \cdot A^T \cdot P - I)^T]$$

$$= \hat{\sigma}_0^2 [(A \cdot N^{-1} \cdot A^T \cdot P \cdot P^{-1} - P^{-1}) (A \cdot N^{-1} \cdot A^T \cdot P - I)^T]$$

$$= \hat{\sigma}_0^2 [(A \cdot N^{-1} \cdot A^T - P^{-1}) (A \cdot N^{-1} \cdot A^T \cdot P - I)^T]$$

$$= \hat{\sigma}_0^2 [(A \cdot N^{-1} \cdot A^T - P^{-1}) (P^T \cdot A \cdot N^{-1} \cdot A^T - I)]$$

$$= \hat{\sigma}_0^2 [(A \cdot N^{-1} \cdot A^T \cdot P \cdot A \cdot N^{-1} \cdot A^T) - (A \cdot N^{-1} \cdot A^T) - (P^{-1} \cdot P^T \cdot A \cdot N^{-1} \cdot A^T) + P^{-1}]$$

$$= \hat{\sigma}_0^2 [(A \cdot N^{-1} \cdot A^T) - 2(A \cdot N^{-1} \cdot A^T) + P^{-1}] = \hat{\sigma}_0^2 [P^{-1} - A \cdot N^{-1} \cdot A^T]$$

il termine $(A \cdot N^{-1} \cdot A^T \cdot P - I)^T$ diventa
 $= (A \cdot N^{-1} \cdot A^T \cdot P)^T - I$
 $= (A^T \cdot P)^T \cdot (A \cdot N^{-1})^T - I$
 $= P^T \cdot A \cdot N^{-1} \cdot A^T - I$

$C_{\hat{w}}$ contiene varianza sulle diagonale e covarianza fuori diagonale

$$\begin{bmatrix} \sigma_{v1}^2 & \sigma_{v1v2}^2 & \dots \\ \sigma_{v2v1}^2 & \sigma_{v2}^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (n \times n)$$

vale anche la relazione

$$C_{\hat{w}} = \hat{\sigma}_0^2 [I - A \cdot N^{-1} \cdot A^T] P^{-1} = \hat{\sigma}_0^2 [R \cdot P^{-1}]$$

$C_{\hat{w}}$ è proiettabile con $(\hat{\sigma}_0^2)$ noto a priori (dopo aver effettuato le misure)

$$C_{\hat{w}} = \hat{\sigma}_0^2 [P^{-1} - A \cdot N^{-1} \cdot A^T] = \hat{\sigma}_0^2 [Q_{\hat{w}}]$$

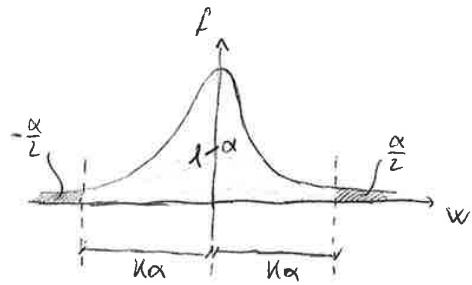
MATRICE DEI COFATTORI DEGLI SCARTI

è simmetrica di ordine n ed è proiettabile

esiste una relazione tra C_{xx} e $C_{\hat{w}}$

- fissato il livello di significatività $\alpha \iff$ probabilità di accettare una misura sbagliata
- si sottopone a test $w_i \in N(0,1)$

↳ sulla curva si definiscono i limiti $K\alpha$, che gli **INTERVALLI DI CONFIDENZA**, che corrispondono ai quantili $\frac{\alpha}{2}$ e $-\frac{\alpha}{2}$



• se $|w_i| \leq K\alpha \implies$ **ACCETTO LA MISURA**
 $w_i \in N(0,1)$

• se $|w_i| > K\alpha \implies$ **RIGETTO LA MISURA**:
permane $\alpha\%$ probabilità di aver scartato una misura corretta $\in N(0,1)$

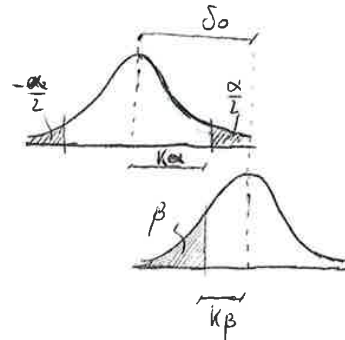
ERRORE DI I TIPO

avviene una delle 2 possibilità:
 ① $w_i \notin N(0,1)$
 ② evento raro ($\alpha\%$) (lo tratto come errore grossolano)

- inoltre, supponiamo di analizzare un'altra misura proveniente da una diversa distribuzione, spostata di $\delta_0 =$ **PARAMETRO DI NON CENTRALITÀ**

$$\delta_0 = K\alpha + K\beta$$

↳ in questo caso l'area accettata è quella a destra di β , cioè $K\beta$, anche se in realtà questi valori non sono possibili perché al di fuori dei limiti $|K\alpha|$



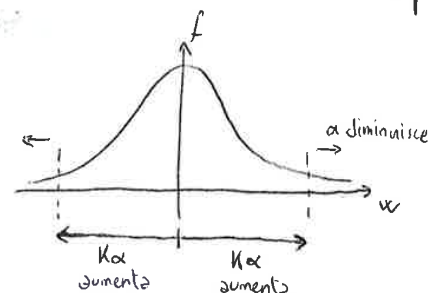
\implies **ACCETTO LA MISURA**:
proveniente da un'altra distribuzione, cioè $N(\delta_0, 1)$ quindi una misura errata

ERRORE DI II TIPO

- Si cerca di capire perché non scegliere il valore di α più comodo (cioè il più piccolo) in modo da evitare di commettere l'errore di I tipo:

↳ abbassando il livello α , i valori limite si allargano

- se α grande \implies **test più restrittivo**
- se α piccolo \implies **test meno significativo** (si tende ad accettare ogni misura)

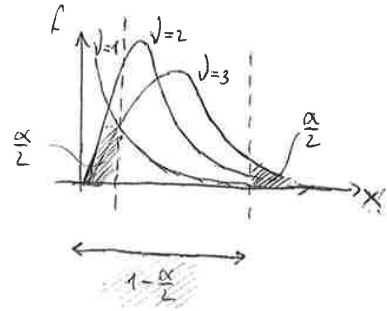


↳ si cerca un valore di α di compromesso, perché

se α grande \implies **probabilità di fare ERRORE DI I TIPO aumenta** \implies **probabilità di fare ERRORE DI II TIPO diminuisce**

- se gli scarti seguono una distr. χ^2 allora anche $\hat{\sigma}_0^2$ segue una distr. χ^2 e quindi anche il rapporto $\frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2}$ segue, essendo σ_0^2 una costante fissata a priori

$$\begin{aligned} V_i^2 &\in \chi^2 \\ \Rightarrow \hat{\sigma}_0^2 &\in \chi^2 \\ \frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} &\in \chi^2 \end{aligned}$$



si fissa un LIVELLO DI SIGNIFICATIVITA' α

si cercano i valori corrispondenti a $\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ e $\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$ con $(v=n-r)$ g.d.l. da cui i valori limite $\chi^2_{\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$ e $\chi^2_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}$

$$\frac{\chi^2_{\left(\frac{\alpha}{2}\right), v}}{n-r} \leq \frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} \leq \frac{\chi^2_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right), v}}{n-r}$$

IL TEST NON PASSA $(\hat{\sigma}_0^2 \neq \sigma_0^2 \text{ SCARTATA})$ IL TEST PASSA $(\hat{\sigma}_0^2 = \sigma_0^2 \text{ ACCETTATA})$

ci sono 3 possibili cause

- a) ERRORE DI COMPILAZIONE DELLA MATRICE **DI** COVARIANZA A \rightarrow scarti non realistici
- b) RESIDUI V_i^2 TROPPO ELEVATI \rightarrow amplificano $\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\sum p_i V_i^2}{n-r}$
 succede quando ci sono errori nelle misure superiori a quelli previsti
- c) ERRORE NELLA MATRICE DEI PESI P
 le ipotesi sulla precisione della popolazione di misure non sono corrette e causano sottostima/sovrastima di P
 es. $\hat{\sigma}_0^2$ superiore indica sovrastima di P dovuta a condizioni sfavorevoli (operatore, strumento) (cond. ambientali)
 o errata ipotesi sulla matrice C_{LL}

es. sottostimando C_{LL} di un fattore λ

$$C_{LL}' = \frac{C_{LL}}{\lambda} \quad P_i = \sigma_0^2 \cdot C_{LL}'^{-1} = \lambda \cdot \sigma_0^2 \cdot C_{LL}^{-1}$$

essendo $\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\hat{V}^T \cdot P \cdot \hat{V}}{n-r} = \frac{\hat{V}^T (\sigma_0^2 \cdot C_{LL}^{-1}) \hat{V}}{n-r}$ quindi $\frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} = \frac{\hat{V}^T \cdot C_{LL}^{-1} \cdot \hat{V}}{n-r}$

la stima di $\hat{\sigma}_0^2$ è maggiorata di λ , cioè di quanto è sottostimata C_{LL}

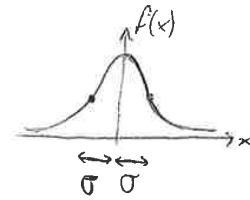
si ottiene $\frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} = \lambda \frac{\hat{V}^T \cdot C_{LL}^{-1} \cdot \hat{V}}{n-r}$

una scelta sbagliata di σ_0^2 non altera la stima dei parametri bensì la stima delle matrici C_{XX} e C_{VV}

(IMPORTANTE!!)

• DISTRIBUZIONE NORMALE o DI GAUSS 2D

Abbiamo detto che la VARIANZA (la sua radice) è definito come il punto di flesso di una gaussiana, ma vogliamo trovare il significato geometrico anche per variabili nD

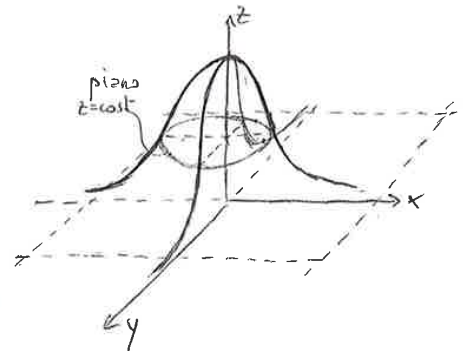


• Se le v.c. (x e y) sono INDIPENDENTI:

- la funzione DENSITA' DI PROBABILITA' è:

$$z = f(x,y) = f(x) \cdot f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_y^2}} e^{-\frac{(y-m_y)^2}{2\sigma_y^2}}$$

$$z = f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} e^{-\frac{1}{2} \left[\left(\frac{x-m_x}{\sigma_x} \right)^2 + \left(\frac{y-m_y}{\sigma_y} \right)^2 \right]}$$



mentre nel caso in cui siano correlate interviene il

COEFFICIENTE DI CORRELAZIONE LINEARE

$$\rho = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} \rightarrow C_{xx} = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{bmatrix}$$

$$z = f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\left(\frac{x-m_x}{\sigma_x} \right)^2 - 2\rho \left(\frac{x-m_x}{\sigma_x} \right) \left(\frac{y-m_y}{\sigma_y} \right) + \left(\frac{y-m_y}{\sigma_y} \right)^2 \right]}$$

- inoltre valgono

$$f(x,y) \geq 0$$

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dx dy = 1$$

argomento

• Per le applicazioni alla teoria delle misure è utile studiare le CURVE DI INTERSEZIONE della f(x,y) con i PIANI z = cost ⇒ ELLISSE D'ERRORE (per v.c. 2D)

↳ imponendo l'argomento di e^{1/2(x...)} costante = K si ottiene l'equazione di una conica

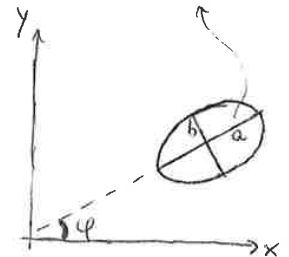
$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

• se K=1 ELLISSE STANDARD → se assi paralleli



φ=0 → σ_{xy}=0 → no correlazione

errore maggiore ⇔ semiasse maggiore



$$a^2 = \frac{1}{2}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2) + \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_y^2 - \sigma_x^2)^2 + 4\sigma_{xy}^2}$$

$$b^2 = \frac{1}{2}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2) - \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_y^2 - \sigma_x^2)^2 + 4\sigma_{xy}^2}$$

$$\tan 2\varphi = -\frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_y^2 - \sigma_x^2}$$

• Probabilità di estreme un valore dalla popolazione:

	1D	2D	3D
K=1	68%	39%	20%
K=2	95%	86%	74%
K=3	99,7%	98,9%	97,1%

TRASFORMAZIONE (CONFORME) DI HELMERT, A 7 PARAMETRI

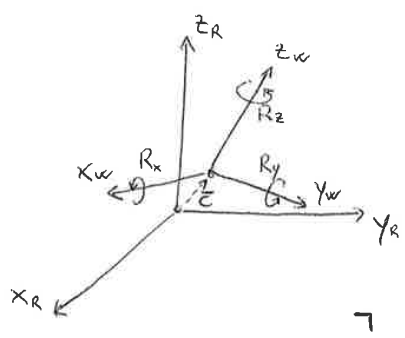
NON PIÙ UTILIZZATO, A FIDONE DELL' APPROCCIO DI TRASFORMAZIONE CONTINUA VERTO

↓
mantiene la forma della rete

Si vuole passare dal S.R. $(x, y, z)_{R40}$ al S.R. robotraslato (x', y', z') wes

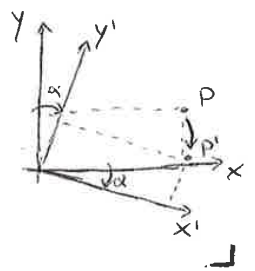
e si utilizza la trasformazione a 7 parametri

- traslazioni $\bar{c} = \{T_x, T_y, T_z\}$
- rotazioni R_x, R_y, R_z
- Fattore di scala μ



Lo stesso punto P nel S.R. (x, y) è descritto da P' nel S.R. (x', y') attraverso la matrice $[R]$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}}_{[R]} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}}_{[R]^{-1}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



dove $[R]$ è matrice antisimmetrica, e $[R]^T = [R]^{-1}$

La trasformazione è quindi NON LINEARE

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_R = \begin{pmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{pmatrix}_w + \mu \cdot [R] \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_w \quad \boxed{\bar{X}_R = \bar{c} + \mu [R] \bar{X}_w}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_w = \frac{1}{\mu} [R]^T \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_R - \begin{pmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{pmatrix}_w \right]$$

adottando la convenzione (arbitraria) dei versi sulle rotazioni

$$R = R_x^{\ominus} \cdot R_y^{\ominus} \cdot R_z^{\ominus}$$

segno negativo in alto $\Rightarrow dx$
segno negativo in basso $\Rightarrow dx$

$$R = R_x^{\ominus} \cdot R_y^{\ominus} \cdot R_z^{\ominus} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos R_x & \sin R_x \\ 0 & -\sin R_x & \cos R_x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos R_y & 0 & -\sin R_y \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin R_y & 0 & \cos R_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos R_z & \sin R_z & 0 \\ -\sin R_z & \cos R_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

si calcola $R = R_x \cdot (R_y \cdot R_z)$ e si assume l'ipotesi di rotazioni piccole \Rightarrow LINEARITA' $\rightarrow \begin{cases} \sin R \approx R \\ \cos R \approx 1 \end{cases}$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & R_z & R_y \\ -R_z & 1 & R_x \\ R_y & -R_x & 1 \end{bmatrix}$$

Le 2 modalità per effettuare la trasformazione sono quindi

① NOTI I 7 PARAMETRI $\Rightarrow \bar{X}_w \leftrightarrow \bar{X}_R$

② NOTI \bar{X}_w, \bar{X}_R DI ALCUNI PUNTI \Rightarrow STIMA DEI 7 PARAMETRI

Il stima dei 7 parametri o le coordinate nei 2 S.R. \Rightarrow SONO INFLUENZIATI DAGLI ERRORI DI MISURA \Rightarrow PROBLEMA GEODETICO

POSIZIONAMENTO GNSS

Global Navigation Satellite System

sistema di posizionamento e navigazione
basato sulla ricezione di segnali radio trasmesso da diverse costellazioni di satelliti artificiali +

servizi di Augmentation
(satelliti geostazionari e componenti locali di terra)

- 1957: URSS, lancio dello Sputnik 1
- 1958: USA, programma TRANSIT
6 satelliti in orbita a 1100 km su un'unica frequenza, con effetto Doppler (precisione 200-500 m)

1973: USA, GPS

1976: URSS, GLONASS

2002: GIAPPONE, QZSS

2003: UE, GALILEO

2004: CINA, BEIDOU

INDIA, IRNSS

independenza
(delle costellazioni globali)

interoperabilita'
(tra costellazioni)

ogni costellazione globale, se completa, permette la visibilita' di ALMENO 4 SATELLITI in qualsiasi luogo e ora, a partire da UNA ELEVAZIONE DI 15° SULL'ORIZZONTE

STRUTTURA GNSS

SEGMENTO SPAZIALE

- satelliti MEO (Medium Earth Orbit)
- in orbita a circolare ad altezza variabile 19000 ÷ 23000 km
- orologi atomici Cesio/Rubidio installati a bordo
- TRASMETTERE INFORMAZIONI AGLI UTILIZZATORI MEDIANTE SEGNALE RADIO COMPLESSO
- MANTENERE RIFERIMENTO DI TEMPO ACCURATO
- RICEVERE E MEMORIZZARE INFORMAZIONI DAL SEGMENTO DI CONTROLLO

SEGMENTO DI CONTROLLO

- Stazioni a Terra che gestiscono il sistema
- TRACCIARE LA POSIZIONE DEI SATELLITI IN CONTINUO ED ELABORARE I DATI PER PREVEDERE LA FUTURA POSIZIONE SPAZIALE-TEMPORALE (EFFEMERIDI)
- CONTROLLARE GLI OROLOGI DEI SATELLITI E MODELARNE GLI ERRORI
- INSTRUIRE MANOVRE E CORREZIONI DI ORBITA
- MEMORIZZARE NUOVI DATI SUI SATELLITI, LE EFFEMERIDI TRASMETTENDOLE AGLI UTILIZZATORI

SEGMENTO DI UTILIZZO

- utente dotato di dispositivi (ricevitori) con antenna
- IL SEGNALE È SOLO RICEVUTO, E NON EMESSE,
- ACQUISIZIONE DATI

sono i parametri orbitali ESTRAPOLATI
(NON INTERPOLATI !!)
in base alla posizione che occupa il satellite

SEGNALI GNSS

per il posizionamento è indispensabile conoscere la posizione dei satelliti

rispetto ad un S.R.
legato alla costellazione satellitare

(ad es. per GPS nel S.R. inerziale ECEF)
delto WGS 84

parametri orbitali

- dimensione e forma orbita
 a = semiasse e = eccentricità
- piano orbita sist. apparente
 ω = argom. perigeo Ω = ascensione retta
 i = inclinazione orbita
- posizione piano orbita
 M_0 = anomalìa media all'epoca toe

oppure

posizione, velocità
accelerazione
satelliti

trasmessi nel
MESSAGGIO DI NAVIGAZIONE
sotto forma di

ALMANACCHI

calcolo approssimato della
posizione dei satelliti:

- PRECISIONE BASSA (~100m)
- UTILI PER IL PROGETTO DELLA
SESSIONE DI MODURA E IL
CALCOLO DELLA VISIBILITÀ SATELLITARE

EFFEMERIDI

calcolo preciso della posizione
per il POSIZIONAMENTO

- ALTA PRECISIONE
- POSSONO ESSERE IN
TEMPO REALE (RT) POST-ELABORAZIONE

SEGNALI GNSS

le componenti del segnale sono controllate da OROLOGI ATOMICI
che producono una FREQUENZA FONDAMENTALE f_0

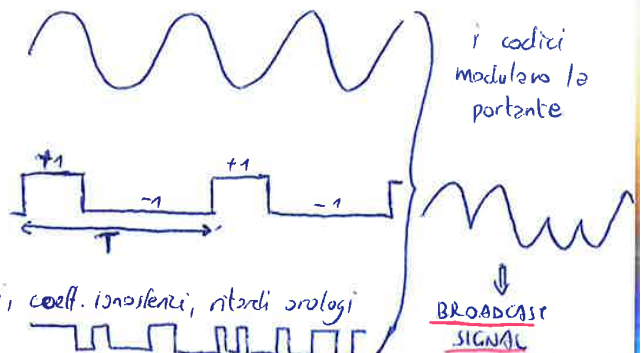
stabilità
a lungo termine
 10^{-12} a 10^{-14}

$$f_0 \rightarrow v = f_0 \cdot \lambda \rightarrow \lambda = \frac{c}{f_0} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ [m/s]}}{f_0 \text{ [Hz]}} \rightarrow \lambda$$

(es. 1,5 GHz) [m] (es. $\lambda = 20 \text{ cm}$)

dalla frequenza f_0 si originano 3 parti del segnale

- COMPONENTE PORTANTE: onde sinusoidali generate da f_0 . coefficiente $\Rightarrow \lambda = 20 \text{ cm}$
- COMPONENTE IMPULSIVA: onde quadre (± 1) generate da un algoritmo CODICI PRN (Pseudo Random Noise) che si ripete periodicamente nel tempo
- COMPONENTE MESSAGGIO: Contiene dati come efferemeridi, coeff. ionosferici, ritardi orologi CODICE DI NAVIGAZIONE



NAVSTAR GPS

SEGMENTO DI CONTROLLO

18 stazioni = 2 master + 16 monitoraggio

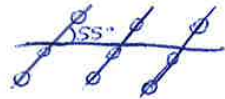
SEGMENTO DI UTILIZZO

utente dotato di ricevitori con antenna

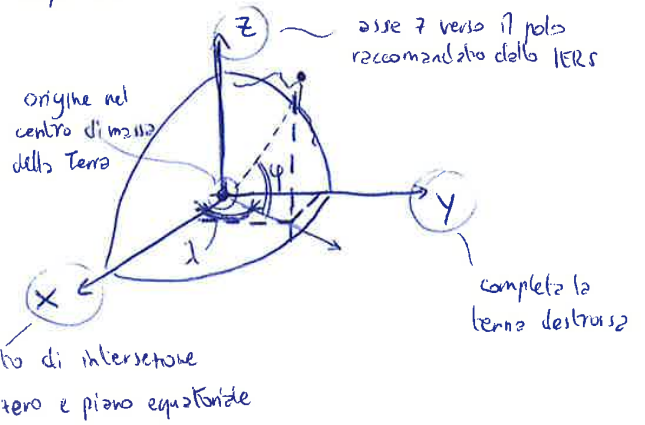
SEGMENTO SPAZIALE

per il posizionamento
ALMENO 4 SATELLITI VISIBILI
a partire da un'elevazione di 15° sull'orizzonte

- costellazione satellitare di 32 satelliti
- altezza di ~ 20200 Km
- piano orbitale inclinato di 55° rispetto al piano equatoriale
- periodo orbitale 12 ore siderali
- 32 satelliti disponibili



- i satelliti fanno riferimento ad un S.I.R. che non ruota, cioè un S.I.R. INERZIALE che nel caso del GPS è il WGS 84 che è un sistema ECEF



- il segnale GPS è generato da una frequenza fondamentale $f_0 = 10,23 \text{ MHz}$

COMPONENTE IMPULSIVA

• i codici PRN permettono di calcolare il RANGE tramite i tempi di propagazione e si ripetono periodicamente (insieme) di bit

C/A Coarse Acquisition - USO CIVILE
 $f_{CA} = f_0/10 = 1,023 \text{ MHz}$
 $\lambda_{CA} = c/f_0 = 300 \text{ m}$

P Precision - USO MILITARE
 $f_P = f_0 = 10,23 \text{ MHz}$
 $\lambda \approx 30 \text{ m}$

L2C → 2 PRN / CM
→ f_{PRN} / CL
più robusto alle interferenze, più veloce, accurato

COMPONENTE PORTANTE

3 onde sinusoidali

- $L_1: f_{L1} = 154 \cdot f_0 \approx 1,5 \text{ GHz} \quad \lambda_{L1} = 19 \text{ cm}$
- $L_2: f_{L2} = 120 \cdot f_0 \approx 1,2 \text{ GHz} \quad \lambda_{L2} = 24 \text{ cm}$
- $L_5: f_{L5} = 115 \cdot f_0 \approx 1,2 \text{ GHz} \quad \lambda_{L5} = 25 \text{ cm}$

• modulazione del segnale CDMA (Code Division Multiple Access)
• almeno 2 frequenze per posizionamento reale RTK per eliminare errore di effetto del ritardo del segnale o determinare ambiguità di fase per ritrazione ionosferica

COMPONENTE MESSAGGIO

contiene { elementi di almanacchi per corr. correzione orologi (well. modelli ritardo ionosferico) $f_D = 50 \text{ MHz}$

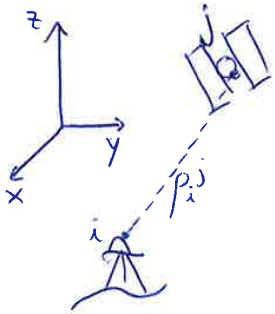
CNAV

contiene in più { time offset per interoperabilità, precisione migliorata, Safety of Life (disponibilità satelliti)

codice P criptato (Anti-spoofing)

PRINCIPI DI POSITIONAMENTO GNSS

il posizionamento avviene con una tecnica di intersezione spaziale di tipo distanziometrica



nel S.R. ECEF (o geocentrico) con l'asse z concorde all'asse di rotazione della Terra

sono NOTE le COORDINATE DEL SATELLITE j, mentre sono INCOGNITE le COORDINATE DEL RICEVITORE i

queste coordinate sono legate tra loro tramite le misure del RANGE (MINIMO 4)

$$p_i^j = \sqrt{(x^j(t) - x_i)^2 + (y^j(t) - y_i)^2 + (z^j(t) - z_i)^2}$$

le misure GNSS possono essere

STATICHE

ricevitore
permangono
sui punti

CINEMATICHE

ricevitore in
continuo movimento

in base al momento di elaborazione dati si ha

TEMPO REALE

posizione già
disponibile durante
la sessione di misura

POST-ELABORAZIONE

dati elaborati
dopo l'acquisizione
nelle varie stazioni

le modalità di misure possono essere

MISURE DI CODICE

sulla componente
impulsiva (PRN)
del segnale

MISURE DI FASE

sulla
portante
del segnale

infine, il posizionamento può essere eseguito in varie modalità

POSITIONAMENTO ASSOLUTO (o STAND ALONE)

coordinate del ricevitore determinate in un S.R. globale

POSITIONAMENTO RELATIVO (p. 48)

stima il vettore baseline tra i due vertici dei ricevitori per eliminare i BIAS spaziali correlati (buono per basi < 15km)

POSITIONAMENTO DIFFERENZIALE (p. 52)

In un S.R. globale si corregge il range elaborato della BASE (A) e lo si applica al ROVER (B)

POSITIONAMENTO ASSOLUTO con MISURE DI CODICE

la misura del range avviene tramite la componente impulsiva del segnale, cioè il codice PRN ad onde quadre che si ripete periodicamente

il principio di misura della distanza ricevitore-satellite si basa sulla misura del tempo di volo

percorre ~ 20000 Km in ~ 67 ms

in linea teorica $p_i^j(t) = c \cdot \Delta t$

velocità del segnale radio nel vuoto $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$

tempo impiegato dal segnale partito dal satellite per raggiungere il ricevitore

$$P_i^j(t) = R_i^j + c \cdot \delta_i(t) + c \cdot \delta_i(t)$$

↳ l'OFFSET dell'orologio del ricevitore è $\delta_i(t) \approx 1 \text{ ms}$

quindi la precisione è: errore = $1 \text{ ms} \cdot c = 10^{-3} \cdot 3 \cdot 10^8 = 3 \cdot 10^5 = 300 \text{ km}$

↳ l'errore non è accettabile: → conosciamo il valore del ritardo ma non lo possiamo modellare

4 INCOGNITE

$$(x_i, y_i, z_i) + \delta_i$$

POSIZIONE DEL RICEVITORE

OFFSET DI TEMPO DEL RICEVITORE

↳ si considera incognito l'errore dell'orologio del ricevitore δ_i ad ogni epoca di misura (per questo R_i^j è detto PSEUDO-RANGE)

• Quindi l'equazione di pseudorange diventa:

$$R_i^j(t) + c \cdot \delta_i(t) = P_i^j(t) - c \cdot \delta_i(t)$$

→ occorre avere un numero sufficiente o ridondante di equazioni di osservazione per risolvere il sistema nelle 4 incognite: il numero di osservazioni è

POSIZIONAMENTO STATICO

il ricevitore permanece sul treppiede per diverse epoche di misura, le incognite sono $(3) + (n_t)$

coordinate del vertice

bias dell'orologio per ogni epoca di misura



(le epoche sono acquisite a intervalli regolari di qualche secondo es 1 al secondo: 60 epoche in 1 minuto)

POSIZIONAMENTO CINEMATICO

il ricevitore è in continuo movimento, cambia il numero di incognite, che ora sono $(3n_t) + (n_t) = 4n_t$

coordinate del vertice per ogni epoca bias per ogni epoca

$$n_j \cdot n_t \geq 3 + n_t$$

$$n_t (n_j - 1) \geq 3$$

$$n_t \geq \frac{3}{n_j - 1}$$

n_j	n_t
1	X
2	3
4	1

configurazione base per il posizionamento con misure di codice

$$n_j \cdot n_t \geq 4n_t$$

$$n_j \geq 4$$

posizione (e velocità) del ricevitore in moto possono sempre essere definiti tracciando 4 satelliti

• con 4 satelliti tracciati è possibile la soluzione istantanea della posizione, perché le 4 incognite sono risolte ad ogni epoca di misura

• con 2 satelliti tracciati si può eseguire il posizionamento ma è meglio non farlo perché richiederebbe epoche molto distanziate

- NON È IN TEMPO REALE
- IL PROBLEMA È GEOMETRICAMENTE MAL CONDIZIONATO



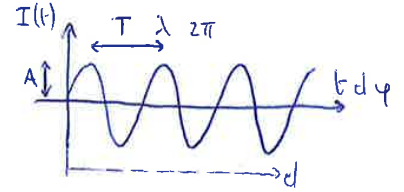
ellisse d'errore troppo grande

(alcune ore) per avere una configurazione geometrica diversa

POSIZIONAMENTO ASSOLUTO CON MISURE DI FASE

La misura del range si ottiene dalla misura delle caratteristiche della portante sinusoidale, misurando le lunghezze d'onda intere + la parte frazionaria

⇒ la portante sinusoidale è un'onda che si propaga nello spazio con velocità c e ripropone gli stessi valori di intensità $I(t)$ dopo il periodo T



$$N\lambda + \phi\lambda \quad \text{con} \quad \left. \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_5 \end{matrix} \right\} \lambda \approx 20 \text{ cm}$$

assimilando il fenomeno elettromagnetico ad una sinusoidale

$$I(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

→ valgono

$$\frac{\varphi}{2\pi} = \frac{t}{T} = \frac{d}{\lambda}$$

(I) (II) (III)

considerando (II) e (III):

$$d = \left(\frac{\lambda}{T}\right) \cdot t = c \cdot t \quad \rightarrow \text{posizionamento pseudorange}$$

considerando (I) e (III)

$$d = \left(\frac{\varphi}{2\pi}\right) \cdot \lambda = \phi \cdot \lambda \quad \rightarrow \text{se la distanza } d \text{ eccede la lunghezza d'onda } \lambda \text{ si inseriscono i cicli interi}$$

considerando (I) e (II)

$$\varphi = \left(\frac{2\pi}{T}\right) \cdot t = \omega \cdot t$$

(PULSATIONE)

$$\rho = N\lambda + \phi\lambda$$

AMBIGUITÀ DI FASE (CICLI INTERI)

MISURA DI FASE (PARTE FRAZIONARIA DI CICLO)

si scrive quindi il range tramite l'equazione

$$\rho_i^j(t) = N_i^j \lambda + \phi_i^j(t) \cdot \lambda + c \cdot \delta^j(t) + c \cdot \delta_i(t)$$

EQUAZIONE DELLA MISURA DI FASE GRETTA

N_i^j NON DIPENDE DAL TEMPO

N è la stessa per ogni epoca di misura > patto che venga mantenuto il contatto con il satellite per le varie epoche di misura

MISURA DI FASE GNSS

si segue 1 satellite j lungo la sua orbita considerando un'epoca iniziale (t_0) e una generica (t)

all'istante (t_0) il range è dato da

$$\rho_i^j(t_0) = N_i^j \lambda + \phi_i^j(t_0) \lambda$$

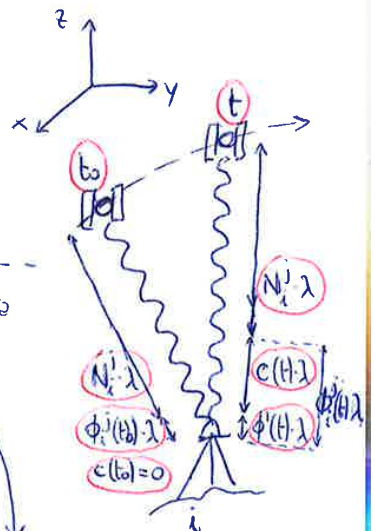
INCIGNITA misurato

(una incognita N_i^j per ogni satellite osservato)

all'epoca (t) il satellite si è spostato sull'orbita

$$\rho_i^j(t) = N_i^j \lambda + \phi_i^j(t) \lambda$$

rimane la stessa dell'epoca t_0 , ancora incognita misurato



• POSIZIONAMENTO ASSOLUTO CON MISURE DI FASE - MODELLO LINEARIZZATO

Come nel posizionamento con misure di codice, si può applicare il modello linearizzato, introducendo come uniche altre incognite le AMBIGUITÀ DI FASE N_i^j per ogni satellite j :

↳ linearizzando l'equazione nell'intorno dei valori approssimati, si ha

$$\begin{cases} X_i = X_i^{(0)} + x_i \\ Y_i = Y_i^{(0)} + y_i \\ Z_i = Z_i^{(0)} + z_i \end{cases}$$

Correzioni

$$\phi_i^j(t) \cdot \lambda + c \cdot \delta^j(t) = \rho_i^j(t) - N_i^j \cdot \lambda - c \cdot d_i(t)$$

$$\phi_i^j(t) \cdot \lambda + c \cdot \delta^j(t) = \sqrt{(X_i - X_i^{(0)})^2 + (Y_i - Y_i^{(0)})^2 + (Z_i - Z_i^{(0)})^2} - N_i^j \cdot \lambda - c \cdot d_i(t)$$

↳ le incognite sono le correzioni x_i, y_i, z_i e le N_i^j ;
si linearizza ρ_i^j con sviluppo in serie di Taylor

$$\rho_i^j = \rho_i^{j(0)} + \left(\frac{\partial \rho_i^j}{\partial X_i} \right) x_i + \left(\frac{\partial \rho_i^j}{\partial Y_i} \right) y_i + \left(\frac{\partial \rho_i^j}{\partial Z_i} \right) z_i + \left(\frac{\partial \rho_i^j}{\partial c \cdot d_i(t)} \right) \cdot \delta_i(t) + \text{Termini II ordine}$$

linearizza

$$\phi_i^j(t) \cdot \lambda + c \cdot \delta^j(t) = \sqrt{(X_i - X_i^{(0)})^2 + (Y_i - Y_i^{(0)})^2 + (Z_i - Z_i^{(0)})^2} + \left[\frac{X_i - X_i^{(0)}}{\rho_i^{j(0)}} \right] x_i + \left[\frac{Y_i - Y_i^{(0)}}{\rho_i^{j(0)}} \right] y_i + \left[\frac{Z_i - Z_i^{(0)}}{\rho_i^{j(0)}} \right] z_i +$$

• nel caso di posizionamento STATICO

ad ogni epoch di misura compare una nuova incognita di asincronismo $\delta_i(t)$

$$- N_i^j \cdot \lambda - c \cdot d_i(t)$$

• nel caso di posizionamento CINEMATICO

ci sono anche le 3 nuove incognite di posizione

se il numero di satelliti è $> 5 \rightarrow n_j > 5$

sono necessarie 5 epoche e si applica il MODELLO DI GAUSS

$$Ax - b_0 = v \rightarrow$$

5 epoche significa risolvere $Ax - b_0 = v$ per 5 volte

$$\begin{matrix} \text{satellite } j=1 \\ \vdots \\ \text{satellite } j=5 \end{matrix} \begin{bmatrix} \left(\frac{X_i - X_i^{(0)}}{\rho_i^{j(0)}} \right) & \left(\frac{Y_i - Y_i^{(0)}}{\rho_i^{j(0)}} \right) & \left(\frac{Z_i - Z_i^{(0)}}{\rho_i^{j(0)}} \right) & \lambda_i^j & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \left(\frac{X_i - X_i^{(0)}}{\rho_i^{j(0)}} \right) & \left(\frac{Y_i - Y_i^{(0)}}{\rho_i^{j(0)}} \right) & \left(\frac{Z_i - Z_i^{(0)}}{\rho_i^{j(0)}} \right) & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_i^j & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \\ N_i^1 \\ N_i^2 \\ N_i^3 \\ N_i^4 \\ N_i^5 \\ c \cdot d_i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \phi_i^1 + c \delta^1 - \rho_i^{1(0)} \\ \vdots \\ \phi_i^5 + c \delta^5 - \rho_i^{5(0)} \end{bmatrix} = v$$

A

X

b₀

v

±1 dipende solo dalla convenzione

↳ Sono necessarie più epoche di misura per risolvere le ambiguità N_i^j :

una volta risolte con sufficiente precisione (entando il cycle slip)
possono essere tolte dalle incognite e diventano termini noti

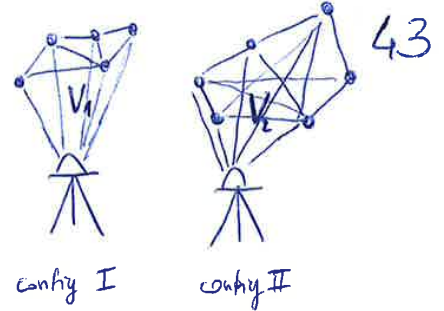
FASE DI INIZIALIZZAZIONE

A questo punto il modello di fase è equivalente al modello di codice. (procedura di calcolo di N)

- Inoltre i **DOP** rappresentano un'immagine istantanea della costellazione satellitare, che è in rapido cambiamento

$$DOP = K \cdot \frac{1}{\text{Volume}}$$

→ volume al denominatore: è meglio una configurazione più aperta, come la II per avere un'ellisse d'errore minore



FINESTRA DI OSSERVAZIONE

e

PLANNING

è possibile pianificare in anticipo la visibilità dei satelliti nelle varie ore del giorno e i valori DOP

⇒

attraverso software appositi è possibile la pianificazione della sessione

⇒

ottimizzazione della scelta della costellazione e dell'ora di misura

↑
 decodifica di almanacchi ed ephemeridi dal codice di navigazione (per almanacchi non superiori a 30 giorni)

• DURATA DELLA SESSIONE DI MISURA

↳ il tempo per il quale è necessario stazionare sul vertice acquisendo dati GNSS dipende da:

LUNGHEZZA DELLA BASELINE TRA STAZIONI GNSS

la durata aumenta in proporzione alla lunghezza ma può essere ridotta considerevolmente con RICEVITORI A DOPPIA FREQUENZA

NUMERO DI SATELLITI VISIBILI e DOP

maggiore è il n° satelliti
 ↓
 migliori sono i DOP
 ↓
 minore è il tempo d'acquisizione

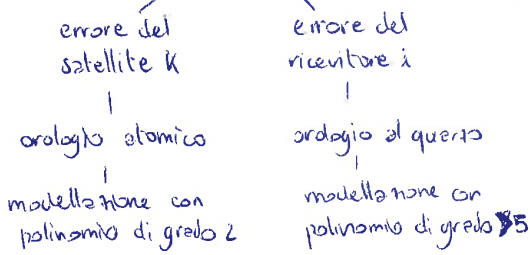
TIPO DI RICEVITORE

singolo o doppia frequenza

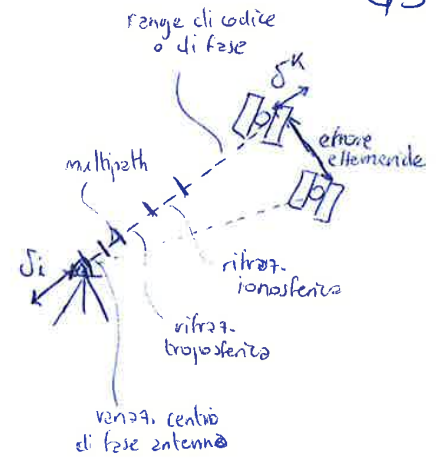
RAPPORTO SEGNALE/RUMORE CON CUI SI RICEVE

• ERRORI SISTEMATICI (BIAS) → modellazione

ERRORE DI OROLOGIO



⇒ dati all'asincronismo (OFFSET) e alla deriva dipendente del tempo



ERRORE D'EFFEMERIDE (di natura GEOMETRICA)

il posizionamento GNSS si basa sulla posizione istantanea dei satelliti e sulla conoscenza delle effemeridi

⇒ essendo derivate da una stima, sono affette da errore

l'errore varia lentamente (è rapido solo al cambio di costellazione) e dipende dal prodotto che si considera →

X Nel posizionamento ASSOLUTO questi errori si ripercuotono direttamente sulle coordinate incognite del ricevitore

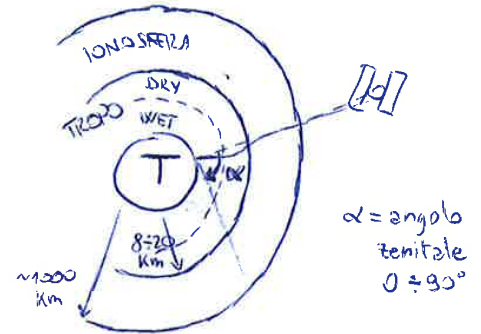
✓ Nel posizionamento RELATIVO o nel posizionamento DIFFERENZIALE questo errore ha minore importanza ($\approx \frac{\Delta r}{r} = \frac{1m}{20000km} \approx 10^{-8}$)

PRODOTTO	PRECISIONE	LATENZA	
<u>BROADCAST</u>	~ 100 cm <u>METRICA</u>		} <u>TEMPO REALE</u>
<u>ULTRARAPIDE PIZDETTE</u>	~ 5 cm <u>CENTIMETRICA</u>		
<u>ULTRARAPIDE OSSERVATE</u>	~ 3 cm CENTIMETRICA	3-9 ore	} <u>A POSTERIORI</u>
<u>RAPIDE</u>	~ 2,5 cm CENTIMETRICA	17-41 ore	
<u>FINALI</u>	~ 2,5 cm CENTIMETRICA	12-18 gg	

RIFRAZIONE TROPOSFERICA (di natura NON DISPERSIVA)

~~f(frequenza)~~

la TROPOSFERA è lo strato di atmosfera dove si concentrano i fenomeni meteorologici e dove si concentra il VAPORE ACQUOSO

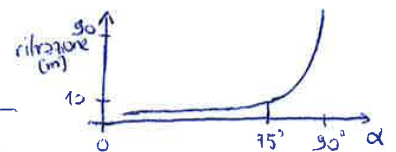


il segnale GNSS viene alterato, deformato dagli strati dell'atmosfera che provocano un RITARDO SULL'ACQUISIZIONE DEL SEGNALE da parte del ricevitore (la misura è più lunga)

dipende dai PARAMETRI ATMOSFERICI e dalla ELEVAZIONE DEL SATELLITE ($1/\cos^2$) → modellato con Hopfield/Szostromohen

$$\Delta r_{TR} = \frac{K}{f(\cos^2)} + \frac{L}{f(\cos^2)}$$

- l'errore varia più lentamente dell'errore dovuto alla RIFRAZIONE IONOSFERICA
- l'errore è dell'ordine della DECINA DI METRI
- l'errore è difficilmente separabile dall'errore di EFFEMERIDE e viene trattato insieme come BIAS GEOMETRICO



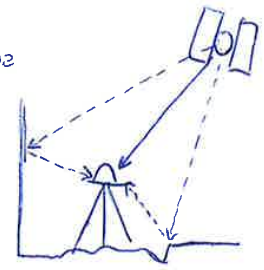
l'ERRORE TROPOSFERICO aumenta notevolmente quando si supera $\alpha = 75^\circ$ cioè 15° di elevazione

↳ **SI SCONSIGLIANO LE MISURE CON SATELLITI CON ELEVAZIONE < 15° SULL'DIRIZIONE**

MULTIPATH (di natura DISPERSIVA)
f(frequenza)

l'errore dovuto al multi-percorso si ha quando il segnale viene alterato, perché parte del segnale viene riflesso da superfici (riflettenti).

il segnale arriva all'antenna in maniera indiretta



- l'effetto del ritardo può essere modellato tenendo conto che è di natura dispersiva, quindi differenziando una combinazione iono-free di codice e di fase

VARIATIONE DEL CENTRO DI FASE DELLE ANTENNE (di natura DISPERSIVA)
f(frequenza)

questo errore è dovuto alla PCV (Phase Correction Variation), infatti il CENTRO DI FASE è un punto teorico (elettronico, e non meccanico) che varia in funzione della frequenza

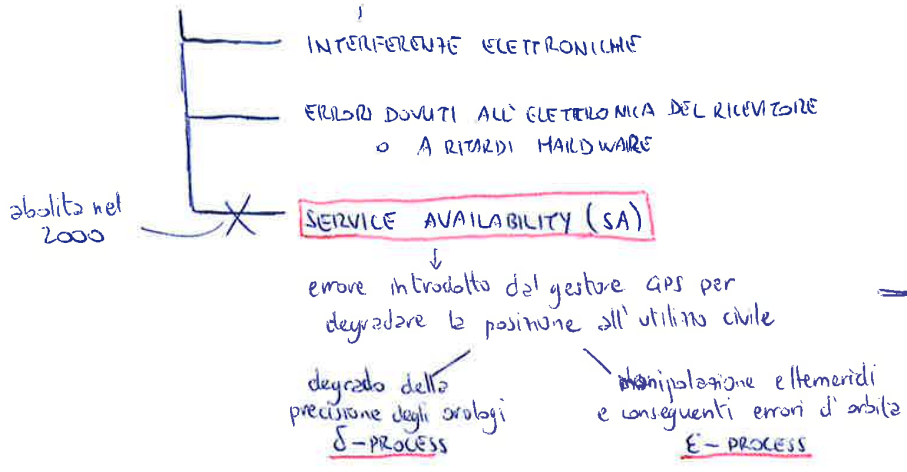


- l'errore è di piccola entità 1-2 cm ma importante per il position. di precisione
- la calibrazione delle antenne è fatta rispetto ad una ANTENNA DI RIFERIMENTO

si considera simmetria cilindrica e la variazione dipende dall'ANGOLO DI ELEVATION

precisioni fornite in mm/5°

ERRORI VARI DI OSSERVAZIONE



la precisione peggiora da $\pm 5-10$ metri a ± 100 metri

Si vogliono raggiungere **PRECISIONI ELEVATE** per scopi topografici-geodetici

da 15-10 m

POSIZ. ASSOLUTO

MODELLAZIONE SOFISTICATA DEGLI ERRORI

TEMPI DI STAZIONAMENTO LUNGI

CORRELAZIONE SPAZIALE DI PIU' OSSERVAZIONI CHE ELIMINA GLI ERRORI PER DIFFERENZA

si ABBANDONA il POSIZ. ASSOLUTO X in favore del POSIZ. RELATIVO ✓ o del POSIZ. DIFFERENZIALE ✓

o cm (RTK) POSIZ. RELATIVO / DIFFERENZIALE

DOPPIE DIFFERENZE

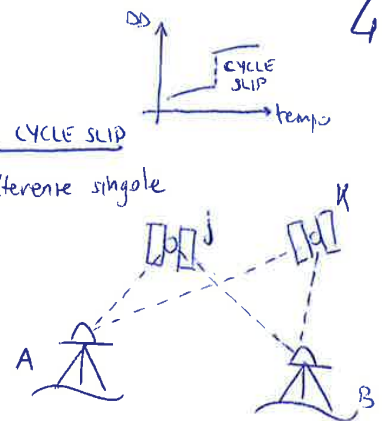
Supponiamo che ci siano 2 ricevitori che osservano 2 satelliti j, k, SENZA CYCLE SLIP quindi partendo dalle differenze singole, si scrivono 2 equazioni alle differenze singole

$$j \rightarrow \phi_{AB}^j(t) = \frac{1}{\lambda} \rho_{AB}^j(t) - N_{AB}^j - f_{AB}^j \delta_{AB}(t) + \Delta^j(E, I, T)$$

$$k \rightarrow \phi_{AB}^k(t) = \frac{1}{\lambda} \rho_{AB}^k(t) - N_{AB}^k - f_{AB}^k \delta_{AB}(t) + \Delta^k(E, I, T)$$

differenza membro a membro

viene eliminato il bias dell'orologio dei ricevitori



per BASILINE < 15km ⇒ gli errori spazialmente correlati si annullano

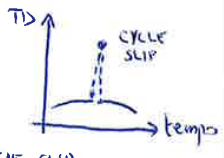
SOLO SE assumiamo modulazione CDMA ⇒ stesse frequenze $f_j^i = f_k^k$ ai satelliti (GPS, GALILEO, BEIDOU)
mentre modulazione FDMA ⇒ diverse frequenze $f_j^i \neq f_k^k$ (GLONASS)

$$\phi_{AB}^{jk}(t) = \frac{1}{\lambda} \rho_{AB}^{jk}(t) - N_{AB}^{jk} - \delta + \nabla \Delta^j(E, I, T)$$

- Rimangono incognite le coordinate del ROVER (B) e i termini di AMBIGUITA' DI FASE ⇒ 4 incognite quindi servono 4 misure
- per 2 ricevitori n satelliti ⇒ si possono scrivere (n-1) doppie differenze (1 satellite di riferimento)
 - 1-2 1-3 1-4
 - 2-3 2-4 2-5
 - 3-4 3-5 3-6
 - 4-5 4-6 4-7
 - 5-6 5-7 5-8
 - 6-7 6-8 6-9
 - 7-8 7-9 7-10
 - 8-9 8-10 8-11
 - 9-10 9-11 9-12
 - 10-11 10-12 10-13
 - 11-12 11-13 11-14
 - 12-13 12-14 12-15

TRIPLE DIFFERENZE

per eliminare le ambiguita' di fase incognite, essendo le N indipendenti dal tempo, osservano misure in EPACHE DIVERSE t_1, t_2 , scrivendo 2 eq. alle differenze doppie, SENZA CYCLE SLIP



$$t_1 \rightarrow \phi_{AB}^{jk}(t_1) = \frac{1}{\lambda} \rho_{AB}^{jk}(t_1) - N_{AB}^{jk}$$

$$t_2 \rightarrow \phi_{AB}^{jk}(t_2) = \frac{1}{\lambda} \rho_{AB}^{jk}(t_2) - N_{AB}^{jk}$$

differenza membro a membro

viene eliminata l'ambiguita' di fase

$$\phi_{AB}^{jk}(t_{12}) = \frac{1}{\lambda} \rho_{AB}^{jk}(t_{12})$$

non permette la misura in tempo reale!

scrivendo con i termini ϕ, ρ al posto di $*$
 $*_{AB}^{jk}(t_{12}) = *_{AB}^{jk}(t_2) - *_{AB}^{jk}(t_1)$
 ogni termine e' formato da 8 termini:

$$\phi_{AB}^{jk}(t_{12}) = \phi_B^k(t_2) - \phi_B^j(t_2) - \phi_A^k(t_2) + \phi_A^j(t_2) + \phi_B^k(t_1) - \phi_B^j(t_1) - \phi_A^k(t_1) + \phi_A^j(t_1)$$

le differenze terze quindi sono:

- ✓ INDIPENDENTI DA BIAS e N
- ✓ buone come SOLUTIONS INIZIALI ma
- X non come SOLUTIONS FINALE
- X MENO RIDONDANTI (8 range → 1 equazione)
- X MOLTO CORRELATE (matrice var/covar piu grande)

MENO PRECISE
NO CINEMATICO ⇒ la soluzione migliore sono le DOPPIE DIFFERENZE (necessarie 2 epoche)

* **TEST DEL RATIO**

è un test statistico sulla qualità dell'elaborazione

dal punto 5) abbiamo una stima dell'ambiguità di fase N

$$N \pm \sigma_N$$

↳ si considerano tutti i posizionamenti sugli interi per avere la soluzione .FIX migliore e si trovano diverse $\hat{\sigma}_0^2$

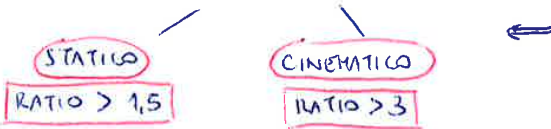
varianza dell'unità di peso

⇒ si dispongono le $\hat{\sigma}_0^2$ in ordine crescente, ognuna riferita ad un valore intero di N

$$\hat{\sigma}_0^{2(1)} \quad \hat{\sigma}_0^{2(2)} \quad \dots \quad \hat{\sigma}_0^{2(n)}$$



il test si ritiene passato per



$$\text{RATIO} = \frac{\hat{\sigma}_0^{2(2)}}{\hat{\sigma}_0^{2(1)}}$$

solo questi valori è meglio una soluzione .FLT dove gli interi non sono fissati (NER)

Calcolando il RATIO si capisce se la soluzione è ragionevole: un rapporto elevato significa che tra le due soluzioni c'è molta differenza e quindi forse miglioramento

(infatti se la misura esatta fosse $\hat{\sigma}_0^{2(1)}$, allora la $\hat{\sigma}_0^{2(2)}$ dovrà essere molto più piccola di $\hat{\sigma}_0^{2(1)}$ perché non è l'intero esatto)

* **COMBINAZIONE DI CODICE - FASE** → NARROW-LANE
WIDE-LANE

le misure di codice e le misure di fase possono essere usate autonomamente per il posizionamento, tuttavia la loro combinazione può produrre nuove utili **FREQUENZE SINTETICHE**

$$\Gamma \quad \text{vale } c = \lambda f \quad \text{e} \quad \frac{c}{T} = \frac{d}{\lambda} = \frac{f}{2\pi} \quad \Gamma$$

$$\phi = \frac{f}{2\pi} = \frac{c}{\lambda} = cf \rightarrow \frac{\phi_1}{\lambda_1} = \frac{\phi_2}{\lambda_2}$$

$$\text{quindi } \frac{\phi_1 \lambda_1}{c} = \frac{\phi_2 \lambda_2}{c}$$

$$\phi_2 = \phi_1 \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \phi_1 \frac{f_1}{f_2} \rightarrow \frac{f_2}{f_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\phi_2}{\phi_1}$$

considerando le frequenze GPS $\left\{ \begin{array}{l} L_1 \rightarrow f_1 = 154 \cdot 10,23 \text{ MHz} \\ L_2 \rightarrow f_2 = 120 \cdot 10,23 \text{ MHz} \end{array} \right.$

COMBINAZIONE WIDE LANE

$$f_w = f_{L_1} - f_{L_2} = (154 - 120) \cdot 10,23 \text{ MHz} = 347,82 \text{ MHz}$$

$$\lambda_w = \frac{c}{f_w} = 86 \text{ cm}$$

$$\sigma_w = \pm \sqrt{\left(\frac{154}{154-120}\right)^2 \sigma_L^2 + \left(\frac{120}{154-120}\right)^2 \sigma_L^2} = \pm 5,7 \sigma_L$$

X **6 volte più rumorosa** (in singola frequenza)

X **MENO ADATTA AL POSIZIONAMENTO** rispetto alla singola L_1 (implica molto l'effetto ionosferico)

✓ **RIDUCE IL N° DI SOLUZIONI CANDIDATE** della AMBIGUITÀ N

COMBINAZIONE NARROW LANE

$$f_N = f_{L_1} + f_{L_2} = (154 + 120) \cdot 10,23 \text{ MHz} = 2803,02 \text{ MHz}$$

$$\lambda_N = \frac{c}{f_N} \approx 11 \text{ cm}$$

$$\sigma_N = \pm \sqrt{\left(\frac{154}{154+120}\right)^2 \sigma_L^2 + \left(\frac{120}{154+120}\right)^2 \sigma_L^2} = \pm 0,7 \sigma_L$$

✓ **RUMOROSITÀ RIDOTTA DEL 30%** rispetto alle portanti non combinate

✓ **PIÙ PRECISA**

X **NON ADATTA IN PERIODI DI ALTA ATTIVITÀ IONOSFERICA**

nel POSIZIONAMENTO DIFFERENZIALE vengono usate

MISURE DI CODICE (DGPS)

dall'eq di PSEUDORANGE per la BASE A

$$R_A^j(t_0) = \rho_A^j(t_0) - c \delta_A^j(t) - c \delta_A(t) + E_A^j(t_0) + I_A^j(t_0) + T_A^j(t_0)$$

noto perché la stazione BASE è di posizione nota con precisione (mm) in vari s.r. (ad es. la SP-GPS del Politecnico). Vale:

$$\rho_A^j(t) = \sqrt{(x^j(t) - x_A)^2 + (y^j(t) - y_A)^2 + (z^j(t) - z_A)^2}$$

- errori ϵ (multipath, centri fase, ecc) trascurabili nelle misure di codice
- si calcola la differenza tra range misurato e range calcolato, detta Pseudorange Correction, che all'epoca (t_0) vale

$$PRC^j(t_0) = \rho_A^j(t_0) - R_A^j(t_0) = c \delta_A^j(t_0) + c \delta_A(t_0) - E_A^j(t_0) - I_A^j(t_0) - T_A^j(t_0)$$

- la correzione differenziale va applicata al ROVER, ed essendo IN TEMPO REALE viene applicata con un piccolo ritardo, detto Rate Range Correction RRC

$$RRC^j(t-t_0)$$

LATENZA = diff. di tempo tra il calcolo della correzione in BASE (A) e la applicazione in ROVER (B)

$$PRC^j(t) = PRC^j(t_0) + RRC^j(t-t_0)$$

si scrive l'eq. di PSEUDORANGE per il ROVER B

$$R_B^j(t_0) = \rho_B^j(t_0) - c \delta_B^j(t_0) - c \delta_B(t_0) + E_B^j(t_0) + I_B^j(t_0) + T_B^j(t_0)$$

e si corregge con la PRC(t):

$$R_B^j(t)_{CORRETTO} = R_B^j(t) + PRC(t) =$$

$$= \rho_B^j(t) - c \delta_B^j(t) - c \delta_B(t) + E_B^j(t) + I_B^j(t) + T_B^j(t) + c \delta_B^j(t) + c \delta_B(t) - E_A^j(t) - I_A^j(t) - T_A^j(t) = \rho_B^j(t) - (E_{AB}^j(t))$$

gli errori di orologio del satellite si annullano

i BIAS spaziali correlati si annullano per basi < 15 Km

combinazione degli errori di orologio dei ricevitori

DGPS CODICE

- X PRECISIONE METRICA (± 1 m)
- coincide con una DIFFERENZA SINGOLA del posiz. relativo
- equivalente al POSIZIONAMENTO RELATIVO se la latenza $t-t_0 = 0$
- X NON BUONO PER IL TEMPO REALE

MISURE DI FASE (DGPS) \iff (RTK)

si scrive l'equazione in termini di lunghezza [m]

$$\lambda \Phi_A^j(t) = \rho_A^j(t) - c \delta_A^j(t) - c \delta_A(t) - \lambda N_A^j + E_A^j(t) + I_A^j(t) + T_A^j(t)$$

noto

ambiguità di fase in cognita

la differenza tra range misurato e calcolato è detta Carrier Phase Correction

$$CPC(t) = \rho_A^j(t) - \lambda \Phi_A^j(t) = \lambda N_A^j + c \delta_A^j(t) + c \delta_A(t) - E_A^j(t) - I_A^j(t) - T_A^j(t)$$

la correzione differenziale è applicata al ROVER, quindi si scrive l'eq. del ROVER

$$\lambda \Phi_B^j(t) = \rho_B^j(t) - c \delta_B^j(t) - c \delta_B(t) - \lambda N_B^j + E_B^j(t) + I_B^j(t) + T_B^j(t)$$

si corregge con CPC(t)

$$\lambda \Phi_B^j(t)_{CORRETTO} = \lambda \Phi_B^j(t) + CPC(t) =$$

$$= \rho_B^j(t) - c \delta_B^j(t) - c \delta_B(t) - \lambda N_B^j + E_B^j(t) + I_B^j(t) + T_B^j(t) + c \delta_B^j(t) + c \delta_B(t) + \lambda N_A^j + E_A^j(t) - I_A^j(t) - T_A^j(t) =$$

errori orologio del satellite annullati

i BIAS spaz. correlati si annullano per basi < 15 Km

$$= \rho_B^j(t) - (c \delta_{AB}^j(t) - \lambda N_{AB}^j)$$

combinazione errori d'orologio ricevitori

combinazione ambiguità di fase ricevitori

si fa un pairing in più rispetto alle misure di codice, per eliminare gli errori d'orologio ricevitori cioè oltre al satellite j si sceglie anche il satellite k

$$\Phi_B^j_{CORRETTO} = \rho_B^j(t) - c \delta_{AB}^j(t) - \lambda N_{AB}^j$$

$$\Phi_B^k_{CORRETTO} = \rho_B^k(t) - c \delta_{AB}^k(t) - \lambda N_{AB}^k$$

soluzione membro a membro

$$\Phi_B^{jk} = \rho_B^{jk}(t) - N_{AB}^{jk} \cdot \lambda$$

soluzione FIX con N fissato intero, quindi nota N si trova $\rho_B^{jk}(t)$

DGPS FASE

coincide con una DIFFERENZA SINGOLA seguita da una DIFFERENZA DOPPIA

STAZIONI PERMANENTI GPS

SP GPS

necessità di raggiungere **PRECISIONE ELEVATA** nel posizionamento + necessità di misurare con continuità in un **UNICO S.R.**

installazione di **STAZIONI PERMANENTI** a costi parte di una **RETE GLOBALE, CONTROLLATA e COMPENSATA PERIODICAMENTE**

RETE DINAMICA NAZIONALE

RDN

(IMPORTANTI!!)

che ha questi scopi →

← e queste caratteristiche

- dotate di un buon ricevitore geodetico multi-frequenza, che acquisisce in modo continuo dati di codice e fase, e multi-costellazione;
- materializzazione stabile e di precisione;
- collegamenti fuori centro GPS;
- posizione controllata periodicamente nella rete globale;
- dotate di orologio atomico
- forniscono correzioni differenziali e dati in RT

- **MANTENIMENTO DEL DATUM** (ITRF e ETRF)
- **GEODINAMICA** (deformazioni e velocità placche)
- **FISICI-ATMOSFERICI** (stima dei ritardi Iono e Tropo)
- **METEOLOGICI** (sincronizzazione scale di tempo)
- **CARTO GRAFICI e TOPOGRAFICI** (Post Processing (PP) e Real Time (RT))

• **TECNICHE DI ACQUISIZIONE**

GNSS

→ fornisce dati utili per

- RETI GEODETICHE**
- RILIEVO DI DETAGLIO**
- TEMPO REALE**

- STAND-ALONE POSIZ. ASSOLUTO**
- POSIZIONAMENTO DIFFERENZIALE DGPS**
- POSIZIONAMENTO RELATIVO**

— misure di codice (pseudorange) per applicazioni di navigazione **PRECISIONE** al 99% senza JA **METRICA**

- ≤ 9 m **PLANIMETRIA**
- ≤ 15 m **ALTIMETRIA**

— osservazioni corrette dalla base e applicate al rover
— misure di codice e misure di fase
PRECISIONE m/cm

— misure di fase
PRECISIONE cm/mm

metodo	applicazione	precisione
STATICO	reti inquadranti alta precisione	$10^{-5} - 10^{-8}$
RAPIDO-STATICO	rafforzamento reti	10^{-5}
STOP & GO	rilievo di dettaglio	cm
CINEMATICO CONTINUO	traiettorie	cm

per il cinematico necessità ricevitori doppiamente frequenti

• POSIZIONAMENTO IN TEMPO REALE

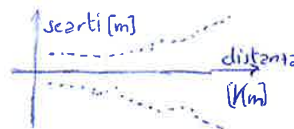
Il migliore metodo che abbiamo a disposizione, che fornisce buoni dati anche in tempo reale, è il POSIZIONAMENTO DIFFERENZIALE IN TEMPO REALE

⇒ PRECISIONE cm
con misure di fase ad ambiguità fissata

MA

la correzione calcolata da una singola stazione BASE è un dato puntuale, che perde di validità all'aumentare della distanza BASE-ROVER perché i due punti, sempre più lontani, non sono più spazialmente correlati

⇒ la correzione differenziale degrada all'aumentare della distanza ⇒ oltre i 20-30 Km i BIAS spazialmente correlati (I, E, T) non sono più confrontabili



↓
difficile fissare l'ambiguità di fase N

QUINDI

servirebbe una rete di stazioni permanenti GPS molto più fitta (limiti tecnici-economici) di quella attuale per avere i valori reali dei BIAS (E, T, I)

↓
si modellano i BIAS all'interno della rete per interpolazione, creando un modello di variazione su tutta l'area, ovvero si CREA una STAZIONE BASE VIRTUALE VRS ⇒ in corrispondenza del ricevitore ROVER ma sono possibili anche altre soluzioni (p-G1)

in questo modo si ha una baseline virtuale di lunghezza nulla e si eliminano i BIAS spazialmente correlati

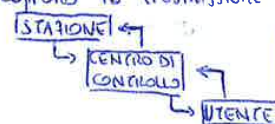
Le reti formate da queste stazioni VRS sono dette RETI FINALIZZATE AL SERVIZIO DI POSIZIONAMENTO IN TEMPO REALE

Network RTK o NRTK

- l'idea è quindi la modellazione del BIAS all'interno di una rete di SPGPS
- l'obiettivo è ottenere PRECISIONE cm con basi di 40-80 Km (come se fosse in single base RTK con base di 10 Km)

- la rete richiede
 - centro di controllo per raccolta ed elaborazione dati delle stazioni GNSS
 - infrastruttura di trasmissione delle osservazioni e delle correzioni
 - fiaggio di N tra le stazioni GPS in RT per poter generare il messaggio di correzione

diversi apparecchi coprono la trasmissione



- la maglia della rete è progettata in funzione di poter modellare i BIAS con precisione sufficiente al fiaggio di N e in funzione dell'attività ionosferica e della posizione geografica

ci si collega alla porta IP (2101), il ricevitore calcola la correzione e lo trasmette al ROVER

collegamento Internet IP
 ✓ economico
 ✓ elevata portata
 ✓ sistema a "due vie"



• Interpolazione del BIAS e creazione MODELLO D'ERRORE

Per creare una correzione di rete
 e' necessario aver FISSATO L'AMBIGUITA' DI FASE
 nel centro di controllo, su tutti i satelliti da tutte le stazioni

⇒ poi si passa allo
 INTERPOLAZIONE DEL BIAS
 |
 approccio Non differenziato e combinato

• APPROCCIO NON DIFFERENZIATO e COMBINATO (solo SEPARAZIONE)

La separazione tra componente dispersiva f (Frequenza) e la componente geometrica E, T avviene tramite combinazioni di fase:

• detto δI_{iono} l'errore ionosferico dipendente dalla frequenza

$$\rightarrow I_{L1} = \frac{\delta I_{iono}}{f_1^2} \quad I_{L2} = \frac{\delta I_{iono}}{f_2^2}$$

• nella stazione BASE (A) le correzioni di fase sono

$$\rightarrow CPC_{A,L1}^j = \frac{\delta I_{iono}}{f_1^2} + E_A^j + T_A^j + E_A^j \quad CPC_{A,L2}^j = \frac{\delta I_{iono}}{f_2^2} + E_A^j + T_A^j + E_A^j$$

errori elettronici ricevitore, ritardi hardware (rumore osservazione)

• e i termini possono essere separati con le combinazioni di fase

IONO-FREE ⇒ si elimina il ritardo I e rimangono T ed E non separabili (errore di rifrazione e verticalità) non sono separabili

$$CPC_{A,L1}^{j \text{ non-disp}} = \frac{f_1^2}{f_1^2 - f_2^2} CPC_{A,L1}^j - \frac{f_2^2}{f_1^2 - f_2^2} CPC_{A,L2}^j = E_{A,L1}^j + T_{A,L1}^j + E_{A,L1}^j \approx 2,54 CPC_{A,L1}^j + 1,54 CPC_{A,L2}^j$$

• i BIAS ottenuti nelle varie stazioni permanenti possono quindi essere interpolati per ottenere un MODELLO D'ERRORE

GEOMETRY-FREE ⇒ rimane la sola componente I

$$CPC_{A,L1}^{j \text{ disp}} = \frac{f_2^2}{f_2^2 - f_1^2} CPC_{A,L1}^j - \frac{f_1^2}{f_2^2 - f_1^2} CPC_{A,L2}^j = \frac{\delta I_{iono}}{f_1^2} = I_{A,L1}^j + E_{A,L1}^j \approx -1,54 CPC_{A,L1}^j + 1,54 CPC_{A,L2}^j$$

• INTERPOLAZIONE BIAS

Gli errori spazialm. correlati da interpolare (T, I, E) sono residui di pseudorange o di fase L_1, L_2 (approccio non differenziato) ⇒ o residui V (doppie differenze)

⇒ l'interpolazione deve permettere di stimare il BIAS nella posizione del ROVER

$$\hat{V}_u = \alpha \hat{V} = \alpha_1 \hat{V}_{1n} + \alpha_2 \hat{V}_{2n} + \dots + \alpha_{n-1} \hat{V}_{n-1,n}$$

n stazioni BASE n-1 vettori indipendenti d'errore V

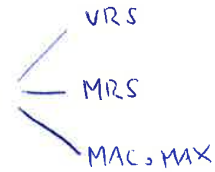
coefficienti che dipendono da:

- geometria delle stazioni permanenti BASE
- posizione del ROVER
- costellazione satellitare (GPS, GLONASS, ...)

- calcolati con approccio LCM (combinazione lineare), DLM (metodo lineare dipendente dalla distanza), LIM (interpolazione lineare), LSM (modello di superficie di basso ordine), Lse (collocazione minimi quadrati)

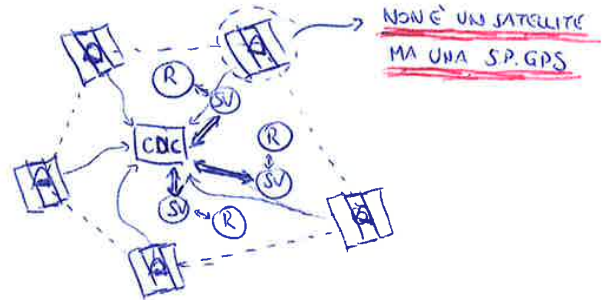
• Architettura di Rete RTK

in una rete GPS per misure RTK
 un CENTRO DI CONTROLLO, indipendente dalle stazioni,
 riceve ed elabora i dati da tutte le stazioni ed
elabora un modello di correzione dei BIAS spazialm. correlati, attraverso
 un'architettura



• VRS - Virtual Reference Station

le osservazioni di codice o fase di almeno (5 SPGPS) che osservano almeno (5 satelliti) vengono raccolte ed elaborate con continuità da un centro di controllo (CDC)



il centro di controllo interpola le correzioni differenziali dei BIAS in una posizione prossima al ROVER

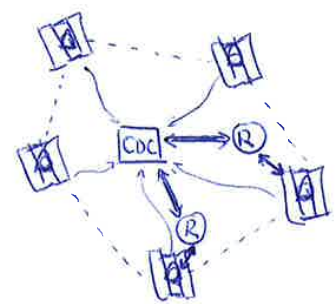
genera una STAZIONE VIRTUALE che realizza una baseline nulla con il ROVER e annulla i BIAS spazialm. correlati

- X necessita sistema a 2 vie (modem, IP)
- X capacità del server limitato
- ✓ reinizializzazione forzata
- ✓ utilizzabile il formato RTCM 2.x

tra il ROVER inizia il ritevo RTK con la ricerca della ambiguità N mentre il CDC verifica in continuo la distanza tra ROVER e SV e se questa supera una certa soglia, avviene una REINIZIALIZZAZIONE FORZATA del ROVER

• MRS - Multi Reference Station

le correzioni (BIAS dispersivi e non dispersivi) delle misure di codice o fase vengono generate per ogni satellite su ogni stazione della rete



a differenza del VRS, la correzione viene localizzata nell'intorno di ogni SPGPS sotto forma di polinomio lineare (rappresentato un piano)

il CDC modella l'errore: trasmette i coefficienti del polinomio e li trasmette in formato FKP, nelle componenti dispersiva e non dispersiva

- ✓ la trasmissione può essere a una via (la correzione è nel ROVER)
- ✓ non c'è limite al n° di accessi all'IP
- X richiede il formato RTCM type 53
- ✓ l'utente decide a quale SPGPS collegarsi
- ✓ carico computazionale del CDC ridotto

il ROVER utilizza 2 correzioni:

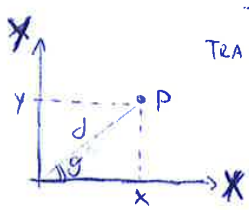
posizionam. DIFFERENZIALE (PRC o CPC) { correzione di range per ogni satellite

correzione di rete ricevuta in formato FKP dal CDC

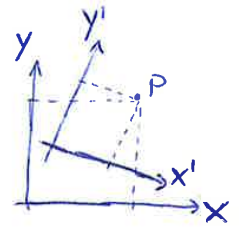
la correzione avviene nel ROVER e non più dal CDC

Esiste una sostanziale differenza tra S.R. e S.C. \Rightarrow all'interno di un S.R. possiamo esprimere le posizioni dei punti con diversi S.C.

→ i problemi possono quindi essere separati in:



TRASFORMAZIONE
TRA SISTEMI DI COORDINATE
[es. da (x, y) a (θ, d)]



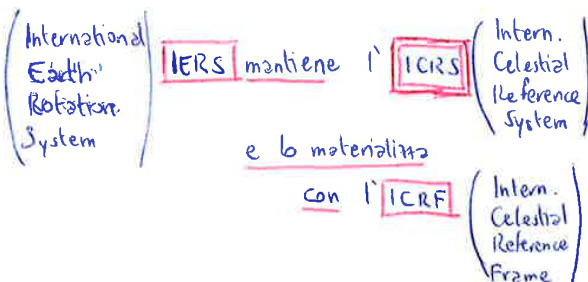
TRASFORMAZIONE
TRA SISTEMI DI RIFERIMENTO
[es. da (x, y) a (x', y')]

S.R. possono essere

fissi rispetto alle posizioni apparenti delle stelle

SISTEMA INERZIALE S.I.

solidale al centro della Terra, in moto rettilineo uniforme e senza rotazione rispetto alle stelle fisse



solidali con la Terra in continua rotazione

SISTEMA ECEF (Earth Centered Earth Fixed)

solidale con la Terra, ha il centro di massa centrato nel baricentro e l'asse di istantanea rotazione (che però, visto da un S.R., è soggetto a moto di precessione e nutazione (moto del polo))

Si definisce quindi il **CTRS** (Conventional Terrestrial Reference System)

- origine nel centro di massa della Terra
- asse Z: nella direzione di un polo medio ad una certa data
- asse X: complanare con meridiano Greenwich
- asse Y: completa la terna destrorsa

La **TRASFORMAZIONE tra 2 DATUM** viene eseguita a partire da coordinate di punti noti nei 2 S.R., da cui stimare i parametri di trasformazione secondo un modello matematico

La **TRASFORMAZIONE tra 2 DATUM** NON è un PROBLEMA GEOMETRICO

↳ il modello teorico della rototraslazione funzionerebbe solo tra punti appartenenti a reti prive di errore, ma in questo caso le MISURE HANNO UN' INCERTEZZA

è un **PROBLEMA GEODETICO**

↳ Per modellare le distorsioni si aggiunge un 7° parametro cioè il **FATTORE DI SCALA**

(Internat. Assoc. Geodesy)

IAG defines the s.r. that is materialized by **ETRF** (European Terrestrial Reference Frame)
 the system adopted in Europe is UNCOUPLED FROM THE MOVEMENT OF PLATES

↓
 the annual displacements of tectonic plates (few cm) cause significant variations in S.R., but in Europe most of these global displacements are common to all nations

↓
 it was established a LOCAL EUROPEAN NETWORK whose coordinates, purged from common displacements (ABSOLUTE), provide the S.R. solid to the continental plate (Eurasian)

↓
 PROJECT EUREF (European Reference Frame) which is materialized in **ETRF 2000**

ITRF and ETRF differ by ~50 cm per component ($\Delta E, \Delta N, \Delta U$)
 ↓
 it's important not to confuse S.R.

the ETRF system has a lower velocity of displacement (1-2 mm/year) so it can be updated less frequently (1989 → 2000)

the GPS constellation defines its DATUM

→ **WGS84** (World Geodetic System 1984)

in this S.R. are expressed the ephemerides, the coordinates or the components of the GPS baselines

↔ for practical applications it COINCIDES with the GRS80 (difference of 0,1 mm)

↗ ITRS (and its frame ITRF_{yy}) are identical to WGS84 with a difference of 1 m

the WGS has 4 realignments that correspond to ITRF

- G730 ↔ ITRF 92
- G873 ↔ ITRF 94
- G1150 ↔ ITRF 2000 (difference 10 cm)
- G1674 ↔ ITRF 2008 (difference cm)

↓
 we can consider WGS84 and ITRF COINCIDENT at the level of 10 cm

the GLONASS constellation defines its DATUM

→ **PZ90.02**

↔ the transformation PZ90 - WGS84 has a precision of ~1 m

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{ITRF 2000} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{PZ90.02} + \begin{bmatrix} -0,35 \text{ m} \\ 0,08 \text{ m} \\ 0,18 \text{ m} \end{bmatrix}$$

PZ90.02 is close to ITRF 2000 without rotations or scale but with only translation of the geocenter

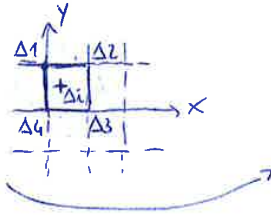
TRASFORMAZIONE CONTINUA VERTO

- sono note delle CURVE DI ISOVARIAZIONE su scala 1:25.000
 - di LATITUDINE $\Delta\lambda = 5'$ (equidist. 0,05 secondi)
 - di LONGITUDINE $\Delta\varphi = 7'30''$ (equidist 0,02 secondi)
- e di ONDULAZIONE GEODE ΔN



• si effettua l' INTERPOLAZIONE CONTINUA di tipo BILINEARE

↳ noti i valori di isovarianza di coordinate $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ sui 4 spigoli di una cella quadrilatera di coordinate note



si vuole ricavare il valore Δ_i in un punto (x_i, y_i) incognito, effettuando interpolaz. bilineare

$$\Delta_i = a x_i + b y_i + c x_i y_i + d$$

parametri ricavati dai valori noti sui 4 spigoli della cella

per ogni punto si può scrivere il seguente schema e soluzione:

$$\begin{cases} a x_1 + b y_1 + c x_1 y_1 + d = \Delta_1 \\ a x_2 + b y_2 + c x_2 y_2 + d = \Delta_2 \\ a x_3 + b y_3 + c x_3 y_3 + d = \Delta_3 \\ a x_4 + b y_4 + c x_4 y_4 + d = \Delta_4 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & x_1 y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & x_2 y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & x_3 y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & x_4 y_4 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 \end{pmatrix}$$

GNSS — ALTIMETRIA

Dalle misure di GNSS si ottengono le baselines dei vertici rilevati in cui si hanno le COORDINATE GEOCENTRICHE nel S.R. WGS84 (X, Y, Z)

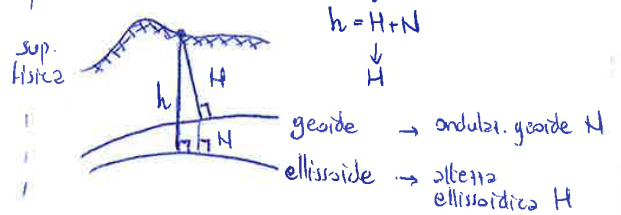
si trasforma in COORDINATE GEOGRAFICHE (λ, φ, h)

il problema è che le quote misurate sono riferite al GEOIDE mentre noi le vogliamo riferite all' ELLISSOIDE

ALTIMETRIA: GEOIDE
PLANIMETRIA: ELLISSOIDE

è importante stimare l' ONDULAZIONE DEL GEOIDE N o la sua variazione a partire da un punto di coordinate H e h

dalle trasformazioni di coordinate $(X, Y, Z)_{GCEF} \leftrightarrow (\varphi, \lambda, h) \leftrightarrow (E, N, h)$



le variazioni di ONDULAZIONE del geoides sono maggiori in corrispondenza dello scontro tra le placche tettoniche - modello ITALGEO (arco alpino, Sicilia-Calabria)

es. a Torino:
ELLISSOIDE 239 m = h
GEOIDE 290 m = H
 $N = H - h = 50$ m

LASER TERRESTRI

↳ possono essere **DISTANZIOMETRICI** o **TRIANGOLATORI**

↳ la direzione del raggio laser è determinata dalla rotazione dello strumento e dello specchio, con uno STEP ANGOLARE COSTANTE

acquistano NUVOLE di milioni di punti
↓
ELEVATA DENSITA'

PRECISIONE
cm

DISTANZIOMETRICI A TEMPO DI VOLO - TOF (Time of Flight)

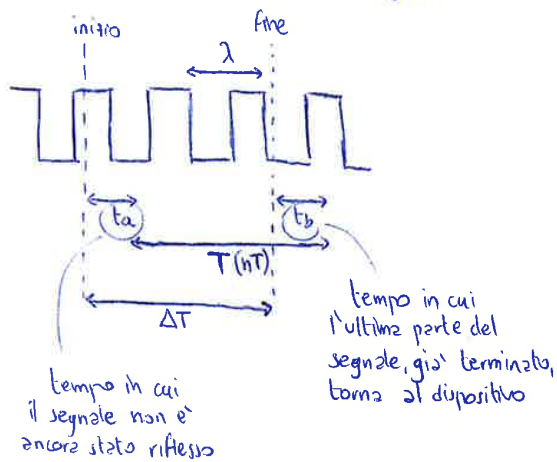
il segnale è un'IMPULSO (onda quadra) di durata T

la DISTANZA è calcolata come $d = \frac{v \cdot \Delta t}{2}$

dove $\Delta t = nT + (t_a - t_b)$

numero di cicli calcolati approssimativamente quando il segnale riflesso torna allo strumento
spostamento iniziale e finale: TEMPI RESIDUI calcolati da condensatore a corrente continua

(con s.q.m. $(3 \cdot 10^{-8} s) \cdot c = \pm 9m$)



tempo in cui il segnale non è ancora stato riflesso

tempo in cui l'ultima parte del segnale, già terminato, torna al dispositivo

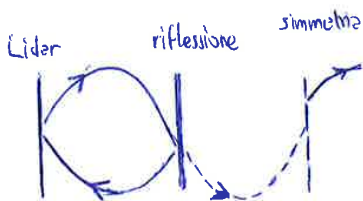
DISTANZIOMETRICI A MISURA DI FASE → più rapide

misura lo spostamento tra un'onda sinusoidale emessa $S_e(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0)$

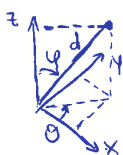
e quella riflessa $S_r(t) = A \sin[\omega(t + \Delta t) + \varphi_0]$

e si calcolano le λ intere:

$$d = n \cdot \frac{\lambda}{2} + \frac{\Delta \varphi}{2\pi}$$



↳ PRECISIONE si ottiene dalla propagazione della varianza cm

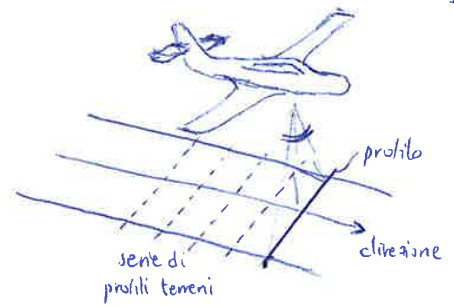


$$\begin{aligned} x &= d \sin \alpha \cos \beta \\ y &= d \sin \alpha \sin \beta \\ z &= d \cos \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial d}\right)^2 \sigma_d^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right)^2 \sigma_\alpha^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \beta}\right)^2 \sigma_\beta^2} = \dots \\ \sigma_y &= \dots \\ \sigma_z &= \dots \end{aligned}$$

LASER AEREI

il sensore del velivolo è trascinato nel moto dell'aereo/elicottero/drone/...



registra la posizione tramite COORDINATE GNSS

registra ASSETTI ANGOLARI diversi in un S.R. INERTIALE

registra la DISTANZA con un impulso LASER sul velivolo in movimento

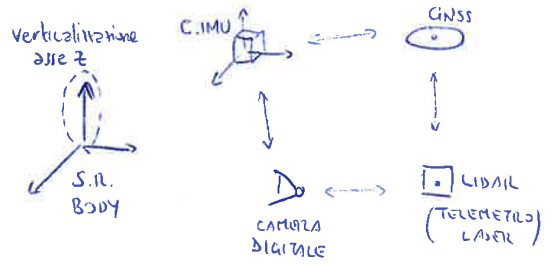
GNSS → (X, Y, Z)

IMU → (Ω, φ, κ)

LASER → d

il problema è che i centri di questi 3 sistemi NON COINCIDONO (S.R. locali)

occorre conoscere le posizioni relative dei sensori per determinare il punto colpito nel S.R. "terreno" (S.R. globale)



Impulso LASER

il segnale LASER è un impulso emesso con una certa ampiezza (A)

quando il LASER colpisce un ostacolo, una parte viene ASSORBITA e una RIFLESSA

utile ai fini del calcolo della DISTANZA

i sensori hanno CRONOMETRI diversi quindi si avrà

risulta in questo modo

- ECCENTRICITÀ SPAZIALE

risulta

- ECCENTRICITÀ TEMPORALE

sincronizzando i ricevitori al tempo del $\mu s (10^{-6})$

A causa della DIVERGENZA del raggio LASER,

può comportare che il raggio colpisca più oggetti e venga riflesso più volte provocando più impulsi di ritorno

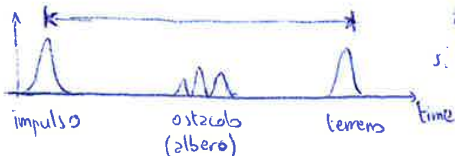
⇒ ECHI DI RISPOSTA ⇒ caratterizza la MORFOLOGIA del terreno



l'area d'impetto del raggio non è puntuale ma aumenta con la distanza dall'oggetto

se la superficie ha delle asperità, il raggio viene RIFLESSO PRIMA dell'ostacolo e nel percorso di ritorno si hanno diversi treni d'onda detti IMPULSI DI RITORNO o ECHI DI RISPOSTA

ad es. su superficie VEGETATA si avranno almeno 2 impulsi di ritorno (1 riflesso della vegetazione e 1 che filtra fino al terreno e poi viene riflesso)



la DIGITALIZZAZIONE degli impulsi, permette di discriminare i singoli segnali entranti da una stessa acquisizione, mantenendo solo le distanze in corrispondenza dei massimi

FOTOGRAMMETRIA, RADDRIZZAMENTO, ORTOFOTO

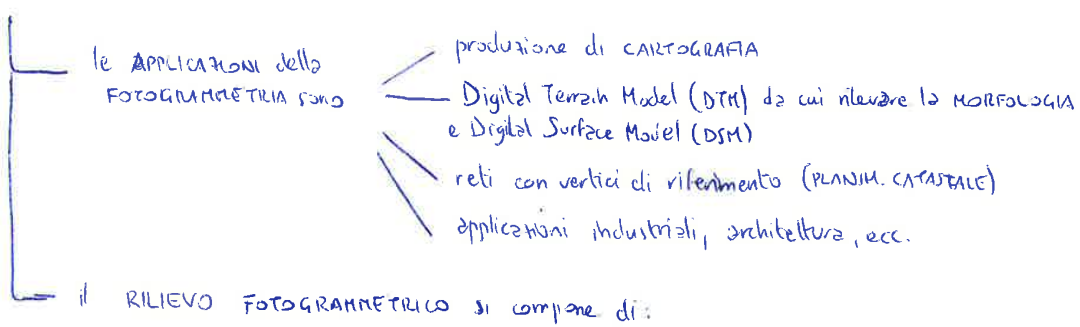
tecnica che permette di rilevare oggetti complessi

partire da immagini analogiche o digitali, attraverso la RESTITUZIONE

ricostruzione di oggetti 3D evitando il contatto con l'oggetto (TELERILEVAMENTO)

come il Lidar, si ottiene una NUVOLA DI PUNTI

è la carta su cui rendiamo METRICA l'immagine digitale (es Google Earth)



RILIEVO DI INQUADRAMENTO

serve per "inquadrare" i fotogrammi e riferire la RESTITUZIONE ad un s.r.z. assoluto (terreno)

FOTOGRAFIA

è una prospettiva centrale dell'oggetto (trasforma l'oggetto 3D in 2D)

occorrono 2 prospettive centrali dell'oggetto per determinare la DISTANZA DI PRESA



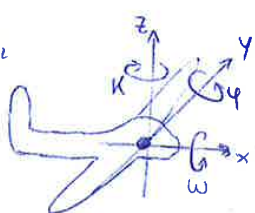
O, I, C allineati ⇒ EQUAZIONI DI COLLINEARITÀ o ALLINEAMENTO

RILIEVO DI DETTAGLIO

è la RESTITUZIONE, partire da misure eseguite sui fotogrammi

PRESA FOTOGRAMMETRICA

vengono rilevati dei punti (A) attraverso diverse striscie sovrapposte con parametri $(x, y, z, w, \varphi, k)_1$ e $(x, y, z, w, \varphi, k)_2$
 ROLLO / BRANCIAMENTO / BECCHEGGIO



RESTITUZIONE FOTOGRAMMETRICA

i punti A, B, C si ottengono per intersezione delle corrispondenti "coppie":
 A' | A"
 B' | B"
 C' | C"
 striscia I | striscia II

dove R MATRICE DI ROTAZIONE

$$R = R_w \cdot R_\varphi \cdot R_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos w & -\sin w \\ 0 & \sin w & \cos w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos k & -\sin k & 0 \\ \sin k & \cos k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

↳ NON SI PUO' ASSUMERE PICCOLO L'ANGOLO w, φ, k (ANGOLI D'ASSETTO)

quindi con i coseni direttori

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

• sostituendo nelle equazioni di collinearità:

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \varphi_0 - c \cdot T_x \\ \eta &= \eta_0 - c \cdot T_y \end{aligned} \right\} \text{ si possono avere 2 risultati}$$

MODALITA' PROSPETTIVIZZAZIONE

si ottengono le COORDINATE IMMAGINE (φ, η)
in funzione delle COORDINATE OGGETTO (X, Y, Z)
e dei parametri di orientamento interno e esterno

AD OGNI PUNTO OGGETTO (X, Y, Z) CORRISPONDE
UN SOLO PUNTO IMMAGINE (φ, η)

$$\varphi = \varphi_0 - c \frac{r_{11}(X-X_0) + r_{21}(Y-Y_0) + r_{31}(Z-Z_0)}{r_{13}(X-X_0) + r_{23}(Y-Y_0) + r_{33}(Z-Z_0)}$$

$$\eta = \eta_0 - c \frac{r_{12}(X-X_0) + r_{22}(Y-Y_0) + r_{32}(Z-Z_0)}{r_{13}(X-X_0) + r_{23}(Y-Y_0) + r_{33}(Z-Z_0)}$$

MODALITA' RESTITUZIONE

si ottengono le COORDINATE OGGETTO (X, Y)
in funzione delle COORDINATE IMMAGINE (φ, η)
e dei parametri di orient. esterno/interno

AD OGNI PUNTO IMMAGINE (φ, η) POSSONO
CORRISPONDERE INFINITI PUNTI OGGETTO (X, Y, Z)
A MENO DI NON BLOCCARE LA Z

con un solo fotogramma NON SI PUO' RICOSTRUIRE
l'immagine 3D

$$X = X_0 + (Z-Z_0) \frac{r_{11}(\varphi - \varphi_0) + r_{12}(\eta - \eta_0) - r_{13} \cdot c}{r_{31}(\varphi - \varphi_0) + r_{32}(\eta - \eta_0) - r_{33} \cdot c}$$

$$Y = Y_0 + (Z-Z_0) \frac{r_{21}(\varphi - \varphi_0) + r_{22}(\eta - \eta_0) - r_{23} \cdot c}{r_{31}(\varphi - \varphi_0) + r_{32}(\eta - \eta_0) - r_{33} \cdot c}$$

• si possono ricavare le inverse sviluppando
 $X = R \cdot X'$ e dividendo per $(Z-Z_0)$
le componenti $(X-X_0)$ e $(Y-Y_0)$

$$\frac{X-X_0}{Z-Z_0} = \frac{r_{11}(X'-X_0) + r_{12}(Y'-Y_0) + r_{13}(Z'-Z_0)}{r_{31}(X'-X_0) + r_{32}(Y'-Y_0) + r_{33}(Z'-Z_0)}$$

$$\frac{Y-Y_0}{Z-Z_0} = \frac{r_{21}(X'-X_0) + r_{22}(Y'-Y_0) + r_{23}(Z'-Z_0)}{r_{31}(X'-X_0) + r_{32}(Y'-Y_0) + r_{33}(Z'-Z_0)}$$

e moltiplicando num e denom
a destra per il termine $-\frac{c}{Z'-Z_0}$

$$(X'-X_0) \cdot \frac{-c}{Z'-Z_0} = \varphi - \varphi_0$$

$$(Y'-Y_0) \cdot \frac{-c}{Z'-Z_0} = \eta - \eta_0$$

$$(Z'-Z_0) \cdot \frac{-c}{Z'-Z_0} = -c$$

dalle eq. di partenza
 $T_x = t_\varphi$
 $T_y = t_\eta$
si ottiene

• PROIEZIONE CENTRALE DI UN OGGETTO PIANO

per **oggetti 3D** abbiamo bisogno di **2 fotogrammi** per ricostruire l'oggetto stesso
 mentre per **oggetti 2D** basta **1 fotogramma**

• dalle equazioni di COLLINEARITÀ - RESTITUZIONE

$$\Delta X = (z_p - z_o) \frac{r_{11}(y - y_o) + r_{12}(\eta - \eta_o) - r_{13}c}{r_{31}(y - y_o) + r_{32}(\eta - \eta_o) - r_{33}c}$$

$$\Delta Y = (z_p - z_o) \frac{r_{21}(y - y_o) + r_{22}(\eta - \eta_o) - r_{23}c}{r_{31}(y - y_o) + r_{32}(\eta - \eta_o) - r_{33}c}$$

↳ fissiamo $z = \text{costante}$ e chiamiamo

$$\begin{aligned} \bar{a}_1 &= r_{11}(z_p - z_o) & \bar{a}_2 &= r_{12}(z_p - z_o) & \bar{a}_3 &= -(z_p - z_o)(r_{11}y_o + r_{12}\eta_o + r_{13}c) \\ \bar{b}_1 &= r_{21}(z_p - z_o) & \bar{b}_2 &= r_{22}(z_p - z_o) & \bar{b}_3 &= -(z_p - z_o)(r_{21}y_o + r_{22}\eta_o + r_{23}c) \\ \bar{c}_1 &= r_{31} & \bar{c}_2 &= r_{32} & \bar{c}_3 &= -(r_{31}y_o + r_{32}\eta_o + r_{33}c) \end{aligned}$$

si ottiene

$$\Delta X = \frac{\bar{a}_1 \cdot y + \bar{a}_2 \cdot \eta + \bar{a}_3}{\bar{c}_1 \cdot y + \bar{c}_2 \cdot \eta + \bar{c}_3}$$

$$\Delta Y = \frac{\bar{b}_1 \cdot y + \bar{b}_2 \cdot \eta + \bar{b}_3}{\bar{c}_1 \cdot y + \bar{c}_2 \cdot \eta + \bar{c}_3}$$

↳ si divide per \bar{c}_3
 $(a_1 = \frac{\bar{a}_1}{\bar{c}_3})$

$$\Delta X = \frac{a_1 \cdot y + a_2 \cdot \eta + a_3}{c_1 \cdot y + c_2 \cdot \eta + 1}$$

$$\Delta Y = \frac{b_1 \cdot y + b_2 \cdot \eta + b_3}{c_1 \cdot y + c_2 \cdot \eta + 1}$$

EQUAZIONI DI OMOGRAFIA
 (8 PARAMETRI)

• dai 9 PARAMETRI $(y_o, \eta_o, c); (w, \psi, K); (x_o, y_o, z_o)$

si passa a 8 PARAMETRI

per ogni punto IMMAGINE (y, η) corrisponde un solo punto OGGETTO $(\Delta X, \Delta Y)$
 $x - x_o \quad y - y_o$

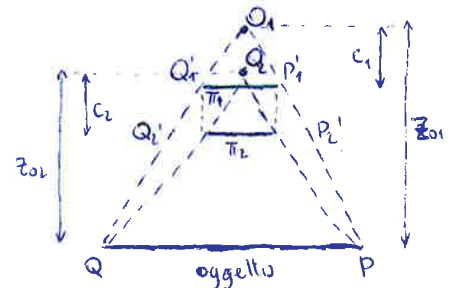
• lo stesso oggetto può essere ripreso da camere a campo diverso (normale, grandangolo, ecc)

perché ciò che RIMANE COSTANTE è il RAPPORTO QUOTA/DIST. FOCALE

$$\frac{QP}{z_{o1}} = \frac{\pi_1}{c_1} = \frac{\pi_2}{c_2}$$

$$\frac{z_{o1}}{c_1} = \frac{QP}{\pi_1} = \frac{QP}{\pi_2} = K_{\text{cost}} = \frac{z_{o2}}{c_2}$$

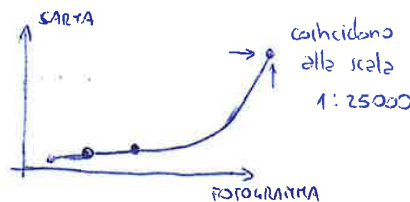
sono immagini identiche



dato che $\frac{QP}{z_{o1}} = \frac{\pi_1}{c_1}$
 e dato che $\pi_1 = \pi_2$
 \downarrow
 $\frac{QP}{z_{o1}} = \frac{\pi_1}{c_1} = \frac{\pi_2}{c_2}$
 \downarrow
 $\frac{z_{o1}}{c_1} = \frac{z_{o2}}{c_2} = \text{cost}$

• l'oggetto ripreso ha la stessa GEOMETRIA CENTRALE se distanza e fotogramma sono ridotti dello stesso fattore di scala

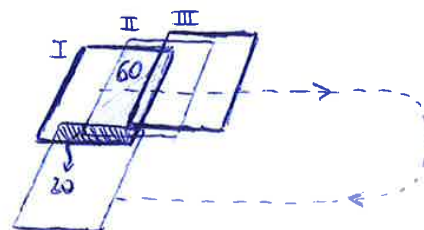
$$\frac{f}{F} = \frac{1}{h} = \frac{C}{H}$$



• la SCALA DI CARTA e la SCALA DI FOTOGRAMMA hanno un rapporto $1/h$

• la PRESA FOTOGRAFOMETRICA viene fatta in

modo da avere **RICOPRIMENTO LATERALE 60%**
 e **RICOPRIMENTO TRASVERSALE 20%**



2) ORIENTAMENTO ASSOLUTO

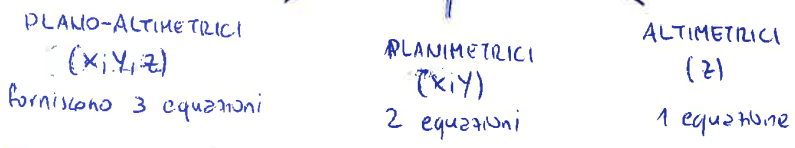
1
 si determinano i 7 PARAMETRI di ROTOTRASFORMAZIONE + VARIATIONE DI SCALA
 per far sì che il modello si sovrapponga al terreno
 (TRASFORMAZIONE 3D AFFINE A 7 PARAMETRI)

↓

7 INCOGNITE
 $(X_0, Y_0, Z_0, \omega, \phi, \kappa, m)$

si hanno 7 equazioni, per scrivere le quali si collimano punti di coordinate note (PUNTI D'APPAGGIO)

mantiene il parallelismo tra le rette (retta → retta)



- PROCEDURA
- 1) si dispone di un elenco di punti d'appoggio di coordinate note
 - 2) si rintracciano i punti d'appoggio sul modello e li si collima
 - 3) vengono associate le COORDINATE TERRENO del punto alle COORDINATE MODELLO
 - 4) si determinano i 7 parametri
 - 5) si hanno le COORDINATE TERRENO in tempo reale

Dalle equazioni di collinearità, la RESTITUZIONE avviene in diversi modi:

FOTOGRAFOMETRIA DIRETTA:

sono noti i parametri di ogni fotogramma (POSIZIONE e ASSETTO) (X_0, Y_0, Z_0, r_{ij})

→ si applicano alle eq. di collinearità determinando le COORDINATE TERRENO X, Y, Z (di punti immagine visibili) su almeno 2 fotogrammi

- ✓ non richiede appoggio a terra
- ✓ la ricerca dei punti omologhi avviene in automatico
- ✗ i diversi dispositivi devono essere sincronizzati al tempo GPS

TRIANGOLAZIONE AEREA A STELLE PROIETTIVE (BUNDLE ADJUSTMENT)

sono note le coordinate di alcuni PUNTI D'APPAGGIO a terra, (X, Y, Z)

⇒ e le COORDINATE IMPAGGIONE dei punti di legame (presenti in più di 1 fotogramma)

tramite ricerca automatica dei punti di legame (tra più fotogrammi) si orientano in blocco tutte le "stelle" e si determinano i parametri di ogni fotogramma (X_0, Y_0, Z_0, r_{ij})

↓
 • l' AUTOCORRELAZIONE consiste in un'operazione di matching tra 2 matrici:
 si estrae da una delle 2 immagini una sottomatrice di dimensioni limitate (centrata attorno al pixel che) materializza il punto

si estrae dall'altra immagine una sottomatrice di dimensioni maggiori nella quale si prevede di trovare il punto omologo cercato

MATRICE SAGOMA

MATRICE DI RICERCA

es. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

es. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 & 9 & 9 & 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$
 matching
 ↓
 $\rho = 1$

si ricerca il punto omologo cercando nella matrice ricerca la sottomatrice di dimensioni uguali alla matrice sagoma che più le assomiglia

si usa il COEFFICIENTE DI CORRELAZIONE $\rho = \frac{\sum_{ij} I_{ij} J_{ij}}{\sum_{ij} I_{ij} \sum_{ij} J_{ij}}$

• il RICAMPIONAMENTO consiste nel costruire una nuova immagine digitale (OUTPUT) a partire dall'immagine nota (INPUT)

nell'immagine OUTPUT, ciascun PIXEL viene assegnato un valore radiometrico interpolato dall'immagine di INPUT

RADDRIZZAMENTO e ORTOPROIEZIONE

è l'operazione che permette di ELIMINARE LE DEFORMAZIONI DEL FOTOGRAMMA PER OGGETTO PIANO

è l'operazione che permette di ELIMINARE LE DEFORMAZIONI DEL FOTOGRAMMA PER OGGETTO NON PIANO (es. montagne)

Una carta, metricamente corretta, la cui planimetria è rappresentata in forma fotografica, derivata da foto aeree e detta

- FOTOCARTA (se integrata con punti quotati, toponimi, ecc informazioni)
- FOTOPIANO (se privo di informazioni)

⇒ esiste una differenza di natura geometrica tra

FOTOGRAMMA e FOTOPIANO

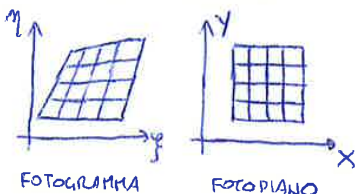
è una PROSPETTIVA CENTRALE dell'oggetto fotografato

è una RAPPRESENTAZIONE CARTOGRAFICA, in scala, dell'oggetto

← l'effetto di una qualsiasi fotografia è una DEFORMAZIONE

• se la superficie dell'oggetto è PIANA
 ↓
 le deformazioni dell'oggetto possono essere modellate con le EQUAZIONI DI OHGURA

↓
 RADDRIZZAMENTO



Le ORTOFOTO sono classificate in base alla PRECISIONE

ORTOFOTO SPEDITIVA

- ✓ tecniche rapide ed economiche
- PRECIS. PLANIMETRICA 0,3 mm
- PRECIS. IN ELEVATIONE (edifici, ponti, viadotti) 0,9 mm

ORTOFOTO ORDINARIA

- segue la precisione delle rappresent. cartografiche tradizionali
- PREC. PLANIM. 0,2 mm
- PREC. ELEVAT. 0,6 mm
- X deformazione prospettive residue (senz. modello di forma)

ORTOFOTO DI PRECISIONE

✓ la corretta descrizione del modello di forma tridimensionale di un oggetto consente di eliminare le def. residue attraverso

DSM generato da un DTM

generazione di un DDSM (modello digitale di superficie densa) che permette una completa descrizione 3D dell'oggetto (cartografia + fotogrammetria + LiDAR)

risoluzione e precisione simili

DTM e DSM

(Digital Terrain Model) (Digital Surface Model)

descrive la SUPERFICIE DEL TERRENO

descrive la SUPERFICIE FISICA del territorio compresi edifici, vegetazione, ecc.



sono detti Modelli Altimetrici Numerici (MAN)

questi modelli includono:

- BREAKLINE, sono linee che descrivono il DTM e il DSM, cioè linee che uniscono i punti della superficie caratterizzati da brusche variazioni di pendenza;
- ELEMENTI CARTOGRAFICI, come creste, bacini, impluvi, vette, ecc. descritte da linee e punti;
- ZONE MORTE, sono aree non incluse nel modello, ad es. zone dove non è definito il DTM, come zone boschive dove non è nota l'altezza di vegetazione;
- LIMITI dell'area rappresentata;

l'altimetria sulla carta si realizza tramite:

- PUNTI QUOTATI
- CURVE DI LIVELLO
- SFUMO

MINIMI QUADRATI SEQUENZIALI

quando abbiamo a che fare con notevoli moli di dati oppure quando l'acquisizione di nuovi dati modifica di volta in volta la stima



può essere utile evitare di eseguire un trattamento in blocco ma piuttosto eseguire stime di parametri "in tempo reale" che richiede un approccio sequenziale "epoca per epoca"



si vuole capire se è possibile aggiornare una vecchia soluzione \hat{X}_{old} ; $Q_{xx,old}$ a partire da nuove misure l_{new}

- a) il n° di incognite non varia \Rightarrow **MINIMI QUADRATI SEQUENZIALI**
- b) il n° di incognite varia secondo un modello di moto (equazione di stato) \Rightarrow **FILTRO DI KALMAN**

le nuove osservazioni introdotte l_{new} e la vecchia stima \hat{X}_{old} determinano la nuova stima \hat{X}_{new}

$$\hat{X}_{new} = L \hat{X}_{old} + K l_{new}$$

coefficienti

le vecchie misure l_{old} sono già memorizzate in \hat{X}_{old}

oppure si può separare la predizione dello stima \hat{X}_{old} dalla correzione \hat{X}

$$\hat{X}_{new} = \hat{X}_{old} + \hat{X} = \hat{X}_{old} + (K)(l_{new} - A_{new} \hat{X}_{old}) = (I - K A_{new}) \hat{X}_{old} + K l_{new}$$

dove $(A_{new} \hat{X}_{old})$

nuove misure calcolate dalle vecchie stime

$(l_{new} - A_{new} \hat{X}_{old})$
"scarto predetto"

MATRICE GUADAGNO
O DI KALMAN

MATRICE DISCAGNO
delle nuove misure

• Supponiamo di avere un sistema iniziale (0)

$$A_0 X_0 - l_0 = v_0$$

$$A_0 X_0 = l_0 + v_0$$

$$\hat{X}_0 = N_0^{-1} \cdot T_{h_0} = (A_0^T \cdot P_0 \cdot A_0)^{-1} \cdot (A_0^T \cdot P_0 \cdot l_0)$$

$$Q_{xx} = N_0^{-1} = (A_0^T \cdot P_0 \cdot A_0)^{-1}$$

• epoca i

$$\begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \end{bmatrix} X_i = \begin{bmatrix} l_0 \\ l_1 \end{bmatrix}$$

• epoca i+1

$$\begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \end{bmatrix} X_{i+1} = \begin{bmatrix} l_0 \\ l_1 \end{bmatrix}$$

• Supponiamo ora di avere nuovi dati, disponibili e di poter scrivere un sistema aggiornato (1)

$$A_1 X_{i+1} = l_1$$

le incognite restano le stesse $X_0 = X_1$



• infine si stima ~~in~~ modo sequenziale anche la matrice dei cofattori Q_{xx} .

↳ soluzione con i m.g. del sistema statico $Ax=l$

d'è come matrice dei cofattori $Q_{xx} = N^{-1} = (A^T \cdot P \cdot A)^{-1} = (A^T \cdot Q_{ll}^{-1} \cdot A)^{-1}$

mentre in un sistema dinamico deve essere aggiornata con le misure l_{new} e la relativa Q_{ll}

$$l = \begin{bmatrix} l_{old} \\ l_{new} \end{bmatrix} \rightarrow Q_{ll} = \begin{bmatrix} Q_{ll,old} & 0 \\ 0 & Q_{ll,new} \end{bmatrix}$$

quindi applicando la propagazione della varianza è

$$\hat{x}_{new} = \underbrace{(I - K \cdot A_{new})}_{\text{operatore}} \cdot \hat{x}_{old} + \underbrace{K}_{\text{operat.}} \cdot \underbrace{l_{new}}_{Q_{ll,new}}$$

\downarrow $Q_{xx,new}$ \downarrow $Q_{xx,old}$ \downarrow $Q_{ll,new}$

$$Q_{xx,new} = L \cdot Q_{xx,old} \cdot L^T + K \cdot Q_{ll,new} \cdot K^T$$

• PROCEDURA MINIMI QUADRATI SEQUENZIALI

- ① $N_{new} = N_{old} + A_{new}^T \cdot P_{new} \cdot A_{new}$ → scrittura equazioni
- ② $K_{new} = N_{new}^{-1} \cdot A_{new}^T \cdot P_{new}$
- ③ $\hat{x}_{new} = \hat{x}_{old} + K (l_{new} - A_{new} \cdot \hat{x}_{old})$ → aggiornamento soluzione
- ④ $Q_{xx,new} = L \cdot Q_{xx,old} \cdot L^T + K \cdot Q_{ll,new} \cdot K^T$