NUMERO: 2437A ANNO: 2019

A P P U N T I

STUDENTE: Ferrera Alessandra

MATERIA: Analisi II - Teoria - Prof. Serra

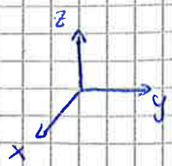
ANALISI II, ALESSANDRA FERRERA
I° SEMESTRE 2018
QUADERNO N° 1

→ F IRROTAZIONALE <u>NON</u> IMPLICA F CONSERVATIVO

→ F <u>NON</u> IRROTAZIONALE IMPLICA F <u>NON</u> CONSERVATIVO

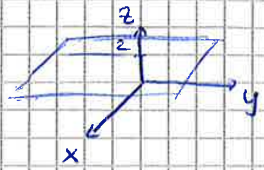
ESEMPI IN 3 VARIABILI

1) $f(x,y,z) = \sqrt{z-y}$ $\quad D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z-y \geq 0 \Rightarrow z \geq y\}$



ma $z=y$ è un piano! Devo prendere, come D, il semispazio sopra il piano + il piano

2) $f(x,y,z) = \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{z-2}$ $\quad D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z-2 \neq 0\}$



ma $z=2$ è un piano

quindi il $D = \mathbb{R}^3 - \{\text{piano } z=2\}$

3) $f(x,y,z) = \log(4-x^2-y^2-z^2)$

$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4-x^2-y^2-z^2 > 0 \Rightarrow x^2+y^2+z^2 < 4\}$

questo è l'interno di una sfera (senza prendere la superficie) di raggio 2

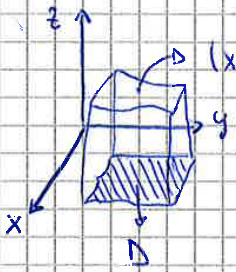
RAPPRESENTAZIONE DI FUNZIONI DI 2 O 3 VARIABILI

In 2 variabili ho $D \in \mathbb{R}^2$ e $f: D \to \mathbb{R}$, $z = f(x,y)$

1. grafico:

insieme $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in D, z = f(x,y)\} = \{(x,y,f(x,y)) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in D\}$

in generale il grafico è una superficie in $\mathbb{R}^3$



$(x,y,f(x,y))$. $z = f(x,y)$ è il grafico

ESEMPIO

$f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$ $\quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1-x^2-y^2 \geq 0 \Rightarrow x^2+y^2 \leq 1\}$

interno di una circonferenza di raggio 1

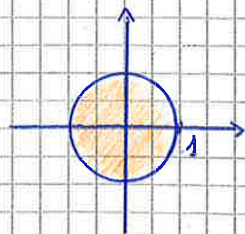
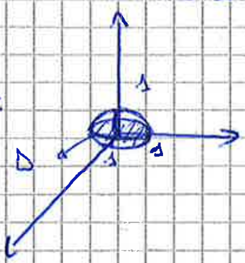


grafico:

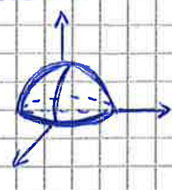


$\{(x,y,\sqrt{1-x^2-y^2}) \mid (x,y) \in D\}$

$z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ so che $z \geq 0$

$z^2 = 1-x^2-y^2$

$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 1 \\ z \geq 0 \end{cases}$



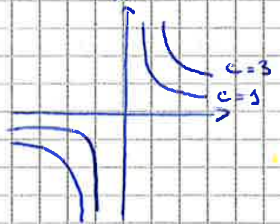
ESEMPIO

$f(x,y) = xy$

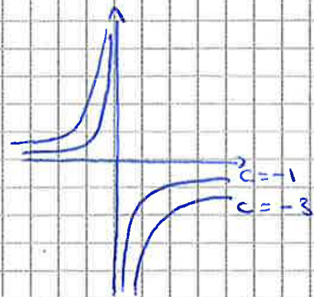
$c = f(x,y) \rightarrow c = xy$. Al variare di $c \in \mathbb{R}$

- se $c = 0$, $xy = 0$ ho $y = 0$ e $x = 0$ → gli assi
- se $c \neq 0$, $y = \frac{c}{x}$

se $c > 0$



se $c < 0$



CASI PARTICOLARI

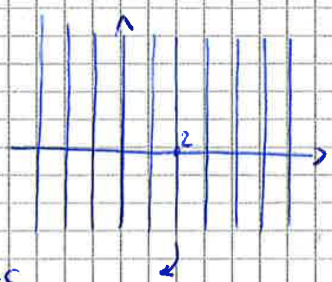
- $f(x,y) = g(x)$

es: $f(x,y) = x^2$. Curva di livello $f(x,y) = c$

$g(x) = c$

$x^2 = c \rightarrow x = \pm\sqrt{c}$

In questo caso f non dipende da y. le curve di livello sono rette del tipo $x = c$



$f(x,y) = c$

$x^2 = c$ quindi $f = 4$

Quindi, allo stesso modo, se f non dipende da x le curve sono rette orizzontali. $f(x,y) = g(y)$

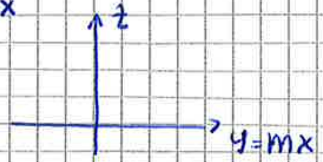
- $f(x,y) = g(ax+by)$

es: $f(x,y) = e^{2x+3y}$

$2x+3y = \log c$ → ottengo quindi delle rette

- Restringere ad $y = mx$

  $f(x, mx)$



Restringere una f ad una retta vuol dire sezionare f con il piano $x = x_0$ (nel caso di restrizione alla retta $x = x_0$)

LIMITI E CONTINUITÀ

- Per definire i limiti serve una nozione di distanza tra punti.

In $\mathbb{R}$ la distanza $d = |x - y|$.

In $\mathbb{R}^2$ la distanza si chiama di solito "norma".

$$p(x, y), \quad \|p\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

In $\mathbb{R}^3$ la distanza

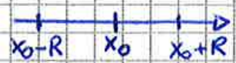
$$p(x, y, z), \quad \|p\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

la distanza di P da Q, $\|P - Q\|$ dove $P(x, y)$ e $Q(x_0, y_0)$

$$\text{distanza} = \|P - Q\| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

- Intorno di raggio R di P_0

In $\mathbb{R}$ $\quad |x - x_0| < R$



è un intervallo

In $\mathbb{R}^2$ $\quad \|P - P_0\| < R$

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < R$$

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < R^2$ cerchio di raggio R e centro (x_0, y_0)

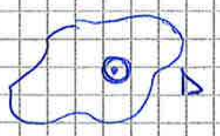
intorno di raggio R di P_0, $= B_R(P_0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < R^2\}$

In $\mathbb{R}^3$ $\quad \|P - P_0\| < R$

l'intorno risulta essere l'interno di una sfera

def Sia $D \subset \mathbb{R}^2$

Un punto $P_0 \in D$ si dice **interno** a D se $\exists R > 0$ | l'intorno di raggio R di P_0 appartiene a D



es: $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$

se $P_0 = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)$ è interno

se $P_1 = (1, \frac{1}{2})$ <u>non</u> è interno

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 9 di 130

MERCOLEDÌ 3 OTTOBRE 2018

LIMITI PER FUNZIONI IN 2 VARIABILI

def Sia $D \in \mathbb{R}$

Sia $f: D \to \mathbb{R}$. Fissiamo $P_0 \in D \cup \partial D$. Si dice che

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = \ell \in \mathbb{R}$$

se $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta \mid P \in D \wedge 0 < \|P - P_0\| \leq \delta \Rightarrow |f(P) - \ell| \leq \varepsilon$

il minore fa sì che $P \neq P_0$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta \mid (x,y) \in D \wedge 0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \leq \delta \Rightarrow |f(x,y) - \ell| \leq \varepsilon$$

$$\lim_{\underset{P}{(x,y)} \to \underset{P_0}{(x_0,y_0)}} f(x,y) = \ell$$

oss Valgono TUTTE le proprietà dei limiti di analisi I.

ATTENZIONE! Mi posso avvicinare a P_0 in infiniti modi

es mostriamo che $\displaystyle\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{2x^2 y}{x^2 + y^2} = 0$.

- posso rendere $|f|$ piccola quanto voglio purché prenda $\sqrt{x^2+y^2}$ piccolo

se trovo che $|f(x,y)| \leq c\sqrt{x^2+y^2}$

ho risolto!

$$\frac{2x^2|y|}{x^2+y^2} \leq 2\,\frac{(x^2+y^2)|y|}{x^2+y^2} = 2|y| = 2\sqrt{y^2}$$

ma $2\sqrt{y^2} \leq c\sqrt{x^2+y^2}$, cvd

OPPURE

fisso $\varepsilon > 0$ e $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$

se $\sqrt{x^2+y^2} \leq \delta = \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \left|\frac{2x^2 y}{x^2+y^2}\right| \leq 2\sqrt{x^2+y^2} = 2\delta = 2\,\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

es (non esistenza)

$f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$, $D = \mathbb{R}^2 - \{0,0\}$

Mostriamo che $\displaystyle\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ non esiste.

In una dimensione non esiste se f oscilla. Qui restringo f all'asse x (prendo $y = 0$)

$\to f(x,y) = 0 \ \forall x \to f(x,0) = 0 \ \forall x$

allora $\displaystyle\lim_{x \to 0} f(x,0) = 0$ quindi se esiste deve valere 0. (*)

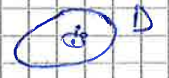
Però se restringo alla bisettrice, $f(x,x) = \dfrac{x^2}{2x^2} = \dfrac{1}{2} \quad \forall x \neq 0$

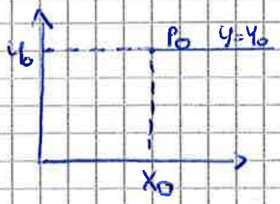
quindi $\displaystyle\lim_{x \to 0} f(x,x) = \frac{1}{2}$, quindi se esiste deve valere $\frac{1}{2}$ (*)

il lim non esiste

CALCOLO DIFFERENZIALE IN PIÙ VARIABILI

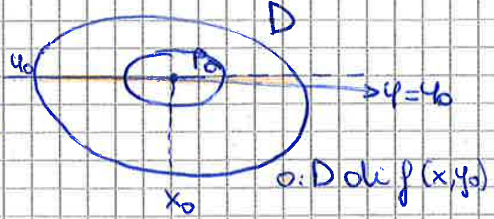
$f: D \to \mathbb{R}$, $D \in \mathbb{R}^2$, P_0 interno a D





Considero $f(x,y_0)$, restrizione di f a $y=y_0$

la $f(x,y_0)$ è in funzione solo di x ed è definita in un intorno di x_0



def Si dice che f è derivabile parzialmente rispetto a x in (x_0,y_0) se $f(x,y_0)$ è derivabile in x_0

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h} \quad \text{esiste ed è finito}$$

Il valore del limite è la DERIVATA PARZIALE di f rispetto a x in (x_0,y_0)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \quad \partial_x f(x_0,y_0), \quad D_x f(x_0,y_0)$$

Ovviamente se restringo a $x=x_0$, f è in funzione di y

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)}{h} \quad \text{se esiste ed è finito}$$

↳ pendenza del grafico di $f(x_0,y)$

il '+h' si mette alla variabile che derivo es $\frac{\partial f}{\partial y} \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0,y_0+h,z)-\dots}{h}$

ATTENZIONE!

Se $\frac{\partial f}{\partial x} > 0$, il grafico della funzione ristretta su $y=y_0$ è crescente

il calcolo delle derivate parziali è immediato

OSS

$\frac{\delta f}{\delta x}(x,y)=0 \rightarrow$ la funzione non dipende da x se la derivata è nulla $\forall (x,y)$.
Per esempio se $f(x,y)=y^2$

Se invece $\begin{cases} \frac{\delta f}{\delta x}=0 \\ \frac{\delta f}{\delta y}=0 \end{cases} \Rightarrow$ la funzione è COSTANTE

DERIVATE DIREZIONALI

Riscrivo la def.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h} = \frac{\delta f}{\delta x}(x_0,y_0)$$

se $P_0=(x_0,y_0)$

(x_0+h,y_0) prendo $\vec{i}$

$P_0+h\vec{i}=(x_0,y_0)+h(1,0)$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(P_0+h\vec{i})-f(P_0)}{h} = \frac{\delta f}{\delta x}(x_0,y_0)$$

↳ questo è l'incremento di x lungo il versore $\vec{i}$

- Prendo un VERSORE $\vec{v}=(\alpha,\beta)$, calcolo

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(P_0+h\vec{v})-f(P_0)}{h} = \text{increm. di } x \text{ lungo } \vec{v} = \frac{\delta f}{\delta \vec{v}}(x_0,y_0)$$

se esiste ed è finito

↳ derivata DIREZIONALE di f nel punto P_0 lungo la direzione di $\vec{v}$

se $\vec{v}=\vec{i}$, $\frac{\delta f}{\delta \vec{v}}=\frac{\delta f}{\delta x}$

se $\vec{v}=\vec{j}$, $\frac{\delta f}{\delta \vec{v}}=\frac{\delta f}{\delta y}$

casi studiati finora

$\hat{y}=\hat{j}$, $\hat{x}=\hat{i}$

$(P_0+h\vec{v})=(x_0,y_0)+h(\alpha,\beta)=(x_0+h\alpha,\,y_0+h\beta)$

es

$f(x,y)=2x+ye^x$ $\quad D=\mathbb{R}^2$

controllo che sia un VERSORE

$\vec{v}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$ $\quad \|\vec{v}\|=\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}=1 \rightarrow$ è un versore

$\frac{\delta f}{\delta \vec{v}}(0,0)$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f\left(0+h\frac{\sqrt{3}}{2},0+h\frac{1}{2}\right)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2\left(h\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\frac{1}{2}he^{h\frac{\sqrt{3}}{2}}}{h}=$$

$$=\lim_{(h\to 0)} \sqrt{3}+\frac{1}{2}e^{h\frac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{3}+\frac{1}{2}=\frac{2\sqrt{3}+1}{2}=\frac{\delta f}{\delta \vec{v}}(0,0)$$

DERIVATA $\rightarrow$ $f(P) = f(P_0) + \underbrace{\nabla f(P_0) \cdot (P-P_0)}_{\text{scalare}} + o(\|P-P_0\|)$

$$f(P) = f(P_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(P_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)(y-y_0) + o(\|P-P_0\|)$$

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) + o\left(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right)$$

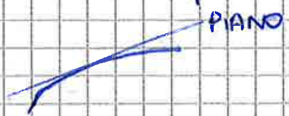
def Sia $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenziabile in $P_0 = (x_0, y_0)$.
Si dice piano tangente al grafico di f in $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ il piano

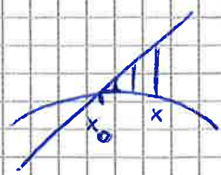
$$z = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

$\downarrow$

Il piano tangente è quello che soddisfa

$$f(P) - \text{piano}(P) = o(\|P-P_0\|)$$





es $f(x,y) = x^2+y^2$
piano tg in $P_0(2,1)$

1) $f(2,1) = 5$
2) $\frac{\partial f}{\partial x}(2,1) = 2 \cdot 2 = 4$
3) $\frac{\partial f}{\partial y}(2,1) = 2 \cdot 1 = 2$

$z = 5 + 4(x-2) + 2(y-1)$
$z = 5 + 4x - 8 + 2y - 2$
$z = 4x + 2y - 5$

$\pi: 4x + 2y - z - 5 = 0$

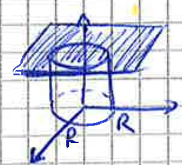
$\vec{v} \perp \pi = (4, 2, -1) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0), -1\right)$

FUNZIONI RADIALI

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ si dice radiale se il valore $f(x,y)$ dipende solo dalla distanza (x,y) da $(0,0)$. Se (x_1,y_1) e (x_2,y_2) che hanno la stessa distanza dall'origine, allora $f(x_1,y_1) = f(x_2,y_2)$
$\forall R>0$ la funzione f assume lo stesso valore su tutti i punti della circonf di raggio R

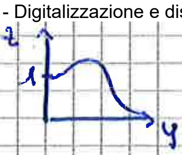
f radiale se e solo se $\exists g: [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ |

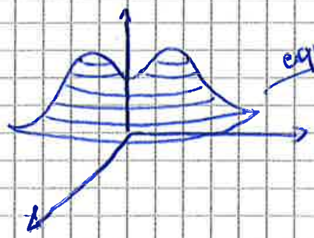
$$f(P) = g(\|P\|)$$
$$f(x,y) = g(\sqrt{x^2+y^2})$$



es
- $f(x,y) = \sin(\sqrt{x^2+y^2})$ $\qquad g(R) = \sin R$
- $f(x,y) = \dfrac{e^{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}$ $\qquad g(R) = \dfrac{e^R}{R^2}$ $\qquad R = \text{norma punto} = \sqrt{x^2+y^2}$
- $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2+1}$ $\qquad g(R) = \dfrac{1}{R^2+1}$

es $h(y) = \frac{y+1}{y^2+1}$

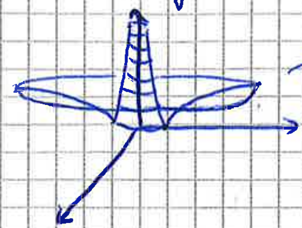




equazione $z = \frac{\sqrt{x^2+y^2}+1}{x^2+y^2+1}$

es $z = h(y) = |\log y|$

scrivere la sup di rotazione generata da $h(y)$



$\rightarrow z = |\log(\sqrt{x^2+y^2})|$

DERIVATE DELLE FUNZIONI RADIALI

1) derivata della norma (che è una f)

$$\frac{\partial}{\partial x}\|P\| = \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\|P\| = \frac{\partial}{\partial y}\sqrt{x^2+y^2} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\nabla\|P\| = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x,y) = \frac{1}{\|P\|}(P)$$

• f radiale $\quad f = g(\sqrt{x^2+y^2})$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}g(\|P\|) = g'(\|P\|)\cdot\frac{\partial}{\partial x}\|P\|$$

$$\nabla f(x,y) = g'(\|P\|)\cdot\frac{P}{\|P\|}$$

$\downarrow$

il gradiente di f radiale è sempre $\parallel$ a P

• Si dice che f è di classe C^1 in D se ha le derivate parziali continue $\rightarrow$ allora è differenziabile

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 19 di 130

MERCOLEDÌ 10 OTTOBRE 2018

METODI DI RISOLUZIONE VELOCE

Se f è ~~derivabile~~ differenziabile, le derivate direzionali si calcolano a partire dalle derivate parziali.

$f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$, $P_0(x_0, y_0)$ interno a D

$\vec{v} = (\alpha, \beta)$ versore di modulo $\sqrt{\alpha^2+\beta^2} = 1$

so che $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h\alpha, y_0+h\beta) - f(P_0)}{h}$

- Uso la definizione: $f(P) = f(P_0) + \nabla f(P_0)(P-P_0) + o(\|P-P_0\|)$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)h\beta + o\left(\sqrt{\alpha^2h^2+\beta^2h^2}\right)\right] \cdot \frac{1}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\beta + \frac{o(h)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\beta$$

$$\frac{o\left(\sqrt{h^2(\alpha^2+\beta^2)}\right)}{h} \Rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P_0) = \nabla f(P_0) \cdot \vec{v}$$

$\to$ DERIVATA DIREZIONALE

es

$f(x,y) = 2x + 3y + 5x^2y^3 \qquad P_0(0,0) \qquad \vec{v} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = \nabla f(P_0) \cdot \vec{v} = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(P_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)\right] \cdot \vec{v} =$$

$$= \left[2 + 10x_0y_0^3 + 3 + 15x_0^2y_0^2\right] \cdot \vec{v} =$$

$$\nabla f(0,0) = (2,3)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = (2,3) \cdot \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(1, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

1) per quale $\vec{v}$ $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P_0)$ è massima? = In quale direzione uscente da P_0 la f cresce di più?

2) $\nabla f(P_0)$ è un vettore! In che direzione punta? Che cosa indica?

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = \nabla f(P_0) \cdot \vec{v} = \|\nabla f(P_0)\| \, \|\vec{v}\| \cos\vartheta$$

ϑ angolo tra ∇ e $\vec{v}$

$$= \|\nabla f(P_0)\| \cos\vartheta$$

$\downarrow$

è massimo quando $\cos\vartheta$ è massimo $(=1)$ quindi $\vartheta = 0$

$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(P_0)$ massima se $\vec{v} \parallel \nabla f(P_0)$

$\nabla f(P_0)$ punta nella direzione in cui f cresce di più

Se f ha le derivate di ordine k e queste sono continue si dice che f è di ordine C^k.

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Le derivate vengono "raccolte" dal ∇f

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

Per le derivate seconde si usa una matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

Matrice Hessiana 2x2

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} - \nabla \frac{\partial f}{\partial x} - \\ - \nabla \frac{\partial f}{\partial y} - \end{pmatrix}$$

Se $f \in C^2$, Hf è simmetrica $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$

FORMULA DI TAYLOR

Sviluppo di $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ al secondo ordine.

Per f in una variabile,

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2 + o((x-x_0)^2)$$

In dimensione 2 voglio approssimare f con un polinomio con un piccolo scarto $\to$ o piccolo. Come è fatto un polinomio di 2° grado in 2 variabili?

$$\to \quad a + b_1(x-x_0) + b_2(y-y_0) + c_1(x-x_0)^2 + c_2(x-x_0)(y-y_0) + c_3(y-y_0)^2$$

def $f: D \to \mathbb{R}$, con $f = C^2$, $P_0 = (x_0, y_0)$ interno a D

si chiama polinomio di Taylor di f di grado 2 valutato in P_0:

$$T(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) +$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) +$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)(y-y_0)^2$$

$\hookrightarrow \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

sono uguali $= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

$$f(x,y) - T(x,y) = o((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2) \to \text{(distanza da } x_0 \text{ e } y_0\text{)}$$

$\hookrightarrow$ polinomio di Taylor. Quando $(x,y) \to (x_0,y_0)$

$$f(x,y) = T(x,y) + o((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2)$$

$\Rightarrow$ T è l'unico polinomio di grado due che può essere scritto con un "o piccolo" $\Rightarrow$ migliore approssimazione a

MASSIMI E MINIMI IN PIÙ VARIABILI

Sia $D \subset \mathbb{R}^2$, $f: D \to \mathbb{R}$ funzione regolare.

def

Un punto $P_0 \in D$ si dice minimo assoluto (o globale) per f se

$$f(P) \geq f(P_0) \quad \forall P \in D$$

def

Un punto $P_0 \in D$ si dice minimo locale (o relativo) per f se $\exists$ un intorno $B_R(P_0)$ tale che

$$f(P) \geq f(P_0) \quad \forall P \in D \cap B_R(P_0)$$

esempio

- $f(x,y) = x^2 + y^2$

$f(0,0) = 0$, invece $\forall (x,y) \neq (0,0)$, $f(x,y) \geq f(0,0)$

$(0,0)$ è un minimo globale

- $f(x,y) = x^2 + y^2 - (x^2+y^2)^2$

$f(0,0) = 0$

$f(x,y) = (x^2+y^2)(1 - x^2 - y^2)$

vedo che se $(x^2+y^2) < 1$ allora $(1-x^2-y^2) > 0$ perché

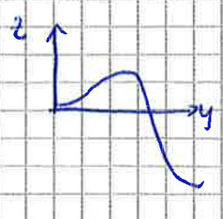
$\to 1 - \underset{1}{(x^2+y^2)} > 0$

Se (x,y) stanno in un intorno di $R = 1$

$(0,0)$ = minimo locale

Se $f(10,0) = (10)^2(1-10^2) < 0$ quindi $(0,0)$ non è un minimo globale

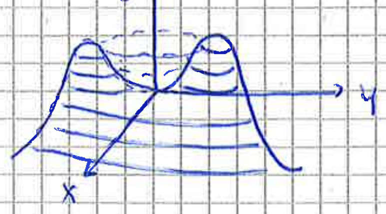
$\downarrow$



$f(x,y)$ qui è radiale!

$f(0,y)$ con $y > 0 \to f(0,y) = y^2 - (y^4) = y^2 - y^4$

la f è la rotazione intorno a z di $f(0,y)$



In due dimensioni, per il calcolo, si guarda l'Hessiana

TEOREMA: CLASSIFICAZIONE DEI PUNTI CRITICI

VALE SOLO IN 2 DIMENSIONI! FUNZIONI IN 2 VARIABILI

$D \subset \mathbb{R}^2$, $f: D \to \mathbb{R}$ di C^2,

$P_0 = (x_0, y_0)$ punto critico per f

1) se $\det(Hf(P_0)) > 0$, MINIMO o MASSIMO

   1a) se $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_0) > 0$, MINIMO LOC.

   1b) se $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_0) < 0$, MASSIMO

2) se $\det Hf(P_0) < 0$, NÉ MAX NÉ MINIMO. P_0 è di sella

3) se $\det Hf(P_0) = 0$, non posso dire nulla

esempi

- $f(x,y) = x^4 + y^4$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3$ $\qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3$ $\qquad Hf = \begin{pmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{pmatrix}$

$\nabla f = (4x^3, 4y^3)$ $\qquad Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Evidentemente $(0,0)$ è un minimo globale ma il $\det(Hf) = 0$ e non posso dire nulla

- $f(x,y) = -x^4 - y^4$, $Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ma $(0,0)$ è un max

- $f(x,y) = x^4 - y^4$, $Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Qui però $f(x,0) > 0$ e $f(0,y) < 0$ né max né min

ESERCIZI

1) $f(x,y) = x^2 + 2y^2 + \alpha x - 2$

dato $P_0(1,2)$ determina α affinché π tg ad f in P_0 sia $\perp$ al vettore $\vec{u}$

$\vec{u} = (1, 4, -\frac{1}{2})$

$f(x_0, y_0) = 1 + 8 + \alpha - 2 = \alpha + 7$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + \alpha \to \frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = 2 + \alpha$ $\qquad$ se e solo se $\alpha = 0$, $\exists k \mid \vec{v} \parallel \vec{n}$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y \to \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = 8$

$z = \alpha + 7 + (2+\alpha)(x-1) + 8(y-2)$

vettore normale $\to (\cancel{\alpha} 2+\alpha, 8, -1) = \vec{n}$

$\vec{n} \parallel \vec{u}$: $(2+\alpha, 8, -1) \times (1, 4, -\frac{1}{2})$

$\vec{n} = k\vec{u}$

$$\begin{cases} 2+\alpha = k \to \alpha = k - 2 = 0 \to \boxed{\alpha = 0} \\ 8 = 4k \to k = 2 \\ -1 = -\frac{1}{2}k \to k = 2 \end{cases}$$

a) Trovare e classificare i punti critici

$f(x,y) = x + \frac{x^6}{6} + y^4 - y^2$

• Troviamo i critici $\nabla f = 0$

$\frac{\partial f}{\partial x} = x^5 + 1$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 - 2y$

$\nabla f = 0 \quad \begin{cases} 1 + x^5 = 0 \\ 4y^3 - 2y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1 + x^5 = 0 \\ y(4y^2 - 2) = 0 \end{cases} \quad y = 0, \; y = +\frac{1}{\sqrt{2}}, \; y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$

ho 3 punti critici

$P_1(-1,0) \quad P_2(-1, \frac{1}{\sqrt{2}}) \quad P_3(-1, -\frac{1}{\sqrt{2}})$

• Scrivo Hessiana:

$\nabla \frac{\partial f}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 5x^4$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0$

$Hf = \begin{pmatrix} 5x^4 & 0 \\ 0 & 12y^2 - 2 \end{pmatrix}$

$Hf(P_0) =$

$\nabla \frac{\partial f}{\partial y} \rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2 - 2$

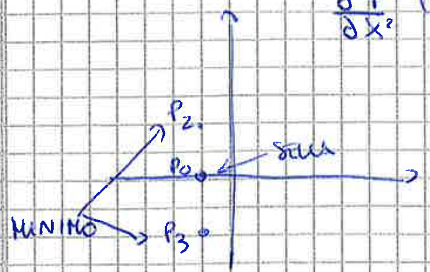
$Hf(P_1) = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \det Hf(P_1) = -10 < 0 \rightarrow P_1$ e' sella

$Hf(P_2) = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \det Hf(P_2) = 20 > 0$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_2) = 5 > 0 \rightarrow P_2$ e' un MINIMO

$Hf(P_3) = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \det(Hf(P_3)) = 20 > 0$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_3) = 5 > 0 \rightarrow P_3$ e' MINIMO

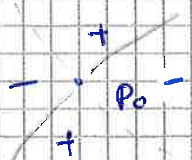


I PUNTI DI SELLA

Non sono ne' massimi ne' minimi. In ogni intorno di P_0 = sella,

$\exists$ punti $P \mid f(P) < f(P_0) \wedge f(P) > f(P_0)$

P_0 non e' minimo — P_0 non e' max



Il punto divide il piano le curve di livello?

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 29 di 130

$P_1 = (1,3) \quad P_2 = (1,-1) \quad P_3 = (2,3) \quad P_4 = (2,-1)$

$\nabla\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = (2x-3, 0)$

$\nabla\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = (2y-2, 0) \qquad Hf \begin{pmatrix} 2x-3 & 0 \\ 0 & 2y-2 \end{pmatrix}$

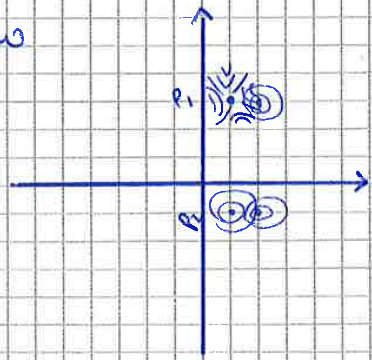
- $Hf(P_1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \det = -4 < 0 \rightarrow P_1$ SELLA

- $Hf(P_2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \det = 4 > 0$

  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,-1) = 2-3 = -1 < 0 \rightarrow P_2$ MASSIMO

- $Hf(P_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \det = 4 > 0$

  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,3) = 4-3 > 0 \rightarrow P_3$ MINIMO



- $Hf(P_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \det < 0 \rightarrow$ SELLA

6) critici $\qquad$ però $x \neq 0$ e $y \neq 0$!

$f(x,y) = \frac{x}{y} + \frac{8}{x} - y$

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{y} - \frac{8}{x^2} \qquad \begin{cases} \frac{1}{y} - \frac{8}{x^2} = 0 \\ -\frac{x}{y^2} - 1 = 0 \rightarrow \frac{x}{y^2} = -1 \rightarrow x = -y^2 \end{cases}$

$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} - 1$

$\begin{cases} \frac{1}{y} - \frac{8}{y^4} = 0 \\ x = -y^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} y^3 - 8 = 0 \rightarrow y = 2 \\ x = -4 \end{cases}$

Ho un punto critico $P_1(-4,2)$

$\nabla\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \left(+2\frac{8}{x^3}, -\frac{1}{y^2}\right)$

$\nabla\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(-\frac{1}{y^2}, +2\frac{x}{y^3}\right)$

$Hf(-4,2) = \begin{pmatrix} 1/4 & -1/4 \\ -1/4 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \det > 0$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0 \rightarrow P_0$ MAX

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 31 di 130

In generale,

$$\det Hf(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 > 0$$

- se autovalori positivi $\Rightarrow$ MINIMO

Infatti $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ sono concordi,

$$\underbrace{\lambda_1 + \lambda_2}_{>0} = \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)}_{>0} \Leftrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$$

METODO GENERALE

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ quindi in n variabili. P_0 punto critico, guardo $Hf(P_0)$

1) Se tutti gli autovalori di $Hf(P_0)$ sono positivi, allora P_0 minimo
2) Se invece sono negativi, allora P_0 MASSIMO
3) Se alcuni positivi e altri negativi, allora P_0 SELLA
4) Se almeno uno è zero, non lo so

CAMPI VETTORIALI

funzioni $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ 3 funzioni di 3 variabili.

$$f(x,y,z) = (f_1(x,y,z), f_2(x,y,z), f_3(x,y,z)) \in \mathbb{R}^3 =$$
$$= f_1(x,y,z)\vec{i} + f_2(x,y,z)\vec{j} + f_3(x,y,z)\vec{k}$$

F associa ad ogni punto di D un vettore

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ due funzioni in due variabili

$$F(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y)) =$$

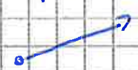
Per es $f(x,y) = (\underbrace{xy^2}_{f_1}, \underbrace{xy - e^{x+y}}_{f_2})$

dom F = dom $f_1 \cap$ dom $f_2 \cap$ dom f_3.

I campi vettoriali sono gli oggetti matematici che rappresentano grandezze vettoriali variabili da punto a punto

RAPPRESENTAZIONE DEI CAMPI VETTORIALI

1) Non si usa un grafico perché nel caso più semplice $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(\underset{\in \mathbb{R}^2}{(x,y)}, \underset{\in \mathbb{R}^2}{f(x,y)}) \in \mathbb{R}^4$
2) per punti

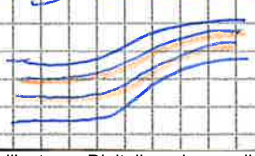


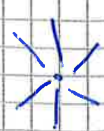
$F(x,y)$ dove la lunghezza è $\|F(x,y)\|$

(x,y) Più mi stacco dall'origine, maggiore è la norma.

Se siamo sull'asse delle x, $F(x,y) \parallel (x,y)$

3) linee di flusso $\to$ curve che in ogni punto $F(x,y)$ è tg alla curva





LUNEDÌ 22 OTTOBRE 2018

INTEGRAZIONE MULTIPLA

INTEGRALI DOPPI

f di due variabili, $f: D \to \mathbb{R}$. Bisogna 1. definire, 2. calcolare il volume del solido sotto al grafico di f.

Sapendo che $f(x,y)$: densità di (qualcosa) in D, come faccio a risalire alla quantità totale?

ripasso in 1 variabile

$f: [a,b]$, f continua. Divido f in n intervalli I_k lunghi uguali $\frac{b-a}{n}$.

Prendo un punto x_k in ogni I_k. Calcolo $f(x_k)\frac{b-a}{n}$, area di un rettangolo di base I_k e $h = f(x_k)$. Sommo tutte le aree e ottengo una approssimazione dell'area.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k) = \int_a^b f(x)\,dx$$

↳ esiste se f continua

2 variabili

$D \subset \mathbb{R}^2$, chiuso, limitato e dotato di area (posso calcolare l'area). $f: D \to \mathbb{R}$ continua.

Divido D in quadratini di lato δ_n. L'area di ciascuno di questi è δ_n^2.

In ogni Q scelgo un punto (x_j, y_k).

Calcolo $f(x_j, y_k) \cdot \delta_n^2$ che rappresenta il volume di un parallelepipedo di base δ_n^2 e $h = f(x_j, y_k)$. Considero $\sum_{j,k} f(x_j, y_k)\,\delta_n^2$, approssim. volume

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n^2 \sum_{j,k} f(x_j, y_k) = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

Si può dimostrare che se f è continua il lim esiste ed è finito.

Il valore del limite → integrale doppio di f su D

- f positiva su D → l'integrale è il volume del solido sotto il grafico di f

PROPRIETÀ INTEGRALE DOPPIO

$f, g: D \to \mathbb{R}$ continue, D chiuso, limitato, dotato di area. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

1) LINEARITÀ $\int_D (\alpha f(x,y) + \beta g(x,y))\,dx\,dy = \int_D \alpha f(x,y)\,dx\,dy + \int_D \beta g(x,y)\,dx\,dy$

2) ADDITIVITÀ rispetto a D. Se $D = D_1 \cup D_2$, $D_1 \cap D_2 = \{\emptyset\}$ = nulla

$$\int_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy + \int_{D_2} f(x,y)\,dx\,dy$$

3) MONOTONIA, se $f(x,y) \geq 0$, $\forall (x,y) \in D$ allora

$$\int_D f(x,y)\,dx\,dy \geq 0$$

FORMULA DI RIDUZIONE (INTEGRAZIONE PER VERTICALI)

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b, \quad \alpha(x) \le y \le \beta(x)\}$ allora

$$\int_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

prima integro in y!

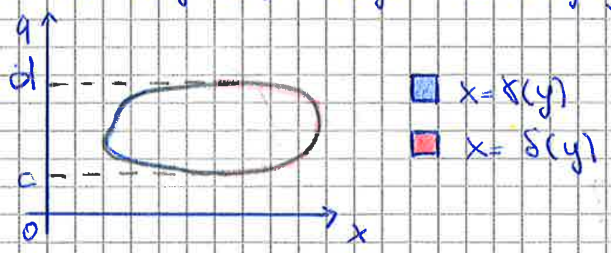
$F(x,y)$ primitiva di $f(x,y)$ in $y \rightarrow F(x,y)\Big|_{\alpha(x)}^{\beta(x)} = F(\beta(x)) - F(x,\alpha(x))$

con questo metodo ottengo una funzione solo in x.
In questo modo posso $\int_a^b F(x,\beta(x)) - F(x,\alpha(x))\,dx$

CASO 2

domini orizzontalmente convessi.
Un dominio di questo tipo si può descrivere come:

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \le y \le d, \quad \gamma(y) \le x \le \delta(y)\}$$



FORMULA DI RIDUZIONE (INTEGRAZIONE PER ORIZZONTALI)

$$\int_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x,y)\,dx \right) dy$$

CASO 3

dominio né verticalmente né orizz. convesso.
Uso l'additività e spacco il dominio

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy + \int_{D_2} f(x,y)\,dx\,dy$$

oss $\text{area}(D) = \int_a^b (g(x) - f(x))\,dx$

con $\iint$ so che $\iint_D dx\,dy = \text{area}$

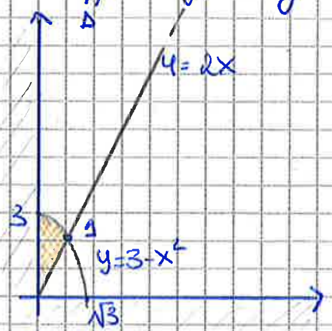
$$= \int_a^b \left(\int_{f(x)}^{g(x)} dy \right) dx = \int_a^b g(x) - f(x)\,dx$$

3) calcola l'area di $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 2,\ e^{-x} \le y \le 2 - \frac{x^2}{4}\}$

$$\text{area} = \int_0^2 \left(\int_{e^{-x}}^{2-\frac{x^2}{4}} dy \right) dx = \int_0^2 2 - \frac{x^2}{4} - e^{-x}\,dx = \left[2x - \frac{x^3}{12} + e^{-x}\right]_0^2 =$$

$$= 4 + \frac{8}{12} + e^{-2} - 1 = 4 + \frac{2}{3} + e^{-2} - 1 = \frac{7}{3} + e^{-2}$$

4) calcola $\iint_D x + 2y\,dx\,dy$ dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \ge 2x,\ y \le 3 - x^2,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$



$2x = 3 - x^2$ intersezione

$x^2 + 2x - 3 = 0$ $\quad x = 1 \wedge x < 0$

per vert. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1 \wedge 2x \le y \le 3 - x^2\}$

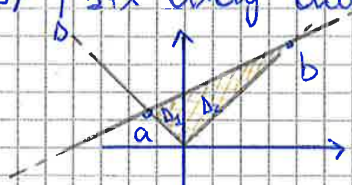
$$\iint_D x + 2y\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_{2x}^{3-x^2} x + 2y\,dy \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left[xy + y^2\right]_{2x}^{3-x^2} dx = \int_0^1 \left[3x - x^3 + (3-x^2)^2 - 2x^2 - 4x^2\right] dx =$$

$$= \int_0^1 9 - 12x^2 + 3x - x^3 + x^4\,dx = 9 - \frac{12}{3} + \frac{3}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{180 - 80 + 30 - 5 + 4}{20}$$

$$= \frac{129}{20}$$

5) $\int_D 1 + x\,dx\,dy$ dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \ge |x|,\ y \le \frac{1}{2}x + 2\}$



punto a $\to$ $\frac{1}{2}x + 2 = -x$

$x + 4 = -2x$

$4 = -3x \to x = -\frac{4}{3}$

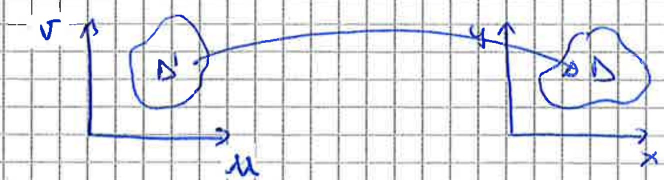
$b = 4$

$$\int_D 1 + x\,dx\,dy = \int_{D_1} 1 + x\,dx\,dy + \int_{D_2} 1 + x\,dx\,dy$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 39 di 130

~~Φ è un cambio di variabile~~

Φ è un campo vettoriale



$(x,y) = \Phi(u,v)$

Φ è biettiva fra D' e D

Φ è di classe C^1

Matrice Jacobiana $\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = J\Phi(u,v)$

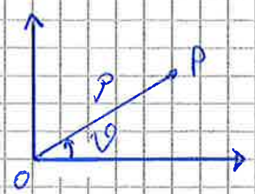
- $\det J\Phi \neq 0$ → lo Jacobiano

$f: D \to \mathbb{R}$ e Φ come sopra,

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \underbrace{\iint_{D'}}_{\text{dominio di } \Phi} f(x(u,v), y(u,v)) \cdot \underbrace{|\det J\Phi(u,v)|}_{\text{fattore correttivo}}\,du\,dv$$

METODOLOGIE RISOLUTIVE

COORDINATE POLARI



ρ = distanza di P da O

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \qquad \begin{matrix} x = x(\rho,\theta) \\ y = y(\rho,\theta) \end{matrix}$$

$$\Phi(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$$

$$J\Phi(\rho,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix}$$

$$\det J\Phi(\rho,\theta) = \rho\cos^2\theta + \rho\sin^2\theta = \rho \geq 0$$

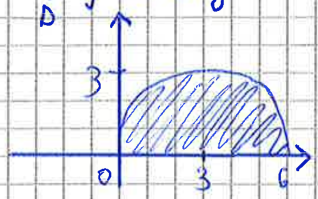
$$|J\Phi| = |\rho| = \rho$$

Φ trasforma rettangoli in settori circolari!

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D'} f(x_0+\rho\cos\vartheta,\, y_0+\rho\sin\vartheta)\,\rho\,d\rho\,d\vartheta$$

esempio

$$\iint_D y\,dx\,dy \qquad D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2-6x\le 0,\ y\ge 0\}$$



$x^2+y^2-6x+9-9\le 0$

$(x-3)^2+(y^2)\le 9 \qquad C(3,0) \quad R=3$

Uso coordinate polari traslate

$$\begin{cases} x=3+\rho\cos\vartheta \\ y=\rho\sin\vartheta \end{cases} \qquad |\det J\Phi(\rho,\vartheta)| = \rho$$

devo descrivere D con le coordinate $\to D'$

$\rho\le 3$

$0\le\vartheta\le\pi$ (come se fossi in $C(3,0)$)

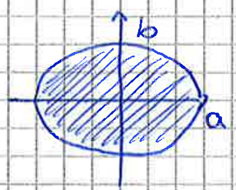
$$\iint_D y\,dx\,dy = \iint_{D'} \rho\sin\vartheta\,\rho\,d\rho\,d\vartheta = \int_0^\pi d\vartheta \cdot \int_0^3 \rho\,d\rho = -\cos\vartheta\Big|_0^\pi + \frac{\rho^2}{2}\Big|_0^3$$

$$= 1 - 1 + \frac{27}{2} = \frac{27}{2}$$

COORD. POLARI ASIMMETRICHE (ELLITTICHE)

Per PEZZI DI ELLISSE

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1$$



$$\begin{cases} x=a\rho\cos\vartheta \\ y=b\rho\sin\vartheta \end{cases}$$

$$\begin{cases} x/a=\rho\cos\vartheta \\ y/b=\rho\sin\vartheta \end{cases} \to \rho^2\cos^2\vartheta+\rho^2\sin^2\vartheta\le 1$$

$\rho^2\le 1 \quad$ con $0\le\vartheta\le 2\pi$

Quindi l'ellisse diviene un cerchio di raggio 1

$-1\le\rho\le 1$ ma $\rho\ge 0 \to \rho\le 1$

quanto vale $J\Phi(\rho,\vartheta) = \begin{pmatrix} a\cos\vartheta & -a\rho\sin\vartheta \\ b\sin\vartheta & b\rho\cos\vartheta \end{pmatrix}$

$|\det J\Phi| = ab\rho\cos^2\vartheta + ab\rho\sin^2\vartheta = ab\rho \quad$ con $a,b>0$

LUNEDI' 29 OTTOBRE 2018

CONTINUAZIONE

INTEGRALI TRIPLI

Pensa ad f come una densità di carica. Come calcolare la q.tà di q?
Per costruire l'integrale divido Ω, il solido, in n cubetti ($n \to \infty$, $\ell \to 0$).
In ogni cubetto scelgo un punto (x_i, y_j, z_k) e calcolo

$$f(x_i, y_j, z_k) \cdot \underbrace{\delta_n^3}_{\text{volume cubetto}}$$

è un'approssimazione della quantità totale nel cubetto la cui p è f.
Considero

$$\underbrace{\sum_{i,j,k} f(x_i, y_j, z_k) \cdot \delta_n^3}_{\text{approssimazione della q.tà totale}}$$

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i,j,k} f(x_i, y_j, z_k)\, \delta_n^3$$

↳ sempre più cubetti con lato $\delta_n \to 0$

Se f è continua il lim esiste ed è finito, il valore è un integrale triplo di f su Ω.

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

PROPRIETÀ

1) linearità $\displaystyle\int_\Omega \alpha f + \beta g \,dx\,dy\,dz = \int_\Omega \alpha f \,dx\,dy\,dz + \beta \int_\Omega g\,dx\,dy\,dz$

2) ADDITIVITÀ rispetto al dominio $\to \Omega = \Omega_1 + \Omega_2 \to \Omega_1 \cap \Omega_2$ nullo

3) MONOTONIA

4) $\displaystyle\int_\Omega dx\,dy\,dz$ con $f(x,y,z) = 1 \quad \forall\, x,y,z \in \Omega$ ottengo VOLUME di Ω

Come si calcolano?

Bisogna ridurli a 1 doppio e 2 doppi o 3. Quindi 3 integrali semplici.
Per risolverli bisogna guardare la forma del dominio

CASO 1

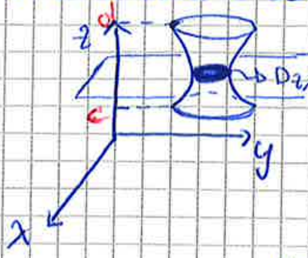
Dominio Ω CONVESSO in $z \to$ ogni retta // all'asse z taglia Ω in un singolo segmento eventualmente ridotto ad un punto o vuoto

Risulta che se Ω è convesso in z allora Ω si può descrivere come

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2 \to D,\ \alpha(x,y) \le z \le \beta(x,y)\}$$

caso 2

E se Ω non è convesso in z (o y o z)?



non è convesso in z. Chiamo D_z la sezione a quota z.

$D_z \subset \mathbb{R}^2$

Chiamo $[c, d]$ proiez. di Ω sull'asse z

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in [c,d],\ (x,y) \in D_z\}$$

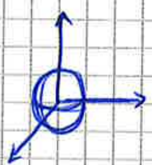
FORMULA DI RIDUZIONE PER STRATI

$$\int_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_c^d \left(\int_{D_z} f(x,y,z)\,dx\,dy \right) dz$$

esempio

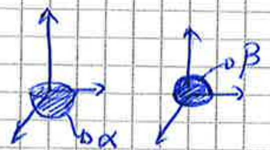
Calcolare $\displaystyle\int_\Omega z^2\,dx\,dy\,dz$ con Ω = punti $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \le 1\}$

Sfera piena di $R = 1$



I) Per fili // asse z. Devo scrivere Ω

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2,\ \alpha(x,y) \le z \le \beta(x,y)\}$$



D = PROIEZ di Ω su $xy = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 1\}$

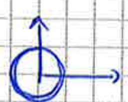
$$z^2 = 1 - x^2 - y^2 \longrightarrow z = \pm\sqrt{1-x^2-y^2}$$

$$\alpha(x,y) = -\sqrt{1-x^2-y^2}$$
$$\beta(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$$

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \le 1,\ -\sqrt{1-x^2-y^2} \le z \le \sqrt{1-x^2-y^2}\}$$

$$\rightarrow \int_D \left(\int_{-\sqrt{}}^{+\sqrt{}} z^2\,dz \right) dx\,dy = \int_D \frac{z^3}{3}\Big|_{+\sqrt{}}^{-\sqrt{}} dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{3}\int_D 2(1-x^2-y^2)^{3/2}\,dx\,dy = \frac{2}{3}\int_D (1-x^2-y^2)^{3/2}\,dx\,dy$$



$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \le x \le 1$, uso polari

$$= \frac{2}{3}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 (1-\rho^2)^{3/2}\rho\,d\rho\right) d\vartheta = \frac{2}{3}\int_0^{2\pi} d\vartheta \cdot \int_0^1 (1-\rho^2)^{3/2}\rho\,d\rho =$$

$$= \frac{4}{3}\pi\left(-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}(1-\rho^2)^{5/2}\Big]_0^1\right) = \frac{4}{15}\pi$$

3) $\int_D \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dxdy \qquad D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1\right\}$

uso le polari asimmetriche lo Jacobiano $= ab\rho$

$$\begin{cases} x = a\rho\cos\vartheta \\ y = b\rho\sin\vartheta \end{cases}$$

$D \Rightarrow \rho\le 1,\quad 0\le\vartheta\le 2\pi$

$$\to \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 \sqrt{1-\rho^2\cos^2\vartheta-\rho^2\sin^2\vartheta}\; ab\rho\, d\rho\right)d\vartheta =$$

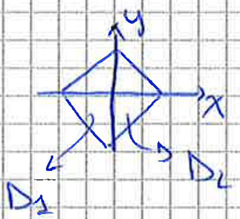
$$= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 \sqrt{1-\rho^2}\,ab\rho\, d\rho\right)d\vartheta = \qquad t=\sqrt{1-\rho^2}$$

$$dt = \frac{1}{2}\frac{1}{t}(-2\rho)\,d\vartheta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\vartheta \cdot \left[-\frac{1}{3}(1-\rho^2)^{3/2}\cdot ab\right]_0^1 = \qquad -t\,dt = \rho\, d\vartheta$$

$$= 2\pi\left(+\frac{1}{3}ab(1)\right) = \frac{1}{3}2\pi ab$$

4) Dato un dominio D



Simmetrico rispetto y. Posso dire

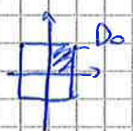
$\int_{D_1} = \int_{D_2}$??? $\to \int_D = 2\int_{D_1}$?

in una dimensione ho che $\int_{-1}^{1} = 2\int_{-1}^{0}$ se f SIMMETRICA e D pure

ed f deve essere PARI $\Rightarrow f(-x) = f(x)$

$\downarrow$

se $f(x,y) = f(-x,y) \Rightarrow \int_D f = 2\int_{D_1} f$

Se ho 

, $\int_D f = 4\int_{D_0} f$ se $f(x,y) = f(-x,y) = f(x,-y) = f(-x,-y)$

$$J\Phi(\rho,\vartheta,z) = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\rho\sin\vartheta & 0 \\ \sin\vartheta & \rho\cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

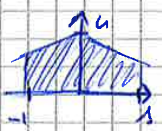
$$\det J\Phi(\rho,\vartheta,z) = 1 \cdot \begin{vmatrix} \cos\vartheta & -\rho\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \rho\cos\vartheta \end{vmatrix} = \rho \geq 0$$

$$\rightarrow \int_{\Omega_{x,y,z}} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_{\Omega_{\rho,\vartheta,z}} f(\rho\cos\vartheta, \rho\sin\vartheta, z)\,\rho\,d\rho\,d\vartheta\,dz$$

$$|\det J\Phi| = |\rho| = \rho$$

<u>Esempio</u>

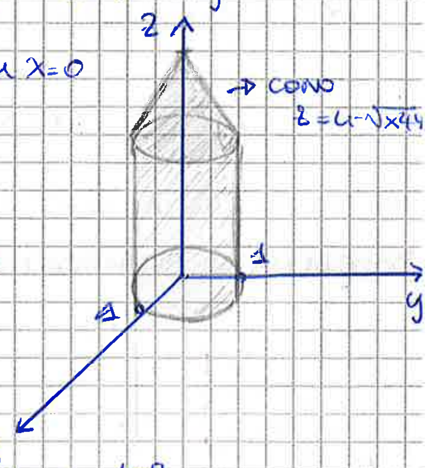
Calcolare $\int_\Omega x^2 z\,dx\,dy\,dz \quad \Omega = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2\leq 1,\ 0\leq z\leq 4-\sqrt{x^2+y^2}\}$



$z\leq 4-\sqrt{x^2+y^2}$ cos'è? Seziono con $x=0$

$z\leq 4-|y|$

$x^2+y^2\leq 1 \rightarrow -1\leq y\leq 1$



Esprimiamo Ω con u,v,w:

$x^2+y^2\leq 1 \rightarrow 0\leq\rho\leq 1$

$0\leq\vartheta\leq 2\pi$

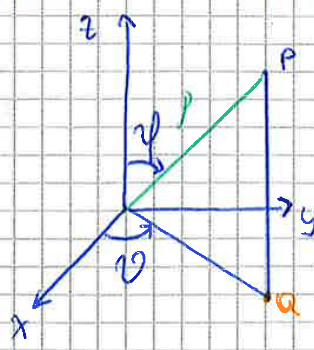
$z\leq 4-\sqrt{x^2+y^2} \rightarrow 0\leq z\leq 4-|\rho| \rightarrow 0\leq z\leq 4-\rho$

$$\int_\Omega x^2 z\,dx\,dy\,dz = \int_{\Omega'} \rho^2\cos^2\vartheta\, z\,\rho\,dz\,d\rho\,d\vartheta = (\text{PER FUBINI}) = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1\left(\int_0^{4-\rho}\rho^3\cos^2\vartheta\, z\,dz\right)d\rho\right)d\vartheta$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 \rho^3\cos^2\vartheta\left(\left[\tfrac{1}{2}z^2\right]_0^{4-\rho}\right)d\rho\right)d\vartheta = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 \rho^3\cos^2\vartheta\,\tfrac{1}{2}(4-\rho)^2\,d\rho\right)d\vartheta$$

le coordinate cilindriche si usano di solito quando Ω è a simm. cilindrica (s

COORDINATE SFERICHE (O POLARI NELLO SPAZIO)



ρ = distanza di P da O $\rho\in[0,+\infty)$

ϑ = angolo OQ-ASSE X = LONGITUDINE $\vartheta\in[0,2\pi]$

φ = OP-asse z = COLATITUDINE $\varphi\in[0,\pi]$

<u>esempi</u>

$\rho = R \rightarrow$ sfera

$\vartheta = \alpha \Rightarrow$ semipiano

$\varphi = \beta \rightarrow$ cono

- lamina $D \in \mathbb{R}^2$

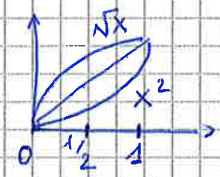
$$x_G = \frac{\int_D x\,dx\,dy\,\sigma(x,y)}{\int_D \sigma(x,y)\,dx\,dy}$$

se corpo omogeneo, $\sigma(x,y) = K = \text{cost.}$

$$x_G = \frac{K\int_D x\,dx\,dy}{K\int_D dx\,dy} = \frac{1}{\text{AREA } D}\int_D x\,dy\,dx$$

ESERCIZI

1) calcolare il baricentro di $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le \sqrt{x}\}$
con σ = densità di massa $\sigma(x,y) = xy$



$\to$ G cade sulla bisettrice! Sia D sia σ simmetrici rispetto $y = x$ (*)

$$x_G = \frac{\int_D x\,\sigma(x,y)\,dx\,dy}{\int_D \sigma(x,y)\,dx\,dy} = \frac{\int_D x\,xy\,dx\,dy}{\int_D xy\,dx\,dy}$$

Denom: $\int_D xy\,dx\,dy = \int_0^1 x\,dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} y\,dy =$

$$= \int_0^1 x\,dx \left(\frac{y^2}{2}\Big|_{x^2}^{\sqrt{x}} \right) = \int_0^1 x\left(\frac{x}{2} - \frac{x^4}{2}\right) dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x^2 - x^5\,dx =$$

$$= \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{12}x^6 \Big|_0^1 = \frac{1}{6} - \frac{1}{12} = \frac{1}{12} = \text{MASSA}$$

numeratore: $\int_D x^2 y\,dx\,dy = \int_0^1 x^2\left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} y\,dy\right) dx = \int_0^1 \frac{1}{2}x^2(x - x^4)\,dx =$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 x^3 - x^6\,dx = \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{14}x^7 = \frac{3}{28 \cdot 2} = \frac{3}{56}$$

$$x_G = \frac{3}{56} : \frac{1}{12} = \frac{3}{56} \cdot 12 = \frac{9}{14} \qquad G = \left(\frac{9}{14}, \frac{9}{14}\right)$$

la y_G non la calcolo perché (*)

• PER STRATI (taglio con travi)

$$\Omega = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid c\le z\le d,\ (x,y)\in D_z\}$$

$$[c,d]=[0,1]$$

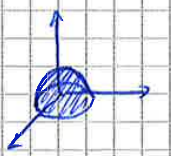
$x^2+y^2+z^2\le 1 \to x^2+y^2\le 1-z^2 \to$ cerchio con $R=\sqrt{1-z^2}$

$$\to \int_\Omega z^2\,dxdydz = \int_0^1\Big(\int_{D_z} z^2\,dxdy\Big)dz = \int_0^1 z^2\Big(\underbrace{\int_{D_z} dxdy}_{\text{AREA } D_z}\Big)dz =$$

$$= \int_0^1 z^2\cdot\pi(1-z^2)\,dz =$$

$$= \pi\int_0^1 z^2 - z^4\,dz = \frac{1}{3}\pi - \frac{1}{5}\pi = \frac{2\pi}{15}$$

• CILINDRICHE



$0\le\rho\le 1$ $\qquad$ $x^2+y^2+z^2\le 1$

$0\le\vartheta\le 2\pi$ $\qquad$ $z^2\le 1-x^2-y^2$

$0\le z\le\sqrt{1-\rho^2}$ $\qquad$ $0\le z\le\sqrt{1-x^2-y^2}$

$$\to \int_\Omega z^2\,dxdydz = \int_0^{2\pi}\Big(\int_0^1\Big(\int_0^{\sqrt{1-\rho^2}} z^2\rho\,dz\,d\rho\,d\vartheta =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\vartheta\int_0^1 \rho\,d\rho\ \frac{z^3}{3}\Big|_0^{\sqrt{1-\rho^2}} = \frac{2\pi}{3}\int_0^1 \rho\,d\rho\cdot\frac{(1-\rho^2)^{3/2}}{3} = \frac{2\pi}{15}$$

• SFERICHE

ρ,ϑ,φ. $\qquad$ $0\le\rho\le 1$, $\quad 0\le\vartheta\le 2\pi$, $\quad 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$

$$\begin{cases} x = \rho\sin\varphi\cos\vartheta \\ y = \rho\sin\varphi\sin\vartheta \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases}$$

$$\to \int_\Omega z^2\,dxdydz = \int_{\Omega'} \rho^2\cos^2\varphi\ \overset{\rho^2\sin\varphi}{d\varphi}\ d\rho\,d\vartheta =$$

$$= \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho^2\cos^2\varphi\ \rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\vartheta\,d\varphi = \int_0^{\pi/2}\cos^2\varphi\sin\varphi\,d\varphi\int_0^{2\pi}d\vartheta\int_0^1\rho^4\,d\rho =$$

$$= \Big[-\frac{1}{3}\cos^3\varphi\Big]_0^{\pi/2}\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{5} = \frac{1}{3}\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{5} = \frac{2\pi}{15}$$

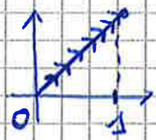
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 55 di 130

ES $\gamma_1 : [0,1] \to \mathbb{R}^2$

$\gamma_1(t) = (t,t)$ → il sostegno sta sulla bisettrice

$\gamma_1(0) = (0,0)$

$\gamma_1(1) = (1,1)$



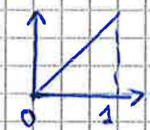
ma $t \in [0,1]$

$\gamma_2(t) : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, il sostegno sta sulla bisettrice

$\gamma_2(t) = (t^2, t^2)$

$\gamma_2(0) = (0,0)$

$\gamma_2(1) = (1,1)$



Da questo esempio si vede che anche se la curva $\gamma_1 \neq \gamma_2$, sostegni uguali.
Cambia però la velocità di percorrenza del sostegno.

$\gamma_1(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

$\gamma_2(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ Nella prima metà γ_1 va più veloce, poi

ES $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$

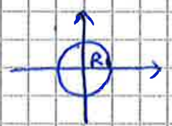
$\gamma(t) = (R\cos t, R\sin t)$

$x(t)^2 + y(t)^2 = R^2\cos^2 t + R^2 \sin^2 t = R^2$

questo vuol dire che il sostegno è su una C di raggio R

$\gamma(0) = (R, 0)$

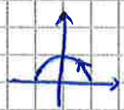
$\gamma(\frac{\pi}{2}) = (0, R)$



Devo percorrerlo in senso antiorario

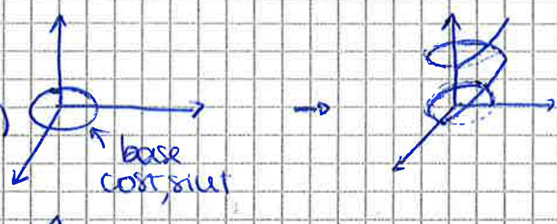
$\gamma_1(t) : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$

$\gamma_1(t) = (R\cos t, R\sin t)$



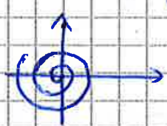
$\gamma_2(t) : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$

$\gamma_2(t) = (\cos t, \sin t, t)$



$\gamma_3(t) : [0, 100] \to \mathbb{R}^2$

$\gamma_3(t) = (\frac{\sin t}{t}, \frac{\cos t}{t})$



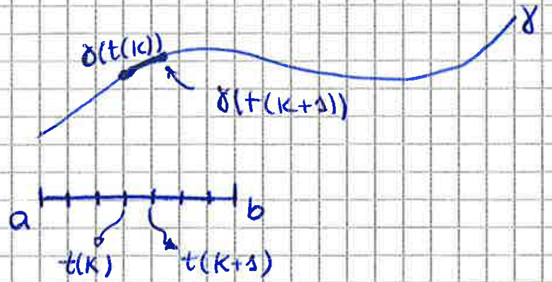
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 57 di 130

COME SI DEFINISCE E CALCOLA LA LUNGHEZZA?

$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$, C^1

Si dice lunghezza di γ il numero definito da

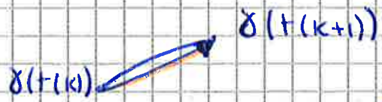
$$\int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \text{lung}(\gamma)$$



1) divido $[a,b]$ in n intervalli lunghi $\delta_n = \frac{b-a}{n}$

2) $t_{k+1} = t_k + \delta_n$

3) si delinea un archetto a_k che è circa la lunghezza del vettore



$\vec{v} = \gamma(t(k) + \delta n) - \gamma(t_k)$

4) $\text{lung}(a_k) \sim \text{lung}(\gamma(t_k + \delta_n) - \gamma(t_k))$

$\to \gamma(t_k + \delta_n) - \gamma(t_k) \sim \gamma'(t_k)\delta_n$ [sviluppo taylor]

$\to \text{lung}(a_k) \sim \| \gamma(t_k + \delta_n) - \gamma(t_k)\| \sim \|\gamma'(t_k)\delta_n\| = \delta_n \|\gamma'(t_k)\|$

$\to \text{lung}(\gamma) \approx \sum_{k=1}^{n} \delta_n \|\gamma'(t_k)\| = \delta_n \sum_{k=1}^{n} \|\gamma'(t_k)\|$

a questo punto definisco $\text{lung}(\gamma) \doteq \lim_{n\to\infty} \delta_n \sum_{k=1}^{n} \|\gamma'(t_k)\| = \int_a^b \|\gamma'(t_k)\| dt$

ESEMPIO

$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$

$\gamma(t) = (R\cos t, R\sin t) \quad \to \gamma'(t) = (-R\sin t, R\cos t)$

$\text{lung}(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$

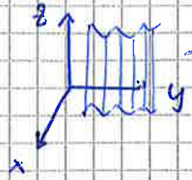
$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{R^2\sin^2 t + R^2\cos^2 t} = R$

la circonf. è percorsa con v costante

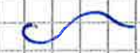
$$\text{lung}\,\gamma = \int_0^{2\pi} R\,dt = 2\pi R$$

INTEGRALE CURVILINEO DI PRIMA SPECIE

LUNEDÌ 12 NOVEMBRE 2018



→ Area in cui la base è una curva.
Servono per ricostruire q.tà globali partendo da densità



→ σ densità di massa

$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$, $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ continua

$$\int_\gamma f\, ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\|\, dt$$

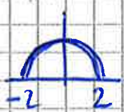
- Se $f=1$, l'integrale è la lunghezza di γ
- Se γ è regolare si integra tranquillamente. Se γ bordo di un poligono, non è regolare, è qui che si usa additività

ESEMPIO

γ semicirconferenza di $R=2$ nel semipiano $y \geq 0$

Sia $\sigma(x,y)$ la densità di massa in un punto del sostegno di γ

$\sigma(x,y) = x^2 y$



$$\text{massa} = \int_\gamma \sigma\, ds = \int_a^b \sigma(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\|\, dt$$

$\gamma(t) = (2\cos t, 2\sin t)$ $\qquad \gamma : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2$

$\gamma'(t) = (-2\sin t, 2\cos t)$

$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{4} = 2$

$\sigma(x,y) = x^2 y = 4\cos^2 t \cdot 2\sin t = 8\cos^2 t \sin t$

$$\text{massa} = \int_0^\pi 8\cos^2 t \sin t \cdot 2\, dt = 16\left[-\frac{1}{3}\cos^3 t\right]_0^\pi =$$

$$= \frac{16}{3} + \frac{16}{3} = \frac{32}{3}$$

ESEMPIO

Conduttore rettilineo infinito nel quale scorre corrente continua.
Il campo $\vec{B}$ generato:

$$B(x,y,z) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0\right)$$

Calcola circuitazione di $\vec{B}$ lungo $\mathcal{C}$ di raggio R

$$\Gamma = \oint_\gamma B\,dl = \int_a^b B(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt$$

↳ lavoro compiuto da una carica puntiforme che si muove su $\mathcal{C}$

$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (R\cos t, R\sin t, 0)$

$\gamma'(t) = (-R\sin t, R\cos t, 0)$

$$B(\gamma(t)) = \left(-\frac{R\sin t}{R^2}, \frac{\cos t}{R}, 0\right)$$

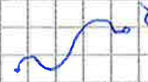
$$B(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = +\sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

$$\Gamma = \int_0^{2\pi} 1\,dt = 2\pi$$

[Cosa succede all'integrale curvilineo se 2 curve hanno lo stesso sostegno?
E se cambio parametrizzazione mantenendo lo stesso sostegno?]

$\gamma_1 : [a, b] \to \mathbb{R}^3$

$\gamma_2 : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^3$



$\gamma_1 \equiv \gamma_2$

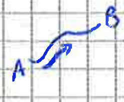
1) l'integrale di 1ª specie non cambia

$$\int_{\gamma_1} f\,ds = \int_{\gamma_2} f\,ds \to \text{dipende solo dal sostegno}$$

2) l'integrale di 2ª specie

- non cambia se γ_1 e γ_2 sono percorse NELLO STESSO VERSO
- cambia il segno se ⊕

$$\text{I}^a : \int_\gamma f\,ds = \int_\gamma f(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\|\,dt$$



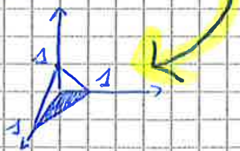
↳ la Tg se cambio senso di percorrenza cambio segno
Ma io ho $\|\gamma'(t)\| = \|$tangente$\|$ quindi il segno è ininfluente

$$\text{II}^a : \int_\gamma f\,dP = \int_\gamma f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt$$

↳ infatti quello di 2ª specie cambia

→ Negli esercizi sul lavoro W (IIª specie) deve sempre esserci il senso di percorrenza

2) $\int_\Omega \frac{1}{(x+y+z+1)^3}\,dx\,dy\,dz$ $\quad \Omega$ = tetraedro delimitato dai piani coordinati e dal piano $x+y+z=1$



Per fili: $\Omega = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid (x,y)\in D_z,\ \alpha \le z \le \beta\}$

α bordo inferiore $\to \alpha = 0$

β = bordo superiore $\to 1-x-y$

$$\to \int_{D_z}\int_0^{1-x-y} \frac{1}{(x+y+z+1)^3}\,dz\,dx\,dy = \int_{D_z}\left[-\frac{1}{2}(x+y+z+1)^{-2}\right]_0^{1-x-y} dx\,dy =$$

$$\cancel{= \int_{D_z} -\frac{1}{2}(x+y+1+1-x-y)^{-2}\,dx\,dy = \int_{D_z} -\frac{1}{2}\frac{1}{4}\,dx\,dy = -\frac{1}{8}\int_{D_z} dx\,dy}$$

$$= \int_{D_z} -\frac{1}{2}(2)^{-2} - \frac{1}{(1+x+y)^2}\,dx\,dy$$ per verticali

$$D_z = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1-x\}$$

$$= \int_0^1\int -\frac{1}{8} + \frac{1}{2}\frac{1}{(1+x+y)^2}\,dx\,dy =$$

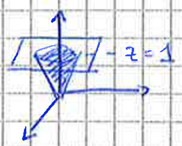
$$-\frac{1}{8}\cdot(\text{AREA } D_z) = -\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\right)$$

$$= \int_{D_z} -\frac{1}{8} + \frac{1}{2}\int_0^1\int_0^{1-x}\frac{1}{(x+y+1)^2}\,dy\,dx = -\frac{1}{16} + \frac{1}{2}\int_0^1 -\left[\frac{1}{1+x+y}\right]_0^{1-x} dx =$$

$$= -\frac{1}{16} + \frac{1}{2}\int_0^1 -\frac{1}{1+x+1-x} + \frac{1}{1+x}\,dx = -\frac{1}{16} + \frac{1}{2}\int_0^1 -\frac{1}{2} + \frac{1}{1+x}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{16} + \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}x\right]_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx = -\frac{1}{16} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\log 2 = -\frac{5}{16} + \frac{1}{2}\log 2$$

3) $\int_\Omega z\,dx\,dy\,dz$ $\quad \Omega = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z\le 1,\ z \ge \sqrt{x^2+y^2}\}$



coordinate cilindriche $\to \rho, \vartheta, z$

Per ρ: $\begin{cases} z = 1 \\ z = \sqrt{x^2+y^2} \end{cases} \to \mathcal{C}$ di raggio 1

$D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le 1\}$

$\Omega' \to 0\le\rho\le 1$

$0\le\vartheta\le 2\pi$

$\rho\le z\le 1$

$$\to \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_\rho^1 \rho z\,dz\,d\rho\,d\vartheta = \int_0^{2\pi}\int_0^1\left(\rho\frac{z^2}{2}\right)_\rho^1 d\rho\,d\vartheta =$$

$$= 2\pi\int_0^1 \frac{\rho}{2} - \frac{\rho^3}{2}\,d\rho = 2\pi\left(\frac{\rho^2}{4} - \frac{\rho^4}{8}\right)_0^1 =$$

$$= 2\pi\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right) = 2\pi\left(\frac{2-1}{8}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta \, d\vartheta = \frac{\pi}{2}$$

$$\hookrightarrow = 2\int_0^{\pi/2} \sin^2\vartheta = 2\int_0^{\pi/2} \cos^2\vartheta \, d\vartheta$$

quindi $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^2\vartheta \, d\vartheta = \int_0^{\pi/2} \sin^2\vartheta \, d\vartheta = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\pi}{4}$

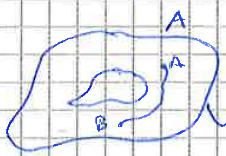
$$\rightarrow \int_0^{\alpha} \cos^2\vartheta \, d\vartheta = \int_0^{\alpha} \sin^2\vartheta \, d\vartheta = \frac{\alpha}{2}$$

MERCOLEDÌ 14 NOVEMBRE 2018

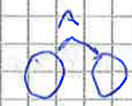
CAMPI VETTORIALI CONSERVATIVI

$A \in \mathbb{R}^3$, aperto, connesso

↳ dati due punti qualunque A e $B \in A$, esiste una curva che li congiunge tutta contenuta in A



↳ esempio di sistema connesso - fatto da un solo pezzo



NO!

DEF $A \subset \mathbb{R}^3$, aperto, connesso. Sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}^3$ (dominio A) campo continuo.
Si dice che f è conservativo in A se f è il gradiente di U funzione $U: A \rightarrow \mathbb{R}$. Le funzioni tali che $\nabla U = f$ si chiamano potenziali di f. Se U è un potenziale, e c è un numero reale, $\nabla(U+c) = \nabla U + \underbrace{\nabla c}_{0} = f$.

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right) = (F_x, F_y, F_z)$$

es $F = (e^{y+z^2}, x e^{y+z^2}, 2xz e^{y+z^2})$

$U = x e^{y+z^2}$ $\qquad \nabla U = F$ in ogni punto $\rightarrow$ F conservativo

(F è la primitiva)

MEMO derivata di una funzione composta $U(x,y,z): \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

penso a $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$

$$\rightarrow \frac{d}{dt} U(x(t), y(t), z(t)) = \frac{\partial U}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial U}{\partial y} y'(t) + \frac{\partial U}{\partial z} z'(t)$$

penso ad una curva $\gamma: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ $\qquad \gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$

$$\rightarrow \frac{d}{dt}\gamma(t) = \underbrace{\nabla U(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)}_{\text{scalare}}$$

THEOR. Calcolo di lavoro W di un campo conservativo:

Sia $F: A \rightarrow \mathbb{R}^3$ continuo e conservativo

Sia $\gamma: [a,b] \rightarrow A$ regolare

Sia U un potenziale di f

Allora $\displaystyle\int_\gamma F \cdot dP = U(\gamma(b)) - U(\gamma(a))$ $\rightarrow$ il lavoro è la differenza di pot agli estremi

↳ integrale curvilineo di 2° specie

ESEMPIO (in $\mathbb{R}^3$)

$F(x,y,z) = (e^y, xe^y, z+e^z)$

F e' conservativo. Troviamo U

1) $\frac{\partial U}{\partial x} = F_1$, $\frac{\partial U}{\partial x} = e^y$ ed integro in x

$\boxed{U = xe^y + c} = \int e^y dx$

$c(y,z)$

2) $\frac{\partial U}{\partial y} = F_2$, $\frac{\partial U}{\partial y} = xe^y + \frac{\partial c}{\partial y} = F_2 = \cancel{xe^y}$

$\frac{\partial c}{\partial y} = 0 \to$ c non dipende da y $\to c(z)$

$\boxed{U = xe^y + c(z)}$

3) $\frac{\partial U}{\partial z} = F_3$, $\frac{\partial U}{\partial z} = c'(z) = F_3 = z + e^z$

$\hookrightarrow$ la mia $c'(z) = z+e^z \to c(z) = \frac{1}{2}z^2 + e^z + h$ (cost.)

$\boxed{U = xe^y + \frac{1}{2}z^2 + e^z + h}$ con $h \in \mathbb{R}$

$\to$ come capire se un campo e' conservativo.

E' facile capire quando NON e' conservativo

$F: A \to \mathbb{R}^3$, C^1, $F = (F_1, F_2, F_3)$. Se F cons $\frac{\partial U}{\partial x} = F_1$, $\frac{\partial U}{\partial y} = F_2$, $\frac{\partial U}{\partial z} = F_3$

U e' quindi di classe C^2 e vale Schwarz

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} \dots$$

quindi $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) \ast\!\to \frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}$

$\ast\!\to \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y}$

$\ast\!\to \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}$

Quindi se F e' conservativo, devono essere vere le $\ast\!\to$

Se anche solo una non vale il campo NON e' conservativo

es $F(x,y,z) = (-y, x^2, z^2)$ e' conservativo?

$\frac{\partial F_2}{\partial z} = 0$ $\frac{\partial F_3}{\partial y} = 0 \to \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y} = 0$

$\frac{\partial F_2}{\partial x} = 2x$ $\frac{\partial F_1}{\partial y} = -1 \to \frac{\partial F_2}{\partial x} \neq \frac{\partial F_1}{\partial y}$ non e' conservativo

ES $B = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ rot $B = 0$

dom: $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2\neq 0\} \to \mathbb{R}^3 - \{\text{asse } z\}$

è irrotazionale ma dom non semplicemente connesso → non cons

OSS Se F irrotazionale su A ma A non è semplicemente connesso

→ F può essere conservativo ma ho bisogno di un altro teorema

TIPICO ESEMPIO

Verificare se F conservativo. 1) guardo dom. Se è semplicem connesso allora 2) guardo se è irrotazionale.

TEOREMA (VALE SOLO IN $\mathbb{R}^2$) RICORDA CHE SEMPLICI = SENZA INTERSEZIONI

- le curve chiuse semplici si chiamano CURVE DI JORDAN
- Un sottoinsieme D di $\mathbb{R}^2$ si chiama regione di Jordan se il suo bordo è una curva di Jordan.

TEOREMA DI GREEN

Sia $D \in \mathbb{R}^2$ regione di Jordan con bordo γ curva regolare a tratti. Orientiamo γ in senso antiorario. Sia F da D ad $\mathbb{R}^2$ un campo C^1. Allora, $F: D \to \mathbb{R}^2$

$$\boxed{\oint_\gamma F\cdot dP = \int_D \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\,dx\,dy}$$

OSS rotore in $\mathbb{R}^2$.

$F(x,y) = (F_1(x,y), F_2(x,y))$ per definire il rot di F penso a tutto in $\mathbb{R}^3$

$F(x,y,z) = (F_1(x,y), F_2(x,y), 0)$

$$\text{rot } F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & 0 \end{vmatrix} = \left(0, 0, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\vec{k}$$

→ quindi il teorema di Green:

$$\oint_\gamma F\,dP = \int_D \text{rot } F\cdot\vec{k}\,dx\,dy$$

ES

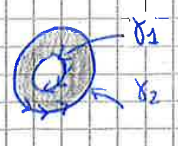
Calcolare $\oint_\gamma F\,dP$ dove γ = bordo di $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\geq 0, y\geq 0, x^2+y^2\leq 1\}$

$F(x,y) = (x^2+y, e^y-x)$

∂D va spezzato in 3

$$\oint_\gamma F\cdot dP = \int_D \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\,dx\,dy = \int_D -1-1\,dx\,dy = -2\int_D dx\,dy = -2\cdot\frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}$$

→ Green si estende al caso in cui ∂D è l'unione di un numero finito di curve di Jordan purché siano orientate così che percorrendole vedo D a sx



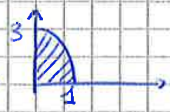
3) TEMA D'ESAME

calcolare $\oint_\gamma F\cdot dP$ dove $F(x,y)=\left(e^{x^2}-y,\ \frac{x^4}{4}+e^{y}\right)$ antiorario e γ è il bordo D

dove $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 9x^2+y^2\le 9,\ x\ge 0,\ y\ge 0\}$

$\downarrow$

$x^2+\frac{y^2}{9}\le 1$ semiassi 1 e 3



Mi accorgo che D è una regione di Jordan, uso Green

$$\oint_\gamma F\cdot dP=\int_D \frac{\partial f_2}{\partial x}-\frac{\partial f_1}{\partial y}\,dxdy$$

$\frac{\partial f_2}{\partial x}-\frac{\partial f_1}{\partial y}=\frac{4}{4}x^3-1 \to \int_D \frac{3}{4}x^3-1\,dxdy$ passo alle polari asimmetriche

$x=\rho\cos\vartheta$

$y=3\rho\sin\vartheta \to 0\le\rho\le 1,\ 0\le\vartheta\le\frac{\pi}{2}$

$|\det J|=ab\rho=3\rho$

$$\to \int_0^{\pi/2}\int_0^1\left(\frac{3}{4}(\rho\cos\vartheta)^3-1\right)3\rho\,d\rho\,d\vartheta=\int_0^{\pi/2}\int_0^1 3\rho^3\cos^3\vartheta-3\rho\,d\rho\,d\vartheta=\int_0^{\pi/2}\left.\frac{3}{4}\rho^4\cos^3\vartheta-\frac{3}{2}\rho\right|_0^1 d\vartheta=$$

$$=\int_0^{\pi/2}\frac{3}{4}\cos^3\vartheta-\frac{3}{2}\,d\vartheta=-\frac{3}{4}\pi+\frac{3}{4}\cdot\int_0^{\pi/2}\cos\vartheta(1-\sin^2\vartheta)\,d\vartheta=-\frac{3}{4}\pi+\frac{3}{4}-\int_0^{\pi/2}\frac{3}{4}\sin^2\vartheta\cos\vartheta\,d\vartheta=$$

$$=-\frac{3}{4}\pi+\frac{3}{4}-\frac{3}{4}\left[\left.\frac{\sin^3\vartheta}{3}\right|_0^{\pi/2}\right]=-\frac{3}{4}\pi+\frac{3}{4}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}=-\frac{3}{4}\pi+\frac{1}{2}$$

4) TEMA D'ESAME

$F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $F(x,y,z)=\left(e^y+\alpha y,\ xe^y+e^z+2x+\beta yz,\ ye^z+3y^2\right)$

a) trovare α e β affinché F sia conservativo

noto che dom F = semplicemente connesso = $\mathbb{R}^3$ → è irrotazionale!

rot $F\overset{?}{=}0$ — rot $F\in\mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{pmatrix}=i\left(\frac{\partial f_3}{\partial y}-\frac{\partial f_2}{\partial z}\right)+j\left(\frac{\partial f_3}{\partial x}-\frac{\partial f_1}{\partial z}\right)+k\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}-\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)=$$

$$=i\left(\cancel{e^z}+6y-\cancel{e^z}-\beta y\right)-j(0-0)+k\left(\cancel{e^y}+2-\alpha-\cancel{e^y}\right)$$

$$\begin{cases}6y-\beta y=0\\ 2-\alpha=0\end{cases}\to\begin{cases}\beta=6\\ \alpha=2\end{cases}\to F \text{ conservativo se } \beta=6 \text{ e } \alpha=2$$

b) U? sapendo che $U(P)=10$ e $P(1,0,2)$

U è il potenziale, $F_{cons}=\nabla U$

$\frac{\partial U}{\partial x}=f_1 \to \int f_1\,dx=\int e^y+\alpha y\,dx=\int e^y+2y\,dx=xe^y+x2y+c(y,z)$

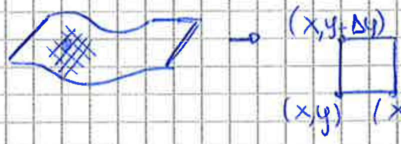
$\frac{\partial U}{\partial y}=f_2 \to \cancel{xe^y+2xy}\ xe^y+2x+\frac{\partial c}{\partial y}=f_2=xe^y+e^z+2x+6yz$

$\frac{\partial c}{\partial y}=e^z+6yz \to c(y,z)=ye^z+3y^2z+k(z)$

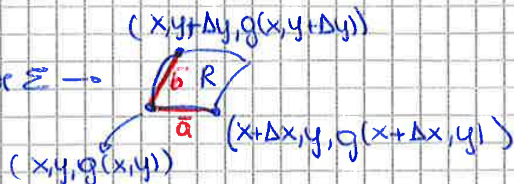
$U=xe^y+2xy+ye^z+3y^2z+k(z)$

dim:

divido Σ in tanti quadratini



per il dom, ma per Σ →



area di R è circa l'area del parallelogramma di lati

$\vec{a} = (x+\Delta x, y, g(x+\Delta x, y)) - (x,y,g(x,y)) = (\Delta x, 0, g(x+\Delta x,y) - g(x,y)) \approx (\Delta x, 0, \frac{\partial g}{\partial x}\Delta x)$

$\vec{b} = (x, y+\Delta y, g(x, y+\Delta y)) - (x,y,g(x,y)) = (0, \Delta y, g(x,y+\Delta y) - g(x,y)) \approx (0, \Delta y, \frac{\partial g}{\partial y}\Delta y)$

$\rightarrow \|\vec{a} \times \vec{b}\| = \text{area}$

$$\hookrightarrow \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \Delta x & 0 & \frac{\partial g}{\partial x}\Delta x \\ 0 & \Delta y & \frac{\partial g}{\partial y}\Delta y \end{vmatrix} = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}\Delta x \Delta y, -\frac{\partial g}{\partial y}\Delta x\Delta y, \Delta x \Delta y\right) = \Delta x \Delta y \left(-\frac{\partial g}{\partial x}, -\frac{\partial g}{\partial y}, 1\right) = \Delta x \Delta y \, \vec{N}(x,y)$$

$\text{area} = \|\vec{a} \times \vec{b}\| = \Delta x \Delta y \|\vec{N}(x,y)\|$

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Sigma \|\vec{N}(x,y)\| \Delta x \Delta y = \int_D \|N(x,y)\| dx\,dy$$

$$\boxed{\text{area}(\Sigma) = \int_D \|N(x,y)\|\, dx\,dy = \int_D \sqrt{1 + \|\nabla g(x,y)\|^2}\, dx\,dy}$$

INTEGRALE DI SUPERFICIE DI 1ª SPECIE

Si prende $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ superficie cartesiana, grafico di $g: D \to \mathbb{R}$, ($D \subset \mathbb{R}^2$, $g \in C^1$)

Sia $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ continua ($f: \Sigma \to \mathbb{R}$)

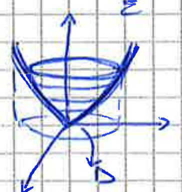
DEF

$$\int_\Sigma f\, d\sigma = \int_D \underbrace{f(x,y,g(x,y))}_{f \text{ calcolata nei punti di } \Sigma} \|N(x,y)\|\, dx\,dy$$

- Se f è costante $= 1$ in tutti i punti $\rightarrow \int_\Sigma d\sigma = \int_D \|N(x,y)\| dx\,dy = \text{area}(\Sigma)$
- se f è una DENSITÀ $\rightarrow \int_\Sigma f\, d\sigma$ = QUANTITÀ TOTALE

esempio

Calcolare $\int_\Sigma x\, d\sigma$ dove Σ è la parte del paraboloide $z = x^2+y^2$ che sta sotto il piano $z=2$



Vedo Σ come sup cartesiana, grafico $g(x,y) = x^2+y^2$

$D = \{x^2+y^2 \leq 2 \text{ con } (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$

$\Sigma = \{(x,y,g(x,y)) = (x,y,x^2+y^2) \mid (x,y) \in D\}$

$$\int_\Sigma x\, d\sigma = \int_D x \|N(x,y)\| dx\,dy = \int_D x\sqrt{1 + \|\nabla g(x,y)\|^2}\, dx\,dy$$

$\nabla g = (2x, 2y) \rightarrow \|\nabla g\|^2 = 4x^2+4y^2 \rightarrow \|N(x,y)\| = \sqrt{1+4x^2+4y^2}$

$$\int_\Sigma x\, d\sigma = \int_D x\sqrt{1+4x^2+4y^2}\, dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} \rho\cos\vartheta \sqrt{1+4\rho^2}\cdot \rho\, d\rho\, d\vartheta = 0$$

LUNEDÌ 26 NOVEMBRE 2018

TEOREMA DI GAUSS O DELLA DIVERGENZA

Sia $\Omega \in \mathbb{R}^3$ (un solido) e sia $\hat{n}$ il versore uscente da Ω normale. Sia $F: \Omega \to \mathbb{R}^3$ un campo di classe C^1. Allora

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \operatorname{div} F \, dxdydz = \int_{\Omega} \nabla F \, dxdydz$$

↓ integrale del flusso uscente da Ω — $\hat{n}$ versore esterno

↓ integrale triplo di una funzione scalare

ESEMPIO

Calcolare il flusso di $F(x,y,z) = (2x+z^3, 3, e^y)$ uscente da $\Omega = \{\text{punti } \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 1\}$

$$\int_{\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \nabla F \, dxdydz \qquad \nabla F = 2+0 = 2$$

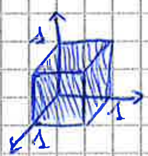
$$= \int_{\Omega} 2 \, dxdydz = 2 \, \text{volume}(\Omega) \qquad \text{coordin. cilindriche}$$

$$0 \le \rho \le 1, \; 0 < \vartheta < 2\pi, \; \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 1$$

$$= 2\int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 dz \, d\rho \, d\vartheta = 2\int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho \int_{\rho}^1 dz \, d\rho \, d\vartheta = 4\pi \int_0^1 \rho - \rho^2 \, d\rho = 4\pi\left(-\frac{\rho^3}{3} + \frac{\rho^2}{2}\right)_0^1 = \frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$$

ESERCIZIO

Calcolare il flusso di $F(x,y,z) = (4xz, -y^2, yz)$ uscente dal cubo $[0,1]^3 = [0,1]\times[0,1]\times[0,1]$

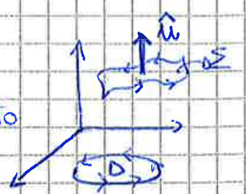


$$\int_{\Omega} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \nabla F \, dxdydz \quad \text{per Gauss}$$

$$\nabla F = 4z - 2y + y = 4z - y \;\to\; \int_0^1\int_0^1\int_0^1 4z - y \, dzdydx = \int_0^1\int_0^1 2z^2 - zy \Big|_0^1 dydx = \int_0^1\int_0^1 2 - y \, dyd\text{[illegible]}$$

$$= \int_0^1 2y - \frac{1}{2}y^2 \Big|_0^1 dx = \int_0^1 2 - \frac{1}{2} dx = \frac{3}{2}$$

ESTENSIONE DEL TEOREMA DI GREEN → STOKES



Il teorema di Green si blocca ad $\mathbb{R}^2$. Estendiamo ad $\mathbb{R}^3$.
$D \in \mathbb{R}^2$ regione di Jordan. $g: D \to \mathbb{R}$ e sia Σ il grafico di g. Oriento il $\partial\Sigma$ in senso ANTIORARIO (il bordo della sup Σ è una curva!)
ed ho un campo $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, C^1.

$$\oint_{\partial\Sigma} F \cdot dP = \int_{\Sigma} \nabla \times F \cdot n \, d\Sigma$$

↓ circuitazione ↓ flusso ↳ versore normale che punta verso l'alto

- come si parametrizza $\partial\Sigma$ = bordo della sup di Σ?

1) parametrizzo ∂D in senso antiorario → $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(x(t), y(t))$
2) $\partial\Sigma$ in senso antiorario si parametrizza con $\gamma': [a,b] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma'(t) = (x(t), y(t), g(x$ [illegible]

a questo punto uso th Gauss o della divergenza

$$\int_{\partial\Sigma} E \cdot n \, d\sigma = \int_{\Omega} \nabla E \, dx\,dy\,dz = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_{\Omega} q(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

gli ultimi due integrali sono entrambi su Ω e valgono $\forall \Omega$. Ma se i due integrali sono uguali, le funzioni sono uguali

$$\nabla E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} (= \text{densità di carico}) = q(x,y,z)$$

ESERCIZI

1) $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x + e^y, \ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \le 1\}$

calcolare $\int_{\Sigma} \frac{y}{\sqrt{2+(z-x)^2}} \, d\sigma$ → integrale di sup di 1ª specie

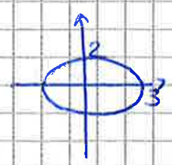
Σ è il grafico della funzione $z = x + e^y$ sull'insieme D = ellisse di $a=3$, $b=2$

$$\int_{\Sigma} f\,d\sigma = \int_{D} F(x,y,g(x,y)) \cdot \sqrt{1+\|\nabla g\|^2}\,dx\,dy$$

- $g = x + e^y \qquad \nabla g = (1, e^y) \to 1 + e^{2y}$

$$\|N(x,y)\| = \sqrt{1+\|\nabla g\|^2} = \sqrt{2+e^{2y}}$$

- $F(x,y,g(x,y)) = f(x,y,x+e^y) = \frac{y}{\sqrt{2+(x+e^y-x)^2}} = \frac{y}{\sqrt{2+e^{2y}}}$



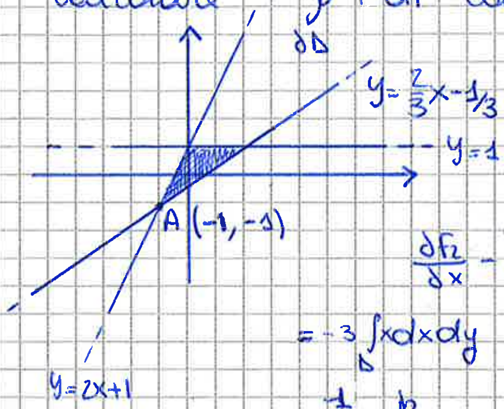
$$\to \int_{\Sigma} f\,d\sigma = \int_{D} \frac{y}{\sqrt{2+e^{2y}}} \cdot \sqrt{2+e^{2y}}\,dx\,dy$$

$$= \int_{D} y\,dx\,dy = 0 \qquad \text{(integro } y \to \text{metà sopra + metà sotto}_{<0} = 0\text{)}$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 2\sin\vartheta \, 6\rho\,d\rho\,d\vartheta = 0$$

2) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3y \ge 2x-1, \ y \le 2x+1, \ y \le 1\}$ e sia $F(x,y) = (x+5xy, \ x^2-2y+3)$

calcolare $\oint_{\partial D} F \cdot dP$ con ∂D in senso antiorario



Conviene usare il teorema di Green

$$\oint_{\partial D} F \cdot dP = \int_{D} \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\,dx\,dy$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 2x - 5x = -3x$$

$= -3\int_{D} x\,dx\,dy$ per orizzontali $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \le y \le 1, \ \underbrace{\frac{y-1}{2}}_{a} \le x \le \underbrace{\frac{3}{2}y + \frac{1}{2}}_{b}\}$

$\frac{y-1}{2} = x$

$$= \int_{-1}^{1}\int_{a}^{b} -3x\,dx\,dy = \int_{-1}^{1} -\frac{3}{2}x^2 \Big|_a^b dy = +\frac{3}{2}\int_{-1}^{1} -\left(\frac{3}{2}y+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{y-1}{2}\right)^2 dy$$

LUNEDÌ 3 DICEMBRE 2018

SIMULAZIONI D'ESAME

FEBBRAIO 2018

1) $f(x,y)=\frac{1}{4}x^4-3xy+\frac{1}{2}y^2$ $\quad\nabla f=(x^3-3y,\ -3x+y)$

classificazione punti critici: $\det(Hf(x,y))$;

$$\begin{cases} x^3-3y=0 \\ -3x+y=0 \end{cases} \to \begin{cases} x^3-9x=0 \to x(x^2-9)=0 \\ y=3x \to y=3x \end{cases} \quad x=0 \quad x=\pm 3$$

$$\boxed{A_1(0,0),\ A_2(3,9),\ A_3(-3,-9)}$$

$$Hf(x,y)=\begin{pmatrix} 3x^2 & -3 \\ -3 & +1 \end{pmatrix} \to \text{Hessiana. } \det(Hf)=3x^2-9$$

- se $A_1(0,0)\to \det(Hf)=-9<0 \to A_1$ è sella
- se $A_2(3,9)\to \det(Hf)=27-9>0$ o min o max. guardo $\frac{d^2f}{dx^2}$

$$\frac{d^2f}{dx^2}(A_2)=3x=3\cdot 9>0 \to A_2 \text{ È UN MINIMO}$$

- se $A_3(-3,9)\to \det(Hf)=27-9>0$ o min o max. $\frac{d^2f}{dx^2}(A_3)=3(9)>0$

2) $\Omega=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2\le 2,\ (x,y,z)\ge 0\}$. Calcola $\int_\Omega x^5yz\,dx\,dy\,dz$

Passo alle coordinate sferiche, ρ,ϑ,φ.

$$0\le\rho\le\sqrt{2},\quad 0\le\vartheta\le\frac{\pi}{2},\quad 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$$

$$\int(\rho\cos\vartheta\sin\varphi)^5\cdot\rho\sin\vartheta\sin\varphi\cdot\rho\cos\varphi\cdot\rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\vartheta=$$

$$=\iiint_0^{\sqrt{2}}\rho^9\cos^5\vartheta\sin^7\varphi\cdot\sin\vartheta\cos\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\vartheta=$$

$$=\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\sqrt{2}}\rho^9\sin^7\varphi\cos\varphi\cos^5\vartheta\sin\vartheta\,d\rho\,d\varphi\,d\vartheta=\frac{\rho^{10}}{10}\Big|_0^{\sqrt{2}}\cdot\left(\frac{\sin^8\varphi}{8}\Big|_0^{\pi/2}\right)\left(-\frac{\cos^6\vartheta}{6}\Big|_0^{\pi/2}\right)$$

$$=\frac{2^5}{10}\cdot\frac{1}{8}\left(+\frac{1}{6}\right)=\frac{32}{10}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{15}$$

3) $Q=(2,3)$. $F:\mathbb{R}^2\setminus Q\to\mathbb{R}^2$ un campo C^1. Per ogni curva regolare $\oint_\gamma F\cdot dP=0$ se γ non passa per Q.

$\longrightarrow F$ è conservativo in $\mathbb{R}^2/Q$

4) Sia $\Sigma=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z=4-2\sqrt{x^2+y^2},\ z\ge 3\}$

$F=(-yz,\ xz,\ xyz^3)$. Calcola il flusso del rotore con Σ verso positivo delle z

$$\oint_\Sigma F\cdot\hat{n}_N\,d\sigma=\oint_{\partial\Sigma}\nabla\times\vec{F}\,d\ell \quad \text{teorema di Stokes}$$

$\partial\Sigma$: ANTIORARIO

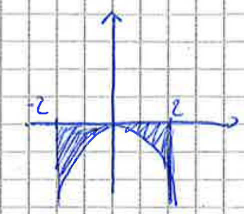
$$\partial\Sigma\to 3=4-2\sqrt{x^2+y^2}\to 2\sqrt{x^2+y^2}=1\to x^2+y^2=\frac{1}{4}$$

Parametrizzo $\partial\Sigma$ = circonferenza $r=\frac{1}{2}$ su xy poi la "alzo"

$$\gamma(t)=\left(\frac{1}{2}\cos t,\ \frac{1}{2}\sin t\right)$$

$$\partial\Sigma=\gamma:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^3 \quad \gamma(t)=\left(\frac{1}{2}\cos t,\ \frac{1}{2}\sin t,\ 3\right) \to 3=4-2\sqrt{\frac{1}{4}\cos^2 t+\frac{1}{4}\sin^2 t}=4-$$

3) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \le 2, -5x^2 \le y \le 0\}$ lamina con densità di massa costante. Il baricentro di D vale?



$$x_G = \frac{\int \sigma \cdot x \, dx dy}{\int \sigma \, dx dy}$$

Il dominio D è simmetrico! La x_G cade sul centro

$$y_G = \frac{\cancel{\sigma}\int y \, dx dy}{\cancel{\sigma}\int dx dy} \quad \text{perché } \sigma \text{ cost.}$$

- $\int_D dx dy = \int_{-2}^{2}\int_{-5x^2}^{0} dy dx = \int_{-2}^{2} 5x^2 \, dx = \frac{5}{3}x^3 \Big|_{-2}^{2} = \frac{80}{3}$

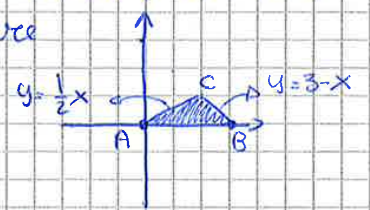
- $\int_D y \, dx dy = \int_{-2}^{2}\int_{-5x^2}^{0} y \, dy dx = \int_{-2}^{2} \frac{y^2}{2}\Big|_{-5x^2}^{0} dx = \int_{-2}^{2} -\frac{25x^4}{2} dx = -\frac{\cancel{25}^{5}}{\cancel{10}_{2}} x^5 \Big|_{-2}^{2} = -\frac{5}{\cancel{2}_1}\left(\cancel{64}^{32}\right) = -160$

$$y_G = \frac{-160}{80/3} = -160 \cdot \frac{3}{80} = -6 \quad \Rightarrow \text{BARICENTRO } (0,-6) = G$$

4) $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ campo definito $F(x,y) = (xy, 2y^2 + 3x)$

calcola la circuitazione di F sul bordo di $A(0,0)$, $B(3,0)$, $C(2,1)$ (antior.)

Posso fare l'integrale sui 3 lati ma troppo lungo o usare Green o capire x F cons.



$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 3 - x$ non conservativo, $\oint_\gamma F \, dP \neq 0$

$$\text{Green} = \int_D \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \, dx dy = \int_D 3 - x \, dx dy = -\int x \, dx dy + 3 \cdot \text{Area} =$$

(PER ORIZ.) $= -\int x \, dx dy + \frac{9}{2} = -\int_0^1 \int_{2y}^{3-y} x \, dx dy + \frac{9}{2} = -\int_0^1 \frac{1}{2}(3-y)^2 - \frac{1}{2}(2y)^2 dy + \frac{9}{2} =$

$= -\frac{1}{2}\int_0^1 9 + y^2 - 6y - 4y^2 dy + \frac{9}{2} = -\frac{1}{2}\int_0^1 9 - 3y^2 - 6y \, dy + \frac{9}{2} = -\frac{1}{2}\left[9 - 1 - \frac{6}{2}\right] + \frac{9}{2} =$

$= -4 + \frac{3}{2} + \frac{9}{2} = 2$

ALESSANDRA FERRERA

ANALISI II 1° SEMESTRE 2018

QUADERNO 2

ARG: SERIE

SERIE NUMERICHE

E' una somma FORMALE di infiniti numeri. Prendiamo una successione $a_n \in \mathbb{R}$ e formiamo la somma. $a_n = a_1, a_2, a_3 \ldots$ = successione. $a_1 + a_2 + \ldots$ = serie.

es: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots \rightarrow$ SERIE scritta con sommatoria.

COME SI SOMMANO INFINITI NUMERI?

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $a_n \in \mathbb{R}$ una serie. Si forma la successione (1) delle SOMME RIDOTTE o PARZIALI. → E' UNA SUCCESSIONE! Faccio poi il $\lim_{n \to \infty} S_n = S$:

$S_0 = a_0$

$S_1 = a_0 + a_1$

$\vdots$

$S_n = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$

$= \ell \in \mathbb{R} \rightarrow$ la serie converge a ℓ. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \ell$

$= +\infty \rightarrow$ la serie diverge positivamente

$= -\infty \rightarrow$ diverge negativamente.

= non esiste → oscillante o indeterminata

ESEMPIO

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = 2$$

SERIE GEOMETRICA DI RAGIONE q

$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + q^3 \ldots$ (l'esempio sopra e' una serie geom. di ragione $q = \frac{1}{2}$)

Si puo' sapere per quali q converge e a cosa. Per farlo calcolo le somme parziali → $S_n = 1 + q + q^2 + \ldots q^n$, la moltiplico per q

$$qS_n = q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n+1}$$

$$S_n - qS_n = (1 + q + q^2 + \ldots + q^n) - (q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n+1}) = 1 - q^{n+1}$$

$$S_n(1-q) = 1 - q^{n+1} \rightarrow S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \quad \text{con } q \neq 0 \wedge q \neq 1$$

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

- se $|q| < 1$: $= \frac{1}{1-q}$
- se $|q| \geq 1$: $= +\infty$
- se $q \leq -1$: = non esiste

MERCOLEDÌ 5 DICEMBRE 2018

CASI IN CUI SI PUÒ SCRIVERE S_N

- SOMME GEOMETRICHE $\rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ se $|q|<1$. $S_N = \frac{1-q^{N+1}}{1-q}$
- SERIE TELESCOPICHE

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ con $a_n = b_{n+1} - b_n$ oppure $a_n = b_n - b_{n+1}$

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n = \sum_{n=0}^{N} (b_{n+1} - b_n) = \cancel{b_1} - b_0 + \cancel{b_2} - \cancel{b_1} + \dots + b_{N+1} - \cancel{b_N} = b_{N+1} - b_0$$

$$\lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} b_{N+1} - b_0 \quad \text{con } b_N \text{ nota!}$$

esempio

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} =$ $\quad a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \quad (b_n = \frac{1}{n})$.

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \cancel{\tfrac{1}{2}} + \cancel{\tfrac{1}{2}} - \cancel{\tfrac{1}{3}} + \dots + \cancel{\tfrac{1}{N}} - \frac{1}{N+1} = 1 - \frac{1}{N+1}$$

$$\lim_{N\to\infty} 1 - \frac{1}{N+1} = 1 \quad \text{serie convergente a } 1$$

STABILIRE IL CARATTERE DELLA SERIE

SERIE A TERMINI POSITIVI $\rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ con $a_n \geq 0 \ \forall n$

Una serie a termini positivi o converge o diverge a $+\infty$, questo perché S_N è crescente! Quindi non può essere oscillante. Ora analizzeremo queste grazie ai CRITERI DI CONVERGENZA

CRITERIO DEL CONFRONTO

Date $\sum a_n$ e $\sum b_n$ a termini positivi. Suppongo che $a_n \leq b_n \ \forall n$. Se:

1. Se la serie $\sum b_n$ converge $\rightarrow \sum a_n$ converge
2. Se la serie $\sum a_n$ diverge $\rightarrow \sum b_n$ diverge

DIM Se chiamo S_N e T_N le due somme parziali crescenti, $S_N < T_N$ perché $a_n < b_n$. $\lim_{n\to\infty} S_N \leq \lim_{n\to\infty} T_N$

es $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots$ devo stabilire il carattere. So che $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ converge.

È vero che $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n+1)}$? No! $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n+1)} 2$? $\quad n(n+1) \leq 2n^2 \rightarrow \boxed{1 \leq n}$

Poiché la serie parte da $n=1$, questo è vero! Quindi $\frac{1}{n^2}$ converge

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 89 di 130

esempio

$\sum_{n=1}^{\infty} (e^{1/n} - 1 \cdot n \sin \frac{1}{n})$ $\qquad e^{1/n} \sim 1 + \frac{1}{n} \qquad \sin \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$

$\sum_{n=1}^{\infty} (\cancel{1} + \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n}) - \cancel{1} + o(\frac{1}{n})) \cong \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ poiché $\frac{1}{n}$ diverge, a_n diverge

LUNEDI' 10 DICEMBRE 2018

SERIE A TERMINI POSITIVI

Ci sono anche criteri che coinvolgono solo gli a_n che però non coprono tutti i casi

CRITERIO DEL RAPPORTO ($a_n > 0$)

Supponiamo che $\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell \in \mathbb{R}$. Se

- $\ell < 1 \to$ la serie converge
- $\ell > 1 \to$ la serie diverge

DIM (non vale per $\ell = 1$). $\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$. Sia $\ell < 1$ e scelgo $\varepsilon > 0$ così piccolo che $\ell + \varepsilon < 1$, definitivamente (per permanenza del segno) e $\forall n$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \ell + \varepsilon \to a_{n+1} \le (\ell + \varepsilon) a_n$

$a_1 \le (\ell + \varepsilon) a_0$

$a_2 \le (\ell + \varepsilon) a_1 = (\ell + \varepsilon)(\ell + \varepsilon) a_0 = (\ell + \varepsilon)^2 a_0$

$\vdots$

$a_n \le (\ell + \varepsilon)^n a_0$ dove $(\ell + \varepsilon)^n$ e' il termine generale di una serie geometrica di ragione $(\ell + \varepsilon) < 1$ quindi $\sum q^n = \frac{1}{1-q}$

$$\sum a_n \le \sum (\ell + \varepsilon)^n a_0 = a_0 \sum (\ell + \varepsilon)^n$$

$\downarrow$

la serie geometrica converge perché $\ell + \varepsilon < 1$ quindi per il confronto anche la serie converge.

- caso $\ell > 1$ $\qquad a_{n+1} \ge a_n \ \forall n$

$a_1 \ge a_0$

$\vdots$

$a_n \ge a_0$

E' violata la condizione di convergenza quindi diverge

→ funziona bene se ho delle potenze n^α

SUCCESSIONI

a_n con $n<\infty$. Una successione è una funzione $F: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $f(n) = a_n$.

f è la restrizione di una funzione $F: [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ all'insieme $\mathbb{N}$.

esempio Se $f(x) = 1/x^2 \to f(n) = 1/n^2$ se $n \in \mathbb{N}$

$1/n^2$ → successione o valori di una funzione nei naturali

- Prendiamo $f: [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ continua, positiva, decrescente (come $f(x) = 1/x^2$)
- definisco una successione a_n

$$a_n = f(n) \to a_n = 1/n^2$$

studiamo la successione a_n e poi la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

CRITERIO INTEGRALE (O DI MACLAURIN)

la serie a_n, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e l'integrale improprio $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ hanno lo stesso carattere (convergenza, divergenza, non esistenza → la serie è un integrale di dimensione 0)

DIM

- Area $= b \times h = 1 \cdot a_2 = a_2$
- Area $= 1 \cdot a_1$

Area sotto $f(x) = \int_1^2 f(x)\,dx$

$$a_2 \le \int_1^2 f(x)\,dx \le a_1 \quad \text{, quindi tu}$$

$$\underbrace{\sum_1^{\infty} a_{n+1}}_{\text{riscrivo}} \le \sum_1^{\infty} \int_n^{n+1} f(x)\,dx \le \sum_1^{\infty} a_n$$

$$\sum_1^{\infty} a_n - a_1 \le \int_1^{+\infty} f(x)\,dx \le \sum_1^{\infty} a_n$$

- se $\sum a_n$ converge → $\int$ converge
- se $\sum a_n$ diverge → $\int$ diverge

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 93 di 130

ESERCIZIO

1) condizione necessaria. Provare se la serie (~~diverge~~) o converge.

Se $\sum_i a_n < \infty \Rightarrow a_n \to 0$ per $n \to \infty$

$\sum_{n=1}^{\infty} n^2(e^{1/n} - \cos 1/n - 1/n)$ $\qquad \lim_{n\to\infty} n^2(e^{1/n} - \cos 1/n - 1/n) = \lim_{n\to\infty}$?

$$\begin{cases} e^x = 1 + x + \frac{1}{2}\cdot x^2 + o(x^2) \\ \cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \end{cases} \text{per } x \to 0 \quad \begin{cases} e^{1/n} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ \cos 1/n = 1 - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{cases}$$

$$n^2\left(\cancel{1} + \cancel{\tfrac{1}{n}} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \cancel{1} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \cancel{1/n}\right) =$$

$$\lim_{n\to\infty} n^2\left(\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \lim_{n\to\infty} 1 + o(1) = 1$$

Il termine generale a_n non ha $\ell = 0$, quindi la serie non converge

2) Determinare il carattere delle serie e calcolarne la somma

(con geometriche e telescopiche posso calcolare la somma)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n + 5^n}{10^n} = \sum_0^{\infty} \frac{4^n}{10^n} + \sum_0^{\infty} \frac{5^n}{10^n} = \sum_0^{\infty}\left(\frac{4}{10}\right)^n + \sum_0^{\infty}\left(\frac{5}{10}\right)^n \qquad \frac{4}{10} < 1 \text{ e } \frac{5}{10} < 1$$

se la ragione $|q| < 1$, converge la serie $\to$ convergono entrambe

$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$. $\quad$ Quindi $\sum_0^{\infty}\left(\frac{4}{10}\right)^n = 1 : \left(1 - \frac{2}{5}\right) = 1 \cdot \frac{5}{3} = \frac{5}{3}$

$$\sum_0^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 : \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 2$$

Quindi $\frac{5}{3} + 2 = \frac{11}{3}$ = somma della serie

se ho $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ non posso dire $\neq \frac{1}{1-q}$. Quindi $\sum_0^{\infty} q^n - 1 = \frac{1}{1-q} - 1 \leftarrow$ **NB** $\quad q^0 = 1 \to n = 0$

3) Discutere la convergenza delle serie telescopiche

$\sum a_n$, $\quad a_n = b_{n+1} - b_n$

$\sum_1^{\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ $\qquad (b_n = \sqrt{n})$ $\qquad S_n = \sqrt{2} - 1 + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{4} - \sqrt{3} + \ldots + \sqrt{N+1} - \sqrt{N} =$

$$= \sqrt{N+1} - 1$$

$\lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} \sqrt{N+1} - 1 = +\infty$ quindi la serie diverge

8) Determinare il carattere della serie con il criterio del rapporto

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$ se $l<1$ converge, se $l>1$ diverge

$\sum_1^\infty \frac{\log n}{2^n}$ $\quad \lim_{n\to\infty} \frac{\log(n+1)}{2^{(n+1)}} \cdot \frac{2^{(n)}}{\log n} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{\log(n+1)}{\log n} = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}<1$ quindi la serie converge $(l<1)$

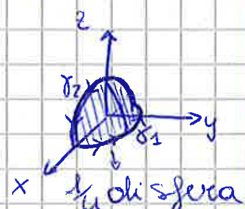
9) Criterio della radice

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ se $l<1$ converge, se $l>1$ diverge.

$\sum_1^\infty \frac{e^{n^2}}{n^n}$ $\quad \lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{n} = +\infty$ quindi $l>1$ e la serie diverge

10) $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \sqrt{1-x^2-y^2},\ y \geq 0\}$

$F(x,y,z) = (y+z, z+x, x+y)$ calcola flusso del rot F su Σ con $\hat{n}_N$ verso l'alto. Th. di Stokes



$$\int_\Sigma \mathrm{rot}\, F \cdot \hat{n}_N \, d\Sigma = \oint_{\partial\Sigma} F\, dP$$

$\partial\Sigma$ in senso antiorario

$$\int_{\gamma_1} F \cdot dP + \int_{\gamma_2} F \cdot dP$$

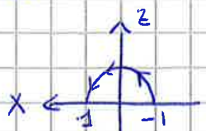
• $\gamma_1 : [0;\pi] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma_1(t) = (\cos t, \sin t, 0)$

$F(\gamma_1) = (\sin t, \cos t, \cos t + \sin t)$

$\gamma_1' = (-\sin t, \cos t, 0)$

$F(\gamma_1) \cdot \gamma_1' = -\sin^2 t + \cos^2 t = 2\cos^2 t - 1$

• $\int_{\gamma_1} \cos^2 t - \sin^2 t \, dt = \int_0^\pi = 0$



↳ RICORDA DI METTERE ⊖

• $\gamma_2 : [0,\pi] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma_2(t) = (\cos t, 0, \sin t)$

$F(\gamma_2) = (\sin t, \cos t + \sin t, \cos t)$

$\gamma_2' = (-\sin t, 0, \cos t)$

$F(\gamma_2) \cdot \gamma_2' = -\sin^2 t + \cos^2 t$

• $\int_{\gamma_2} F \cdot dP = \int_0^\pi -\sin^2 t + \cos^2 t \, dt = -0 = 0$

$\rightarrow \int_\Sigma \nabla \wedge F\, \hat{n}_N \, d\Sigma = 0 + 0 = 0 \iff \mathrm{rot}\, F = (0,0,0)$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 97 di 130