



Appunti universitari
Tesi di laurea
Cartoleria e cancelleria
Stampa file e fotocopie
Print on demand
Rilegature

NUMERO: 2432A

ANNO: 2019

A P P U N T I

STUDENTE: Pecora Gianni

**MATERIA: Termodinamica Applicata e Trasmissione del Calore -
Prof. Scarsoglio**

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

TERMODINAMICA APPLICATA E TRASMISSIONE DEL CALORE

Definizione di fluido: insieme di Gas e liquidi → mantiene costante il suo volume
 ↳ adatta il suo volume, si espande → occupa tutto il volume a disposizione
 Miscele di gas e di liquido: (vapori, nebbie) → si utilizzano dei modelli bifase che descrivono i 2 stati separatamente e poi li assembla in un unico modello

Fluido:

- Configurazione statica, non sviluppa tensioni interne (ad azione finita)
- non oppone resistenza alle deformazioni ma oppone resistenza al movimento
- il fluido risponde solo l'azione dinamica (continua a fluire per tutto il tempo in cui agiscono azioni dinamiche)

↳ caratteristica comune → trasmettono calore

Solido:

- sviluppa tensioni interne anche ad azione finita, non accetta variazioni di forma senza sviluppare tensioni
- oppone resistenza alle deformazioni e anche al movimento
- raggiunto l'equilibrio la deformazione si ferma anche se l'azione dinamica continua

Modello di fluido (adattato in questo corso)

- pressioni trasmesse da un punto all'altro del fluido
- sforzi viscosi trasmessi in tutto il fluido
- Termicamente conduttibile (in quiete o meno)
- può variare la densità → cioè può divenire comprimibile

↳ solo quando c'è azione dinamica

↳ ipotesi del continuo:

- λ : cammino libero medio (distanza media tra molecole) → microscopica
- L : scala macroscopica del fenomeno in esame → macroscopica

↳ studiamo fluidi per cui $\lambda \ll L$ (ordini di grandezza diversa) → escludiamo i gas rarefatti per i quali $\lambda \approx L$

• $Kn = \frac{\lambda}{L} \ll 1$ (no Knudsen) ⇒ 0 dimensionale

↳ nei gas → $Kn \approx 10^{-8} - 10^{-3}$

↳ nei liquidi → più basso perché λ più piccolo (molecole più vicine)

• Considereremo sempre un numero enorme di molecole e nessun gas rarefatto.
 ↳ no analisi individuale delle molecole ma analisi media

• \mathcal{L} : particella fluida → è il volume elementare di fluido

↳ deve essere:

- sufficientemente grande per contenere un numero statisticamente significativo di molecole
- sufficientemente piccola per poter assumere costanti le grandezze al suo interno (variazioni trascurabili rispetto alla scala L)
- scala intermedia → $\lambda \ll \mathcal{L} \ll L$

La dimensione di \mathcal{L} definisce la scala differenziale, dx → il fluido è definito come un continuo: ∇
 e quindi viene spontaneo descriverne le evoluzioni assegnando i valori alle sue grandezze → $\alpha(\vec{x}, t)$
 funzione del punto e del tempo ← variabile fisica

↳ i punti nello spazio x , sono individuati dalla scala della particella fluida, dx .

Punto di vista Euleroiano: evoluzione di α a punto fisso nel tempo → valore della particella fluida all'istante t

Punto di vista Lagrangiano: evoluzione di α associata alla particella seguendo la traiettoria

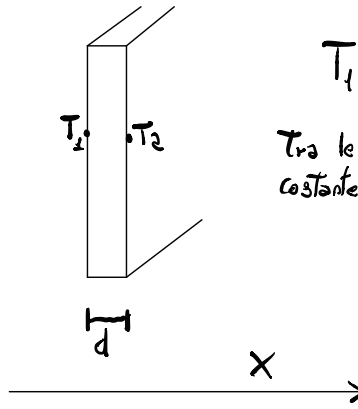
• **Esperimento di Fourier**

• parete di spessore d e superficie S

Flusso di calore (energia termica per unità di tempo) è dato da:

$$\dot{Q} = -\lambda S \frac{\Delta T}{d} \quad (\dot{Q} \rightarrow \text{nel tempo})$$

$$\Delta T = T_2 - T_1$$



$T_1 \neq T_2$
 ↓
 Tra le 2 facce è mantenuto un salto costante di temperatura ΔT

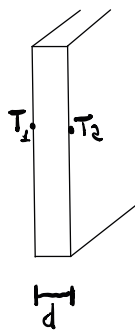
- il segno indica che il calore fluisce dalla parete calda a quella fredda

λ : **conducibilità termica**

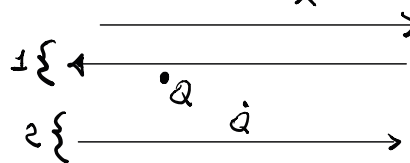
↳ coefficiente che rappresenta la capacità del fluido di smussare la differenza di T

ruolo analogo a quello svolto dalla viscosità dinamica nei confronti della velocità.

$\dot{q} [J/s]$ $T [K]$ $\lambda [W/(K \cdot m)]$



① $\left\{ \begin{array}{l} \Delta T = T_2 - T_1 > 0 \\ \rightarrow \dot{q} < 0 \end{array} \right.$
 ② $\left\{ \begin{array}{l} \Delta T = T_2 - T_1 < 0 \\ \rightarrow \dot{q} > 0 \end{array} \right.$



→ μ → quanto velocemente modifichiamo il campo di moto (**VELOCITÀ**)
 λ → **TEMPERATURA**

↳ Cause fisiche dei 2 esperimenti sono da ricercare a livello molecolare (molecolare)

Liquidi:

• viscosità dipende da energia di legame, calore latente e altro

↳ μ → diminuisce quando T aumenta
 ↳ $\mu(T) = A e^{-T/B}$
 ↳ A e B costanti

• conducibilità λ dipende dall'agitazione molecolare

Gas:

- viscosità e conducibilità dipendono dall'agitazione molecolare

→ Cause di diffusione di velocità (μ) e Temperatura (λ) sono a livello molecolare.

È perciò possibile esprimere i flussi medi tramite coefficienti che non dipendono dal moto macroscopico, il processo si chiama **DIFFUSIONE** o **TRASPORTO MOLECOLARE** e si traduce in leggi fisiche

→ Si può avere variazione di T , velocità, composizione chimica.

→ cause a livello molecolare.

$k [m^2/s]$ $\nu [m^2/s]$ $\lambda [W/(K \cdot m)]$ \rightarrow più comodo da tenere a mente

Numero di Prandtl $\rightarrow Pr = \frac{\nu}{k} \rightarrow$ adimensionale

- Gas ν, k regolati dall'agitazione molecolare $\rightarrow Pr \approx 1$
 \rightarrow Aria standard ($Pr = 0,71$)
 - Liquidi \rightarrow dipende da quanto sono concatenate le molecole nei liquidi e dalla temperatura \rightarrow
 - Acqua $20^\circ C$ ($Pr = 7$)
 - Olio $20^\circ C$ ($Pr \approx 10^4$)
 - Olio $80^\circ C$ ($Pr \approx 500$)
 - Metalli liquidi (Hg, Na)
 - $\rightarrow \nu$ simile all'acqua
 - $\rightarrow k$ elevata ($Pr \approx 10^2 \cdot 10^3$)
- \rightarrow Prandtl molto variabile

LEGGE DI FICK (diffusione specie chimica)

$$q_s = -K_s \frac{d\beta}{dz}$$

\rightarrow numero di Schmidt $\rightarrow Sc = \frac{\nu}{K_s}$ adimensionale

\rightarrow Gas $Sc \approx 1$

K_s : coefficiente di diffusione [m^2/s]
 β : concentrazione specie chimica [kg/m^3]

TABELLA RIASSUNTIVA

	grandezza fisica	Floso	coefficiente
Legge di Newton	U/P	$\tau/\dot{\gamma}$ (q.d.m.)	μ/ν
Legge di Fourier	$T/\rho C_p T$	\dot{q}/\dot{q} (calore)	λ/k
Legge di Fick	β	\dot{q}_s (specie chimica)	K_s

- Sistema termodinamico: quantità omogenea di materia, finita od infinitesima
- Stato di equilibrio: quando la ripartizione dell'energia molecolare è assestata (le molecole non si scambiano velocità e temperatura) \rightarrow fluido in quiete.
- Trasformazione: il passaggio da uno stato di equilibrio a un altro \rightarrow passaggio gestito dal moto del fluido, dalla sua evoluzione
- Termodinamica dell'equilibrio: si ipotizza che il tempo dell'evoluzione del fluido sia molto maggiore del tempo che ci impiega il sistema per ripristinare lo stato di equilibrio. (quasi istantanei)
- Termodinamica del non equilibrio: coinvolge i moti ad altissima velocità o impulsivi.

\rightarrow Trasformazione è successione di stati di equilibrio

Variabili di stato: descrivono lo stato di equilibrio e non dipendono dalla trasformazione con cui si è giunti allo stato di equilibrio. (non dipende dal percorso ma dagli estremi)
 (T, p, ρ, \dots)

→ Unendo tutti i punti H e K di tutte le isoterme provviste di massimi e minimi → all'interno regione di saturazione

↳ ramo dx: curva limite inferiore (i)
 ramo dx: curva limite superiore (s)

↳ i punti del segmento rappresentano gli stati del vapore saturo o umido, cioè del vapore in presenza dello stesso liquido che lo produce.

Vapore saturo: vapore in presenza di liquido

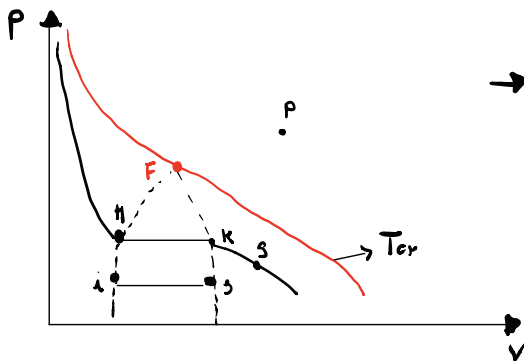
↳ H: 100% liquido K: 100% vapore

→ (si passa gradualmente da una parte all'altra)

→ A sinistra della curva limite inferiore e sotto la curva isoterma critica ($T < T_{cr}$) → liquido

→ A destra della curva limite superiore → aeriforme

↳ $T > T_{cr}$ → gas perfetto
 ↳ $T < T_{cr}$ → vapore secco



→ Un punto S nello stato di vapore secco può essere sempre ricondotto a liquido attraverso una trasformazione a $T = \text{cost}$ e poi nella regione di saturazione con una trasformazione a $p = \text{cost}$

→ Un punto P (gas perfetto) ha bisogno di un abbassamento di T e p per raggiungere lo stato liquido.

→ Punto critico (Punto di Flesso F) → si ricava imponendo

$$\left(\frac{dp}{dv}\right)_c = 0 \quad \left(\frac{d^2p}{dv^2}\right)_c = 0$$

(importanti i dati perché fissano il confine al di là del quale il gas non può più essere liquefatto.)

→ otteniamo le coordinate del punto critico : $V_{cr} = 3b$ $T_{cr} = \frac{8a}{27R^*b}$ $P_{cr} = \frac{a}{27b^2}$

→ Variabili ridotte (adi dimensionali): $V_r = \frac{V}{V_{cr}}$ $P_r = \frac{P}{P_{cr}}$ $T_r = \frac{T}{T_{cr}}$

↳ sostituendo nell'eq. di Van der Waals (solo variabili ridotte)

in questo modo acquista un valore universale perdendo la dipendenza da a e b

$$\left(P_r + \frac{3}{V_r^2}\right) (3V_r - 1) = 8T_r$$

↳ Legge degli stati corrispondenti

→ Se uno stato ha p_r e T_r uguali a un altro stato allora anche i volumi ridotti (V_r) dei due stati saranno gli stessi

Leggi di Trasformazione

- ISOBARA : $p = \text{cost}$
- ISOTERMA : $T = \text{cost}$
- ISOCORA : $v = \text{cost}$

per gas perfetti →

- ISOBARA $P_1 T_1 = P_2 T_2$ ($P T = \text{cost}$)
- ISOTERMA $P_1 / \rho_1 = P_2 / \rho_2$
- ISOCORA $P_1 / T_1 = P_2 / T_2$

→ Costo energetico dipende dalla trasformazione

C_p : calore specifico a pressione costante
 C_v : // // a volume costante

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} \quad C_p - C_v = R^*$$

- $\gamma = 1.667$ (gas mono-atomico)
 - $\gamma = 1.4$ (gas biatomico)
 - $\gamma = 1.33$ gas poli-atomici
- Aria (N_2, O_2) → $\gamma = 1.4$

I principio Termodinamica

$$de = \delta Q + \delta L$$

$$dL = -p dv \quad \text{lavoro di trasformazione}$$

$$\hookrightarrow \delta L > 0 \quad \text{se } dv < 0$$

L : lavoro Trasl. completo sul gas
 L^* : lavoro completo dal gas

$$L = -L^*$$

$$\delta Q - \delta L^* = de$$

δQ } no variabile
 δL } di stato
 $de \rightarrow$ variabile di stato

Trasformazione ideale e reversibile $\rightarrow \delta Q_{rev} = T ds$

\hookrightarrow lavoro compressione reversibile (sollevando il pistone si ritorna poi allo stato iniziale)

$$\rightarrow T ds = de + p dv$$

\hookrightarrow I principio termodinamica (in quiete o in moto) (con tutte variabili di stato)
 \hookrightarrow lo si può leggere come un Bilancio entropico del fenomeno

• Trasformazione isentropica

$$\hookrightarrow ds = 0 \rightarrow de + p dv = C_v dT + \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{\rho} = 0$$

\hookrightarrow Gas perfetti $\cdot dv = d\left(\frac{1}{\rho}\right) = -\frac{d\rho}{\rho^2}$

eq. di stato dei gas perfetti $\rightarrow \frac{p}{\rho} = R^* T$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{C_p - C_v}{C_v} = \gamma - 1 = \frac{R^*}{C_v} \end{array} \right.$$

$$\frac{dT}{T} = (\gamma - 1) \frac{d\rho}{\rho} \quad (\text{forma differenziale isentropica})$$

$$\hookrightarrow \text{Integrando: } \log(T) = \log(\rho^{\gamma-1}) + C \rightarrow \log \frac{T}{\rho^{\gamma-1}} = \underbrace{\log(C)}_{\text{cost}}$$

$$\xrightarrow{\text{isentropica}} \frac{T}{\rho^{\gamma-1}} = \text{cost}$$

Ricordando: $\frac{d\rho}{\rho} = \frac{d\rho}{\rho} - \frac{dT}{T}$ (eq. gas perfetti) \rightarrow integrando otteniamo $\frac{p}{\rho^\gamma} = \text{cost} \rightarrow$ isentropica

$$\cdot \frac{T}{\rho^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}} = \text{cost} \rightarrow \text{isentropica}$$

• Trasformazione a calore specifico costante $\rightarrow C = \frac{\delta Q}{dT}$ (per definizione)

\rightarrow sostituiamo δQ nel I principio della termodinamica

$$\hookrightarrow \delta Q = C dT = de + p dv = C_v dT + R^* T \frac{d\rho}{\rho}$$

$$R^* = C_p - C_v \rightarrow \frac{dT}{T} = -\frac{C_p - C_v}{C - C_v} \frac{d\rho}{\rho}$$

SECONDO PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA

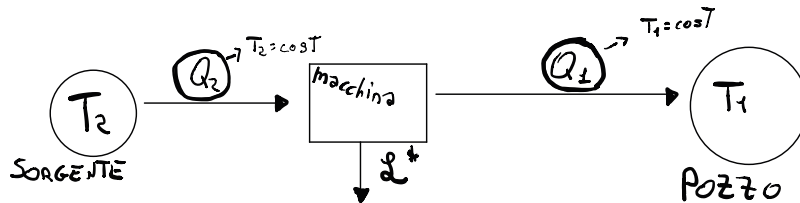
A differenza del primo principio il secondo viene solitamente percepito come più astratto, più lontano dalla comune intuizione

- ↳ Carnot → le sue ricerche si basano su esigenze pratiche: sull'analogia con le macchine elettriche ma errore concettuale → si confrontò sul concetto di rendimento di macchine termiche e reversibilità
- ↳ Clausius → superò quell'errore concettuale e conferì rigore matematico alle considerazioni di Carnot (forma fisicamente corretta)

Rendimento → legato alla trasformazione di energia termica in energia meccanica

Reversibilità → legato al funzionamento di macchina ideale e al rendimento massimo ideale.

→ Macchine Termiche



→ Una sorgente termica a T_2 trasmette calore Q_2 alla macchina. Il calore Q_1 viene poi rilasciato dalla macchina e restituito al pozzo con temperatura T_1 . $T_2 > T_1$

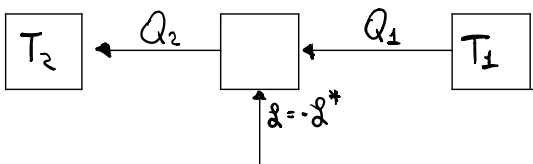
→ Q^* lavoro meccanico compiuto dal fluido legato alla variazione di calore fornito e rilasciato. ($\Delta T \neq 0$)

calore $\begin{cases} > 0 & \text{entrante} \\ < 0 & \text{uscite} \end{cases}$

Lavoro $\begin{cases} - \text{compiuto dal} \\ \text{fluido } (+Q^*) \\ - \text{compiuto sul} \\ \text{fluido } (-Q^*) \end{cases}$

Diretto: fornitura di calore Q_2 e ottentimento di Q^*

Inverso: fornitura di lavoro Q ($-Q^*$) per portare il sistema (la sorgente) alla temperatura T_2 .



4 condizioni per perfetta reversibilità di cicli diretti e inversi:

- Tutto il calore fornito deve essere Q_2 e la trasformazione deve essere isoterma a $T_2 = \text{cost.}$
- Tutto il calore rilasciato (dalla macchina) deve essere Q_1 e deve essere una trasformazione isoterma a $T_1 = \text{cost.}$
 - le trasformazioni intermedie tra le isoterme sono delle isoentropiche (adiabatiche reversibili)
- passaggi di calore tra sorgente/pozzo e fluido devono avvenire a $T = \text{cost.}$
 - salti di temperatura nulli
- assenza di attriti (sia negli organi meccanici, sia internamente al fluido, sia tra questo e le pareti)

$|dT|_{bc} = T_2 - T_1$
 $|dT|_{da} = T_2 - T_1$ → Lavoro espansione prodotto su BC è uguale (in modulo) al lavoro di compressione richiesto da DA
 ↳ Nessun lavoro netto dato dalle isentropiche
 ↳ $Q^* = Q_2^* - Q_1^*$

Rendimento
 $\eta = \frac{Q^*}{Q_2} = \frac{Q_2^* - Q_1^*}{Q_2^*} = \frac{T_2 \log(V_B/V_A) - T_1 \log(V_C/V_D)}{T_2 \log(V_B/V_A)}$

→ AD e BC ISENTROPICHE → $TV^{\gamma-1} = \text{cost}$ → $\left(\frac{V_B}{V_D}\right)^{\gamma-1} = \frac{T_0}{T_A}$
 $\left(\frac{V_C}{V_D}\right)^{\gamma-1} = \frac{T_C}{T_B}$

Inoltre $T_A = T_B$ e $T_C = T_D$ → $\frac{V_B}{V_A} = \frac{V_C}{V_D}$

rendimento del ciclo di Carnot IDEALE
 $\eta_{\max} = \frac{T_2 - T_1}{T_2}$
 ↳ il massimo rendimento che possiamo ottenere

- $T_1 > 300 \text{ K}$ (Temp. ambiente a cui defluisce spontaneamente Q_1) → T_1 non può scendere sotto questo valore
- T_2 ha un campo di variabilità più ampio: $\sim 3000 \text{ K}$ (motori alternativi a combustione interna ma no reversibilità)
- non oltre: 1300 K per macchina a flusso continuo

• $\eta_{\max} \approx 0.5$
 ↳ vuol dire che solo il 50% di Q_2 si trasforma in lavoro utile Q^* e l'altro è calore disperso attraverso Q_1 .

• ciclo generico $\eta = \frac{Q_2 - Q_1}{Q_2}$ • Ciclo Carnot $\eta_{\max} = \frac{T_2 - T_1}{T_2}$

Ciclo di Carnot ideale (reversibile)

$\eta = \frac{(Q_2)_{\text{rev}} - (Q_1)_{\text{rev}}}{(Q_2)_{\text{rev}}} = \frac{T_2 - T_1}{T_2} = \eta_{\max}$ → $\frac{(Q_2)_{\text{rev}}}{T_2} = \frac{(Q_1)_{\text{rev}}}{T_1}$ → $T = \text{cost}$ lungo $(Q_1)_{\text{rev}}$ e $(Q_2)_{\text{rev}}$

($\delta Q_{\text{rev}} \neq 0$ solo sulle isoterme)

$+\frac{(Q_2)_{\text{rev}}}{T_2} + \phi - \frac{(Q_1)_{\text{rev}}}{T_1} + \phi = 0$

→ Clausius → ciclo generico sempre reversibile

Contorno ciclo: $S_1 + S_2$

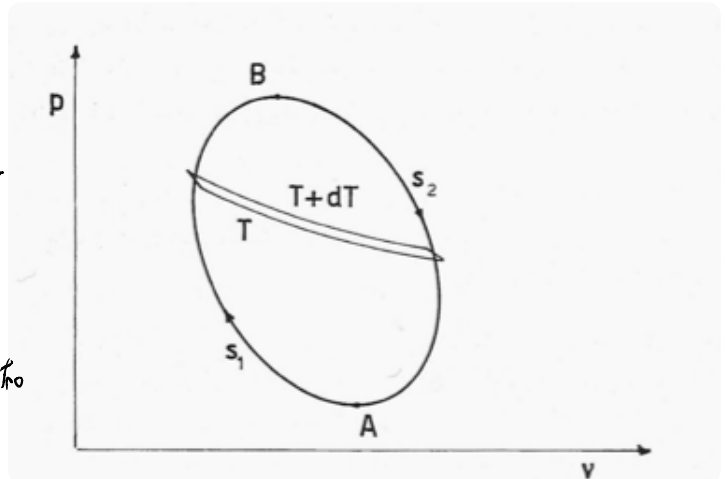
Un ciclo generico può essere visto come somma di tanti cicli di Carnot tra isoterme T e $T+dT$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\oint \frac{Q_{\text{rev}}}{T} \right)_i = 0$

• Tralci di isoterme percorsi un verso e poi nell'altro Vanno ad elidersi, per $n \rightarrow \infty$ rimane solo il contributo del contorno

Scriviamo $\oint \frac{\delta Q_{\text{rev}}}{T} = 0$ lungo S_1 e S_2 → $\int_A^B \left(\frac{\delta Q_{\text{rev}}}{T} \right)_{S_1} + \int_B^A \left(\frac{\delta Q_{\text{rev}}}{T} \right)_{S_2} = 0$

$\int_A^B \left(\frac{\delta Q_{\text{rev}}}{T} \right)_{S_1} = \int_A^B \left(\frac{\delta Q_{\text{rev}}}{T} \right)_{S_2}$



Generici istanti 1 (iniziale) e 2 (finale)

$$\underbrace{S_2 - S_1}_{\text{calore scambiato in modo reversibile}} > \int_1^2 \frac{\delta Q_{\text{irrev}}}{T}$$

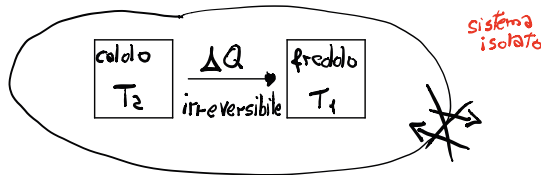
Tutti i processi reali sono irreversibili.
In un sistema isolato (adiabatico verso l'esterno)

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \delta Q_{\text{irrev}} &= 0 \\ \rightarrow S_2 - S_1 &> 0 \quad dS > 0 \end{aligned}$$

II principio Termodinamica

↳ in un sistema isolato (adiabatico verso l'esterno) ma soggetto internamente a trasformazioni reversibili o irreversibili, l'Entropia non può diminuire $\rightarrow dS \geq 0$

$T_2 > T_1$



caldo: $-\frac{\Delta Q}{T_2}$ (variazione entropia)

freddo: $+\frac{\Delta Q}{T_1}$ (variazione entropia)

Sistema isolato: caldo + freddo

$$\Delta S = \frac{\Delta Q}{T_1} - \frac{\Delta Q}{T_2} > 0$$

OSSERVAZIONI

- L'Entropia dell'universo aumenta perché è il più grande sistema isolato
- $\oint dS = 0 \rightarrow$ variazione di entropia su un ciclo chiuso è nulla \rightarrow scart sul ciclo (rev. o irrev.) e il ciclo **NON** è un sistema isolato. \rightarrow più in generale l'entropia può localmente diminuire a seguito di processi artificiali e perfino naturali comunque sempre correlati al fatto che il sistema non è isolato ma sta interagendo con l'esterno.
- \rightarrow sistema isolato: ciclo + ambiente esterno con cui scambia calore

ENTALPIA

↳ h: entalpia per unità di massa [J/kg]

$$\hookrightarrow h = e + pv = e + \frac{p}{\rho} \quad (\text{definita da variabili di stato, dunque variabile di stato})$$

(considerando $e = C_v T$ e $R^* = C_p - C_v$)

$$\hookrightarrow h = C_v T + R^* T = C_p T \quad \longrightarrow \quad \text{dunque per gas perfetto} \rightarrow h = C_p T$$

↳ Usandola nel I principio della Termodinamica ($\delta Q = de + \delta L$) $\rightarrow \delta Q = dh - d(pv) + p dv = dh - p dv + p dv - v dp$
 $\delta Q = dh - v dp$

Isobara: $\delta Q = dh$ (come il processo di evaporazione \rightarrow che permette di dedurre il calore di evaporazione da salto di entalpia)

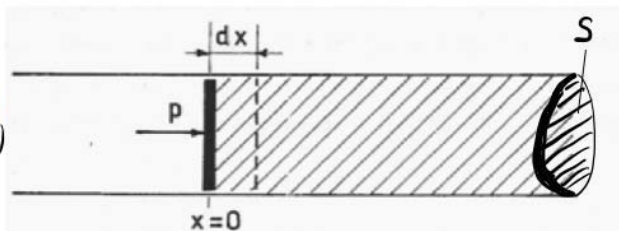
Lavoro di trasformazione $\rightarrow \delta L = -p dv$ ($\delta Q > 0$ se $dv < 0$)
 ↳ consideriamo il lavoro di spostamento

↳ Condotta Sezione S

- ↳ Lavoro necessario per spostare una massa di fluido è $p S dx$ (Lavoro di spostamento)
- ↳ massa fluida $\rho dx S$ con $\rho = \frac{m}{V}$ (densità fluido)

Lavoro di spostamento per unità di massa

$$\hookrightarrow \frac{p S dx}{\rho dx S} = p v \rightarrow \text{variazione infinitesima} \rightarrow d(pv)$$



• Integrando $\frac{dh}{h} = \frac{ds}{c_p}$ da un generico stato di riferimento (h_0, s_0) a (s, h) :

$$\log h' / h_0 = \frac{s' - s_0}{c_p} \rightarrow \log \left(\frac{h}{h_0} \right) = \frac{s - s_0}{c_p}$$

$$h = h_0 \exp \left(\frac{s - s_0}{c_p} \right) \quad [h = h(s)]$$

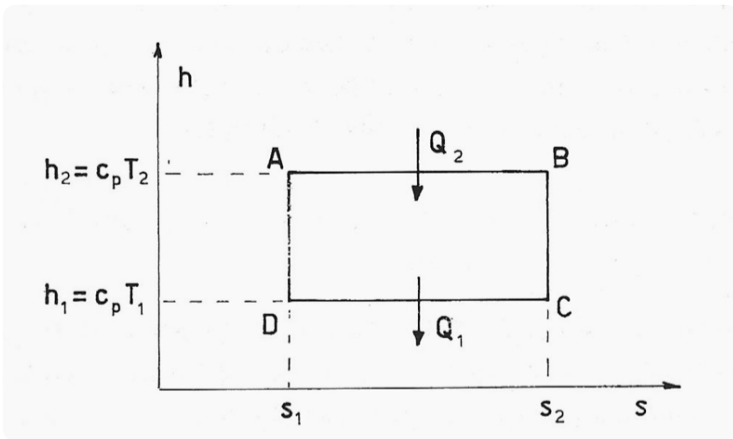
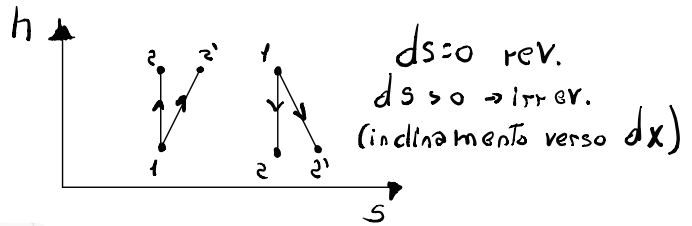
$\hookrightarrow \frac{dh}{ds} = T$

→ Isobare sul diagramma (h, s) → Curve esponenziali crescenti con inclinazione locale data da T

- isoentropiche: segmenti verticali
- isobare: esponenziali crescenti
- isoterma: $[h = c_p T]$ (gas perfetto) segmento orizzontale

• espansioni o compressioni (in turbina) (o trasformazioni che necessitano di un lavoro meccanico) sono spesso ADIABATICHE → se anche reversibili → ISOENTROPICHE (nelle verticali)

nella realtà sempre un pò inclinate (fonti di irreversibilità)



Ciclo di Carnot

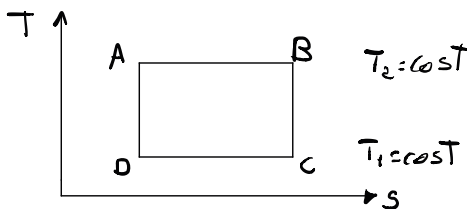
→ Il ciclo di Carnot appare come un rettangolo la cui area fornisce, a meno di un fattore c_p , il valore dello scambiato $Q_2 - Q_1$.

$$A = \oint h ds = c_p \int T ds = c_p \int \delta Q_{rev} = c_p (Q_2 - Q_1)$$

$(h = c_p T) \quad ds = \left(\frac{\delta Q_{rev}}{T} \right)$

→ In Carnot $Q_2 - Q_1 = Q_2^* - Q_1^*$
↳ Area → lavoro netto del ciclo (a meno di c_p)

→ Il fattore c_p può essere fatto scomparire se consideriamo il diagramma (T, S) al posto di (h, s)



→ gas perfetto $c_p = \text{cost}$
 $A = \oint T ds = Q_2 - Q_1$

↳ dunque $\rightarrow \beta = \frac{1}{\rho} \left(\beta = \frac{\Delta p / \rho}{\Delta p} \right)$

$c^2 = \frac{p}{\rho}$ [non è la velocità del suono perché la propagazione di onde acustiche non è un fenomeno isoterma ma è isentropica (dissipazioni trascurabili)]

↳ se ISOENTROPICA

$$\frac{p_1}{\rho_1^\gamma} = \frac{p_2}{\rho_2^\gamma} \rightarrow \frac{dp}{p} = \gamma \frac{d\rho}{\rho}$$

$$\frac{\Delta p}{p} = \gamma \frac{\Delta \rho}{\rho} \quad \beta = \frac{1}{\gamma \rho} \quad (\text{aria } \gamma = 1.4)$$

$$c^2 = \gamma \frac{p}{\rho} = \gamma R^* T \rightarrow c = \sqrt{\gamma R^* T}$$

↑
gas perfetto

↳ velocità del suono gas perfetto

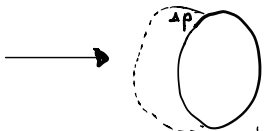
Se considerassimo c attraverso isoterma, errore: si trascura il fattore $\sqrt{\gamma}$

Aria a $T = 288 \text{ K}$

isentropica $\rightarrow c = 340 \text{ m/s}$

isoterma $\rightarrow c$ errore 16% legato a $\sqrt{\gamma} = 1.2$

Variations di pressione (Δp) dovute a fenomeni inerziali



fluidi ad alta velocità \rightarrow le compressioni si verificano per ragioni inerziali generano alta pressione

↳ corrente che impatta contro un ostacolo generando una regione di alta pressione in prossimità dell'arresto.

$$\Delta p \approx \rho U_\infty^2$$

$$\frac{\Delta p}{p} \approx \beta \rho U^2 = \frac{U^2}{c^2} = M^2 \rightarrow \text{con } M = \frac{U}{c}$$

↓
numero di Mach (adimensionale)

→ Se num. di Mach elevato effetti di comprimibilità rilevanti.

↳ Soglia $M = 0.3$ $\rightarrow M > 0.3 \rightarrow$ rilevanti
 $\rightarrow M < 0.3 \rightarrow$ trascurabili

$\frac{\Delta p}{p} \approx M^2 \approx 0.1 \rightarrow$ Variazioni relative di densità fino al 10% sono trascurabili

$M = 0.3$: - Acqua $\rightarrow U = 300 \text{ m/s}$
- Aria a T standard $\rightarrow U = 102 \text{ m/s}$

Cicli a Gas

- rendimento basso
- turbine a gas (aeronautica)
- turbine ausiliarie
- risposta rapida

Ciclo Joule (o di Brayton)

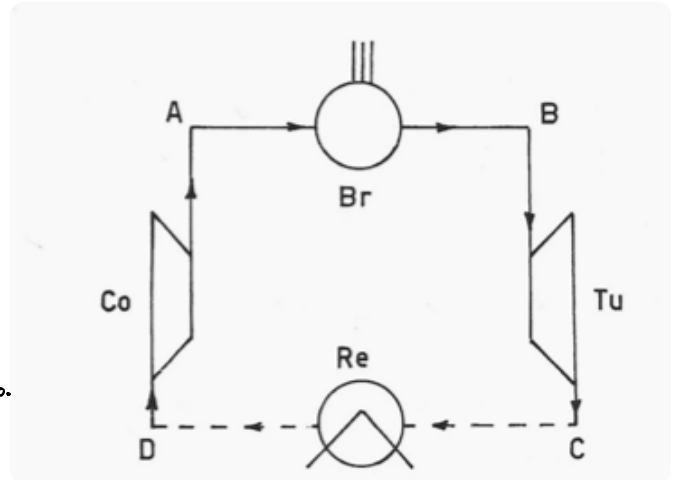
DA → un compressore preleva il gas e ne innalza la pressione dal valore p_1 (in D) al valore p_2 (in A)

AB → gas combusto nel bruciatore, fornitura di calore $(T_A < T_B)$ → ISOBARA, $p_2 = \text{cost}$

BC → gas si espande in turbina, produce lavoro.
 $p_2 \rightarrow p_1, T_C < T_B$

CD → raffreddamento isobaro ($T_C > T_D$)

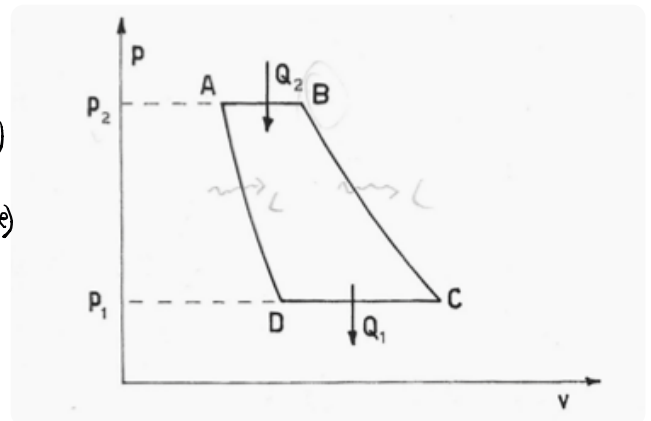
↳ refrigerazione è sostituita da una refrigerazione naturale in ambiente esterno (se il gas è aria)



- In BC parte del lavoro deve essere impiegata per l'azionamento del compressore Co e ciò spiega il ridotto rendimento.

Ciclo Joule ideale

- 2 isobare: AB (p_2) e CD (p_1)
 - 2 isentropiche: espansione e compressione (BC e DA) sono adiabatiche e reversibili
(per evitare indesiderati scambi di calore o perdite per dissipazione)
- AB: isobara superiore $p_2 = p_A = p_B$
↳ somministrato calore Q_2
(no lavoro scambiato)



BC: isentropica → no scambio di calore
→ lavoro prodotto

CD: isobara inferiore $p_1 = p_C = p_D$ → calore sottratto Q_1
→ no lavoro scambiato

DA: → no scambio calore
→ lavoro richiesto

→ Rapporto di compressione → $\rho = \frac{p_2}{p_1}$

→ il rendimento si ricava applicando la definizione generale: $\eta_i = \frac{Q_2 - Q_1}{Q_2} = \frac{Q_2 - Q_1}{Q_2}$

• AB e CD politropiche a $p = \text{cost}$ → C_p

$$Q_1 = c_p (T_C - T_D) \quad Q_2 = c_p (T_B - T_A)$$

$(\delta Q = C_p dt)$

→ e quindi il rendimento ideale è $\eta = \frac{c_p (T_B - T_A) - c_p (T_C - T_D)}{c_p (T_B - T_A)} = 1 - \frac{T_C - T_D}{T_B - T_A}$

$$\eta_i = \frac{Q_2 - Q_1}{Q_2} = \frac{(h_B - h_A) - (h_C - h_D)}{h_B - h_A} = \frac{(h_B - h_C) - (h_A - h_D)}{Q_2}$$

$$\rightarrow \eta_i = \frac{\bar{I}_T - \bar{I}_C}{Q_2} \quad \begin{matrix} \text{(lavoro tecnico netto)} \\ \text{(calore speso)} \end{matrix}$$

$$\bullet \eta_i = 1 - \frac{h_D}{h_A} = 1 - \frac{h_C}{h_B} \quad (h = c_p T)$$

Ciclo Brayton reale (linea continua in figura)

↳ AB e CD (fasi di riscaldamento e raffreddamento sono ancora approssimativamente isobare) → si approssimano abbastanza bene alle curve ideali

↳ AD e BC → adiabatiche ma irreversibili

↳ segmenti inclinati nel verso delle entropie crescenti

$$\begin{cases} DA \text{ sostituito da } DA' \quad (SA' > SA) \\ BC \text{ sostituito da } BC' \quad (SC' > SC) \\ h_A' - h_D > h_A - h_D \rightarrow \text{lavoro tecnico assorbito dal compressore} \\ h_B - h_C' < h_B - h_C \rightarrow \text{lavoro tecnico fornito dalla turbina} \end{cases}$$

↳ abbiamo il rendimento → compressore: $\eta_c = \frac{h_A - h_D}{h_A' - h_D} < 1$

↳ turbina: $\eta_T = \frac{h_B - h_C'}{h_B - h_C} < 1$

Il rendimento η del ciclo di Brayton invece (si ottiene riscrivendo i salti entalpici ideali):

$$\eta = 1 - \frac{Q_1}{Q_2} = 1 - \frac{h_C' - h_D}{h_B - h_A'}$$

Dato che, come si vede nella figura, $h_C' - h_D > h_C - h_D$ e $h_B - h_A' < h_B - h_A$, la frazione sottratta dall'unità nell'espressione di η è sempre maggiore di quella che si avrebbe nel ciclo ideale ($\eta < \eta_i$)

→ anche il bruciatore ha un rendimento η_b

↳ quindi il rendimento globale è $\eta_g = \eta_b \eta$

Cicli rigenerativi

Il fatto che nessun ciclo possa avere un rendimento superiore a quello di Carnot compreso tra le stesse isoterme non esclude l'esistenza di cicli che possano ugualarlo. Esistono ma con l'aggiungimento della rigenerazione.

↓
Consideriamo 2 cicli compresi tra le stesse isoterme

$$T_1 = \frac{h_1}{c_p} \quad \text{e} \quad T_2 = \frac{h_2}{c_p}$$

↳ siccome $T_A T_C = T_B T_D \rightarrow \eta_i = 1 - \frac{T_D}{T_C}$

$$\frac{T_D}{T_C} = \frac{T_D}{T_B} \cdot \frac{T_B}{T_C} = \frac{T_D}{T_A} \left[\frac{(1-\eta)^{\gamma}}{\eta} \right]$$

$$\eta_i = 1 - \frac{T_D}{T_B} \left[\frac{(1-\eta)^{\gamma}}{\eta} \right] \rightarrow \text{rendimento Ciclo Joule rigenerativo ideale.}$$

dipende non solo dal rapporto di compressione ma anche da quello delle temperature estreme

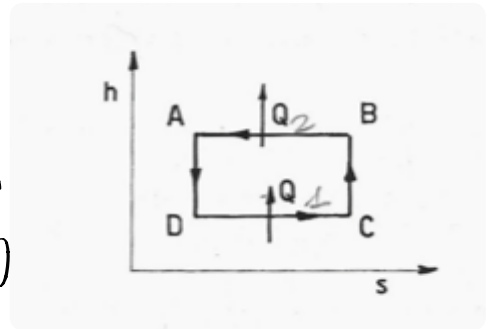
Rigenerazione ideale: salto entalpico ($h_c - h_a$) viene tutto trasferito al lato sinistro del ciclo → in pratica però non è possibile evitare che parte del calore Q^* venga disperso → l'entalpia effettivamente trasferita si riduce al valore $h_e - h_a < h_c - h_a$

Rigenerazione reale → $\epsilon = \frac{h_e - h_a}{h_c - h_a} < 1 \rightarrow$ efficacia del rigeneratore

Cicli diretti: macchina motrice. Fornitura di calore (Q_2) e ottenimento di lavoro utile ($Q^* > 0$) (senso orario)

Ciclo inverso: lavoro fornito al ciclo ($Q^* < 0, Q > 0$), per raffreddare o scaldare un ambiente. (senso antiorario)

Trasferimento di calore da un ambiente più freddo (T_1) ad un ambiente più caldo (T_2) a spese del lavoro compiuto sul fluido ($Q > 0$):



Ciclo inverso di Carnot

- macchina frigorifera (raffreddare un ambiente a temperatura inferiore T_1) (o mantenerlo alla sua temperatura)
- pompa calore (riscaldare un ambiente a T superiore T_2)

- ciclo inverso può lavorare in modo combinato: pompa calore + frigorifero

Pompa calore

$$\epsilon_T = \frac{\text{guadagno}}{\text{spesa}} = \frac{Q_2}{Q}$$

↳ Nella realtà la diff. di temperatura fra i due ambienti non può raggiungere il valore teorico $T_2 - T_1$

↳ **fattore di moltiplicazione termica**

$$\rightarrow d\epsilon = \delta Q + \delta Q \rightarrow -\delta Q = \delta Q \quad (\text{Lavoro sul fluido})$$

$$Q = -(Q_1 - Q_2) = Q_2 - Q_1$$

$$\epsilon_T = \frac{Q_2}{Q_2 - Q_1} \quad \epsilon_T = \frac{1}{\eta_i} > 1$$

Sia il fattore di moltiplicazione che quello di effetto termico sono tanto più elevati quanto più prossime tra loro sono le temperature

Macchina frigorifero

$$\rightarrow \epsilon_f = \frac{Q_1}{Q} = \frac{Q_1}{Q_2 - Q_1} > 1 \rightarrow \text{fattore di effetto termico}$$

• Nel ciclo inverso di Carnot $\frac{Q_2}{T_2} = \frac{Q_1}{T_1}$ allora $\epsilon_T = \frac{T_2}{T_2 - T_1}$; $\epsilon_f = \frac{T_1}{T_2 - T_1}$

• **Macchina:** pompa di calore + frigorifero

$$\epsilon_{Tf} = \frac{Q_1 + Q_2}{Q} = \epsilon_T + \epsilon_f$$

$P_{mi} = \frac{L^*}{V}$ [Bar] $\rightarrow L^* = P_{mi} V$

P_{mi} \rightarrow pressione media indicata (lavoro/cilindrata)
 \rightarrow si tratta della pressione media interna al cilindro durante il ciclo

$L^* = \eta Q = \eta M_c H_i$ \rightarrow (la potenza può anche ottenersi con considerazioni termiche anziché meccaniche)

- η = rendimento del ciclo
- Q = calore introdotto nel ciclo
- H_i = potere calorifico inferiore (calore sviluppato nella combustione per unità di massa)
- M_c = massa combustibile introdotta ad ogni ciclo
- M = massa aria
- ρ_m = densità miscela
- $\alpha^* = \frac{M}{M_c}$ rapporto miscela

\rightarrow Ciclo Otto (miscelazione aria più combustibile) \rightarrow accensione comandata

$M + M_c = \eta_v (\rho_m V)$ \rightarrow massa miscela

η_v = rendimento volumetrico (< 1)

$M_c = \frac{\eta_v \rho_m V}{1 + \alpha^*}$ ($\alpha^* = 15$)

\rightarrow Diesel (no miscelazione combustibile introdotto in camera combustione) \rightarrow accensione spontanea

$M = \eta_v \rho V$ (miscela con unica componente) (ρ densità della sola aria)

\rightarrow massa miscela

$M_c = \frac{\eta_v \rho V}{\alpha^*}$ $\alpha^* = 25$

\rightarrow si è tenuto conto del fatto che il ricambio del fluido effettivamente aspirato ad ogni nuovo ciclo è inevitabilmente imperfetto dunque la massa di miscela ($\rho_m V$) o di aria (ρV) vanno moltiplicate per il rendimento volumetrico η_v inferiore all'unità.

$L^* = P_{mi} V = \eta M_c H_i$

$P_{mi} = \begin{cases} \eta \eta_v \rho_m \frac{H_i}{1 + \alpha^*} & \text{(Otto)} \\ \eta \eta_v \rho \frac{H_i}{\alpha^*} & \text{(Diesel)} \end{cases}$

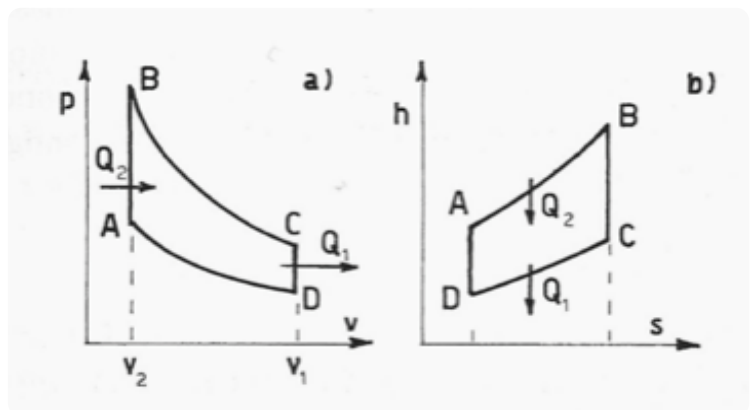
calcoliamo il rendimento η

• Otto (accensione comandata)

\rightarrow 2 isocore + 2 isentropiche

$\rho = \frac{V_1}{V_2}$ (rapporto compressione volumetrica)

• I tratti AB e CD non sono esponenziali



Diesel (accensione spontanea)

2 isentropiche + 1 isocora +
1 isobara (AB)

in h-s : AB exp
CO no exp

$$\rho = \frac{V_1}{V_2} \quad (\text{rapporto di compressione})$$

$$\gamma = \frac{T_B}{T_A} > 1$$

↳ rapporto combustione

ISOBARA AB $\gamma = \frac{V_B}{V_A}$

ISENTROPICA $\frac{T_B}{T_A} = \rho^{\gamma-1}$

T_A superiore alla T di infiammabilità combustibile (693 K)

$$T_A \approx 743 \text{ K (50 K di sicurezza)}$$

• con $\gamma = 1.33$ e $T_0 = 288 \text{ K} \Rightarrow \rho \geq 15$

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= C_V (T_C - T_D) \quad \text{isocora CO} \\ Q_2 &= C_P (T_B - T_A) \quad \text{isobara AB} \end{aligned} \right\} \text{in modulo}$$

$$Q^* = Q_2 - Q_1$$

$$\eta_i = \frac{Q_2 - Q_1}{Q_2} = 1 - \frac{1}{\gamma} \frac{T_C - T_D}{T_B - T_A} = 1 - \frac{1}{\gamma} \frac{\frac{T_C}{T_A} - \frac{T_D}{T_A}}{\frac{T_B}{T_A} - 1}$$

$$\frac{T_C}{T_A} = \frac{T_C}{T_0} \frac{T_0}{T_A} \quad \text{e} \quad \frac{T_D}{T_A} = \frac{1}{\rho^{\gamma-1}}$$

$$\frac{T_B}{T_A} = \gamma \quad \eta_i = 1 - \frac{1}{\rho^{\gamma-1}} \frac{1}{\gamma(\gamma-1)} \left(\frac{T_C}{T_0} - 1 \right)$$

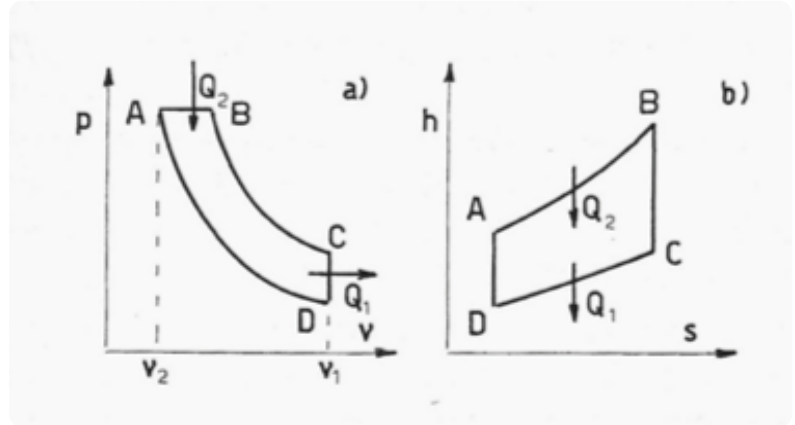
$$\frac{T_C}{T_0} = \frac{T_C}{T_B} \frac{T_B}{T_A} \frac{T_A}{T_0} = \frac{T_C}{T_B} \gamma \rho^{\gamma-1}$$

$$\frac{T_C}{T_B} \underset{\text{isentropico}}{=} \left(\frac{V_B}{V_C} \right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_B}{V_A} \frac{V_A}{V_C} \right)^{\gamma-1} = \left(\frac{\gamma}{\rho} \right)^{\gamma-1}$$

$$\frac{T_C}{T_0} = \left(\frac{\gamma}{\rho} \right)^{\gamma-1} \gamma \rho^{\gamma-1} = \gamma^\gamma$$

$$\eta_i = 1 - \frac{1}{\rho^{\gamma-1}} \quad \eta_i = \frac{\gamma^\gamma - 1}{\gamma(\gamma-1)} > 1 \rightarrow \text{rendimento ciclo Diesel ideale}$$

Se $\eta_i = 1 \Rightarrow$ ciclo Otto.



• Rendimenti

$T_0 = 298 \text{ K}$ $\gamma = 1.33$

$$\rho = \left(\frac{T_A}{T_0}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \longrightarrow \begin{cases} \rho = 10.05 \text{ (Otto)} & (\rho \leq 10) \\ \rho = 15.5 \text{ (Diesel)} & (\rho \geq 15) \end{cases}$$

↳ Diesel $\tau = \frac{T_B}{T_A} = 2.85$
 $\gamma = 1.23$

Rendimenti

$\eta_i = 0.53 \text{ (OTTO)}$ $\eta_i = 0.5 \text{ (Diesel)}$

• A parità di rapporto di compressione la perdita del rendimento del ciclo Diesel è del 23% superiore a quella del ciclo Otto. In realtà il ciclo Diesel fa uso di rapporti di compressione più elevati per compensare tale perdita.

Application 2

↳ Turbina a gas (Joule)

potenza turbina meccanica: $W = 15 \text{ MW}$

$\rho = 3$ $T_0 = 288 \text{ K}$

ρ_2 / ρ_1 $p_1 = 1 \text{ bar}$ $\eta_c = 0.88$ $\eta_T = 0.93$ $\eta_b = 0.92$

$T_{\text{max ciclo}} = T_B = 1050 \text{ K}$

$h_i = 41800 \text{ KJ/kg}$

T e h nei punti del ciclo? \dot{m} portata d'aria?
 \dot{m}_c portata combustibile? $\eta_i?$ (ideale) $\eta?$ (reale) η_g (globale)

Ciclo rigenerativo? η rigenerato?

$\rho_2 = \rho \rho_1 = 3 \text{ bar}$

Aria $\rightarrow \gamma = 1.4$; $C_p = 1 \text{ KJ/(kg K)}$

$\rightarrow h = C_p T \rightarrow h_0 = C_p T_0 = 288 \text{ KJ/kg}$

↳ $h_A = h_0 \rho^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 394 \text{ KJ/kg}$

$T_A = \frac{h_A}{C_p} = 394 \text{ K}$

ideale $h_A - h_D = 106 \text{ KJ/kg}$

• reale

$h_A - h_D = \frac{h_A - h_D}{\eta_c} = 120 \text{ KJ/(kg)}$

$h_A = 608 \text{ KJ/kg}$

$T_A = 608 \text{ K}$

$\eta_c < 1$

• Rigenerazione

$h_c > h_A \quad (T_c > T_A) ?$

$T_A = 394 \text{ K} \quad T_c = 767 \text{ K}$

• ideale $\epsilon = 1$

$\hookrightarrow T_D = 288 \text{ K} \quad T_B = 1050 \text{ K} \quad \eta_{i, \text{rig}} = 0.625$

Reale ($\epsilon = 0.8$)

A' e C' ciclo reale

$\epsilon = \frac{h_E - h_{A'}}{h_c - h_{A'}}$

$h_E = h_{A'} + \epsilon (h_c - h_{A'}) = 711 \text{ kJ/kg}$

$Q_2'' = h_B - h_E$

$Q_1'' = h_{A'} - h_D + (h_c - h_D)$

\hookrightarrow quota persa perché rig. reale

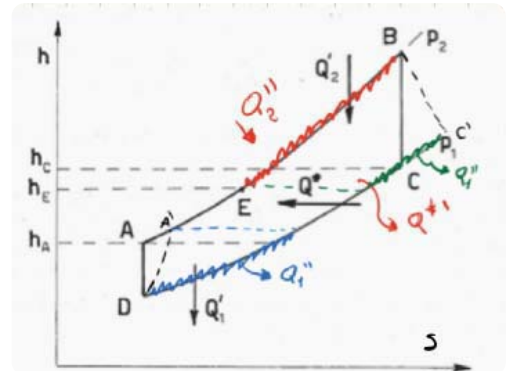
$\eta_{\text{rig}} = 1 - \frac{Q_1''}{Q_2''} = 0.62$

$Q_2'' = h_B - h_E$

$Q_1'' = h_E - h_{A'}$

$Q_1'' = h_{A'} - h_D + (h_c - h_D)$

quota persa rig. reale



$Q_2 - Q_1$ è il lavoro L^* , che è l'area interna del ciclo \rightarrow area parallelogramma

$$\hookrightarrow Q_2 - Q_1 = dp (V_{v3} - V_{l3}) \leftarrow$$

• $Q_2 = r$ (calore latente)

$$\longrightarrow \frac{dp (V_{v3} - V_{l3})}{r} = \frac{dT}{T}$$

• $T_2 - T_1 = dT$
 • $T_2 = T + dT \approx T$ ($dT \ll T$)

$$\hookrightarrow \frac{dp}{dT} = \frac{r}{T(V_{v3} - V_{l3})}$$

Teorema Clausius \rightarrow eq. di Claperyon

• H_2O a 1 bar, 373 K $\rightarrow \frac{dp}{dT} = 3622 \frac{Pa}{K}$ (tra 99.5°C e 100.5°C)

$$\hookrightarrow V_l = 0.001 \text{ m}^3/\text{kg} \text{ e } V_v = 1.674 \text{ m}^3/\text{kg}$$

\hookrightarrow si trova $r = 2260 \text{ kJ/kg}$, corrispondenti a 540 Cal/kg (calore richiesto per completare l'evaporazione)

\rightarrow Confrontiamo r con il calore richiesto per scaldare un kg di acqua da 0°C a 100°C inferiore più di cinque volte \leftarrow che è 100 Cal, cioè 418 kJ \leftarrow

IJ: pompaggio acqua da un p ambiente a p della caldaia (10-100 bar)

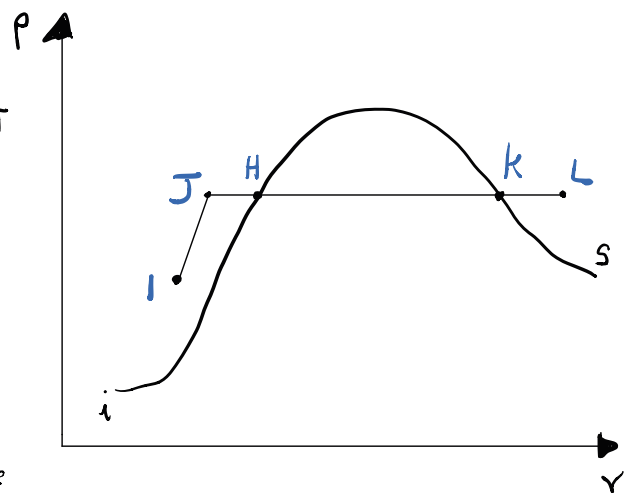
JH: riscaldamento (T aumenta) a $p = \text{cost}$

HK: evaporazione a T e p costanti

KL: riscaldamento (T aumenta) a $p = \text{cost}$

• I = liquido • L = vapore secco

• Da L il vapore viene espanso in turbina (prod. lavoro) e poi inviato al condensatore che lo riporta in fase liquida



\rightarrow Salti di entalpia $\rightarrow \delta Q = dh - v dp$

• IJ = pompaggio adiabatico $\rightarrow dh$: L_T pompaggio (lavoro tecnico)

• JL = riscaldamento isobaro $\rightarrow dh$: calore scambiato

• Turbina: $dh = L_{\text{turbina}}$ (adiabatico)

• Condensazione: isobara $\rightarrow dh = \text{calore ceduto}$

3-4: pompaggio in caldaia da p_2 (ambiente) a p_1 (caldaia)

4-4a = aumento di T fino a liquido saturo ($p_1 = cost$)

4a-4b = isoterma-isobaro → evaporazione (calore latente r)

4b-1: riscaldamento, T aumenta fino a vapore secco e raggiunge la temperatura T_1 ($p_1 = cost$)

→ **Ciclo di Rankine inverso** (Macchina frigorifera) (figura con verso di percorrenza opposto)

→ obiettivo di raffreddare un ambiente già freddo attraverso isobara inferiore del ciclo ($p_2 = cost$)

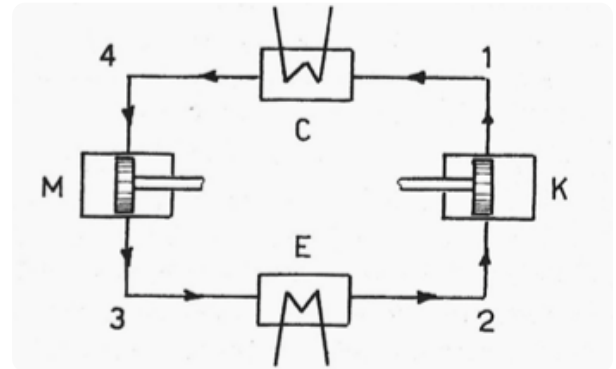
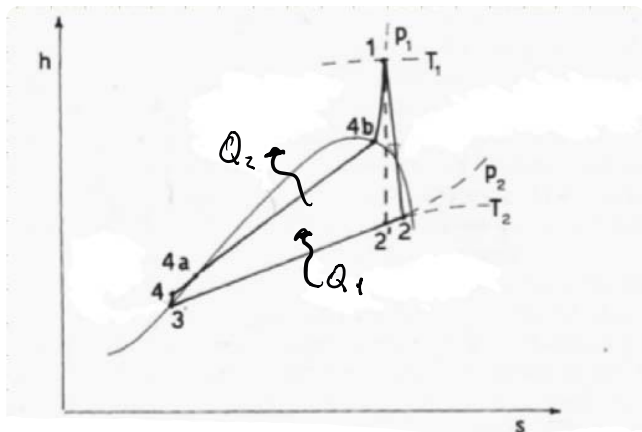
→ no vapore acqueo (H_2O) perché a T basse avremmo bisogno di pressioni p bassissime ma molto costoso.

→ sostanze (ammoniaca, CO_2 , freon) che a T basse abbiamo p atmosferica

→ senso antiorario

→ isoterma a T ambiente è quella superiore (ciclo diretto era l'isoterma inferiore)

→ il ciclo è tutto tralato a T più basse.



1: vapore secco a p alta e $T > T_{amb}$

1-4: condensatore che permette la cessione di calore e il passaggio da vapore secco a liquido.

4-3: fluido da p elevata a p atmosferica, T basse

M: motore alternativo che raccoglie il lavoro prodotto dall'espansione

3-2: evaporatore che opera a T basse e p atmosferica. → fluido assorbe calore latente r dall'ambiente esterno (che vogliamo raffreddare), e diventa aeriforme.

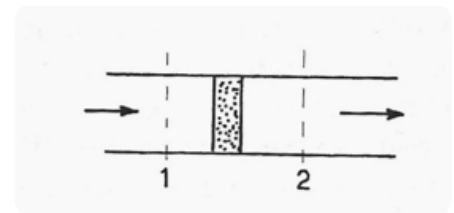
2-1: compressione (K) isentropica → fluido riportato al vapore secco (T_1, p_1)

Spesa: lavoro fornito a K

Guadagno: raffreddamento legato all'assorbimento di Q_1 .

$$\epsilon_f = \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{h_2 - h_3}{(h_1 - h_2) - (h_4 - h_3)} \approx \frac{h_2 - h_3}{h_1 - h_2}$$

Netto = lavoro richiesto (K) - lavoro prodotto (M)



Vantaggio ciclo diretto: Q prodotto in $T >> Q$ richiesto da P

Svantaggio ciclo inverso: Q prodotto dal motore \ll del lavoro richiesto dal K

4-3: espansione libera attraverso valvola (setto poroso)

$p_1 > p_3$ → velocità costante

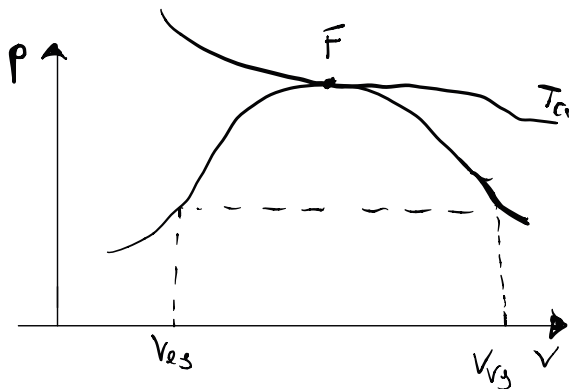
APPROSSIMAZIONE EQUAZIONE DI CLAPEYRON

$$\frac{dp}{dT} = \frac{r}{T(\nu_{v3} - \nu_{e3})}$$

• $r(T, p) \approx r_0 = \text{cost}$

ok per $T < T_{cr}$ $T_{cr} \approx 374^\circ\text{C}$
 $\hookrightarrow T \in [0, 100^\circ\text{C}] \rightarrow \text{errore } 10\%$

• $\nu_{v3} \gg \nu_{e3}$
 ok $T < T_{cr}$



$\text{H}_2\text{O } 100^\circ\text{C}$ $\nu_{e3} \approx 10^{-3} \text{ m}^3/\text{kg}$
 $\nu_{v3} \approx 1.67 \text{ m}^3/\text{kg}$

• eq. stato gas perfelli (Hp più forte, grossolana)

$$\frac{dp}{dT} = \frac{r_0}{T \nu_{v3}} \quad \begin{matrix} \uparrow \\ \text{eq. stato} \\ \text{gas perfelli} \end{matrix} \quad \frac{r_0}{R/M} \cdot \frac{p}{T^2}$$

$$\frac{dp}{dT} = \frac{r_0}{R/M} \frac{dT}{T^2}$$

Integriamo tra (p_0, T_0) e (p, T)

$$\log \frac{p}{p_0} = -\frac{r_0}{R/M} \frac{1}{T} \Big|_{T_0}^{T_1} \Rightarrow \log \left(\frac{p}{p_0} \right) = \frac{r_0}{R/M} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right)$$

\hookrightarrow soluzione approssimata dell'eq. di Clapeyron

CALORI SPECIFICI MOLARI (prima calori specifici per unità di massa c_p e c_v)

C_p e C_v

↳ dipendono dal grado di libertà L della molecola

$$C_v = \frac{L}{2} R \quad C_p = \frac{L+2}{2} R$$

$$R = 8314 \frac{\text{J}}{\text{K mol} \cdot \text{K}} = 4.98 \frac{\text{cal}}{\text{mol} \cdot \text{K}} \quad (1 \text{ cal} = 4186 \text{ J})$$

$$R \approx 2 \frac{\text{cal}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \cdot C_v \approx 3, C_p \approx 5 \text{ (gas monoatomici, } L=3) \\ \cdot C_v \approx 5, C_p \approx 7 \text{ (gas biatomici, } L=5) \\ \cdot C_v \approx 6, C_p \approx 8 \text{ (gas poliatomici, } L=6) \end{array} \right\} \rightarrow C_p \text{ e } C_v \text{ [cal/(mol} \cdot \text{K)]}$$

$C_p - C_v \approx 2 \rightarrow \approx R$ (espressa in unità Termiche)

$C_p - C_v = R$ (per unità di mole)

$c_p - c_v = R^*$ (per unità di massa)

$$c_p = \frac{C_p}{M}; \quad c_v = \frac{C_v}{M}; \quad R^* = \frac{R}{M} \quad \rightarrow \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{C_p}{C_v} \quad (\gamma = \frac{L+2}{L})$$

Per una miscela:

$$\left\{ \begin{array}{l} C_p = \sum x_i C_{p_i} \\ C_v = \sum x_i C_{v_i} \end{array} \right. \quad C_p \text{ e } C_v: \text{ calori specifici molari della miscela}$$

• La concentrazione ponderale $C_i = \frac{M_i}{M}$

M_i : massa i-esimo componente
 M : massa miscela

$\sum C_i = 1 \rightarrow C_i$ è una frazione percentuale

Essendo $p_i \frac{V}{M_i} = R_i^* T$ e $\sum p_i = p \rightarrow pV = T \sum R_i^* M_i$
 ↳ per i-esimo componente

↳ Per la miscela complessiva $pV = MR^* T$

Uguagliando $\rightarrow R^* = \sum_{C_i} \frac{M_i}{M} R_i^* \rightarrow R^* = \sum C_i R_i^*$
 ↳ miscela (analoga a $R^* = \frac{R}{M}$)

Relazioni Tra p_i, X_i, C_i :

$$\cdot C_i = X_i \frac{M_i}{M} \quad \cdot X_i = \frac{C_i / M_i}{\sum C_i / M_i} \quad \cdot C_i = p_i \frac{V_{\text{mol}}}{M}$$

M_i = massa molecolare i-esimo componente
 M = massa molecolare miscela

P_v = isobara passante per A è la pressione parziale vapore

A = stato aria umida

(vapore secco + aria secca)

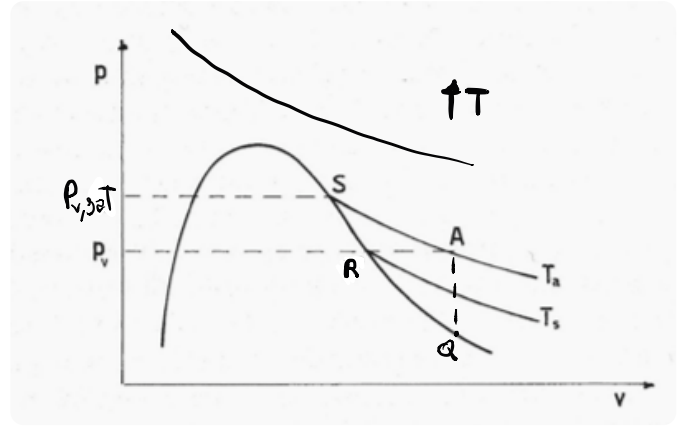
T_A = cost. isoterma passante per A

$P_{v,sat}$ = pressione di saturazione del vapore (alla $T=T_A$)

A = Vapore secco

S = Vapore saturo

AS isoterma



• $P_v = \frac{R}{M_v} P_v T_A$ (A) } alla stessa T

• $P_{v,sat} = \frac{R}{M_{v,sat}} P_{v,sat} T_A$ (S) }

$M_v = M_{v,sat}$ $\rho = \frac{P_v}{P_{v,sat}}$

• P_v dipende da M_v (dalla massa nella miscela)

• $P_{v,sat} = P_{r,sat}(T)$

in S → $\rho = 1$

• Trattiamo vapore (secco → saturo)
• gas perfetto (approssim.)

1) Isoterma AS • $P_v = P_{r,sat}$ • stessa temperatura (T_A)
→ aumentiamo P_r fino a $P_{v,sat}$.

per innalzare la P_v mantenendo costante il valore T_A della temperatura occorre aumentare la concentrazione di vapore nella miscela e quindi M_v .
Si arriva a $P_v = P_{v,sat}$ e $M_v = M_s$ e il vapore passa da secco a saturo.

2) ISOBARA AR ($P_v = \text{cost}$)

$P_v = \rho_v R_v^* T = \text{cost}$

↳ La Temperatura diminuisce; ρ aumenta

In R avrò una $P_{v,sat}$ minore che in S.

In A → $\rho = 1$

→ $P_{v,sat} \rightarrow P_v$

R: punto di rugiada → punto saturazione ottenuto a pressione di vapore costante ($P_v = \text{cost}$) e diminuendo la temperatura.

3) ISOCORA AQ

$\rho_v = \frac{P_v}{T} R_v^* = \text{cost}$

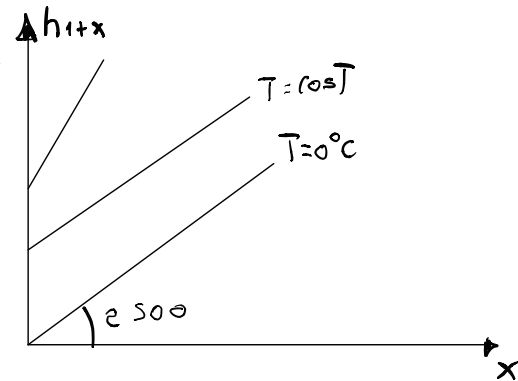
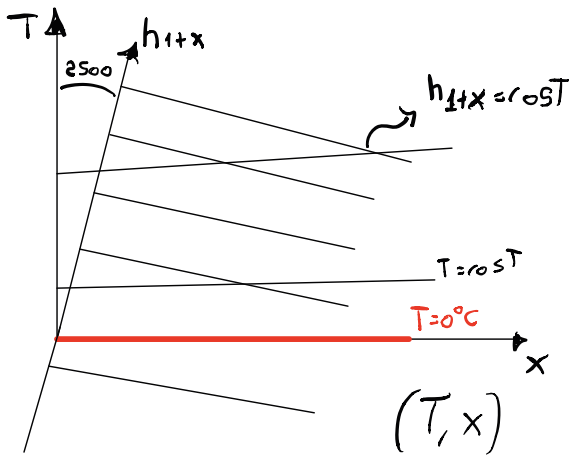
• P_v diminuisce e T diminuisce

$P_{v,sat}$ da S a Q: diminuisce molto, così come la densità di saturazione ($\rho_{v,sat}$)

Q: punto di saturazione ($\rho = 1$)

$\rho = \frac{P_v}{P_{v,sat}}$; $P_v = \text{cost}$; $P_{v,sat} \rightarrow P_v$

Deformiamo il diagramma per far collassare l'isoterma $T=0^{\circ}\text{C}$ sull'asse x



(T, x) isoterme $T \neq 0^{\circ}\text{C}$ sono divergenti (non più // asse x) per T crescenti

Esempio 1

M_v ? 50 kg aria umida

a.m.: $p = 101325 \text{ Pa}$ (p atmosferica)
 $T = 30^{\circ}\text{C}$
 $T_r = 20^{\circ}\text{C}$ (Temperatura di rugiada)

$$\varphi = \frac{p_v}{p_{v, \text{sat}}}$$

$$p_r(T_r) = 2336 \text{ Pa} \quad (20^{\circ}\text{C})$$

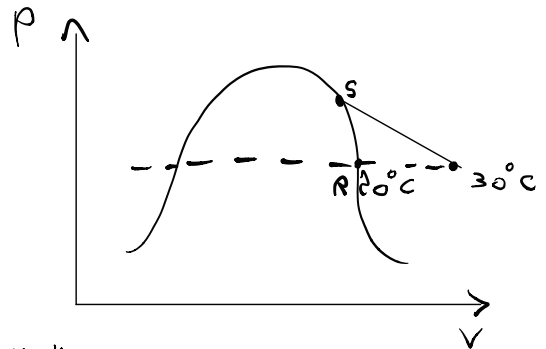
$$p_{v, \text{sat}}(T) = 4.241 \text{ Pa} \quad (30^{\circ}\text{C}) \quad [S] \rightarrow \text{Tabella}$$

$$\varphi = \frac{p_r(T_r)}{p_{v, \text{sat}}(T_s)} = 0.55$$

$$x = 0.62 \frac{\varphi p_{v, \text{sat}}}{p - p_{v, \text{sat}}} = 0.0146$$

$$x = \frac{M_v}{M_{as}} \rightarrow M_{as} = \frac{M_v}{x}$$

$$M_{au} = M_{as} + M_v = M_v \left(1 + \frac{1}{x}\right) \rightarrow M_v = \frac{x}{1+x} M_{au} = 0.72 \text{ kg}$$

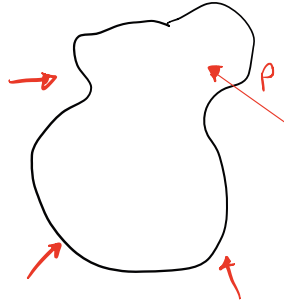


FLUIDO IN QUIETE (statica dei fluidi)

↳ Legge di Pascal:

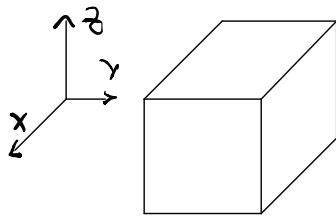
"La pressione non varia al variare dell'orientamento della superficie del corpo"

$$P_x = P_z = p \quad (\text{qualunque sia l'angolo})$$



pressione (o sforzo): forza agente su una superficie

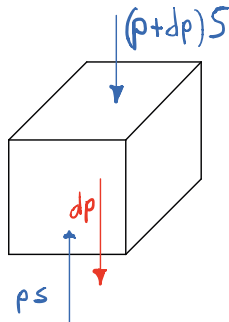
Legge di Stevino



Volumetto fluido dv
Base cubetto S
Altezza dz

quindi $dV = S dz$

Forza peso: $dP = g m = g \rho dv$ (ρ = densità fluido) (lungo la verticale z)



All'equilibrio $g \rho dv + (p+dp)S = p \cdot S$

$$g \rho S dz + pS + dpS = pS$$

$$dp = -\rho g dz \quad \text{Legge di STEVINO}$$

↳ alla base della statica dei fluidi
↳ la pressione dipende dalla quota z

Integrando $p(z) = p_0 - \int_0^z \rho g dz \quad (*) \quad z_0 \rightarrow z=0$

Consideriamo $\rightarrow \begin{cases} p_0 \rightarrow p(z=0) \\ \rho_0 \rightarrow \rho(z=0) \\ T_0 \rightarrow T(z=0) \end{cases}$

Atmosfera: fluido sotto l'azione della gravità

• Atmosfere tipo:

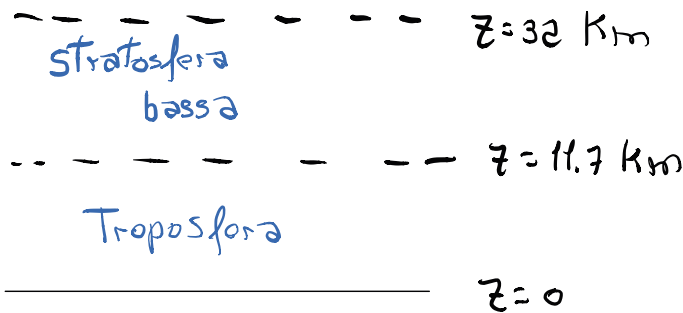
• Atmosfera isocora (densità uniforme)

$$dp = 0 \rightarrow \rho = \rho_0 = \text{cost}$$

Da (*) $p = p_0 - \underbrace{g \rho_0}_{\text{poiché costante}} z$

Stesso andamento esponenziale di ρ per la densità ρ .

→ atmosfera isoterma ($dT=0$) → ρ e p diminuiscono esponenzialmente con la quota z .



• L' Atmosfera isoterma descrive la stratosfera terrestre a partire dalla topopausa (11.7 km) fino a 32 km stratosfera bassa (dagli 11.7 a 32 km)

$$T \approx -55^\circ\text{C} \quad c = \text{cost}$$

• Atmosfera adiabatica (non scambia calore)
- eq. isentropica (p, T)

$$\frac{dp}{dT} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{dT}{T}$$

• $\frac{p}{p_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$ Eq. (*) e equazione dei gas perfetti

$$\frac{dT}{dz} = \left(\frac{T}{p}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \frac{dp}{dz} \rightarrow \text{sterino}$$

↙ gas perfetti

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{g}{R^*}$$

$$\Gamma_d = \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{g}{R^*} \quad \text{tasso decremento (adiabatica)}$$

$$\frac{dT}{dz} = -\Gamma_d$$

$$T(z) = T_0 - \Gamma_d z$$

• In caso di aria, $R^* = 287 \frac{\text{J}}{\text{kgK}}$ ($\gamma = 1.4$) → $\Gamma_v = 9.7 \text{ K/Km}$

Noto $T(z)$, attraverso $\frac{p}{p_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$ otteniamo $p(z)$

$$\frac{dT}{dz} = -\Gamma \rightarrow T = T_0 - \Gamma z$$

Dalla (*) e eq. stato dei gas perfetti

$$dp = -g \rho dz = g \rho \frac{dT}{\Gamma} = \frac{gP}{R^* \Gamma} \frac{dT}{T}$$

Integrando l'espressione otteniamo $\frac{P}{P_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{g}{R^* \Gamma}}$ → legame tra pressione e temperatura nella troposfera reale

Riassumendo

$$\Gamma < \Gamma_d < \Gamma_v$$

Gradiente termico effettivo Γ è minore di Γ_d (e di Γ_v)

Troposfera globalmente stabile



particella aria secca adiabatica all'interno della troposfera reale
Salendo la quota, la particella si espande (p atmosferica inferiore) e si raffredda più velocemente dell'aria circostante.

Particella e aria circostante alla stessa quota hanno la stessa pressione, la particella diventerà più pesante (aumenta ρ)

$$\Gamma < \Gamma_d < \Gamma_v \quad (\text{localmente, in vicinanza del suolo e grazie al calore scambiato con questo})$$

Il Gradiente termico può invertirsi e diventare positivo → T

T aumenta con la quota z

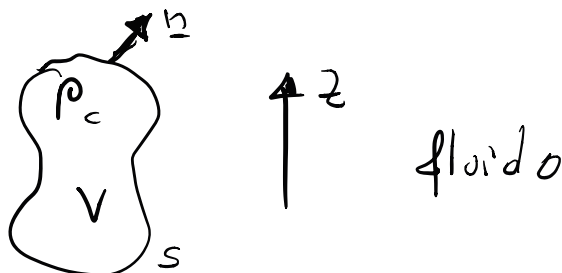
→ inversione termica (nebbie, foschie)
↳ (T in valle < T in montagna)

SPINTA FLUIDOSTATICA

→ Corpo immerso in fluido.

Principio Archimedeo:

Spinta del fluido sul corpo è pari al peso del fluido che è stato spostato dal corpo.



Corpo: densità ρ_c , volume V e superficie S .

BAROMETRO

misura della pressione atmosferica

Stevino $dp = -\rho g dz$

$$P_r - P_a = -\rho g h$$

ρ = densità liquido barometrico
 P_r = pressione residua
 P_a = pressione atmosferica

Liquido con densità elevate per contenere la variazione di quota h .

→ mercurio $\rho = 13.600 \text{ Kg/m}^3$

• P_r Trascurabile

Mercurio $P_r = P_{vs} (T = 20^\circ\text{C}) = 0.156 \text{ Pa}$

→ $P_a = \rho g h$

(P_r trascurabile per mercurio)

A $T = \text{cost}$ la disponibilità di una lettura di calibrazione permette di utilizzare anche un barometro difettoso, cioè affetto da una pressione residua non trascurabile. Siano h^* e P_a^* i dati di questa lettura di calibrazione.

$T = \text{cost}$ e $PV = \text{cost}$

Bolla d'aria in cima alla canna barometrica

S : sezione canna barometrica

Volume bolla d'aria = $S(H - h)$

Valore ($PV = \text{cost}$)

$$P_r S (H - h) = P_r^* S (H - h^*)$$

Stevino

$$P_a = P_r + \rho g h \quad \text{e} \quad P_a^* = P_r^* + \rho g h^*$$

$$P_a = \rho g h + \underbrace{\frac{H - h^*}{H - h} \cdot (P_a^* - \rho g h^*)}_{\text{stima } P_r}$$

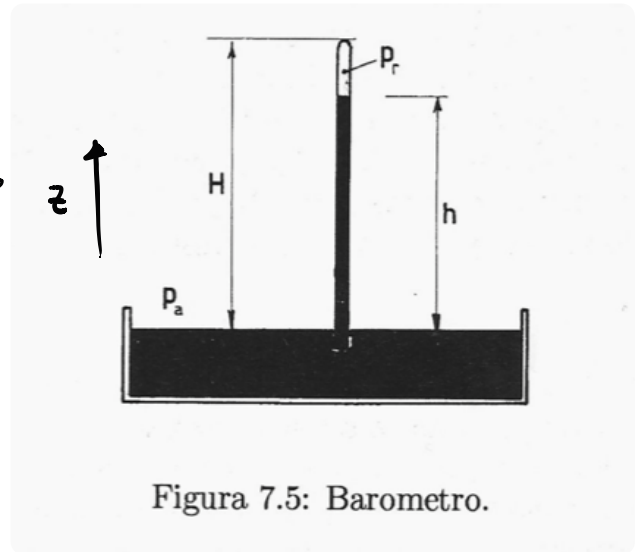


Figura 7.5: Barometro.

FLUSSI FONDAMENTALI

Traiettoria: luogo dei punti occupati dalla particella nel corso del suo moto (Lagrangiano)

Linea di corrente: Luogo dei punti tangente al vettore velocità \vec{V}_t, \vec{V}_x (Euleriana)

Traiettoria \equiv Linea di corrente se moto stazionario

Traiettoria \neq Linea di corrente se campo instazionario

• Scia a valle di un cilindro circolare

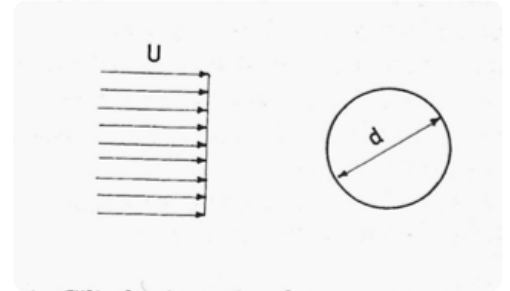
d : diametro cilindro

U : corrente uniforme ($L \gg d \rightarrow$ effetti estremità trascurabili)

L : altezza cilindro

\rightarrow moto 2D (flusso uguale in ogni sezione)

μ, ρ : viscosità dinamica e densità fluido



Numero di Reynolds

$$Re = \frac{\rho U d}{\mu} = \frac{U d}{\nu}$$

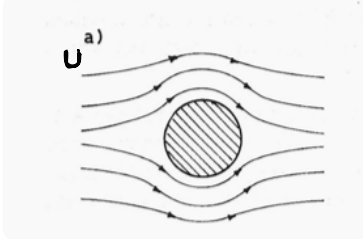
(ν : viscosità cinematica)

\rightarrow Re rapporto tra forze inerziali e forze viscosi.
Per Re bassi prevalgono le forze viscosi mentre per Re alti prevalgono i fenomeni inerziali.

• Re parametro di similitudine \rightarrow configurazioni allo stesso Re sono identiche ($U_1 = 2 U_2, d_1 = \frac{1}{2} d_2$)

Evoluzione flusso al variare di Re

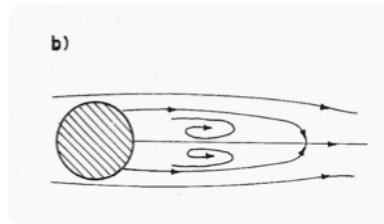
• $Re \ll 1 \rightarrow$ effetti viscosi dominanti



• Perfetta simmetria delle linee di corrente tra monte e valle
Moto stazionario.

Es. olio che investe cilindro piccolo con bassa velocità

• $1 < Re < 40 \rightarrow$ Flusso non più simmetrico



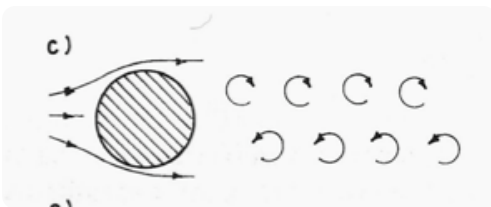
Vortici controrotanti nella parte posteriore del cilindro. (L'estensione cresce con Re)
Moto stazionario, i vortici hanno posizioni fisse nel tempo.

• $40 < Re < 150$

- scia instazionaria

- distacco dei vortici controrotanti

- scia di Von Karman



Vortici trascinati a valle e sostituiti da altri vortici. (2 schiere vorticosi parallele)

f : frequenza distacco vortici

\rightarrow Numero di Strouhal: $St = \frac{fd}{U}$

$\rightarrow St \approx 0.2$ fino a $Re \approx 10^7$

\rightarrow costante per un grande range di Re

$Re > 10^7 \rightarrow St \approx 0.3$

Convenzioni naturali tra pareti orizzontali

(lunghezza molto superiore a d)

$$T_i \neq T_s$$

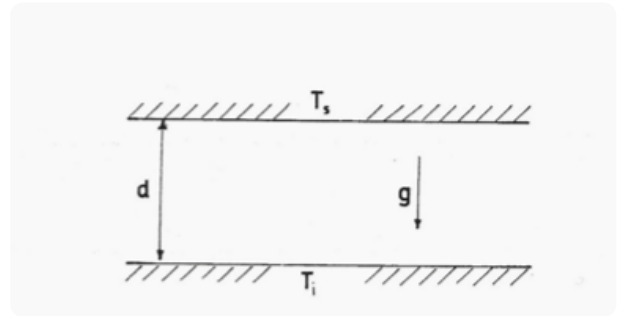
• $T_i < T_s$: fluido in quiete

• $T_i > T_s$: possibili moti convettivi

Fluido vicino a T_i subirà dilatazione termica, si espande e inizia a salire

→ Innesca correnti ascendenti e discendenti

(Fluido vicino a T_s è più pesante e scende)



• Numero di Rayleigh, Ra

Fattori favorevoli:

$T_i - T_s > 0$, g , α (coefficiente dilatazione termica), d

Fattori sfavorevoli:

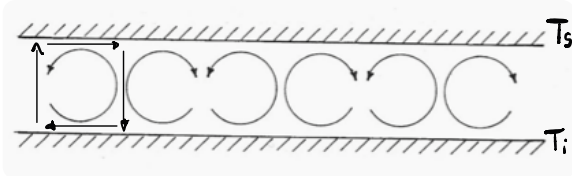
γ , K

$$Ra = \frac{(T_i - T_s) g \alpha d^3}{\gamma K} \quad (\text{adimensionale})$$

• $Ra_{cr} \approx 1700 \rightarrow$ convezione naturale (Ra critico)

• $Ra > Ra_{cr} \approx 1700$ moti ascendenti e discendenti

→ celle di Bénard → + moti orizzontali



• Celle 2D e ordinate

→ celle convettive controrotanti

• Campo Termico: flusso di calore da T_i a T_s

• Fluido in quiete ($Ra < 1700$) → flusso termico conduttivo

$$\dot{q}_{\text{conduttivo}} = -\lambda \frac{T_s - T_i}{d} \quad (\text{Fourier})$$

dipende dalla natura del fluido, da T e dalle caratteristiche del campo di moto

↑

• $Ra > 1700$

→ scambio termico convettivo + conduttivo

$$\dot{q} \propto (T_i - T_s)$$

$$\dot{q} = h (T_i - T_s)$$

→ h [W/(m²K)] : coefficiente di scambio termico
 \dot{q} flusso termico per unità di superficie
 [W/m²]

↓
 $Ra < 1700$: regime conduttivo $h = \frac{\lambda}{d}$
 $Ra > 1700$: regime convettivo $h > \frac{\lambda}{d}$

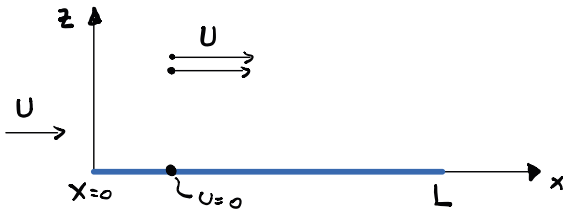
• Numero di Nusselt

$$Nu = \frac{\dot{q}}{\dot{q}_{\text{cond}}} = \frac{hd}{\lambda} \quad (\text{adimensionale})$$

(\dot{q}_{cond} : flusso che si realizzerebbe tra le stesse T_i e T_s in regime di conduzione pura)

→ Fluido in quiete $\dot{q} = \dot{q}_{\text{cond}} \rightarrow Nu = 1$

Strato limite (s.l.) su lamina piana



- Lamina rigida, piana, sottile, di lunghezza L (corda) investita da corrente uniforme $U \parallel$ alla lamina.

- $x=0$ bordo d'attacco
- $x=L$ bordo di fuga
- semipiano $z > 0 \rightarrow$ dorso lamina
- semipiano $z < 0 \rightarrow$ ventre lamina
- Considerazioni sul $z > 0$ (specularmente valgono per $z < 0$)

$$Re = \frac{UL}{\nu} = \frac{\rho UL}{\mu}$$

ν : viscosità cinematica fluido
 μ : viscosità dinamica
 ρ : densità fluido

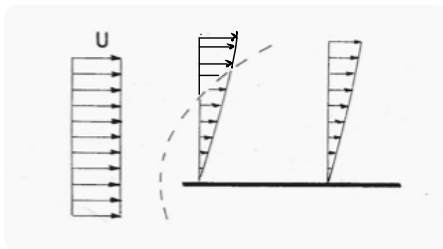
Il fluido aderisce alla parete della lamina (se la parete è ferma $u=0$), sufficientemente lontano dalla parete (z crescenti), $u \rightarrow U$.

Il raccordo tra $u=0$ ($z=0$) e $u=U$ dipende dalla viscosità del fluido (ν), da L , da U .

\rightarrow Raccordo dipende da Re .

\rightarrow Regione di raccordo è più ampia per Re bassi.

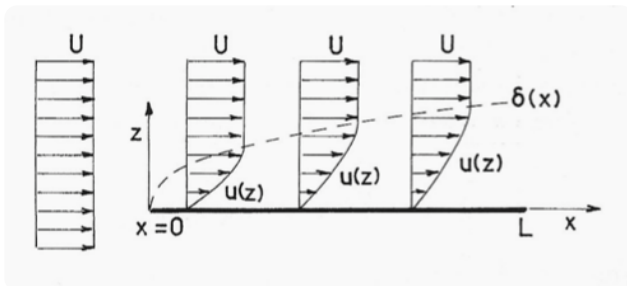
$$\bullet Re \approx 10^0 - 10^1$$



- la lamina è avvolta da un'ampia regione il cui contorno è tratteggiato, entro il quale il profilo lineare della velocità evolve con estrema gradualità
- \rightarrow moto dominato da effetti viscosi

$Re \approx 10^4$ (la regione del raccordo di velocità si contrae sempre di più)

\rightarrow spessore massimo ha una regione di raccordo $\approx 1\%$ dalla $L \rightarrow$ STRATO LIMITE



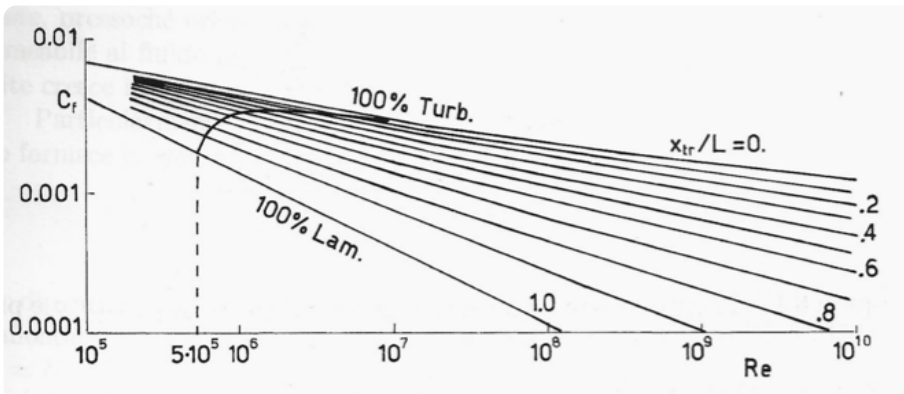
$\delta(x)$ definisce la regione di raccordo, è lo spessore dello strato limite (s.l.)
 \rightarrow Fuori dallo s.l. la corrente non è influenzata dalla lamina.

- All'interno dello s.l. \rightarrow variazioni di u (u da U a 0 in $z=0$) e sono presenti gradienti di velocità $\frac{\partial u}{\partial z}$ ($\mu(z,x)$).
- La viscosità ν è presente ovunque $\rightarrow \nu$ viene attivata all'interno dello strato limite da sensibili gradienti di velocità $\frac{\partial u}{\partial z}$
- Regione esterna: regione non viscosa approssimabile a fluido ideale (privo di viscosità e diffusione)
- equazioni ridotte per regione esterna e equazioni s.l. per regione interna (aerodinamica)

• Numero Re locale (Re_x) $x \in [0, L]$
 $\hookrightarrow Re_x = \frac{x U}{\nu} = \frac{L U}{\nu} \frac{x}{L} = Re \frac{x}{L}$

Quando $Re_x = 5 \cdot 10^5 = Re_{cr}$ allora $x = x_{tr} \rightarrow \frac{x_{tr}}{L} = \frac{5 \cdot 10^5}{Re}$
 Se Re aumenta allora x_{tr} risale verso il bordo di attacco

• Diagramma $C_D(Re)$ nel caso di Transizione naturale sulla lamina liscia (log-log)



• Se $\frac{x_{tr}}{L} = 1 \rightarrow$ s.l. è laminare fino al bordo di fuga.

$\rightarrow C_D = \frac{1.328}{\sqrt{Re}}$

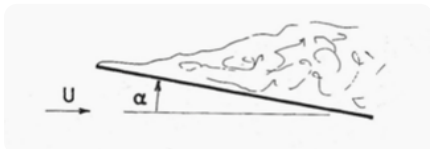
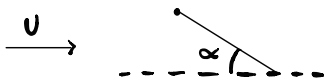
• Se $\frac{x_{tr}}{L} = 0 \rightarrow$ s.l. Turbolento già da $x=0$

$\rightarrow C_D = \frac{0.074}{Re^{1/5}}$ semiempirica

• Tutti i casi intermedi, in cui $0 < \frac{x_{tr}}{L} < 1$, a Re fissato dal diagramma leggiamo C_D e il punto di transizione.

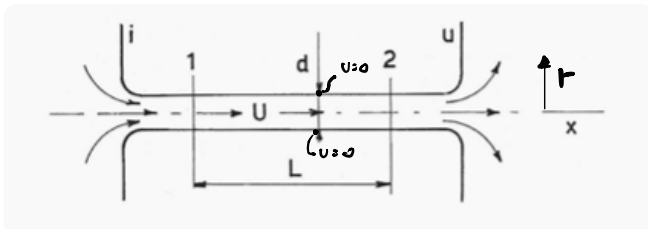
Transizione forzata: si anticipa o ritarda il punto x_{tr} (rugosità, ostacoli, aspirazione, ...)

• Lamina inclinata di α rispetto a U



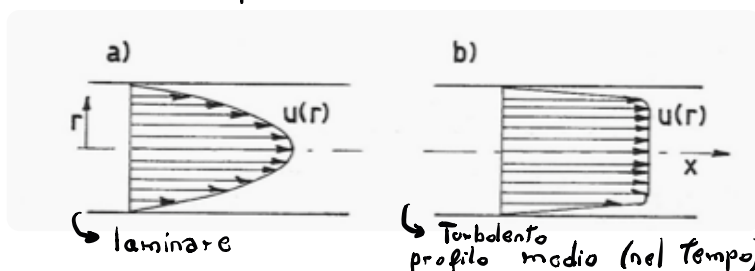
- \rightarrow Transizione si sposta
- \rightarrow Portanza forata ortogonale ad U
- \rightarrow α sufficientemente elevato per dare portanza ma per α troppo elevati il fluido si separa sul dorso creando scia ampia e turbolenta (stallo)

Flusso nel condotto a sezione costante



- $p_i > p_u \rightarrow$ flusso da i a u
- condotto cilindrico a sezione costante
- Lunghezza $L \gg d$ (diametro condotto)
 \rightarrow flusso completamente sviluppato.
 Corrente stazionaria e uniforme, linee di corrente // asse x

• La velocità dipende dalla r ma non da x $\rightarrow U(r)$



- laminare: profilo parabolico
- turbolento: profilo medio più piatto (costante nel centro del condotto e alti gradienti di velocità a parete)
 $\rightarrow U(r)$

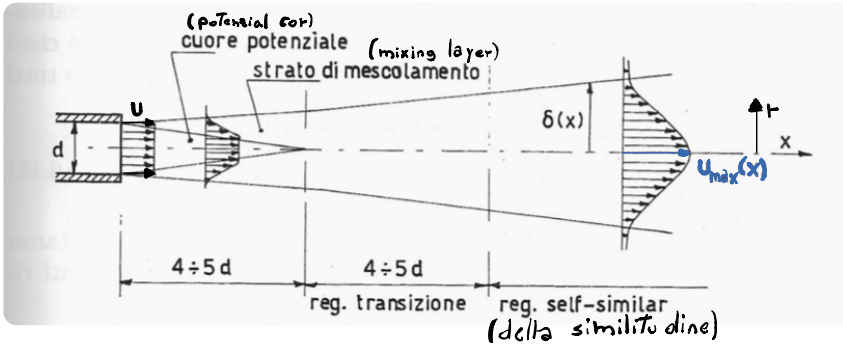
• Uniformità della velocità lungo x \rightarrow velocità media U (sulla sezione S) è costante in ogni sezione

GETTO

- Flusso che fuoriesce da un orifizio in un ambiente esterno con stesso fluido a riposo.
- con sezione circolare, d diametro orifizio, U velocità uniforme.

$$Re = \frac{dU}{\nu} \rightarrow \text{Regime laminare: } Re \approx 10 \text{ (poco interessante)}$$

Regime Turbolento



potenzial core: profilo di velocità uniforme

mixing layer: processi di mescolamento, legato alla diffusione turbolenta

(internamente allo strato di mescolamento il getto mantiene il profilo uniforme di velocità, sebbene su una sezione progressivamente decrescente fino ad annullarsi)

Regione self-similar

- U_{max} : velocità massima sull'asse x
- $\delta(x)$: distanza dall'asse x per cui $u = 0.01 u_{max}$ (1% di U_{max})
- (x) $u_{max}(x) \propto x^{-n}$ $\delta(x) \propto x^m$ (se $m=n=1$ caso in cui sezione del getto circolare)
- il getto rallenta centralmente e si allarga trasversalmente.
- Caratteristica della regione self-similar è il fatto che i profili della velocità sono tutti descrivibili da un'unica funzione adimensionale f .

$$\frac{u(x, r/\delta)}{u_{max}(x)} = f(r/\delta) \quad \leftarrow \begin{matrix} \text{profili di velocità sono di forma costante} \\ r/\delta \in [0, 1] \end{matrix}$$

Tre proprietà attraverso la sezione getto (S):

- La portata in massa $\int_S \rho u ds$ lungo x aumenta \Rightarrow implica che l'allargamento del getto è maggiore del suo rallentamento (in zona centrale)

$$S = \pi r^2 \cdot ds = 2\pi r dr \rightarrow \frac{d}{dx} \int_0^{+\infty} \rho u 2\pi r dr > 0$$
- Il flusso di quantità di moto che attraversa una sezione del getto è costante

la quantità di moto persa dalle particelle fluide più prossime all'asse a causa del loro rallentamento è stata ceduta a quelle più esterne, accelerate dalla quiete al movimento.

$$\frac{d}{dx} \int_0^{+\infty} \rho u^2 2\pi r dr = 0$$
- Energia cinetica lungo x diminuisce $\rightarrow \frac{d}{dx} \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} \rho u^3 2\pi r dr < 0$

La ragione di ciò è nei moti turbolenti o nell'azione della viscosità che si traduce in dissipazione. Ciò non viola il primo principio della termodinamica, perché l'energia cinetica viene trasformata in calore. Trasformazione reversibile.

EQUAZIONI DI BILANCIO

Fluido come un sistema continuo ($K_m \ll 1$)

Posizione particella fluida $\vec{x}(t, \vec{x}_0)$ (x_0 : posizione di partenza della particella) $\vec{x} = \vec{x}(t, \vec{x}_0)$

Ad ogni \vec{x}_0 corrisponde una sola \vec{x} (al generico t) e viceversa \rightarrow funzione biunivoca

Se la funzione $x(t, x_0)$ indicava la posizione all'istante t della particella che inizialmente si trovava in x_0 , la sua inversa $x_0(t, x)$ indica la posizione iniziale della particella che all'istante t si trova nel punto dello spazio x

• Velocità particella: $\vec{J}(t, \vec{x}_0) = \frac{d}{dt} \vec{x}(t, \vec{x}_0) \rightarrow$ Funzione inversa: $\vec{U}(t, \vec{x})$ (perché $\vec{x}_0 = \vec{x}_0(t, \vec{x})$)

• Generica grandezza f , funzione di (t, \vec{x})

$$f(t, \vec{x}) = f(t, \vec{x}(t, \vec{x}_0)) = \tilde{f}(t, \vec{x}_0) \quad \left[\begin{array}{l} \tilde{f} \rightarrow (t, \vec{x}_0) \\ f \rightarrow (t, \vec{x}) \end{array} \right] \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} \tilde{f} \rightarrow (t, \vec{x}_0) \\ f \rightarrow (t, \vec{x}) \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \text{si può esprimere in entrambi} \\ \text{i modi} \end{array}$$

(t, \vec{x}_0) : coordinate Lagrangiane (o materiali) \rightarrow seguiamo la particella che inizialmente era in \vec{x}_0

(t, \vec{x}) : coordinate Euliane (generica particella che al tempo t si trova nel punto fissato \vec{x})

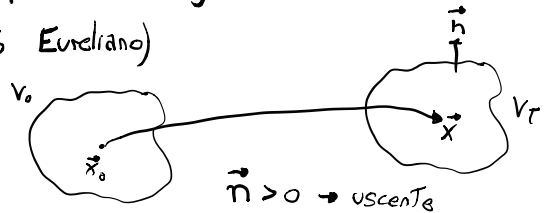
$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} = \frac{d}{dt} f(t, \vec{x}(t, \vec{x}_0)) = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \nabla f \cdot \vec{u}$$

\hookrightarrow derivate di funzione di funzione per le 3 componenti (3D)

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial t}}_{\text{variazione temporale a punto fisso (contributo Euliano)}} + \underbrace{\nabla f \cdot \vec{u}}_{\text{termine convettivo}} = \frac{Df}{Dt} \quad \text{Derivata materiale (o Lagrangiana)}$$

\hookrightarrow perché si sta seguendo lo stesso punto materiale

- Volume fluido iniziale, V_0
- Volume fluido all'istante t , V_t



Massa contenuta in V_t : $m = \int_{V_t} \rho dV \quad \rho = \frac{m}{V}$

Quantità di moto per unità di volume $\rho \vec{u}$

\hookrightarrow Q. d.m. del volume V_t : $\int_{V_t} \rho \vec{u} dV$

(Energia interna (e), entalpia (h), entropia (s) per unità di volume)

$$E = \int_{V_t} \rho e dV \quad H = \int_{V_t} \rho h dV \quad S = \int_{V_t} \rho s dV$$

Forze che agiscono su V_t :

• forze di volume (campi esterni) \rightarrow (come campo gravitazionale $\int_{V_t} \rho g dV$)

• forze di superficie \rightarrow forze di interazione tra il volume V_t e il fluido circostante.

Superficie volume $\rightarrow \partial V_t \rightarrow \int_{\partial V_t} \vec{\tau} d\sigma$

$\vec{\tau}$: vettore degli sforzi (forza per unità di superficie)

\hookrightarrow Rappresenta lo scambio di quantità di moto all'interfaccia ∂V_t

• Teorema del gradiente (corollario Teorema di Gauss)

• Teorema Gauss (\vec{f} vettore): $\int_V \nabla \cdot \vec{f} = \int_S \vec{f} \cdot \vec{n} d\sigma$

• Teorema del gradiente (ϕ scalare): $\int_V \nabla \phi = \int_S \phi \vec{n} d\sigma$

$u(x, t) \rightarrow \vec{v}(r) = 0$ (siccome moto 1D)

• Per q.d.m e energia: $\bullet \frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho u A dx = - \underbrace{\int_{V_T} \nabla p dv}_{\text{Th. gradiente}} + \int_{x_1}^{x_2} \rho g_x A dx$

$$\bullet \frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho \left(e + \frac{1}{2} u^2 \right) A dx = - \int_{V_T} \nabla(pu) dv + \int_{x_1}^{x_2} \rho g_x u A dx - \int_{V_T} \nabla \cdot \dot{q}_x dv$$

A non dipende da T e x , esprimiamo $dV = A dx$

$$\bullet \frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho dx = 0$$

$$\bullet \frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho u dx = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\delta p}{\delta x} dx + \int_{x_1}^{x_2} \rho g_x dx$$

$$\bullet \frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho \left(\frac{1}{2} u^2 + e \right) dx = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\delta(\rho u)}{\delta x} dx + \int_{x_1}^{x_2} \rho g_x u dx - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\delta \dot{q}_x}{\delta x} dx$$

$u, p, \dot{q}_x \rightarrow$ dipendono solo da x e T

x_1 e $x_2 \rightarrow x_1(t)$ e $x_2(t)$ (non si può portare il differenziale nell'integrale)

↳ Si passa a $x_0 = x_0(x, T)$

TEOREMA DEL TRASPORTO (o di Reynolds)

$\bullet x = x(t, x_0)$

$$\begin{cases} \bullet x_1 = x(t, x_{01}) \rightarrow x_{01} \text{ e } x_{02} \text{ non variano in } t \\ \bullet x_2 = x(t, x_{02}) \end{cases}$$

risultato senza dimostrazione $\rightarrow \frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} f(t, x) dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\delta f}{\delta t} + \frac{\delta}{\delta x} (f \cdot u) \right) dx$ Moto 1D (*)

\rightarrow sostituendo nelle eq. di bilancio otteniamo:

① $\bullet \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\delta \rho}{\delta t} + \frac{\delta}{\delta x} (\rho u) \right) dx = 0$ (diventa $f = \rho$) \rightarrow Affinchè l'equazione di bilancio sia valida ovunque nel dominio ($\forall x_1, x_2$)

$$\frac{\delta \rho}{\delta t} + \frac{\delta}{\delta x} (\rho u) = 0$$

richiediamo che la funzione integranda sia identicamente nulla

$$\frac{\delta \rho}{\delta t} + u \frac{\delta \rho}{\delta x} + \rho \frac{\delta u}{\delta x} = 0$$

(Equazione di continuità, moto 1D)

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) = - \frac{\delta u}{\delta x}$$

$D\rho/Dt$

\rightarrow se ρ aumenta, allora $\frac{\delta u}{\delta x} < 0$
 vuol dire che i volumi si contraggono

se ρ aumenta, V_T diminuisce (e viceversa)

- Utilizzando (*) (con $f=1$): $\frac{d}{dt} \int_{V_T} dV = \int_{V_T} \frac{\delta u}{\delta x} dV$

Se sottraiamo all'eq. per l'energia Totale l'eq dell'energia cinetica otteniamo:

$$\rho \left(\frac{\delta e}{\delta t} + u \frac{\delta e}{\delta x} \right) = -\rho \frac{\delta M}{\delta x} - \frac{\delta}{\delta x} \dot{q}_x \quad (\text{eq di bilancio per l'energia interna})$$

$$\left(\begin{array}{l} \left(\frac{\delta}{\delta x} (\rho u) = u \frac{\delta \rho}{\delta x} + \rho \frac{\delta u}{\delta x} \right) \\ - \frac{\delta}{\delta x} (\rho u) + u \frac{\delta \rho}{\delta x} = -\rho \frac{\delta M}{\delta x} \end{array} \right) \rightarrow \text{è il I principio della termodinamica}$$

$$de = \delta q + \delta \dot{a} = \delta q - p dv$$

Dall'eq. di continuità $\frac{\delta M}{\delta x} = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\delta \rho}{\delta t} + u \frac{\delta \rho}{\delta x} \right)$

dividendo per la densità e sostituendo nell'eq. di bilancio per l'energia interna

$$\frac{\delta e}{\delta t} + u \frac{\delta e}{\delta x} = \frac{p}{\rho^2} \left(\frac{\delta \rho}{\delta t} + u \frac{\delta \rho}{\delta x} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\delta \dot{q}_x}{\delta x}$$

ma $\rightarrow \rho = \frac{1}{v}$ ($v = \text{volume specifico}$) $\rightarrow \frac{\delta v}{\delta t} + u \frac{\delta v}{\delta x} = -\frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\delta \rho}{\delta t} + u \frac{\delta \rho}{\delta x} \right)$

$$\frac{\delta}{\delta t} \left(\frac{1}{\rho} \right) = \frac{\delta}{\delta t} (\rho^{-1}) = -\frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\delta \rho}{\delta t} \right)$$

l'eq di bilancio per l'energia interna diventa

$$\underbrace{\frac{\delta e}{\delta t} + u \frac{\delta e}{\delta x}}_{\frac{De}{Dt}} = - \underbrace{p \left(\frac{\delta v}{\delta t} + u \frac{\delta v}{\delta x} \right)}_{p v / Dt} - \underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\delta \dot{q}_x}{\delta x}}_{\text{calore scambiato per unità di tempo e massa}} \quad (de = -p dv + \delta q)$$

Per un gas perfetto, in un processo adiabatico ($\delta q = 0$) allora diventa:

$$\bullet \frac{De}{Dt} = \frac{p}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt} \quad \bullet \frac{De}{Dt} = -p \frac{Dv}{Dt}$$

Utilizzando $\frac{De}{Dt} = c_v \frac{DT}{Dt}$ ($de = c_v dt$) e l'equazione dei gas perfetti $p \frac{Dv}{Dt} + v \frac{Dp}{Dt} = R^* \frac{DT}{Dt}$ ($p v = R^* T$)

otteniamo $\left(\frac{\delta}{\delta t} + u \frac{\delta}{\delta x} \right) \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) = 0$ ($\gamma = \frac{c_p}{c_v}$, $R^* = c_p - c_v$)

$\rightarrow \frac{D}{Dt} \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) = 0$ $\frac{p}{\rho^\gamma}$ costante seguendo la particella nel suo moto

Eq. bilancio per entalpia

$$(h = e + \frac{p}{\rho} = e + p v)$$

Partiamo dall'eq. di bilancio dell'energia totale, $\frac{\delta}{\delta x} (\rho u)$ può essere scritto attraverso l'eq. di continuità:

PROPAGAZIONE DEL SUONO

(Moto 10)

↳ Propagazione di piccoli disturbi di un gas in quiete

$$\begin{cases} \rho(x,t) = \rho_0 + \hat{\rho}(x,t) \\ u(x,t) = \hat{u}(x,t) \\ p(x,t) = p_0 + \hat{p}(x,t) \end{cases} \begin{array}{l} \cdot \rho_0, p_0 \text{ costanti, rispetto a } x, t \\ \cdot \hat{u}, \hat{p}, \hat{\rho} : \text{piccoli disturbi al sistema complessivo } (\rho, u, p) \end{array}$$

($u_0 = 0$ gas quiete) $\hat{p} \ll p_0, \hat{\rho} \ll \rho_0$

A partire dall'eq. di continuità e l'eq. di bilancio q.d.m., andiamo a descrivere (ρ, u, p) e linearizziamo le eq. risultanti rispetto ai disturbi. ($\hat{\rho}, \hat{u}, \hat{p}$)

Dall'equazione di continuità $\frac{\delta}{\delta t} (\rho_0 + \hat{\rho}) + \frac{\delta}{\delta x} [(\rho_0 + \hat{\rho})u] = 0$

↳ essendo $\rho_0 = \text{cost}$ $\rightarrow \frac{\delta \hat{\rho}}{\delta t} + \rho_0 \frac{\delta \hat{u}}{\delta x} + \frac{\delta}{\delta x} (\hat{\rho} \cdot \hat{u}) = 0$

↳ *Trascurabile perché moltiplicazione di 2 disturbi*

(+) $\frac{\delta \hat{\rho}}{\delta t} + \rho_0 \frac{\delta \hat{u}}{\delta x} = 0$

Flusso gas isentropico, (S non si modifica) \rightarrow costante

↳ $p = p(s, \rho)$

↳ Utilizziamo lo sviluppo di Taylor al primo ordine (perché i successivi trascurabili)

$\hat{p} = p - p_0 \quad (p = p_0 + \frac{\delta p}{\delta \rho} (\rho - \rho_0) + \dots)$

↳ $p - p_0 = \frac{\delta p}{\delta \rho} \Big|_{(\rho_0, s_0)} (\rho - \rho_0) + \dots \rightarrow$ dove $c_0^2 = \frac{\delta p}{\delta \rho} (\rho_0, s_0)$

(c è la velocità di propagazione del suono) $\rightarrow \hat{p} \approx c_0^2 \hat{\rho}$

Utilizziamo l'eq. del bilancio della q.d.m. e trascuriamo le forze di volume:

$(\rho_0 + \hat{\rho}) \left(\frac{\delta \hat{u}}{\delta t} + \hat{u} \frac{\delta \hat{u}}{\delta x} \right) = - \frac{\delta}{\delta x} (p_0 + \hat{p}) \rightarrow \rho_0 \frac{\delta \hat{u}}{\delta t} + \frac{\delta}{\delta x} \hat{p} = 0$

↳ *Trascurabile (prodotto tra disturbi)*

↳ $(\hat{p} = c_0^2 \hat{\rho}) \rightarrow \rho_0 \frac{\delta \hat{u}}{\delta t} + c_0^2 \frac{\delta \hat{\rho}}{\delta x} = 0$ (*)

Derivando la (+) per t e la (*) per x e sottraendo

$\frac{\delta^2 \rho}{\delta t^2} - c_0^2 \frac{\delta^2 \hat{\rho}}{\delta x^2} = 0$

Moltiplicando la (+) per c_0^2 e poi derivando per x , derivando la (*) per t , e infine sottraendo

$c_0^2 \frac{\delta^2 \hat{\rho}}{\delta x \delta t} + c_0^2 \rho_0 \frac{\delta^2 \hat{u}}{\delta x^2} = 0$ $\xrightarrow{\text{derivando per } x} c_0^2 \frac{\delta \hat{\rho}}{\delta t} + c_0^2 \rho_0 \frac{\delta \hat{u}}{\delta x} = 0$

\rightarrow derivando la (*) in t $\rho_0 \frac{\delta^2 \hat{u}}{\delta t^2} + c_0^2 \frac{\delta^2 \hat{\rho}}{\delta x \delta t} = 0$

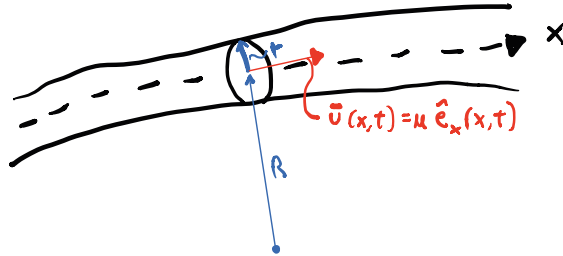
↳ $\frac{\delta^2 \hat{u}}{\delta t^2} - c_0^2 \frac{\delta^2 \hat{\rho}}{\delta x^2} = 0$ (Eq. onde per moto 10 / Eq. D'Alembert)

Moto quasi 1D

$A(x, \tau)$ = area sezione condotto variabile in x e τ .

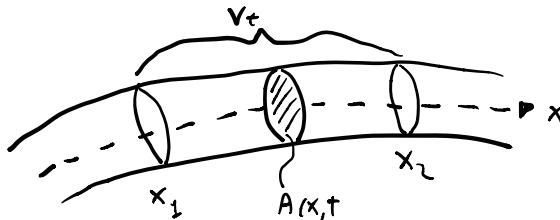
↳ Ipotesi semplificatrici: $A = \pi r^2$ ($r = r(x, \tau)$)
 • $\frac{dr}{d\tau} \ll 1$ (l'aria varia lentamente lungo x)
 • $r \ll R$

↳ con queste ipotesi: velocità parallele all'asse del condotto e le grandezze medie sulla sezione sono funzione di x, τ .



x : ascissa curvilinea lungo asse condotto
 r : raggio del condotto
 R : raggio di curvatura dell'asse condotto
 $\hat{e}_x(x, \tau)$: versore tangente all'asse condotto

- Partendo dalle equazioni di bilancio nella forma più estesa:
 Consideriamo un volume iniziale V_0 e un generico volume all'istante τ, V_τ .
 → area e direzione della velocità **NON** sono più costanti ($A(x, \tau)$ e $\bar{u} \cdot \hat{e}_x(x, \tau)$)



V_τ : volume occupato tra le 2 sezioni x_1 e x_2
 • Sforzi di taglio e flussi termici saranno in generale presenti

Bilancio di massa:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_\tau} \rho dV = 0 \quad \rightarrow \quad dV = A dx \quad (A = A(x, \tau)) \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho A(x, \tau) dx = 0$$

↳ Applicando l'equazione del teorema del trasporto ($\phi = \rho A$):

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\delta}{\delta t} (\rho A) + \frac{\delta}{\delta x} (\rho A u) \right) dx = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\delta}{\delta t} (\rho A) + \frac{\delta}{\delta x} (\rho A u) = 0 \quad \text{(eq. continuità moto) (quasi 1D)}$$

Se $A = A(x)$ e $\rho = \text{cost} = \rho_0$ (fluido incompressibile)

$$\cancel{\rho_0} \frac{\partial A}{\partial t} + A \cancel{\frac{\delta \rho_0}{\delta t}} + \rho_0 \frac{\delta (A u)}{\delta x} + A u \cancel{\frac{\delta \rho_0}{\delta x}} = 0$$

Portata volumica ($\dot{V} = uA$) e la portata in massa ($\dot{m} = \rho uA$) si conservano in ogni sezione:

$$\frac{\delta (A u)}{\delta x} = 0 \quad \frac{\delta (\rho_0 A u)}{\delta x} = 0 \quad (u: \text{velocità media sulla sezione})$$

Bilancio q.d.m.

$$\bar{u} = u \hat{e}_x(x, \tau)$$

↳ Dall'equazione di bilancio della q.d.m.:

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho u \hat{e}_x A(x, \tau) dx = \int_{\delta V_\tau} (-p \hat{n} + \tilde{\tau}(v)) d\sigma + \int_{x_1}^{x_2} \rho \bar{g} A(x, \tau) dx$$

↳ Applicando l'equazione del teorema del trasporto per il primo membro:

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \underbrace{\rho u \hat{e}_x A(x, \tau)}_{\phi} dx = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\delta}{\delta t} (\rho u \hat{e}_x A(x, \tau)) + \frac{\delta}{\delta x} (\rho u^2 \hat{e}_x A(x, \tau)) \right] dx$$

Nell'eq (*) utilizziamo l'equazione di continuità per moto quasi 1D e dividendo per A:

$$\rho \left(\frac{\delta}{\delta t} \left(e + \frac{1}{2} u^2 \right) + u \frac{\delta}{\delta x} \left(e + \frac{1}{2} u^2 \right) \right) = - \frac{\delta}{\delta x} (\rho u) + \rho g_x u - \frac{\delta}{\delta x} (q_x) \rightarrow \text{eq. bilancio energia totale}$$

(Eq. bilancio energia totale) - (eq. bilancio energia cinetica) = eq. bilancio energia interna

$$\rho \left(\frac{\delta e}{\delta t} + u \frac{\delta e}{\delta x} \right) = \rho \frac{\delta u}{\delta x} - \frac{\delta}{\delta x} (q_x) + \underbrace{\frac{2}{r} \tau_{(r)}^x u}_{\substack{\text{dissipazione di calore dovuta} \\ \text{alla viscosità}}} \left(\frac{\delta}{\delta x} (\rho u) = u \frac{\delta \rho}{\delta x} + \rho \frac{\delta u}{\delta x} \right)$$

Alle 3 equazioni di bilancio dell'energia vanno aggiunte eq. costitutive per $\tau_{(r)}^x$ (Newton) e per q_x (Fourier), oltre a eq. di stato.

TEOREMA DI BERNOULLI

↳ fluido ideale ($\tau_{(r)}^x = 0$).

↳ Eq. q.d.m. moti quasi 1D

$$\rho \left(\frac{\delta u}{\delta t} + u \frac{\delta u}{\delta x} \right) = - \frac{\delta p}{\delta x} + \rho g_x$$

• Campo di forze di volume conservativo.

(Campo conservativo: il lavoro tra un punto iniziale e uno finale non dipende dal percorso compiuto, ma dai punti di applicazione.)

$$\vec{g} = - \nabla \phi \quad (\phi \text{ è energia potenziale per unità di massa})$$

$$g_x = - \frac{\delta \phi}{\delta x}$$

Fluido barotropico: $\rho(p)$ e non da T e viceversa ($p(\rho)$)
(fluido baroclinico $\rho(p, T)$)

$$\rightarrow \frac{\delta u}{\delta t} + u \frac{\delta u}{\delta x} = - \frac{1}{\rho} \frac{\delta p}{\delta x} - \frac{\delta \phi}{\delta x} \quad \left(u \frac{\delta u}{\delta x} = \frac{\delta}{\delta x} \left(\frac{1}{2} u^2 \right) \right) \quad (*)$$

• Se $\rho = \rho_0 = \text{cost}$

$$\hookrightarrow \frac{\delta u}{\delta t} + \frac{\delta}{\delta x} \left(\frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho_0} + \phi \right) = 0 \rightarrow \text{se il flusso } \vec{v} \text{ è stazionario} \rightarrow \frac{\delta u}{\delta t} = 0$$

$$\frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho_0} + \phi = \text{cost (lungo } x)$$

• ρ non costante, $\rho(p)$ ma anche $p(\rho)$:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\delta p}{\delta x} = \frac{1}{\rho} \frac{\delta p}{\delta \rho} \frac{\delta \rho}{\delta x} = \frac{1}{\rho} p'(\rho) \frac{\delta \rho}{\delta x} \quad (p = p(\rho)) \quad (p'(\rho) = \frac{\delta p}{\delta \rho})$$

Chiamiamo $P'(\rho) = \frac{p'(\rho)}{\rho}$ con $P'(\rho)$ funzione in ρ e ricavando la primitiva

$$P(\rho) = \int \frac{p'(\rho)}{\rho} d\rho$$

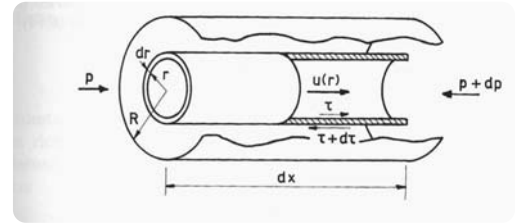
$$\hookrightarrow \text{La } (*) \text{ diventa } \frac{\delta u}{\delta t} + \frac{\delta}{\delta x} \left(\frac{u^2}{2} + P(\rho) + \phi \right) = 0$$

$$\rightarrow \frac{\delta p}{\delta x} = \underbrace{\frac{\delta p}{\delta \rho}}_{P'(\rho)} \frac{\delta \rho}{\delta x} = P'(\rho) \frac{\delta \rho}{\delta x} = \frac{P'(\rho)}{\rho} \frac{\delta p}{\delta x} = \frac{\delta p}{\delta \rho} \frac{1}{\rho} \frac{\delta p}{\delta x} = \frac{1}{\rho} \frac{\delta p}{\delta x}$$

$$\text{Se il flusso è stazionario} \quad \frac{u^2}{2} + P(\rho) + \phi = \text{cost (lungo } x) \quad \rho = \rho(p)$$

Coefficiente di perdita di carico (o di resistenza)

$$\hookrightarrow f = - \frac{dp/dx}{\rho U^2/2} di \quad \longrightarrow \quad f = \frac{8 \tau_w}{\rho U^2}$$



• Bilancio di forze relativamente all'elemento infinitesimo:

$$\frac{p \cdot 2\pi r dr - (p+dp)(2\pi r dr)}{dx} = \frac{\tau (2\pi r dx) - (\tau+dt\tau)(2\pi r dx)}{dr}$$

area corona circolare $\frac{d}{dx} (2\pi r dr p) dx = \frac{d}{dr} (2\pi r dx \tau) dr$
 forma agente sulla corona circolare $\frac{d}{dx} (2\pi r dr p) dx = \frac{d}{dr} (2\pi r dx \tau) dr$
 superficie laterale corona dr

→ (ora τ non solo a parete)

$$2\pi r dr \frac{dp}{dx} dx = 2\pi r dx \frac{d}{dr} (\tau r) dr \quad \longrightarrow \quad r \frac{dp}{dx} = \frac{d}{dr} (r \tau)$$

Legge di Newton: $\tau = \mu \frac{du}{dr} \quad (\mu(r))$

$$\frac{d}{dr} (r \frac{du}{dr}) = \frac{r}{\mu} \frac{dp}{dx} \quad \left(\frac{dp}{dx} < 0 \quad \frac{dp}{dx} = \text{cost} \quad p = p(x) \right)$$

↳ Integrando lungo r: $r \frac{du}{dr} = \frac{1}{\mu} \frac{r^2}{2} \frac{dp}{dx} + A$

↳ integrando ancora in r: $u(r) = \frac{1}{4\mu} r^2 \frac{dp}{dx} + A \log r + B$

Condizioni al contorno per determinare A e B: • μ finito per $r=0$ (asse condotto)

→ $A=0$

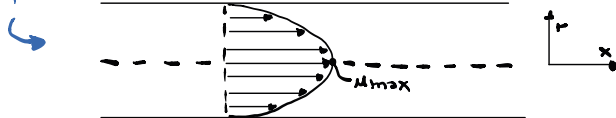
• $r=R \rightarrow$ il fluido abbia velocità nulla a parete → $u(r=R)=0$
 → $B = -\frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} R^2$

$$u(r) = -\frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} (R^2 - r^2) \quad (\text{paraboloide di rivoluzione})$$

u_{max} si ha per $r=0$

$$u_{max} = \frac{R^2}{4\mu} \left(-\frac{dp}{dx} \right) \quad \left(\frac{dp}{dx} < 0 \right)$$

Profilo di velocità di Hagen-Poiseuille



Velocità media U

$$U = \frac{1}{S} \int_S u(r) ds \quad \text{si sezione circolare}$$

$$S = \pi R^2$$

$$S(r) = \pi r^2 \rightarrow ds = 2\pi r dr \quad (r \in [0, R])$$

$$U = \frac{\int_0^R u(r) 2\pi r dr}{\pi R^2}$$

$$U = \frac{R^2}{8\mu} \left(-\frac{dp}{dx} \right) = \frac{1}{2} u_{max} \quad (\text{portata in volume } Q \text{ che attraversa la sezione } S \text{ per unità di tempo})$$

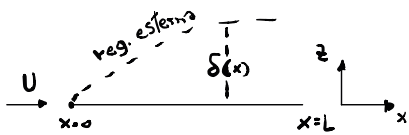
• $Q = SU = \pi R^2 U = \frac{\pi R^4}{8\mu} \left(-\frac{dp}{dx} \right)$ La portata in massa è $\rho Q = Q_m$

Coeff. perdita di carico: $f = - \frac{dp/dx}{\rho U^2/2} di$

sezione circolare $di = 2R$
 Sostituendo la definizione di U $f = \frac{64 \mu}{\rho U d} = \frac{64}{Re} \quad \left(Re = \frac{\rho U d}{\mu} = \frac{U d}{\nu} \right)$

$f = \frac{64}{Re}$ flusso laminare

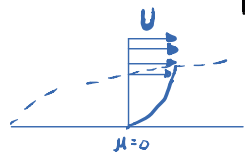
• Strato limite cinematico e Termico



$$Re = \frac{UL}{\nu}$$

per $Re \geq 10^4 \rightarrow$ strato limite (s.l.)

L: corda lamina
 $\mu=0$ a parete ($z=0$)
 $\mu \rightarrow U$ per $z \geq \delta(x)$



$\delta(x) \rightarrow$ spessore strato limite
 $\delta(L) \rightarrow$ spessore di strato limite massimo (ottenuto sul bordo di fuga $x=L$)

• Strato limite Termico

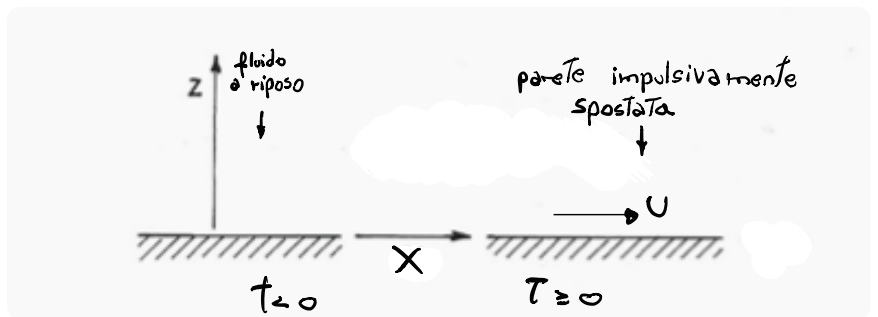
\rightarrow parete ha temperatura T_p diversa dalla temperatura del fluido (T_f o T_{∞})

Spessore strato limite termico $\delta_T(x)$

$\delta_T(x)$: delimita la regione di fluido coinvolta nel fenomeno termico.

• Nei gas $\delta_T(x) \approx \delta(x)$ (stesso ordine di grandezza)

I problema di Stokes



$z < 0$ parete infinita (in x e y) è ferma e il fluido è a riposo

$z \geq 0$ la parete si muove con velocità U (cost) lungo x

Moto instazionario per l'attivazione della parete e alla diffusione viscosa.

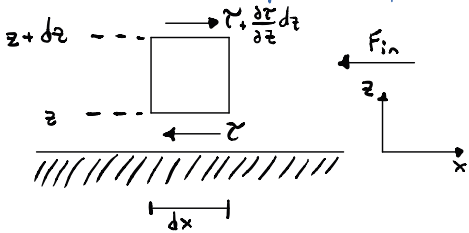
\rightarrow coinvolti sforzi di taglio. (analogia con esperimento di Newton)

La velocità U impone la sua direzione lungo x alla velocità u delle particelle fluide

$$u(x, y, z, t)$$

\hookrightarrow essendo parete infinita in x e y $\rightarrow v = u(z, t)$

Bilancio dinamico della particella fluída



$$dm = \rho dV = \rho dx dy dz$$

massa particella infinitesima Volume infinitesimo

\hookrightarrow la particella subisce un'accelerazione $\frac{Du}{Dt}$ ed è soggetta ad una forza inerziale F_{in} .

$$\hookrightarrow F_{in} = \rho dx dy dz \frac{Du}{Dt} \quad (m\vec{a})$$

\hookrightarrow (contributo a punto fisso + contributo convettivo)

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \quad u = u(z, t)$$

$$\rho dx dy dz \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \tau dx dy - \left(\tau + \frac{\partial \tau}{\partial z} dx \right) dx dy \right) = 0$$

$$F_{in} = \rho dx dy dz \frac{Du}{Dt}$$

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \tau}{\partial z}$$

da legge di Newton $\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial z}$

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (\text{equazione del calore o della diffusione})$$

$$\mu = \frac{\mu}{\rho} \quad (\text{viscosità cinematica})$$

Dalla definizione di $\eta \rightarrow \delta \approx 4\sqrt{\nu t}$ (profondità di penetrazione disturbo) (per $\eta \approx 2$)
 δ definisce la soglia (lungo z) oltre la quale il disturbo diffusivo è trascurabile ($\frac{\mu}{U} < 0.01$)

$\tau \rightarrow 0 \quad \delta \text{ piccolo}$
 $\tau \rightarrow \infty \quad \delta \rightarrow \infty$

Velocità di penetrazione del disturbo $\rightarrow \frac{d\delta}{d\tau} = v_d = 2\sqrt{\frac{\nu}{\tau}}$

- δ cresce con $\sqrt{\tau}$
- v_d decresce con $1/\sqrt{\tau}$

U velocità parete è completamente diretta lungo x
 \rightarrow azione parete è puramente tangenziale, no pressioni normali.

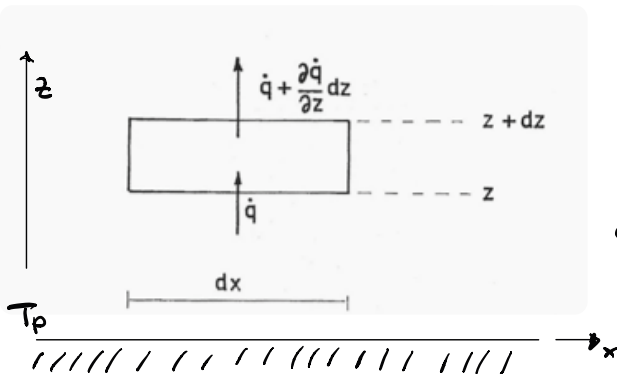
Contesto termico

Fluido a riposo ($\tau=0$) con conducibilità termica λ e diffusività termica $k = \frac{\lambda}{c_p \rho}$
 Il fluido è a contatto con una parete ferma con temperatura pari a quella del fluido, T_p .



per $T_p > T_0$, la parete assume impulsivamente una temperatura T_p ($T_p > T_0$)

• Bilancio termico della particella fluida



Bilancio tra flussi termici e accumolo di calore nel tempo. Flusso termico diretto da T_A a T_B , se $T_A > T_B$

$T_p > T_0$
 q flusso termico per unità di superficie [W/m^2]

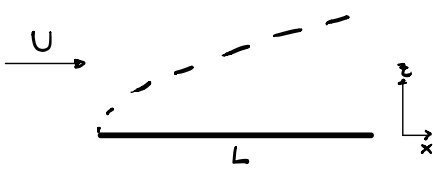
$q dx dy$ entrante (inf)
 $-(q + \frac{\partial q}{\partial z} dz) dx dy$ uscente (superiore)

\hookrightarrow Alla variazione di flussi termici corrisponde un accumulo di calore nel tempo della particella, e quindi aumento di temperatura.

• Massa infinitesima $\rho dx dy dz$
 • Diffusione a $p = \text{cost}$ (isobara)
 $dq = dh = v dp$ (I principio termodinamica)
 (= isobara)

$\rightarrow h = c_p T$ gas perf. (liquido)

S.l. lamina piana corrente uniforme U stazionaria che investe la lamina piana.

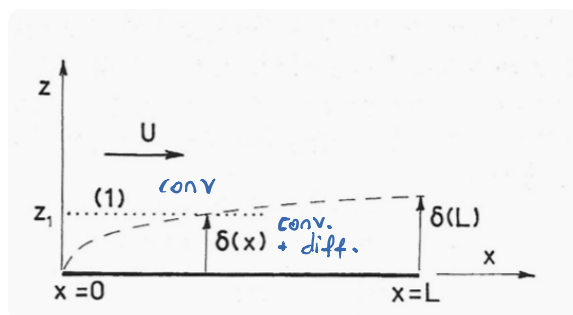


Particelle in $z=0$ devono soddisfare la condizione di aderenza a parete.

I problema di Stokes \longleftrightarrow s.l
 $u(z \rightarrow 0) = 0$ $u(z \rightarrow \infty) = U$

Qui le particelle sono trascinate a valle dalla corrente uniforme

I problema di Stokes \longleftrightarrow s.l
 \downarrow
 diffusione \downarrow
 diffusione + convezione U



z_1 : particella fluida
 • particella in z_1 , segue traiettoria che è // asse x con velocità U .

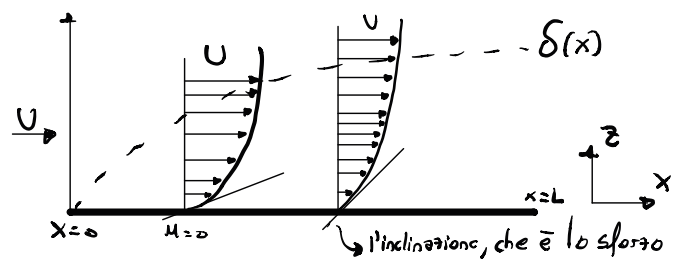
Dopo aver percorso una distanza x nel tempo $t = \frac{x}{U}$ tale che z_1 sia pari a $\delta(t)$, la particella percepisce la soglia minima di disturbo $\delta(t) \approx 4\sqrt{\nu t}$

$4\sqrt{\nu t} = \delta(t) \approx \sqrt{\frac{\nu x}{U}} = \delta(x)$ \rightsquigarrow spessore di strato limite

Abbiamo visto che in laminare: $\delta(x) \propto \sqrt{x}$ \rightarrow spiega come δ varia in x

Laminare, flusso ordinato e regolare.

distingue una regione interna da una esterna



regione esterna: $u \rightarrow U$
 $u(x, z)$

\rightarrow l'inclinazione, che è lo sforzo di taglio a parete, aumenta

Da $\delta(x) = \sqrt{\frac{\nu x}{U}}$ \rightarrow $\delta(x) = x \sqrt{\frac{\nu}{Ux}}$ otteniamo $Re_x = \frac{Ux}{\nu}$ (n° Reynolds locale)

$\frac{\delta(x)}{x} = \frac{1}{\sqrt{Re_x}}$ \rightarrow se in $\delta(x) = \sqrt{\frac{\nu x}{U}}$ facciamo comparire $Re_L = \frac{UL}{\nu}$ $\hookrightarrow x \in [0, L]$

$x=L \rightarrow \frac{\delta(L)}{L} = \frac{1}{\sqrt{Re_L}}$ $\delta(L)$: max profondità di diffusione al bordo di fuga

• $\frac{\delta(L)}{L} = \frac{1}{\sqrt{Re_L}} \sqrt{\frac{x}{L}}$ \rightarrow se $Re_L \gg 1$ allora $\delta(L) \ll L$ \rightarrow cioè la regione diffusiva è sottile rispetto alla lunghezza L

Quanto visto si può estendere in regime turbolento, ma l'evoluzione di $\delta(x)$ lungo x è differente.

• Abbiamo condizioni al contorno identiche

↳ Affinchè le 2 eq. siano identiche, deve essere $\gamma = k$. Cioè $Pr = 1$

$\mu^*(x, z) = T^*(x, z)$ (le 2 soluzioni saranno uguali)

Allora $\rightarrow \frac{\mu}{U} = \frac{T - T_p}{T_\infty - T_p} \rightarrow$ Analogia stretta tra campo di velocità e campo termico ($Pr = 1$)

Derivandola per z , e valutiamo in $z = 0$

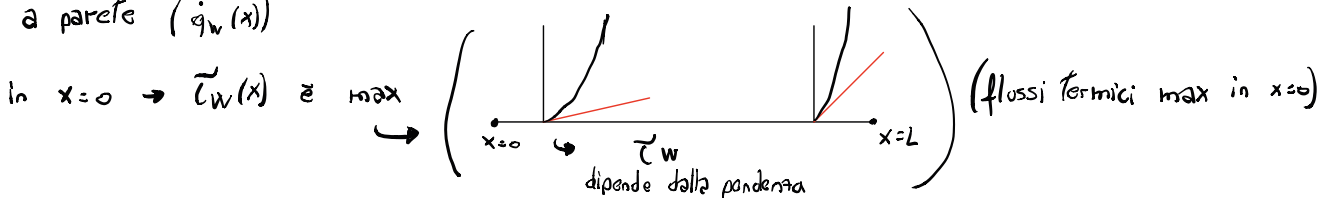
$$\frac{(\partial \mu / \partial z)_{z=0}}{U} = \frac{(\partial T / \partial z)_{z=0}}{T_\infty - T_p} \rightarrow (\cdot Pr = 1 \quad \cdot \gamma = k \quad \cdot \frac{\mu}{\rho} = \frac{\lambda}{c_p \rho} \rightarrow \mu = \frac{\lambda}{c_p})$$

$\mu \frac{\partial \mu}{\partial z} \Big|_{z=0} = \tau_w(x)$ ↳ sforzo di taglio a parete (Legge di Newton)
 $\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} = \dot{q}_w$ ↳ flusso termico a parete (a meno del segno) (Legge di Fourier)

$$\frac{\tau_w(x)}{U} = \frac{\dot{q}_w(x)}{c_p (T_\infty - T_p)} \quad (\text{Analogia di Reynolds}) \quad (Pr = 1)$$

↳ $\dot{q}_w(x)$ sta al salto di Temp. ($T_\infty - T_p$) come $\tau_w(x)$ sta alla U

• A parità di $(T_\infty - T_p)$ e U o $\tau_w(x)$ elevati corrispondono elevati flussi termici a parete ($\dot{q}_w(x)$)



$$Df = b \int_0^L \tau_w(x) dx \quad (\text{resistenza d'attrito}) \quad (b \neq 1 \text{ larghezza})$$

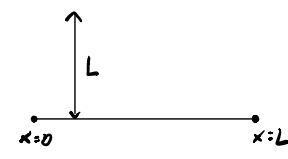
$$\dot{Q}_w = b \int_0^L \dot{q}_w(x) dx \quad (\text{portata termica})$$

↳ Allora l'analogia di Reynolds diventa $\rightarrow \frac{Df}{U} = \frac{\dot{Q}_w}{c_p (T_\infty - T_p)}$ (Analogia di Reynolds Globale)

In forma adimensionale: $\cdot C_f = \frac{Df}{\frac{1}{2} \rho U^2 S}$ ($S = bL$)

• $Nu = \frac{\dot{Q}_w}{\dot{Q}_{cond}}$ \rightarrow Per la legge di Fourier $\dot{Q}_{cond} = \lambda \frac{\Delta T}{d}$

valutata in uno strato di fluido (in quiete) di spessore e lunghezza L



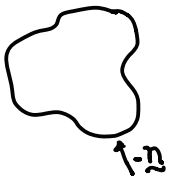
SCAMBIO TERMICO

Conduzione e Convezione

$$\frac{d}{dt} \left(\int_V \rho \left(e + \frac{1}{2} \vec{u} \cdot \vec{u} \right) dV \right) = \int_{S_V} (-p \vec{n} + \vec{\tau}) \cdot d\vec{\sigma} + \int_V \rho \vec{u} \cdot \vec{g} dV - \int_{S_V} \vec{q} \cdot \vec{n} d\sigma$$

Dall'eq. di Bilancio dell'energia totale $\xrightarrow{\uparrow}$
 Trascuriamo l'energia cinetica e la potenza delle forze di volume e superficie.

$$\frac{d}{dt} \int_V (\rho e) dV = - \int_{S_V} \vec{q} \cdot \vec{n} d\sigma$$



$$\dot{Q} = - \int_{S_V} \vec{q} \cdot \vec{n} d\sigma \quad [\vec{q} \cdot (-\vec{n}) \text{ verso negativo entrante }]$$

↳ calore assorbito per unità di tempo [W]

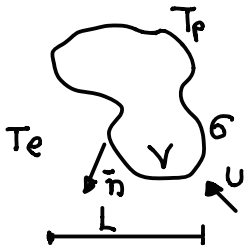
$$E = \int_V \rho e dV = \int_V \rho C T dV \quad C: \text{calore specifico del volume } \gamma$$

↳ energia contenuta nel volume

$$\frac{dE}{dt} = \dot{Q}$$

→ consideriamo lo scambio termico tra un solido di volume V e un fluido che lo lambisce

→ allora C sarà il calore specifico del corpo



V : volume corpo

S e S : superficie corpo

T_p : temperatura parete

L : dimensione caratteristica del corpo (Es. per sfera il raggio)

T_e : temperatura esterna del fluido

U : velocità uniforme fluido

$$\dot{Q} \approx \dot{Q}_{\text{cond}} + \dot{Q}_{\text{conv}} + \dot{Q}_{\text{rad}}$$

↳ scambio termico conduttivo, convettivo e radioattivo (o di irraggiamento)

• Scambio conduttivo (dalla legge di Fourier che deve valere in tutte le direzioni)

$$\dot{Q}_{\text{cond}} = - \int_S \vec{q}_{\text{cond}} \cdot \vec{n} d\sigma$$

$\lambda \left[\frac{W}{(mK)} \right]$: conducibilità termica

\vec{q}_{cond} → Flusso di calore per unità di superficie

↳ gradiente

↳ Legge di Fourier (però vettoriale): $\vec{q}_{\text{cond}} = -\lambda \nabla T$

(è l'estensione in tutte le direzioni di $q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z}$)

Indichiamo $\vec{n} \cdot \nabla T \equiv \frac{dT}{dn}$ (derivata della Temperatura lungo la direzione normale ad S)

$$\text{↳ allora } \rightarrow \dot{Q}_{\text{cond}} = \int_S \lambda \frac{dT}{dn} d\sigma$$

$\vec{n} \cdot \nabla T$

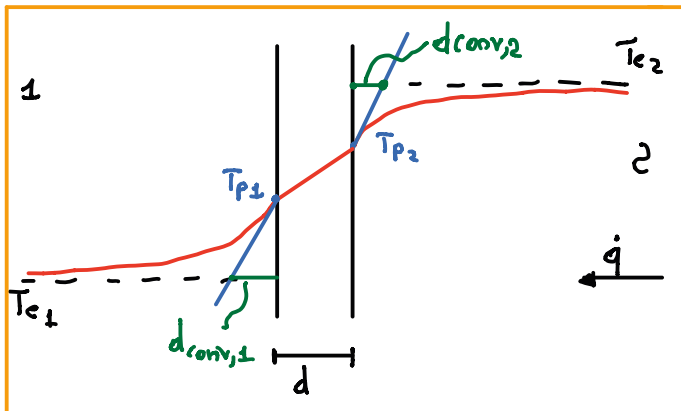
→ essendo \dot{Q} definito come calore assorbito dal corpo, va un meno nell'integrale

$$Nu = \frac{L}{d_{conv}} = \frac{L}{\delta} \cdot \frac{\delta}{\delta_T} \cdot \frac{\delta_T}{d_{conv}} \rightarrow \begin{matrix} \delta: \text{spessore strato limite cinematico} \\ \delta_T: \text{spessore strato limite termico} \end{matrix}$$

$\underbrace{\frac{L}{\delta}}_{Re} \cdot \underbrace{\frac{\delta}{\delta_T}}_{Pr} \cdot \underbrace{\frac{\delta_T}{d_{conv}}}_{Pe} \sim \frac{UL}{K}$ (misura l'effetto dei profili di temperatura) ($Pe = Pr Re$)

Allora $Nu = Nu(Re, Pr)$

- Parete solida di spessore d che separa due correnti fluide 1 e 2, con temperature $T_{e2} > T_{e1}$



- Flusso termico \dot{q} da dx a sx
- Flusso conduttivo all'interno della parete
- Flusso convettivo nei fluidi 1 e 2

$$\dot{Q} = \underbrace{\dot{Q}_{cond}}_{\text{parete}} + \underbrace{\dot{Q}_{conv}}_{\text{fluidi 1 e 2}}$$

- Coefficiente di scambio termico h :
 - convezione naturale gas $h \approx 10 \text{ W/(m}^2\text{K)}$
 - convezione forzata gas $h \approx 10^2 \text{ W/(m}^2\text{K)}$
 - convezione forzata liquidi $h \approx 10^3 \text{ W/(m}^2\text{K)}$
 - cambiamento di stato tra liquido e vapore $h \approx 10^4 \text{ W/(m}^2\text{K)}$

Scambio termico radiativo (irraggiamento)

- ↳ Emissione di onde elettromagnetiche
- solidi, gas, liquidi / gas e liquidi complicato → ci occupiamo di solidi)
- diversamente dalla convezione → non necessita di contatto
- non necessita di un mezzo per propagarsi (diversamente dalla convez. termica)
 - ↳ permane anche nel vuoto (è l'unico scambio termico che sopravvive)
 - ↳ applicazioni spaziali ←

Solidi: corpi neri e corpi grigi

$$\sigma = 5.67 \times 10^{-8} [\text{W/(m}^2\text{K}^4)] \rightarrow \text{costante di S. B.}$$

Legge di Stefan-Boltzmann: $\dot{q} = \sigma T^4$ (o emittenza energetica)

\dot{q} flusso termico radiante emesso dal corpo nero per unità di superficie in tutte le direzioni

T : Temperatura corpo [K]

Corpo nero: corpo che assorbe tutta la radiazione, non presenta riflessione

Corpo grigio: $\dot{q} = \epsilon \sigma T^4$ $\epsilon \in [0, 1]$ → fattore di emissione totale

• corpi grigi: (fallovi di emissione ϵ_1 e ϵ_2)

• $\dot{q}_{1 \rightarrow 2} = \underbrace{\epsilon_1 \sigma T_1^4}_{\text{emissione parete 1}} + \underbrace{(1 - \epsilon_1) \dot{q}_{21}}_{\text{riflessione di } \dot{q}_{21} \text{ sulla parete 1}}$

• $\dot{q}_{2 \rightarrow 1} = \epsilon_2 \sigma T_2^4 + (1 - \epsilon_2) \dot{q}_{12}$

Esprimendo

$\dot{q}_{12} = \epsilon_1 \sigma T_1^4 + (1 - \epsilon_1) [\epsilon_2 \sigma T_2^4 + (1 - \epsilon_2) \dot{q}_{12}]$

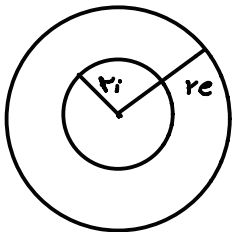
$\dot{q}_{12} = f(T_1, T_2, \epsilon_1, \epsilon_2, \sigma)$

$\dot{q}_{21} = g(T_1, T_2, \epsilon_1, \epsilon_2, \sigma)$

↳ Tramite vari passaggi: $\dot{q}_1 = \dot{q}_{21} - \dot{q}_{12} = \epsilon_{12} \sigma (T_2^4 - T_1^4)$
 $\left(\frac{1}{\epsilon_{12}} = \frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2} - 1\right)$

• ϵ_1 e ϵ_2 bassi $\rightarrow \epsilon_{12}$ basso $\rightarrow \dot{q}_1$ basso
 (cioè corpi molto riflettenti diminuiscono lo scambio termico radiativo)

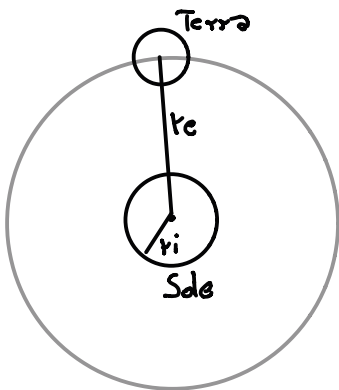
Pareti sferiche concentriche (Hp: corpi neri)



i: interna
 e: esterna

$\dot{q}_{i \rightarrow e} = \sigma T_i^4 \left(\frac{r_i}{r_e}\right)^2$

↳ flusso calore da i ad e per unità di sup. sfera esterna



r_i : raggio solare
 r_e : distanza sole-Terra (supponendo Terra e Sole come 2 corpi neri senza che ci sia nulla in mezzo)

$\dot{q}_s = 1.35 \text{ kW/m}^2$

(x unità di superficie terrestre)

↳ superficie esterna

• $r_e = 108 \text{ Dsole}$

$\dot{q}_{i \rightarrow e} = \sigma T_i^4 \left(\frac{\text{Dsole}/2}{108 \text{ Dsole}}\right)^2$

$T_i = 5770 \text{ K}$ (T superficie solare)

• \dot{q}_s costante solare

buona approssimazione

$\dot{q}_{i \rightarrow e} \approx 1.347 \cdot 10^3 \text{ W/m}^2$

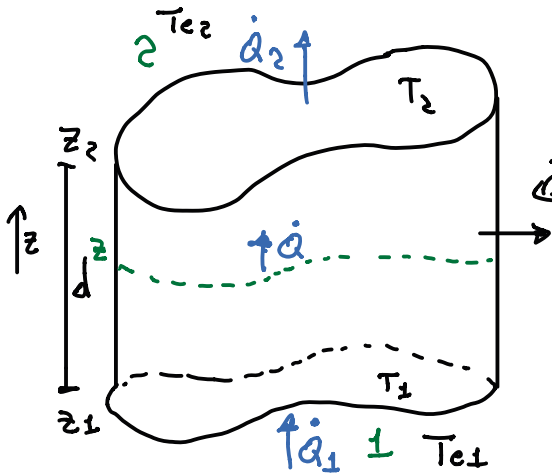
Scambio Termico Tra ambienti

↳ Come la T di un corpo per effetto della conduzione è influenzata dallo scambio termico convettivo se la superficie del corpo è lambita da una corrente fluida con T diverso.

H_p : $T = T_p$ ovunque nel corpo e nel tempo $\rightarrow T$ corpo uniforme e stazionaria

• Caso piano

↳ Superfici isoterme che sono piani paralleli in z_1 e z_2
 Parete laterale adiabatica $\rightarrow \dot{Q}_{lat} = 0$



z e z_1 : Fluidi a contatto con le rispettive pareti

\dot{Q}_{lat} (\dot{Q} calore attraverso la generica sup. S a quota z)

H_p : stazionarietà T

$T = T_p \rightarrow T$ parete costante sulla parete stessa

S : costante

$$\dot{Q} = \dot{Q}_1 = \dot{Q}_2 \quad (T_1 > T_2)$$

$$\dot{Q} = \lambda \frac{dT}{dz} S \quad (\text{legge di Fourier})$$

↳ Integriamo tra z e $z_1 \rightarrow -\frac{\dot{Q}}{\lambda S} \int_{z_1}^z dz = \int_{T_1}^T dT$

$$T(z) = T_1 - \frac{\dot{Q}}{\lambda S} (z - z_1)$$

Se sono note T_2 (in z_2) e T_1 (in z_1)

$$\dot{Q} = \frac{\lambda S}{d} (T_1 - T_2) \quad [W] \quad d = z_2 - z_1$$

↳ pura conduzione $\dot{Q}_1 = \dot{Q}_2 = \dot{Q}$

Se sono note le T esterne agli s.l. dei fluidi (1 e 2) che lambiscono il corpo $\rightarrow T_{e1}$ e T_{e2}

h_{e1} e h_{e2} : coefficienti di scambio termico
 λ : conducibilità corpo

Se il cilindro è poco spesso $\rightarrow r_2 = r_1 + \Delta r$ ($\Delta r \ll r_1$)

$$\log\left(\frac{r_2}{r_1}\right) = \log\left(\frac{r_1 + \Delta r}{r_1}\right) = \log\left(1 + \frac{\Delta r}{r_1}\right) \approx \frac{\Delta r}{r_1}$$

\hookrightarrow esp. Taylor

$$\dot{Q} = \frac{2\pi r_1 L}{\Delta r} \lambda (T_{r_2} - T_{r_1})$$

\hookrightarrow Se sono T_{e2} e T_{e1} (T esterne agli s.l. nei fluidi 1 e 2)

$$\begin{cases} \dot{Q}_{r_1} = h_{e1} (T_{e1} - T_{r_1}) S(r_1) & (\text{conv.}) \\ \dot{Q} = \frac{2\pi r_1 L}{\Delta r} \lambda (T_{r_2} - T_{r_1}) & (\text{cond.}) \\ \dot{Q}_{r_2} = h_{e2} (T_{r_2} - T_{e2}) S(r_2) & (\text{conv.}) \end{cases}$$

• h_{e1} e h_{e2} coeff. scambio termico
 $S(r_1) = 2\pi r_1 L$
 $S(r_2) = 2\pi r_2 L$

\hookrightarrow Come prima $\rightarrow \dot{Q} = \frac{T_{e1} - T_{e2}}{R} [W]$

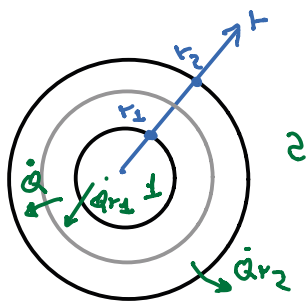
$$R = \underbrace{\frac{1}{h_{e1} S(r_1)}}_{\text{conv.}} + \underbrace{\frac{\log(r_2/r_1)}{2\pi L \lambda}}_{\text{cond.}} + \underbrace{\frac{1}{h_{e2} S(r_2)}}_{\text{conv.}}$$

resistenza Termica

Flusso termico per unità di lunghezza (assiale) $[W/m]$

$$q = \frac{\dot{Q}}{L}$$

. Caso Sferico (sfera cava)



$$\dot{Q} = \dot{Q}_{r_1} = \dot{Q}_{r_2} = -\lambda \frac{dT}{dr} S(r) \sim 4\pi r^2$$

\uparrow
Fourier

Integrando (tra r e r_1)

$$\hookrightarrow T(r) = T_{r_1} - \frac{\dot{Q}}{4\pi\lambda} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}\right)$$

Note T_{r_1} in $r=r_1$ e T_{r_2} in $r=r_2$ (sulle pareti)

$$\dot{Q} = \frac{4\pi\lambda (T_{r_1} - T_{r_2})}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)} \cdot r_1 r_2 \quad (\text{cond. pura})$$