



**Appunti universitari**  
**Tesi di laurea**  
**Cartoleria e cancelleria**  
**Stampa file e fotocopie**  
**Print on demand**  
**Rilegature**

**NUMERO: 2417A**

**ANNO: 2019**

# **A P P U N T I**

**STUDENTE: Faraci Alessio**

**MATERIA: Ingegneria Sismica - Teoria - Prof. Ceravolo**

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

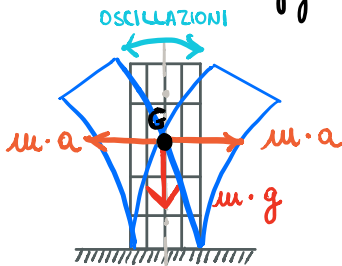
**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.  
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

# 0. INTRODUZIONE

Scopo principale della dinamica delle strutture è quello di determinare le sollecitazioni interne e le deformazioni di sistemi strutturali sollecitati in modo arbitrario nel tempo. I carichi diventano funzione del tempo, così come la resistenza strutturale

Entrano in gioco le masse con le forze di inerzia, perché sostanzialmente le strutture si muovono (a differenza della statica), ed è proprio il movimento ad attivare le forze di inerzia. Dunque per studiare la dinamica è necessario studiare le configurazioni variabili nello spazio delle strutture.

Al variare della variabile tempo  $t$  i carichi oscillano verso e direzione variabile con  $t$  (seno e coseno dei vettori)



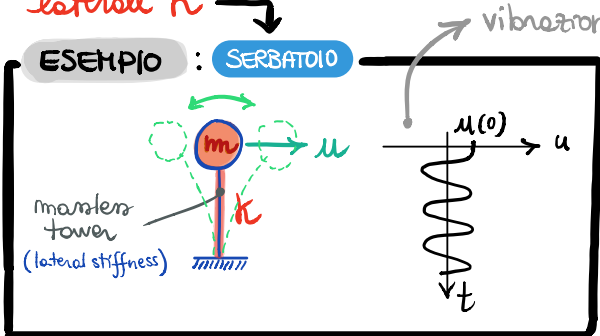
$g = 9.8 \text{ m/s}^2$   
 $a = 0.05 \div 0.7 g$

l'accelerazione minima  $a$  è espressa come percentuale di  $g$

Ad esempio, un edificio, nel momento in cui il sisma mette in vibrazione il terreno (onde che si propagano in un mezzo solido) inizia a sua volta a vibrare e si mette in movimento (oscilla intorno la posizione di equilibrio). La massa della struttura è così eccitata con un'accelerazione applicata al baricentro. Nasce una forza di inerzia  $I = m \cdot a \rightarrow$  azione variabile nel tempo (perché funzione di  $a(t)$ )  $\Rightarrow$  definibile vettorialmente  $\rightarrow$  con verso variabile in base all'oscillazione.

La massa delle strutture (in dinamica) gioca un ruolo importante:  
 Strutture leggere  $\rightarrow$  non soffrono per l'ordine del sistema.  
 Strutture pesanti (con  $m$  grande)  $\rightarrow$  avranno problemi simili.

Possiamo iniziare lo studio della dinamica strutturale con strutture semplici. Per strutture semplici intendiamo quelle strutture che possono essere idealizzate con una massa concentrata  $m$  supportata da una struttura priva di massa con rigidità laterale  $k$



vibrazione libera dovuta ad uno spostamento iniziale. L'equazione differenziale che governa lo spostamento laterale  $u(t)$  di queste strutture idealizzate senza alcuna eccitazione esterna (nessuna forza esterna applicata) è:

$$m \ddot{u} + k u = 0$$

INERZIA:  $m \ddot{u}$   
 FORZA DI RICHIAMO ELASTICO:  $k u$   
 massa  $\leftarrow$  accelerazione  $\rightarrow$  spostamento  
 $\leftarrow$  rigidità  $\rightarrow$

La soluzione di questa equazione mostra che se si applica al sistema idealizzato uno spostamento iniziale importante  $u(0)$  e si rilascia successivamente la struttura, questa oscillerà o vibrerà avanti e indietro rispetto la sua posizione di equilibrio. Questa oscillazione continuerebbe per sempre e la struttura così non si fermerebbe mai. Ma questo è irrealistico. In realtà la risposta si smorza nel tempo. Il processo attraverso il

quale la vibrazione diminuisce costantemente d'ampiezza è detto **DAMPING** (smorzamento).  
 Dunque nel nostro modello strutturale idealizzato dovremo includere un meccanismo di dissipazione di energia al fine di incorporare le caratteristiche del decadimento di oscillazione. L'elemento dissipativo più utilizzato è lo **smorzatore viscoso** (in quanto è il più semplice da trattare matematicamente, ma esistono anche altri sistemi e meccanismi dissipativi). Ogni elemento strutturale (trave, colonna, muro) contribuisce a definire le proprietà **inerziali** (massa), **elastiche** (rigidezza), e di **dissipazione di energia** (smorzamento). Nei sistemi idealizzati queste proprietà sono concentrate comunque in **3 componenti separate**:

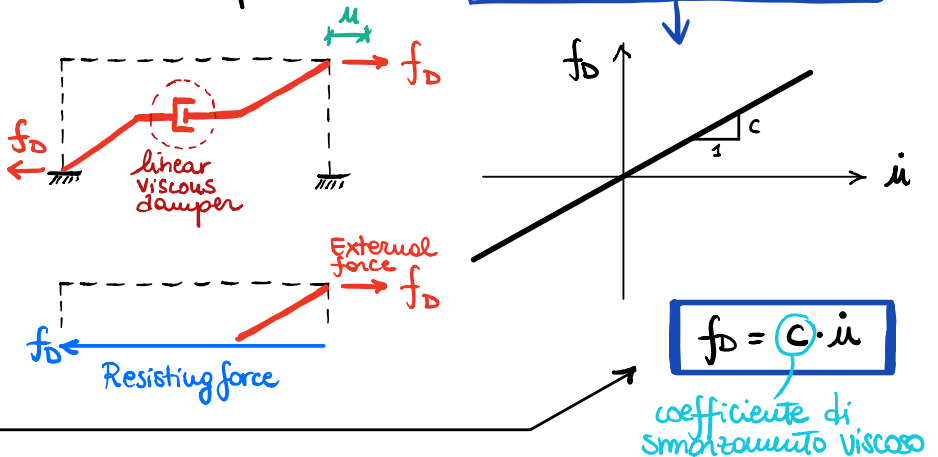


**N.B.** Il numero di spostamenti indipendenti richiesti per definire gli spostamenti di tutte le masse rispetto la posizione originaria è detto: **numero di gradi di libertà** (g.d.l. or **DOFS**) per l'analisi dinamica.

Ci sono molti meccanismi di dissipazione di energia nelle strutture quindi risulta impossibile identificare o descrivere matematicamente ognuno di questi meccanismi. Per tanto lo smorzamento delle strutture reali ad 1 solo grado di libertà (SDOF = single degree of freedom) può essere idealizzato efficacemente da uno smorzatore viscoso o ammortizzatore. Il **coefficiente di smorzamento** è scelto in modo che l'energia vibrazionale che esso dissipa sia uguale all'energia dissipata da tutti i meccanismi di dissipazione presenti contemporaneamente nella struttura reale. Questa idealizzazione è quindi chiamata di **smorzamento viscoso equivalente**.

Consideriamo adesso una struttura semplice con uno **smorzatore viscoso lineare**.

Lo smorzatore è soggetto ad una forza  $f_D$  lungo il DOF  $u$ . La forza interna che nasce nello smorzatore è uguale ed opposta alla forza esterna  $f_D$ . La **forza di smorzamento**  $f_D$  è correlata alla velocità  $\dot{u}$  attraverso lo smorzatore viscoso lineare tramite la relazione



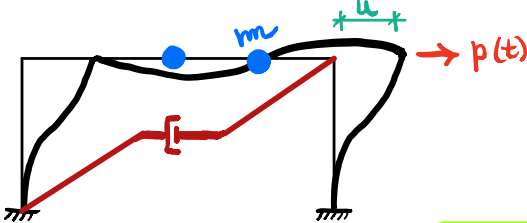
Come detto in precedente non è fattibile identificare i meccanismi di dissipazione energetica vibrazionale delle strutture reali, pertanto a differenza ad esempio della rigidezza di una struttura, il coefficiente di smorzamento non può essere calcolato a partire dalle proprietà geometriche degli elementi strutturali, ma bisogna effettuare degli esperimenti vibrazionali in modo da valutare (stimare) il suo valore. Ad esempio possono essere esperimenti di oscillazione libera: la velocità misurata con

Già di riferimento allo smorzamento di un sistema: il **coefficiente di dissipazione viscosa equivalente** ha lo scopo di modellare la dissipazione energetica per piccole ampiezze di deformazione entro il limite elastico della struttura. Sopra questo range di deformazioni, il coefficiente di smorzamento viscoso è determinato dagli esperimenti può variare con l'ampiezza della deformazione. Questa non linearità dello smorzamento generalmente non è considerata esplicitamente nelle analisi dinamiche. Può essere modellato indirettamente selezionando un valore di  $c$  appropriato per l'ampiezza di deformazione attesa  $\rightarrow$  usualmente presa come la deformazione associata al limite elastico della struttura.

Ulteriore energia è dissipata per il comportamento inelastico della struttura per grandi deformazioni. Sotto carichi o deformazioni cicliche, questo comportamento implica la formazione di una curva isteretica (**force-deformation hysteresis loop**  $\rightarrow$  grafico a dx e pagine precedenti). L'energia di smorzamento dissipata durante un ciclo di deformazione tra i limiti di deformazione  $\pm u_0$  è data dall'**area racchiusa** della curva **abcd**. Questa dissipazione di energia non è di solito modellata da uno smorzatore viscoso, ma l'approccio più comune, diretto, e accurato per tenere conto è quello di considerare la relazione inelastica che esiste tra le forze resistenti e la deformazione nella risoluzione dell'equazione di moto.

### EQUAZIONE DEL MOTO CON FORZA ESTERNA

Consideriamo il sistema ad 1 grado di libertà idealizzato in figura (idealized one-story frame) soggetto ad una **forza dinamica esterna**  $p(t)$  nella direzione del grado di libertà  $u$  (DOF  $u$ ). Questa notazione indica come la forza  $p(t)$  vari nel tempo, così come varia nel tempo lo spostamento  $u(t)$  della massa.

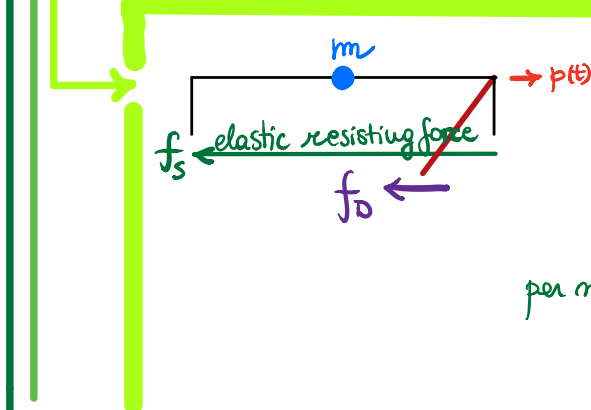


Il nostro obiettivo adesso è quello di ricavare l'**equazione differenziale del moto** che governa gli spostamenti  $u(t)$ . Per farlo possiamo utilizzare 3 strade:

1 usando la 2<sup>a</sup> legge di Newton

2 usando il principio di D'Alembert dell'equilibrio dinamico

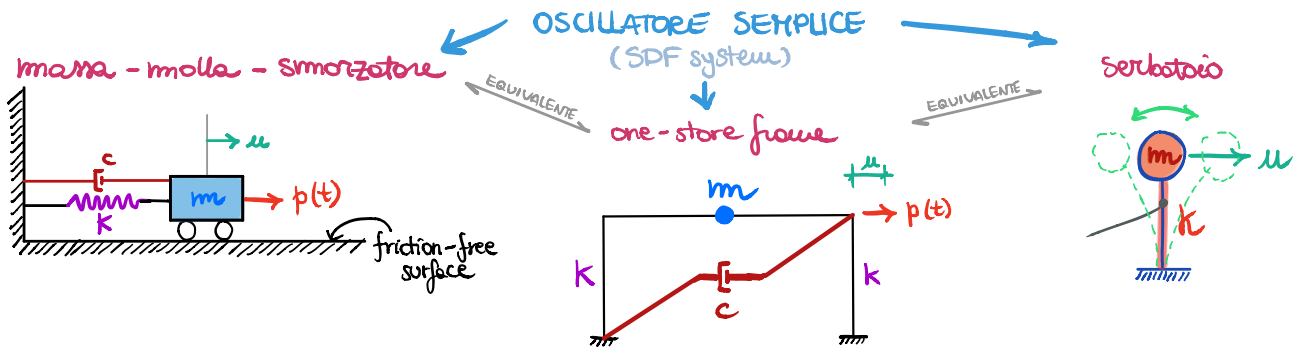
3 come combinazione di 3 componenti pure: massa, rigidità smorzamento



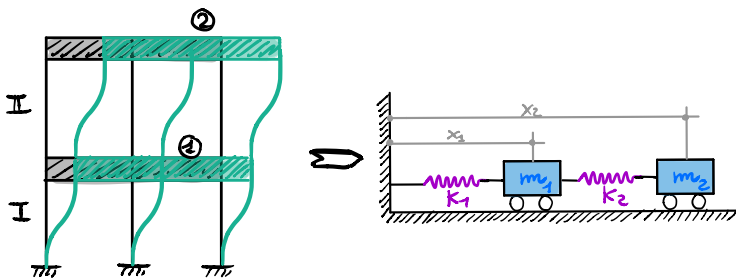
Legge di Newton:  $F = m \cdot a$   
 $a = \ddot{u}$   
 risultante delle forze agenti lungo l'asse  $x$

$$\Rightarrow F = p(t) - f_s - f_D$$

per sistemi elastici lineari  $f_s = k u$   
 per sistemi non lineari  $f_s = f_s(u)$



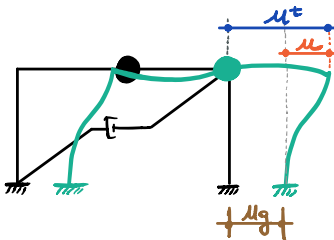
In generale il numero di gradi di libertà di una struttura continua è infinito. È sempre possibile però discretizzare le strutture. Un esempio può essere un telaio piano a travetti rigidi (shear type) dove le masse possono essere concentrate nei singoli travetti e le rigidità possono essere concentrate nei pilastri. Utilizzando lo schema idealizzato, rispetto ad una soluzione elastica completa si commette un errore dell'1% (ingegneristicamente nullo).



Utilizzando lo schema idealizzato, rispetto ad una soluzione elastica completa si commette un errore dell'1% (ingegneristicamente nullo).

### EQUAZIONE DEL MOTO CON ECCITAZIONE SISMICA

Nelle zone sismiche, il principale problema di dinamica strutturale è il comportamento delle strutture soggette al moto indotto dal terremoto alla base della struttura.

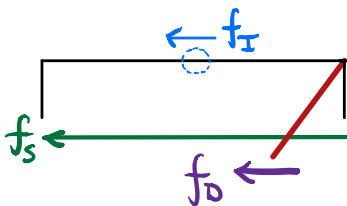


- NOTAZIONE
- $u_g(t)$  = spostamento del terreno
  - $u^t(t)$  = spostamento totale (o assoluto) della massa
  - $u(t)$  = spostamento relativo tra massa e terreno

In ogni istante questi spostamenti sono correlati dalla relazione:

$$u^t(t) = u_g(t) + u(t)$$

Utilizzando il principio di D'Alembert dell'equilibrio dinamico si ricorre all'equazione del moto.



$$f_I + f_s + f_D = 0 \quad \leftarrow \text{equazione dell'equilibrio dinamico}$$

$$f_s = Ku$$

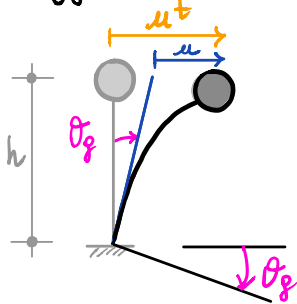
$$f_D = c\dot{u}$$

**N.B.** Soltanto lo spostamento relativo  $u(t)$  tra la massa e la base dovuta alle deformazioni strutturali produce la forza elastica e la forza di smorzamento (in quanto le componenti di spostamento rigido della struttura non producono forze interne (no contributo  $Mg$ )).

**OSSERVAZIONE**

È importante riconoscere che la forza effettiva del terremoto è proporzionale alla massa della struttura. Se aumento la massa di una struttura, aumento anche le forze equivalenti del terremoto che deve sopportare ( $f_{eff}(t)$ )

Sebbene le componenti rotazionali del moto del suolo non sono misurate durante i terremoti, possono essere stimati dalle misure delle componenti traslazionali. È interessante applicare i concetti esposti in precedenza a questo forma di eccitazione. Con questo proposito, consideriamo una torre e unurolo (serbatoio) soggetta ad una rotazione  $\theta_g$  alla base. The total displacement  $u^t$  of the mass è costituito da contributi:



relazione valida istante per istante

$$u^t(t) = u(t) + h \cdot \theta_g(t)$$

associato alla deformata strutturale

componente di spostamento rigido

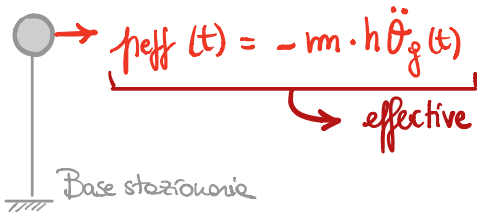
Utilizzando il principio di D'Alembert dell'equilibrio dinamico:

$$m \cdot \ddot{u}^t(t) + c \dot{u} + k u + f_0 = 0$$

$$\ddot{u}^t(t) = \ddot{u}(t) + h \ddot{\theta}_g(t)$$

si ricava l'equazione del moto:

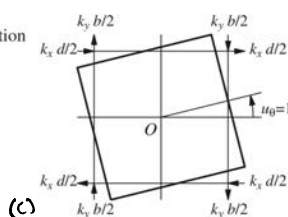
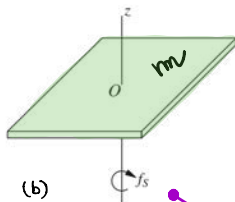
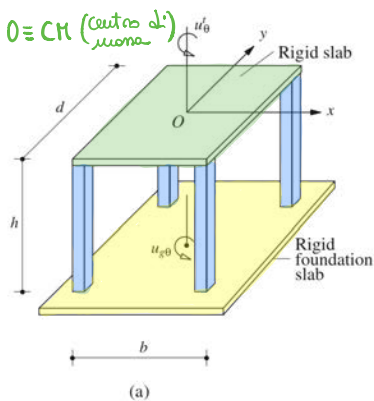
$$m \ddot{u} + c \dot{u} + k u = -m h \ddot{\theta}_g(t)$$



$$f_{eff}(t) = -m \cdot h \ddot{\theta}_g(t)$$

effective earthquake force associated with ground rotation.

**ESEMPIO**

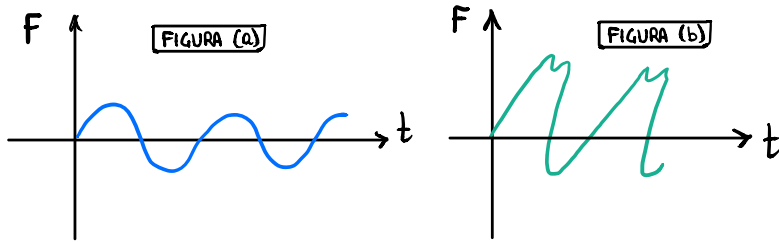


Consideriamo una piastra rigida di massa  $m$  supportata da 4 colonne di altezza  $h$  rigidamente collegate allo slab e alla fondazione. Le colonne sono di sezione rettangolare e considerate essere prive di massa. Si determina l'equazione del moto per questo sistema soggetto alla rotazione  $u_0 \theta$  della fondazione attorno l'om verticale  $z$ .

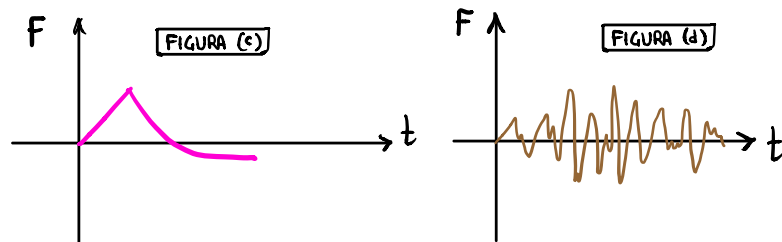
momento torsionale (o torcente elastico resistente)  $f_s$  agente sulla massa.

Come abbiamo già detto in precedenza, il carico varia nel tempo. Poiché varia nel tempo si può fare l'assunzione semplificativa di considerarlo come un carico periodico. I carichi reali non essendo realmente armonici e periodici perfetti, grazie alle trasformazioni di Fourier o di Laplace possono essere divisi in una serie di armoniche fondamentali ciascuna di tipo periodico.

Il carico periodico più semplice è quello di tipo sinusoidale, detto anche sollecitazione armonica [FIGURA (a)]. Altri carichi periodici [FIGURA (b)] hanno un segnale che non è più un'armonica semplice, ma è una sollecitazione al cui interno contiene oltre 2, 3 armoniche. Vi è un'armonica dominante, e poi altre piccole armoniche. È importante tener conto delle armoniche piccole pure, perché potrebbe essere proprio l'armonica



più piccola a dare più fastidio perché "il fastidio" ovvero l'azione sulla struttura, dipende molto dall'appareamento delle frequenze di carico con la frequenza propria della struttura. Dunque bisogna capire quali sono le frequenze proprie della struttura per capire quali sono le frequenze esterne pericolose che la possono eccitare.



I carichi non periodici possono essere di breve durata o impulsivi, come quelli generati da una esplosione / urto [FIGURA (c)]. Oppure di lunga durata o generici come quelli generati da scosse sismiche [FIGURA (d)]. Come si vede dal grafico, è un segnale complesso che

devrà essere scomposto con Fourier per capire quali sono le armoniche dominanti.

Se una struttura è soggetta ad un carico statico, la sua deformazione, così come la sua sollecitazione interna, dipendono solo dal carico esterno, tramite l'equilibrio interno.

Se il carico è applicato dinamicamente, la risposta strutturale dipende come detto anche dalle forze di inerzia che si oppongono alle accelerazioni, oltre che alle forze elastiche che si oppongono agli spostamenti. Se la struttura è soggetta anche a forze di smorzamento viscoso la risposta dipenderà anche da tali forze che, nel caso più semplice, si oppongono alla velocità.

### OSSERVAZIONE

Perché ad un certo punto l'oscillazione di una struttura cessa? Perché il materiale costituente, in realtà, non è perfettamente elastico ma ha delle doti di smorzamento. Lo smorzamento è la capacità della struttura di "spegnere questo movimento" tramite dissipazione di energia.



Dunque le sollecitazioni o le tensioni possono essere determinate in ogni istante di tempo attraverso un'analisi statica della struttura soggetta alle forze statiche equivalenti  $f_s$ .

Ma anche per i sistemi inelastici le sollecitazioni possono essere determinate modificando opportunamente questi 2 approcci per tenere in conto che questi sistemi sono tipicamente analizzati attraverso procedure time-stepping (time-stepping procedures) con iterazioni all'interno di ogni step di tempo.

Nelle applicazioni pratiche abbiamo bisogno di determinare le sollecitazioni totali della struttura, cioè quelle che includono sia le sollecitazioni prima dell'eccitazione dinamica minima, sia quelle dovute all'eccitazione dinamica.

Per un sistema lineare le sollecitazioni totali possono essere determinate combinando le risposte statiche e dinamiche attraverso 2 analisi separate:

- |  |   |                  |  |
|--|---|------------------|--|
| <div style="font-size: 2em;">[</div> <div style="font-size: 2em;">+</div> <div style="font-size: 2em;">]</div> | ① | ANALISI STATICA  | della struttura dovuta ai carichi permanenti, ai carichi variabili, alle $\Delta T$ , ecc. |
|  | ② | ANALISI DINAMICA | della struttura soggetta all'eccitazione variabile nel tempo (time-varying excitation).    |
- PRINCIPIO DI SOVRAPPORZIONE DEGLI EFFETTI → la sovrapposizione diretta dei risultati delle 2 analisi è valida SOLO per i sistemi lineari!

Le analisi di sistemi non lineari NON possono essere separate in 2 analisi indipendenti. Le analisi dinamiche di questi sistemi devono tenere in conto delle sollecitazioni e delle deformazioni già esistenti nella struttura prima dell'inizio dell'eccitazione dinamica. Questo è necessario per stabilire le proprietà iniziali di rigidità della struttura richieste poi per l'analisi dinamica.

## METODI DI SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE DIFFERENZIALE (del moto)

L'equazione del moto per un sistema lineare SDF soggetto ad una forza esterna è l'equazione differenziale del 2° ordine ricavata in precedenza:

$$m \ddot{u} + c \dot{u} + K u = p(t)$$

Lo spostamento iniziale  $u(0)$  e la velocità iniziale  $\dot{u}(0)$  al tempo zero ( $t=0$ ) devono essere specificati per definire completamente il problema (CONDIZIONI INIZIALI). Tipicamente prima dell'eccitazione dinamica la struttura si trova a riposo, ovvero  $u(0)=0$  e  $\dot{u}(0)=0$ .

Dunque la soluzione dell'equazione di moto è:  $u(t) = -\frac{p_0}{K} \cos \omega_n t + \frac{p_0}{K}$   
 $u(t) = \frac{p_0}{K} (1 - \cos \omega_n t)$

2 INTEGRALE DI DUHAMEL (time-domain method)

Un altro approccio per la soluzione dell'equazione di moto è basato sulla rappresentazione delle forze applicate come una sequenza di impulsi infinitesimali. La risposta del sistema ad una forza applicata  $p(t)$ , al tempo  $t$ , è ottenuta sommando le risposte a tutti gli impulsi fino al tempo  $t$  stesso. Per un sistema SDF senza smorzamento, la soluzione è dell'equazione differenziale è offerta dall'INTEGRALE DI DUHAMEL:

$$u(t) = \frac{1}{m \omega_n} \int_0^t p(\tau) \sin[\omega_n(t - \tau)] d\tau$$

L'integrale di Duhamel è una forma speciale dell'integrale di convoluzione

Le condizioni a riposo iniziali sono implicite in questo risultato ( $u(0) = 0$  e  $\dot{u}(0) = 0$ )  
 $\omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}}$

L'integrale di Duhamel rappresenta un metodo alternativo alla soluzione classica se la forza applicata  $p(t)$  è definita analiticamente da una funzione semplice che permette la valutazione analitica dell'integrale. Per eccitazioni invece più complesse che sono definite solo da valori numerici di  $p(t)$  ad istanti di tempo discreti, l'integrale di Duhamel può essere valutato attraverso metodi numerici, ma in questi casi vengono utilizzate procedure numeriche più efficienti per la valutazione della risposta dinamica.

ESEMPIO

Attraverso l'integrale di Duhamel si determina la risposta di un sistema SDF inizialmente in quiete, soggetto ad una eccitazione costante  $p(t) = p_0(t)$ .

$$u(t) = \frac{1}{m \omega_n} \int_0^t p(\tau) \sin[\omega_n(t - \tau)] d\tau$$

$\downarrow p_0$  (costante  $\Rightarrow$  posso portarla fuori dall'integrale)

$$u(t) = \frac{p_0}{m \omega_n} \int_0^t \sin[\omega_n(t - \tau)] d\tau$$

$$u(t) = \frac{p_0}{m \omega_n} \left[ \frac{\cos \omega_n(t - \tau)}{\omega_n} \right]_{\tau=0}^{\tau=t}$$

Soluzioni in forma chiusa possono essere ottenute soltanto se  $p(t)$  è una funzione semplice (a sinus). Con l'utilizzo di pc è possibile anche trattare eccitazioni più complesse ( $p(t)$  o  $u_g(t)$ ) che possono essere descritte anche numericamente. In questi casi sia il primo che l'ultimo integrale sono valutati numericamente attraverso il **metodo della trasformata di Fourier discreta** (discrete Fourier transform method).

#### 4 METODI NUMERICI

I 3 approcci precedenti sono limitati ai sistemi lineari e non possono considerare il **comportamento non elastico** delle strutture durante i terremoti se lo shaking è intenso. L'unico metodo pratico per tali sistemi coinvolge i **metodi numerici time-stepping** (time-stepping methods). Questi metodi sono pure utili per la valutazione della risposta di sistemi lineari soggetti ad una eccitazione (applied force  $p(t)$  or ground motion  $u_g(t)$ ) che è complicata da definire qualitativamente e che può essere soltanto descritta numericamente.

#### OSSERVAZIONE

Abbiamo parlato in precedenza della risposta temporale della struttura (variation of response)  $r(t)$  ai diversi tipi di eccitazioni. Per scopi di progetto strutturale, il massimo valore (nel tempo) della risposta  $r$  contiene l'informazione cruciale: esso è correlato alle massime sollecitazioni e deformazioni che una struttura deve essere in grado di sopportare. Quindi saremo interessati valore di picco della risposta (peak response) definito come il massimo del valore assoluto della quantità di risposta:

$$r_0 \equiv \max_t |r(t)|$$

peak value  $\nearrow$  nel tempo  $\nearrow$

Ci occuperemo adesso dello studio della risposta di sistemi SDF lineari soggetti a oscillazione libera, ad eccitazioni armoniche e periodiche, ad eccitazioni costanti e ad impulsi, e al moto del terreno (earthquake ground motion). Successivamente tratteremo la **risposta non elastica** dei sistemi SDF in quanto la maggior parte delle strutture sono progettate tenendo in conto che esse si deformeranno oltre il limite elastico durante i terremoti. Poi tutto verrà ripetuto per i sistemi MDF.

$$C e^{\lambda t} (m \lambda^2 + c \lambda + k) = 0$$

non è mai zero ←

↓ divido per m

$$\lambda^2 + \frac{c}{m} \lambda + \frac{k}{m} = 0$$

EQUAZIONE CARATTERISTICA

(equazione algebrica in  $\lambda$ , ovvero equazione di autovalori dell'equazione di moto)

→ Bisogna risolvere questa equazione di 2° grado in  $\lambda$ . Come tutte le equazioni di secondo grado può avere soluzioni reali, complesse. Facciamo delle ipotesi.

**CASO 1: VIBRAZIONI LIBERE NON SMORZATE (UNDAMPED FREE VIBRATION)**

In questo caso l'equazione del moto:

$$m \ddot{u} + \cancel{c} \dot{u} + K u = \cancel{p(t)}$$

$c=0$   
perché sistema non smorzato

↓ si trasforma in

$p(t)=0$   
perché oscillazioni libere ⇒ ho eccitazione esterna

$$m \ddot{u} + K u = 0$$

Neutra l'equazione caratteristica:

$$\lambda^2 + \frac{\cancel{c}}{m} \lambda + \frac{k}{m} = 0$$

$c=0$   
perché sistema non smorzato

$$\lambda^2 + \frac{k}{m} = 0$$

la cui soluzione è

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{k}{m}} = \pm i \omega_n$$

si trasforma in

quindi da un punto di vista dinamico (quindi di caratteristiche oscillatorie), chi comanda è  $\omega^2 = k/m$

è correlato a meno di un fattore  $2\pi$  direttamente al periodo proprio di vibrazione della struttura

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ [rad/s]}$$

PULSAZIONE NATURALE

Sostituendo le 2 radici trovate nella soluzione di potenza che stavamo cercando, otteniamo la soluzione generale dell'equazione di moto:

$$\lambda_{1,2} = \pm i \omega_n \rightarrow u(t) = C e^{\lambda t} \rightarrow u(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

legge del moto di un oscillatore semplice che ci indica qual'è la risposta del sistema (corrisponde ad una legge di proporzionalità delle onde)

$$u(t) = C_1 e^{i \omega_n t} + C_2 e^{-i \omega_n t}$$

costanti complesse di integrazione ancora incognite

Dalla posizione di equilibrio statico  $a$ , la massa si muove verso destra raggiungendo il massimo spostamento positivo  $u_0$  in  $b$ , punto in cui la velocità è zero. Dopo il punto  $b$  lo spostamento inizia a diminuire e la massa ritorna nella sua posizione di equilibrio  $c$ , punto in cui la velocità è massima e quindi la massa continua a muoversi verso sinistra raggiungendo il minimo spostamento  $-u_0$  in  $d$ , punto in cui la velocità è di nuovo zero. Successivamente la massa si riporta nel suo stato iniziale  $e$ . All'istante di tempo  $e$ ,  $2\pi/\omega_n$  secondi dopo l'istante di tempo  $a$ , lo stato (spostamento e velocità) della massa è lo stesso di quello di  $a$ , e la massa è pronta ad iniziare un altro ciclo di vibrazione.

Il tempo richiesto da un sistema non smorzato per completare **1 ciclo di oscillazioni libere** è detto **periodo naturale di vibrazione** del sistema, ed è indicato con  $T_n$ . Il periodo è correlato alla **pulsozione naturale di vibrazione**  $\omega_n$  (**natural circular frequency of vibration**) tramite la relazione:

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} \quad [\text{sec}]$$

Si definisce **frequenza naturale di vibrazione** il rapporto:

$$f_n = \frac{1}{T_n} = \frac{\omega_n}{2\pi} \quad [\text{Hz}]$$

→ cicli per secondo  
un sistema esegue  $1/T_n$  cicli in 1 sec

Il sistema non smorzato oscilla avanti e indietro (back and forth) tra lo spostamento massimo  $u_0$  e quello minimo  $-u_0$ . Il valore di  $u_0$  è detto **ampiezza di moto**:

ciclo dopo ciclo rimane costante non decedendo mai.

$$u_0 = \sqrt{u(0)^2 + \left[\frac{\dot{u}(0)}{\omega_n}\right]^2}$$

→ dipende dallo spostamento e dalla velocità iniziale

Questo comportamento è irrealistico

perché non abbiamo preso in considerazione un sistema di smorzamento che tiene conto della dissipazione di energia.

### OSSERVAZIONE

Il termine naturale, usato per definire  $\omega_n, T_n, f_n$ , è impiegato per enfatizzare il fatto che queste sono le proprietà naturali del sistema quando è libero di vibrare senza alcuna eccitazione esterna. Poiché il sistema è lineare, queste proprietà vibrazionali ( $\omega_n, T_n, f_n$ ) sono indipendenti dallo spostamento iniziale e dalla velocità iniziale (ovvero dalle condizioni iniziali).

### OSSERVAZIONE

Perché il periodo proprio  $T_n$  di una struttura è molto importante? Se c'è una forzante (quindi  $p(t) \neq 0$ ), e questa ha delle armoniche con periodi simili o identici a quelli propri della struttura la risposta dinamica è massimizzata (condizione pericolosa) → risonanza → collasso strutturale sotto azione dinamica.

La [1.1] può essere scritta alternativamente in funzione della fase iniziale  $\varphi$ :

$$u(t) = A \cos(\omega_n t - \varphi) \quad [1.3]$$

*fase del moto*

*costanti di integrazione reali incognite che vanno determinate imponendo le condizioni iniziali per  $t=0$*

Le costanti  $A$  e  $\varphi$  sono determinate dalle condizioni iniziali:

CONDIZIONI INIZIALI  $\begin{cases} u_{t=0} = u(0) \\ \dot{u}_{t=0} = \dot{u}(0) \end{cases} \rightarrow$  Ricordando le formule trigonometriche:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$$

$$u(t) = A \cos(\omega_n t - \varphi)$$

$$u(t) = A [\cos \omega_n t \cos \varphi + \sin \omega_n t \sin \varphi]$$

$$\dot{u}(t) = A [-\omega_n \sin \omega_n t \cos \varphi + \omega_n \cos \omega_n t \sin \varphi]$$

$$\begin{cases} u(0) = A \cos \varphi \\ \dot{u}(0) = \omega_n \sin \varphi \cdot A \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = \frac{u(0)}{\cos \varphi} \\ \dot{u}(0) = \omega_n u(0) \tan \varphi \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \tan \varphi = \frac{\dot{u}(0)}{\omega_n u(0)} \\ A = \frac{u(0)}{\cos \varphi} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \varphi = \arctan \frac{\dot{u}(0)}{\omega_n u(0)} \\ A = \frac{u(0)}{\cos \varphi} \end{cases}$$

Ricordando le formule trigonometriche:

$$\tan^2 \alpha = \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1 \rightarrow \tan^2 \varphi = \frac{\dot{u}(0)}{\omega_n u(0)} = \frac{1}{\cos^2 \varphi} - 1$$

$$\frac{1}{\cos \varphi} = \sqrt{1 + \frac{\dot{u}(0)}{\omega_n u(0)}} \rightarrow A = \frac{u(0)}{\cos \varphi} = u(0) \sqrt{1 + \frac{\dot{u}(0)}{\omega_n u(0)}}$$

quindi:  $\begin{cases} A = \sqrt{[u(0)]^2 + \left[\frac{\dot{u}(0)}{\omega_n}\right]^2} = u_0 \\ \varphi = \arctan \frac{\dot{u}(0)}{\omega_n u(0)} \end{cases}$  *non è niente altro che l'ampiezza max*

**FASE INIZIALE**

Si ottiene dunque:

$$u(t) = \sqrt{[u(0)]^2 + \left[\frac{\dot{u}(0)}{\omega_n}\right]^2} \cos\left(\omega_n t - \arctan \frac{\dot{u}(0)}{\omega_n u(0)}\right)$$

Allo stesso risultato ( $E(t) = \text{cost}$ ) si perviene anche utilizzando l'altra forma di  $u(t)$ , ovvero utilizzando la [1.3]:

$$E(t) = \frac{1}{2} m [\dot{u}(t)]^2 + \frac{1}{2} k [u(t)]^2$$

Sostituendo la [1.3]  $\rightarrow u(t) = A \cos(\omega_n t - \varphi)$

nell'equazione di  $E(t)$  e derivando prima  $u(t)$  si ottiene:

$$\dot{u}(t) = -\omega_n A \sin(\omega_n t - \varphi)$$

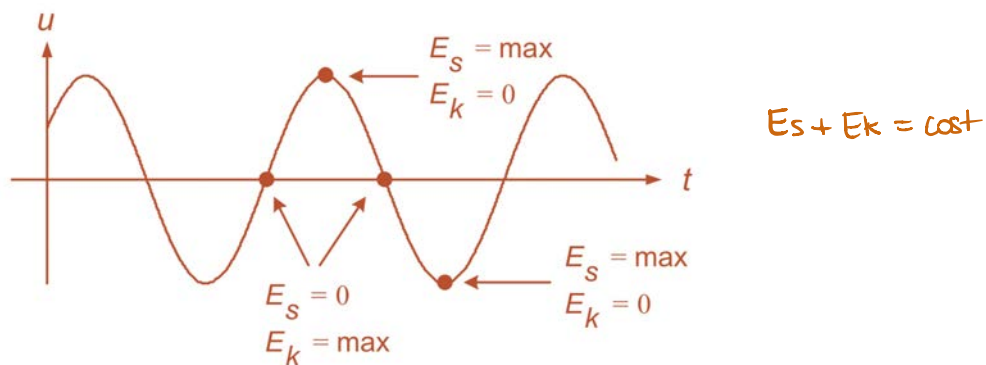
$$E(t) = \frac{1}{2} \underbrace{m \omega_n^2}_{k} A^2 \sin^2(\omega_n t - \varphi) + \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega_n t - \varphi)$$

$$E(t) = \frac{1}{2} k A^2 \underbrace{[\sin^2(\omega_n t - \varphi) + \cos^2(\omega_n t - \varphi)]}_{=1} = \frac{1}{2} k A^2$$

Come ricavato in precedenza  $A = \sqrt{[u(0)]^2 + \left[\frac{\dot{u}(0)}{\omega_n}\right]^2}$

Dunque si ricorre:  $E(t) = \frac{1}{2} k \left\{ u(0)^2 + \left[\frac{\dot{u}(0)}{\omega_n}\right]^2 \right\} = E$

e valgono le stesse considerazioni fatte in precedenza.



### OSSERVAZIONE

La conservazione dell'energia può essere utilizzata per ricavare l'equazione del moto:

$$E(t) = \frac{1}{2} k u(t)^2 + \frac{1}{2} m \dot{u}(t)^2$$

Conservazione dell'energia  $\Rightarrow \frac{dE(t)}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dE(t)}{dt} = k u(t) \dot{u}(t) + m \dot{u}(t) \ddot{u}(t)$

dunque  $\rightarrow m \ddot{u}(t) + k u(t) = 0 \leftarrow$  EQUAZIONE DEL MOTO

La costante di smorzamento  $c$  è una misura dell'energia dissipata in un ciclo di oscillazione libera o in un ciclo di oscillazione armonica forzata (forzante armonica). Mentre il rapporto di smorzamento (misura adimensionale dello smorzamento) è una proprietà del sistema che dipende dalle sue massa e dalle sue rigidità. Alla luce della definizione di rapporto di smorzamento e di pulsazione naturale, la [1.4] può essere riscritta come segue:

$$m \ddot{u} + c \dot{u} + k u = 0 \quad [1.4]$$

divido per  $m$  →

$$\ddot{u} + \frac{c}{m} \dot{u} + \frac{k}{m} u = 0$$

$\zeta = \frac{c}{2m\omega_n}$        $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow \frac{k}{m} = \omega_n^2$

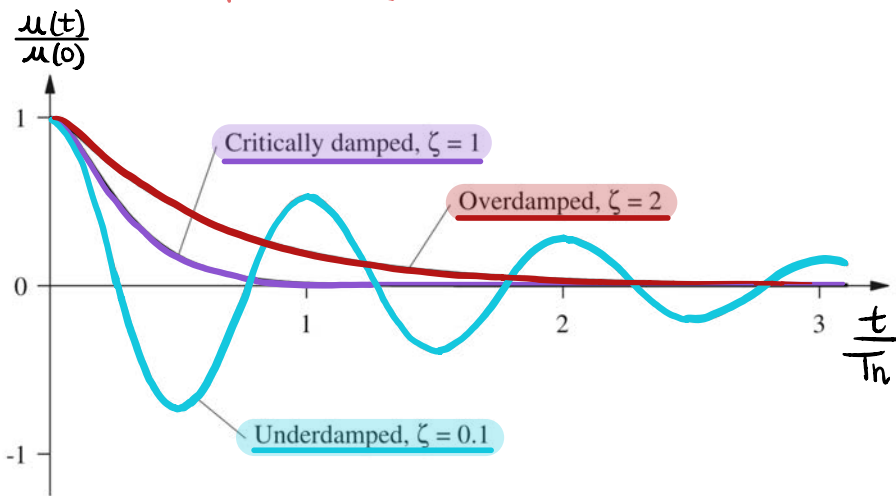
$$c = \zeta \cdot 2m \cdot \omega_n$$

$$\ddot{u} + 2\zeta\omega_n \dot{u} + \omega_n^2 u = 0 \quad [1.5]$$

EQUAZIONE DEL MOTO DI VIBRAZIONI LIBERE SMORZATE

Questa equazione può essere risolta con i metodi standard per le condizioni iniziali  $u(0)$  e  $\dot{u}(0)$ . Ma prima di risolverla formalmente, esaminiamone la soluzione qualitativamente. Come detto in precedenza si ottengono (ponendo la quantità sotto radice di  $\lambda_{1,2}$  uguale a zero) 3 casi particolari:

- (1) SISTEMI SOTTOSMORZATI (underdamped systems) →  $c < c_{cr}$  e  $\zeta < 1$   
(iposmorzati)
- (2) SISTEMI CRITICAMENTE SMORZATI (critically damped systems) →  $c = c_{cr}$  e  $\zeta = 1$
- (3) SISTEMI SOVRASMORZATI (overdamped systems) →  $c > c_{cr}$  e  $\zeta > 1$   
(ipersmorzati)



Il grafico accanto mostra il moto di  $u(t)$  dovuto allo spostamento iniziale  $u(0)$  per 3 valori di  $\zeta$ .

Se  $c < c_{cr}$  o  $\zeta < 1$ , il sistema oscilla attorno la posizione di equilibrio con ampiezze che progressivamente si riduce. Questi sistemi sono detti sistemi sottosmorzati.

In pratica tutte le strutture di interesse civile (edifici, ponti, dighe) ricadono in questa categoria in quanto generalmente il loro rapporto di smorzamento è  $\zeta < 0.1$ .



La soluzione delle [1.5]:  $\ddot{u} + 2\zeta\omega_n \dot{u} + \omega_n^2 u = 0 \quad \bar{e}$ :

$$u(t) = (C_1 + C_2 t) e^{\lambda t} \quad [1.6]$$

il 2° termine è moltiplicato per t, in quanto le 2 radici  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  sono coincidenti ( $\lambda$ )

Imponendo le CONDIZIONI INIZIALI  $\begin{cases} u_{t=0} = u(0) \\ \dot{u}_{t=0} = \dot{u}(0) \end{cases}$  si ricava dopo aver derivato:

$$\dot{u}(t) = C_2 e^{\lambda t} + \lambda (C_1 + C_2 t) e^{\lambda t}$$

$$\begin{cases} u(0) = C_1 e^{\lambda \cdot 0} = C_1 \\ \dot{u}(0) = C_2 + \lambda C_1 \end{cases} \quad \begin{cases} C_1 = u(0) \\ C_2 = \dot{u}(0) - \lambda u(0) \end{cases}$$

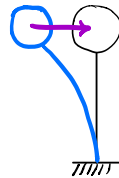
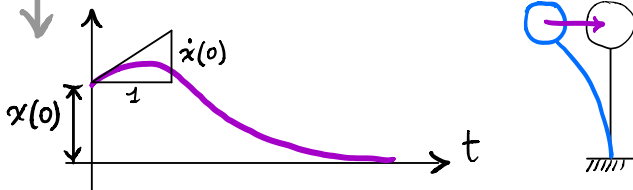
ricordando che  $\lambda = -\omega_n$  e sostituendo  $C_1$  e  $C_2$  nella [1.6], si ottiene infine:

$$u(t) = (u(0) + \dot{u}(0) + \omega_n u(0) t) e^{-\omega_n t}$$

$$u(t) = [u(0) (1 + \omega_n t) + \dot{u}(0)] e^{-\omega_n t}$$

→ curva vide del grafico precedente

non è un'espressione sinusoidale (non è un'espressione armonica), ma è una risposta di tipo esponenziale negativo in  $\omega_n t$ . Dunque per  $t \rightarrow +\infty \Rightarrow u(t) \rightarrow 0$ . La velocità con cui tende a zero è funzione di  $\omega_n$ .



Ciò vuol dire che la mia struttura rimane in oscillazione attorno al punto di equilibrio, non riesce nemmeno a fare un periodo completo (tende a tornare lentamente nella sua

configurazione iniziale stabile non facendo sviluppare nessun moto oscillatorio).

### OSSERVAZIONE

$C_{cr}$  è un valore tale per cui la struttura non riesce neanche a sviluppare 1 periodo.  $C = C_{cr}$  rappresenta la condizione ideale per un ingegnere antisismico. Se riuscissi a conferire alla mia struttura un comportamento talmente forte da spegnermi già il primo periodo di oscillazione sarebbe perfetto, perché a quel punto le forze di inerzia non le attiverei mai.  $C = C_{cr}$  è la minima viscosità per cui non si verificano oscillazioni libere.

$$u(t) = k_1 e^{\alpha_1 t} + k_2 e^{\alpha_2 t} \rightarrow u(t) = e^{-\zeta \omega_n t} [k_1 e^{i \omega_d t} + k_2 e^{-i \omega_d t}]$$

$-\zeta \omega_n + i \omega_d$                        $-\zeta \omega_n - i \omega_d$

*costanti complesse coniugate*

ricordando che:  $e^{\pm i \omega_d t} = \cos \omega_d t \pm i \sin \omega_d t$   
 (il termine tra parentesi rappresenta un moto armonico semplice)

*soluzione reale*

$$u(t) = e^{-\zeta \omega_n t} [A \cos \omega_d t + B \sin \omega_d t]$$

*costanti reali da determinare tramite condizioni iniziali*

Abbiamo ottenuto la stessa **armonica delle oscillazioni libere**, ma stavolta le oscillazioni sono **smorzate** dal termine esponenziale negativo  $\rightarrow$  la velocità di decadimento dipende da  $\zeta$ .

Imponendo le **CONDIZIONI INIZIALI**  $\begin{cases} u_{t=0} = u(0) \\ \dot{u}_{t=0} = \dot{u}(0) \end{cases}$  si ricava dopo aver derivato:

$$\dot{u}(t) = -\zeta \omega_n e^{-\zeta \omega_n t} [A \cos \omega_d t + B \sin \omega_d t] + e^{-\zeta \omega_n t} [-A \omega_d \sin \omega_d t + B \omega_d \cos \omega_d t]$$

$$\begin{cases} u(0) = A \\ \dot{u}(0) = -\zeta \omega_n A + B \omega_d \end{cases} \quad \begin{cases} A = u(0) \\ B = \frac{\dot{u}(0) + \zeta \omega_n u(0)}{\omega_d} \end{cases}$$

Dunque:

$$u(t) = e^{-\zeta \omega_n t} \left[ u(0) \cos \omega_d t + \frac{\dot{u}(0) + \zeta \omega_n u(0)}{\omega_d} \sin \omega_d t \right] \quad [1.2]$$

La soluzione può essere riscritta **alternativamente** in funzione delle fasi:

$$u(t) = A e^{-\zeta \omega_n t} \cos(\omega_d t - \varphi) \quad [1.3]$$

*fase del moto*

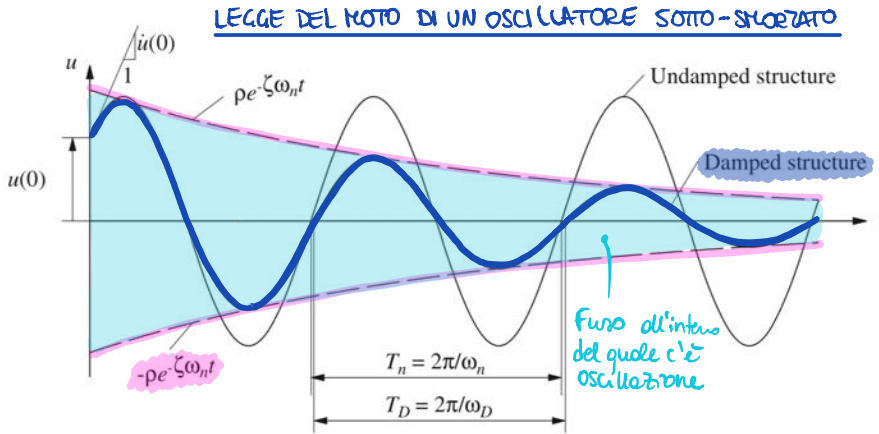
*costanti di integrazione reali incognite che vanno determinate imponendo le condizioni iniziali per  $t=0$*

Le costanti  $A$  e  $\varphi$  sono determinate dalle condizioni iniziali:

CONDIZIONI INIZIALI  $\begin{cases} u_{t=0} = u(0) \\ \dot{u}_{t=0} = \dot{u}(0) \end{cases} \rightarrow$  Ricordando le formule trigonometriche:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

La soluzione [1.8] trovata per i sistemi con  $c < c_{cr}$  o  $\zeta < 1$  (o l'equivalente [1.9]) è plottata nel grafico sottostante.



Esso mostra la risposta di oscillazione libera di un sistema SDF con un rapporto di smorzamento pari a  $\zeta = 5\%$ . Per confronto è pure riportata l'oscillazione libera dello stesso sistema ma non smorzato: la vibrazione libera di entrambi i sistemi inizia nello stesso punto  $\rightarrow$  spostamento iniziale imposto  $u(0)$ , e

con la stessa velocità  $\dot{u}(0)$  (dunque per  $t=0$  le 2 curve hanno la stessa ordinata e la stessa pendenza). Come visto in precedenza le pulsazioni e i periodi dei 2 sistemi (smorzato e non smorzato) sono legati dalle relazioni:

$$\omega_D = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

$\omega_D$  is the natural frequency of damped vibration

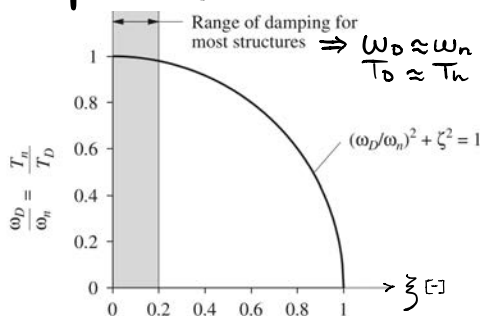
$$T_D = \frac{T_n}{\sqrt{1 - \zeta^2}}$$

$T_D$  is the natural period of damped vibration

L'ampiezza del moto di sistemi non smorzati, come visto in precedenza, è la stessa in tutti i cicli di vibrazione. Invece l'ampiezza del moto di sistemi smorzati decresce con ogni ciclo di vibrazione. La [1.8] indica che l'ampiezza decade esponenzialmente con il tempo. Le curve di inviluppo (in figura nel grafico) seguono la relazione:

$$u(t) = \pm \rho e^{-\zeta \omega_n t} = \sqrt{u(0)^2 + \left( \frac{\dot{u}(0) + \zeta \omega_n u(0)}{\omega_D} \right)^2}$$

Nei picchi la curva del moto blu tocca le curve di inviluppo in un punto.



Lo smorzamento ha l'effetto di abbassare la frequenza naturale da  $\omega_n$  a  $\omega_D$  e aumentare il periodo naturale da  $T_n$  a  $T_D$ . Questi effetti sono trascurabili per  $\zeta < 20\%$ . (Le strutture solitamente si trovano sotto questo valore) come mostrato nel grafico a sinistra. Quindi per molte strutture si può fare l'approssimazione che:  $\omega_D \approx \omega_n$  e  $T_D \approx T_n$ .

$$\frac{u_i}{u_{i+p}} = \frac{C e^{-\zeta \omega_n t_i} \cos(\omega_n t_i - \varphi)}{C e^{-\zeta \omega_n t_{i+p}} \cos(\omega_n t_{i+p} - \varphi + p T_D)} \approx e^{\zeta \omega_n p T_D}$$

↑ Come si nota questo rapporto  $u_i/u_{i+p}$  non dipende dal tempo  $t$

Passando ai logaritmi:  $\ln\left(\frac{u_i}{u_{i+p}}\right) = \ln\left(e^{\zeta \omega_n p T_D}\right)$

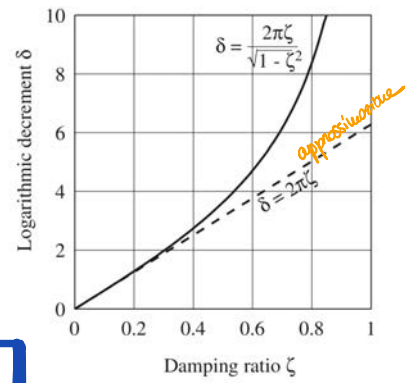
$$\delta = \ln\left(\frac{u_i}{u_{i+p}}\right) = \zeta \omega_n p T_D$$

↓  
decremento del logaritmo

$\frac{2\pi}{\omega_n}$   
 $\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}$

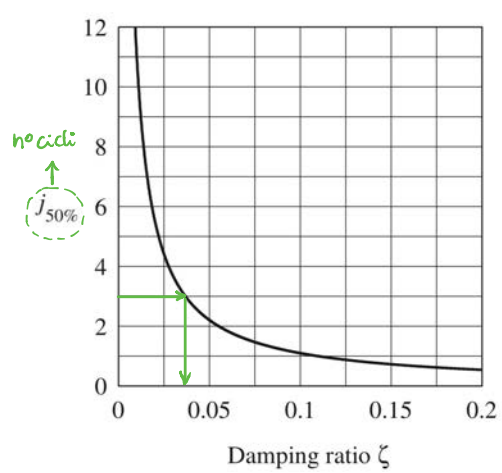
$$\delta = \frac{2\pi p \zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \longrightarrow \delta \approx 2\pi p \zeta$$

se  $\zeta$  è piccolo ( $\zeta < 0.2$ ) allora  $\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} \approx 1$



Infine si ottiene:

$$\zeta \approx \frac{\delta}{2\pi p} = \frac{1}{2\pi p} \cdot \ln\left(\frac{u_i}{u_{i+p}}\right)$$



← Un metodo semplice per stimare il rapporto di smorzamento  $\zeta$  è quello di contare il n° di cicli necessari per produrre una riduzione del 50% nell'ampiezza di oscillazione.

**OSSERVAZIONE**  
Oggi giorno al decremento logaritmico si preferiscono le procedure di "curve fitting".

Lo smorzamento di Coulomb risulta dall'attrito che si sviluppa dallo scorrimento di 2 superfici asciutte. La forza attrittiva è:

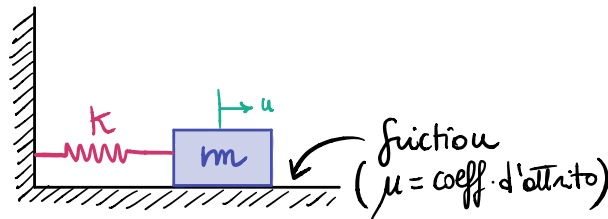
è assunta essere indipendente dalla velocità e agente nel verso opposto alla direzione del moto (il suo segno così cambia ogni qual volta cambia la direzione del moto)

$$F = \mu \cdot N$$

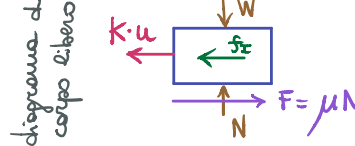
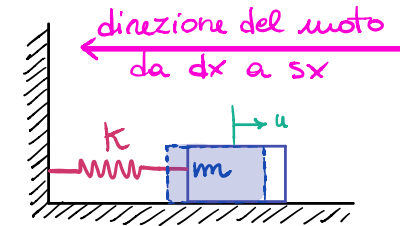
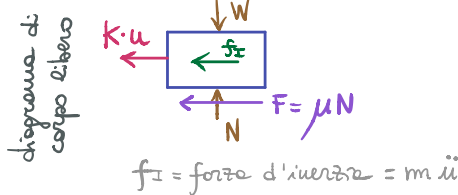
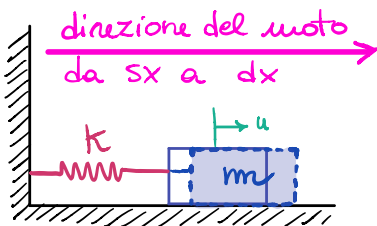
coefficiente di attrito statico o dinamico (sono supposti essere uguali)

forza normale agente tra le superfici che scorrono

Lo schema utilizzato per studiare il problema è quello di un sistema SRF massa - molla:



Il cambio di segno fa sì che necessita formulare 2 equazioni differenziali: una valida per il moto in una direzione, e una valida quando il moto è di verso opposto.



EQUAZIONE DEL MOTO (sx → dx):

EQUAZIONE DEL MOTO (dx → sx):

$$m\ddot{u} + ku = -F$$

$$m\ddot{u} + ku = +F$$

Soluzione

$$u(t) = A_2 \cos \omega_n t + B_2 \sin \omega_n t - \frac{u_F}{K}$$

$\frac{u_F}{K} = \frac{F}{K}$

Soluzione

$$u(t) = A_1 \cos \omega_n t + B_1 \sin \omega_n t + \frac{u_F}{K}$$

$\frac{u_F}{K} = \frac{F}{K}$

Le costanti  $A_1, B_1, A_2, B_2$  dipendono dalle condizioni iniziali di ogni successivo emiciclo (mezzo-ciclo di moto).

$\omega_n$  e la costante  $u_F$  possono essere interpretate come la deformazione statica della molla dovuta alla forza d'attrito  $F$ .

Partendo da questa posizione di estremo a sinistra  $\textcircled{B}$ , la molla si muove verso dx con moto descritto dalla relazione:

$$u(t) = A_2 \cos \omega_n t + B_2 \sin \omega_n t - \frac{F}{k} \quad (b)$$

Le costanti  $A_2$  e  $B_2$  sono determinate dalle condizioni all'inizio di questo ciclo:

$$\text{CONDIZIONI in } \textcircled{B} \begin{cases} u(B) = -u(0) + 2u_F \\ \dot{u}(B) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{u}(t) = -\omega_n A_2 \sin \omega_n t + \omega_n B_2 \cos \omega_n t \\ -u(0) + 2u_F = A_2 - u_F \\ 0 = \omega_n B_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A_2 = -u(0) + 3u_F \\ B_2 = 0 \end{cases}$$

Sostituendo a (b) si ottiene:

$$u(t) = \boxed{[-u(0) + 3u_F] \cos \omega_n t - u_F}$$

- valida per  $\frac{\pi}{\omega_n} \leq t \leq \frac{2\pi}{\omega_n}$
- funzione coseno con ampiezza ridotta  $-u(0) + 3u_F$  valida finché la velocità diventa zero di nuovo a  $t = \frac{2\pi}{\omega_n} = T_n \rightarrow$  e questo istante di tempo  $u = u(0) - 4u_F$

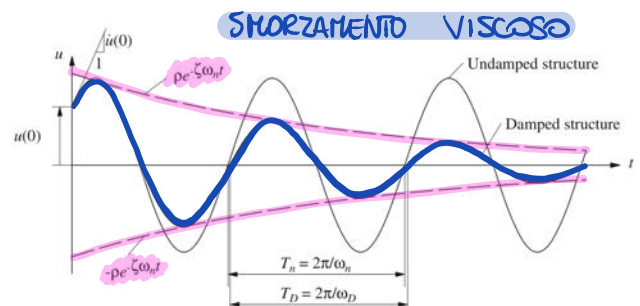
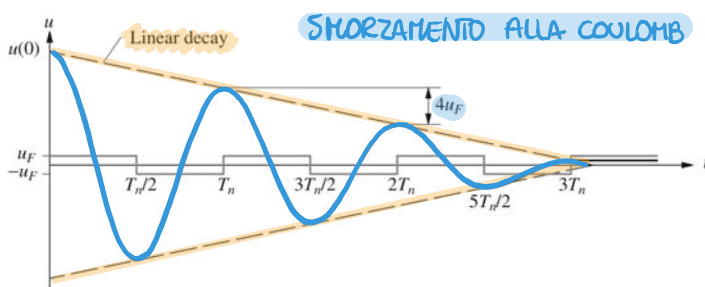
E così via...

Il tempo impiegato per ogni mezzo-ciclo è  $\frac{\pi}{\omega_n}$  e la durata di tutto il ciclo, ovvero il periodo naturale di oscillazione  $T_n$  è:

$$\boxed{T_n = \frac{2\pi}{\omega_n}}$$

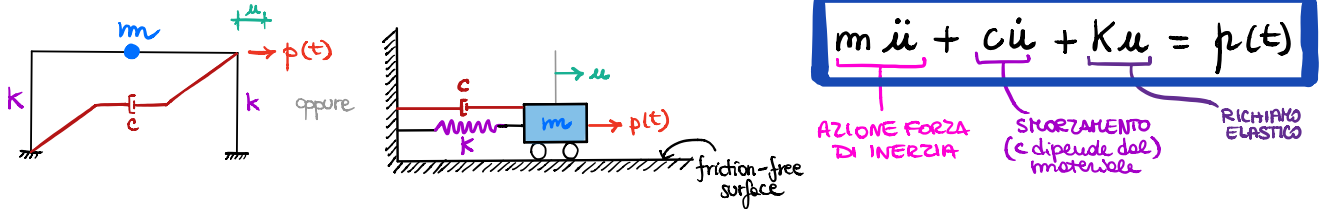
Si osserva come il periodo naturale di un sistema con smorzamento alla Coulomb è lo stesso di quello di un sistema senza smorzamento. Al contrario, lo smorzamento viscoso aveva un effetto di allungare il periodo da  $T_n$  a  $T_D$ .

Si fa notare inoltre che l'ampiezza si riduce di  $4u_F$  ogni ciclo di moto ( $u_{i+1} = u_i - 4u_F$ ). Per tanto gli inviluppi delle curve spostamento-tempo sono delle rette invece di essere funzioni esponenziali come per i sistemi con smorzamento viscoso:



## 2. RISPOSTA AD ECCITAZIONI ARMONICHE (SDF)

Il moto di un sistema lineare SDF, che può essere schematizzato ed idealizzato con un telaio ad 1 solo grado di libertà o da un oscillatore semplice massa-molla-smorzatore, soggetto ad una forza esterna  $p(t)$  è governata dall'equazione che abbiamo ricavato in precedenza:



### ● FORZANTE ARMONICA

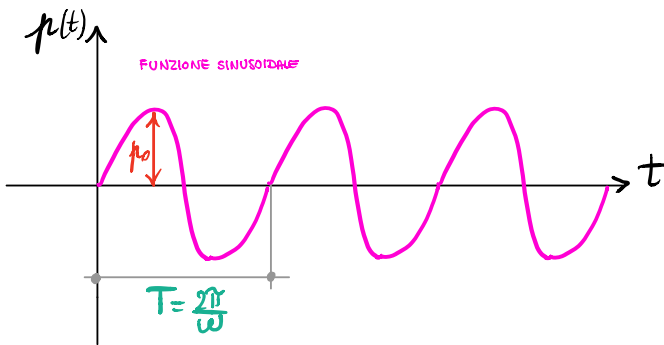
Una forza armonica è del tipo

$$p(t) = p_0 \sin \omega t$$

oppure

$$p(t) = p_0 \cos \omega t$$

N.B. Questa  $\omega \neq \omega_n \neq \omega_p$  ma è una pulsazione che dipende dall'eccitazione



ampiezza delle forze
frequenza della forzante o anche detta frequenza eccitante

mentre  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  è il periodo della forzante o periodo eccitante

Applicando una forzante armonica alla struttura l'equazione del moto diventa:

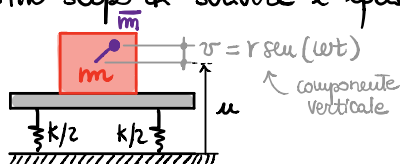
$m \ddot{u} + c \dot{u} + K u = p_0 \sin \omega t$ 
[2.1]

EQUAZIONE DIFFERENZIALE CHE GOVERNA IL SISTEMA SOGGETTO AD UNA FORZANTE ARMONICA

La risposta di un sistema SDF ad una eccitazione armonica è un classico argomento di dinamica strutturale, non solo perché queste eccitazioni si riscontrano spesso in problemi ingegneristici (es: forze dovute alla rotazione di una ruota eccentrica), ma anche perché servono per comprendere la risposta della struttura anche ad altri tipi di forze.

### ESEMPIO

Allo scopo di scrivere l'equazione del moto si considera un sistema che consiste in una massa  $m$  ed una ruota eccentrica  $\bar{m}$ .



$$-(m - \bar{m}) \ddot{u} - \bar{m} (\ddot{v} + \ddot{u}) - k u = 0$$

$m \ddot{u} + k u = \bar{m} r \omega^2 \sin(\omega t)$

La soluzione dell'omogenea associata ( $m\ddot{u} + ku = 0$ ) è quella della risposta ad oscillazioni libere che avevamo ricavato in precedenza:

$$u_c(t) = A \cos(\omega_n t) + B \sin(\omega_n t)$$

EQUAZIONE DELLE OSCILLAZIONI LIBERE FRIVE DI SMORZAMENTO (soluzione reale) (soluzione omogenea associata)

costanti di integrazioni reali incognite che vanno determinate imponendo le condizioni iniziali per  $t=0$

Oppure può essere scritta alternativamente in funzione della fase iniziale  $\varphi$ :

$$u_c(t) = A \cos(\omega_n t - \varphi)$$

costanti di integrazioni reali incognite che vanno determinate imponendo le condizioni iniziali per  $t=0$

fase del moto

La soluzione particolare dell'equazione differenziale lineare del secondo ordine è da cercare nella forma:

$$u_p(t) = C \sin \omega t \quad [2.3]$$

Bisogna inserire [2.3] in [2.2]:  $m\ddot{u} + ku = p_0 \sin \omega t$

$$\dot{u}_p(t) = \omega C \cos \omega t$$

$$\ddot{u}_p(t) = -\omega^2 C \sin \omega t$$

$$-m\omega^2 C \sin \omega t + kC \sin \omega t = p_0 \sin \omega t$$

$$C(k - m\omega^2) = p_0$$

$$C = \frac{p_0}{k - m\omega^2} \quad \text{ricordando poi che: } \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow m = \frac{k}{\omega_n^2} \text{ sostituendo:}$$

$$C = \frac{p_0}{k - \frac{k}{\omega_n^2} \omega^2} \rightarrow C = \frac{p_0}{k \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)} \rightarrow C = \frac{p_0}{k} \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

quindi la soluzione particolare è:

$$u_p(t) = \frac{p_0}{k} \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \sin \omega t$$

$x = F/k$  ELONGAZIONE STATICA SOTTO l'azione di  $p_0$   
 massima  
 [ricorda la legge di Hooke]  
 $\rightarrow F = kx \Rightarrow x = F/k$

RAFFORTO DI FREQUENZA

$$\beta = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{\text{freq. eccitazione}}{\text{freq. naturale struttura}}$$



se  $\beta = \omega/\omega_n = 1$  (cioè  $\omega = \omega_n$ ) si ha RISONANZA  $\rightarrow u_p(t) \rightarrow \infty$  e dunque anche  $u(t) \rightarrow \infty$

vul dire che la mia struttura oscilla sempre di più

Bisogna far si che  $\omega_n \neq \omega_{forzate}$  [ $\beta \neq 1$ ]



Questa componente di **forced vibration** or **steady-state vibration** è presente a causa delle forze applicate e non importa quali siano le condizioni iniziali.

- (2) la **componente transitoria** con termini  $\sin \omega t$  e  $\cos \omega t$  danno un contributo di **oscillazione alla frequenza naturale della struttura**. Questa componente di **free vibration** or **transient vibration** dipende invece dalle condizioni iniziali. La componente transiente è mostrata nel grafico a pagina precedente come la differenza tra la curva continua nera (**total response**) e la curva tratteggiata rossa (**steady-state response**). Questa componente nel grafico è mostrata essere infinita (cioè continua per sempre). Questo accade solo da un punto di vista teorico perché lo **smorzamento inevitabilmente**, presente nelle strutture reali, fa **decadere l'oscillazione libera** nel tempo. Proprio per questo motivo questa componente è detta **TRANSIENTE** o **transitorio**.

### OSSERVAZIONE

Scrivendo la soluzione dell'omogenea associata nella forma alternativa si ottiene:

$$u(t) = \begin{cases} u_c(t) = A \cos(\omega t - \varphi) \\ u_p(t) = \frac{p_0}{k} \frac{1}{1 - (\frac{\omega}{\omega_n})^2} \sin \omega t \end{cases}$$

$$u(t) = A \cos(\omega t - \varphi) + \frac{p_0}{k} \frac{1}{1 - (\frac{\omega}{\omega_n})^2} \sin \omega t$$

Applicando le CONDIZIONI INIZIALI  $\begin{cases} u_{t=0} = u(0) \\ \dot{u}_{t=0} = \dot{u}(0) \end{cases}$  e ricordando le formule trigonometriche

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$u(t) = A \cos \omega t \cos \varphi + A \sin \omega t \sin \varphi + \frac{p_0}{k} \frac{1}{1 - (\frac{\omega}{\omega_n})^2} \sin \omega t$$

$$\dot{u}(t) = -\omega_n A \sin \omega t \cos \varphi + \omega_n A \cos \omega t \sin \varphi + \frac{p_0}{k} \frac{\omega}{1 - (\frac{\omega}{\omega_n})^2} \cos \omega t$$

$$\begin{cases} u(0) = A \cos \varphi \\ \dot{u}(0) = \omega_n A \sin \varphi + \frac{p_0}{k} \frac{\omega}{1 - (\frac{\omega}{\omega_n})^2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = u(0) / \cos \varphi \\ \dot{u}(0) = \omega_n \frac{u(0)}{\cos \varphi} \sin \varphi + \frac{p_0}{k} \frac{\omega}{1 - (\frac{\omega}{\omega_n})^2} \end{cases}$$

$$\dot{u}(0) - \frac{p_0}{k} \frac{\omega}{1 - (\frac{\omega}{\omega_n})^2} = \omega_n u(0) \tan \varphi \rightarrow \varphi = \arctg \left[ \frac{\dot{u}(0)}{u(0) \omega_n} - \frac{p_0}{k} \frac{\omega / \omega_n}{1 - (\frac{\omega}{\omega_n})^2} \right]$$

• per  $\omega > \omega_n$  cioè  $\beta > 1$  :

$R_d < 0$ ,  $R_d$  negativo indica che  $u(t)$  e  $p(t)$  hanno segno algebrico opposto (cioè quando la forza agisce verso dx, ma il sistema sarebbe spostato verso sx).  
Lo spostamento è detto essere fuori fase rispetto la forza applicata.

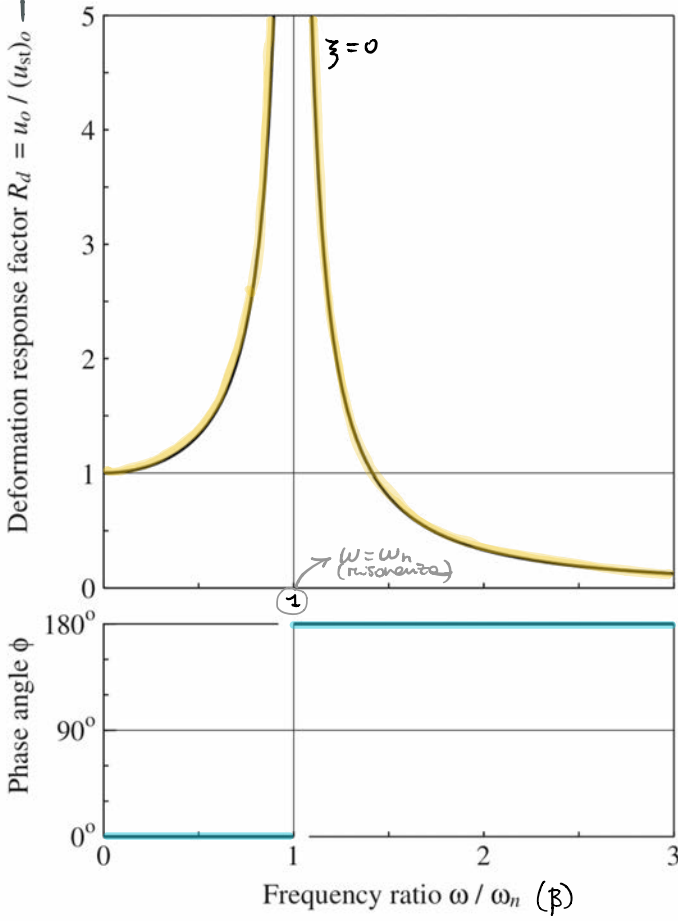
Matematicamente per descrivere questo concetto conviene riscrivere l'equazione [2.5] in termini di ampiezza  $u_0$  e di angolo di fase  $\varphi$ :

$$u(t) = u_0 \sin(\omega t - \varphi) = \frac{p_0}{k} R_d \sin(\omega t - \varphi)$$

$$R_d = \frac{u_0}{(u_{st})_0} = \frac{1}{|1 - (\frac{\omega}{\omega_n})^2|}$$

$$\varphi = \begin{cases} 0^\circ & \text{per } \omega < \omega_n \\ 180^\circ & \text{per } \omega > \omega_n \end{cases}$$

indica che spostamento varia come il  $-\sin \omega t$  cioè fuori fase rispetto la forza applicata



Il **fattore di risonanza** (o di risposta)  $R_d$  (deformation or displacement response factor) o **fattore di amplificazione dinamica** è il rapporto tra l'ampiezza  $u_0$  delle vibrazioni dinamiche (risposta dinamica) e la deformazione statica  $(u_{st})_0$ . Plottando  $R_d$  in funzione del rapporto di frequenze permette di fare alcune considerazioni:

- se  $\omega/\omega_n$  è piccolo (cioè la forza varia lentamente),  $R_d$  è poco più grande dell'unità e l'ampiezza delle deformazione dinamica è essenzialmente la stessa di quella statica.

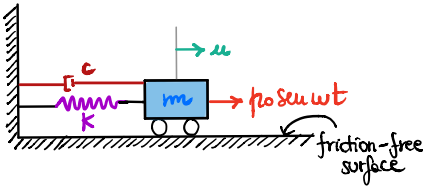
- se  $\omega/\omega_n > \sqrt{2}$  (cioè  $\omega > \omega_n \sqrt{2}$ )  $R_d < 1$  e l'ampiezza della deforma-

zione dinamica è minore di quella statica. Quando  $\omega/\omega_n$  aumenta oltre a  $\sqrt{2}$ ,  $R_d$  diventa più piccolo tendendo a zero per  $\omega/\omega_n \rightarrow \infty$ , comportando che la deformazione vibrazionale dovuta alla variazione delle forze è molto piccola.

- se  $\omega/\omega_n \approx 1$  (cioè  $\omega \approx \omega_n$ ),  $R_d$  è molto più grande di 1 ( $R_d \rightarrow \infty$ ) comportando che l'ampiezza di deformazione è molto più grande di quella statica.

**CASO 2 : VIBRAZIONI ARMONICHE IN SISTEMI SMORZATI**

Per sistemi smorzati l'equazione del moto è:



$$m \ddot{u} + c \dot{u} + K u = p_0 \sin \omega t \quad [2.7]$$

La soluzione completa dell'equazione differenziale di moto è data dalla somma di una soluzione omogenea  $u_c(t)$  e di una soluzione particolare:

$$u(t) = u_c(t) + u_p(t)$$

[rappresenta la risposta di vibrazione libera del sistema]

SOLUZIONE OMOGENEA ASSOCIATA (o soluzione complementare)

SOLUZIONE PARTICOLARE [rappresenta la risposta specifica generata direttamente dalla sollecitazione esterna]

Poiché l'equazione differenziale del moto è del 2° ordine, sono coinvolte 2 costanti di integrazione. Queste compaiono nella soluzione dell'omogenea associata (o detta soluzione complementare) e si determinano in base alle CONDIZIONI INIZIALI  $\rightarrow u_{t=0} = u(0)$  e  $\dot{u}_{t=0} = \dot{u}(0)$

La soluzione dell'omogenea associata ( $m \ddot{u} + c \dot{u} + K u = 0$ ) è data dalle risposte ad oscillazioni libere di un sistema smorzato che avevamo trovato nel capitolo precedente:

$$u_c = e^{-\zeta \omega_n t} \left( A \cos \omega_d t + B \sin \omega_d t \right) \quad [2.8]$$

$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$

La soluzione particolare è da cercare nella forma:

$$u_p(t) = C \sin \omega t + D \cos \omega t$$

ci dice che la risposta di un sistema smorzato non è in fase con la sollecitazione

La [2.7] può essere riscritta come (dividendo per m):

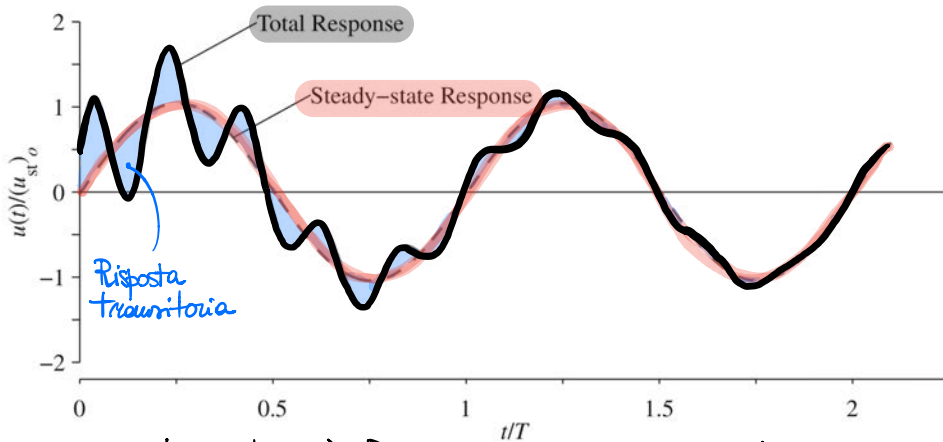
$$\frac{m \ddot{u}}{m} + \frac{c \dot{u}}{m} + \frac{K u}{m} = \frac{p_0}{m} \sin \omega t$$

$\frac{c}{m} = 2\zeta \omega_n$        $\frac{K}{m} = \omega_n^2$

$$\ddot{u} + 2\zeta \omega_n \dot{u} + \omega_n^2 u = \frac{p_0}{m} \sin \omega t$$

Sostituendo la [2.8] in quest'ultima equazione si ricavano le costanti C e D (dopo aver derivato):

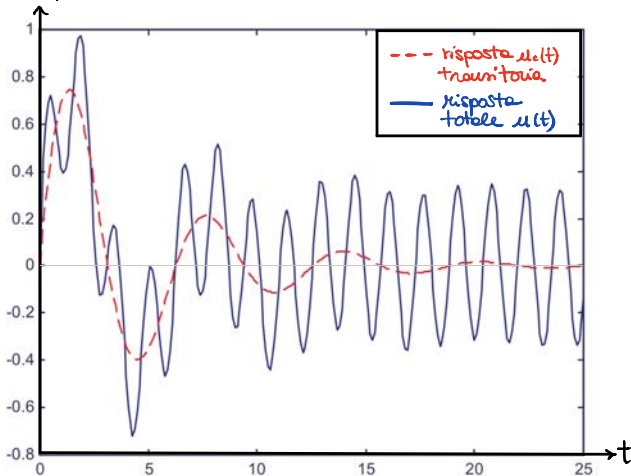
$u(t)$  ha 2 componenti: **free vibration** (natural frequency  $\omega_n$  terms) e **forced vibration** (excitation frequency  $\omega$  terms). La [2.9] è plottata di seguito:



La differenza tra la curva continua nera (total response) e la curva tratteggiata rossa (steady-state response) rappresenta la risposta transitoria che decade esponenzialmente col tempo ad una velocità che dipende dal rapporto di frequenza  $\omega/\omega_n$  e da  $\zeta$  (per questo appunto si chiama

risposta transitoria). Dopo un certo intervallo di tempo rimane sostanzialmente solo la risposta stazionaria, quindi la struttura vibra con la stessa frequenza di vibrazione della forzante applicata. La risposta dunque riflette l'eccitazione ma risulta ritardata e amplificata. Bisogna sottolineare che comunque il massimo picco di deformazione può essere raggiunto anche prima che decada la risposta transitoria (come si vede nel grafico sopra).

$u(t), u_c(t)$



L'esempio numerico plottato a lato mostra come dopo un certo tempo la risposta transitoria  $u_c(t)$  sparisce e rimane la sola risposta di stato permanente  $u_p(t)$ . In questo particolare esempio, lo stato permanente si raggiunge dopo 20 secondi circa.

**OSSERVAZIONE**

Esprimendo  $u_c(t)$  e  $u_p(t)$  in funzione di ampiezza e fase si ottiene:

$$u(t) = A e^{-\zeta \omega_n t} \cos(\omega_n t - \varphi) + C \sin(\omega t - \theta)$$

$u_c(t) \rightarrow$  risposta transitoria       $u_p(t) \rightarrow$  risposta stazionaria

A e  $\varphi$  si ricavano imponendo le condizioni iniziali, mentre C è determinata sostituendo la soluzione particolare  $u_p(t)$  nell'equazione del moto:

$C = \frac{f_0}{k} \frac{1}{\sqrt{[1 - (\omega/\omega_n)^2]^2 + [2\zeta(\omega/\omega_n)]^2}}$  ;  $\theta = \arctg \frac{2\zeta(\omega/\omega_n)}{1 - (\omega/\omega_n)^2}$

*(Note:  $f_0/k$  is labeled 'risposta statica del sistema', and the denominator is labeled 'dopo che scade u\_c(t)')*

• COMPLESSO CONIUGATO

$$z_1^* = a_1 - j b_1 = \rho_1 e^{-j\phi_1}$$

• MODULO:  $|z_1| = \rho_1$

$$|z_1| = \rho_1 = \sqrt{z_1 \cdot z_1^*}$$

$$\frac{\rho_1 \cdot e^{j\phi_1}}{z_1} \cdot \frac{\rho_1 \cdot e^{-j\phi_1}}{z_1^*}$$

→ proprietà del complesso coniugato:

- (a)  $[z_1 \pm z_2]^* = z_1^* \pm z_2^*$
- (b)  $[z_1 \cdot z_2]^* = z_1^* \cdot z_2^*$
- (c)  $[z_1 / z_2]^* = z_1^* / z_2^*$
- (d)  $[z^*]^* = z$
- (e)  $z + z^* = 2 \operatorname{Re}(z)$
- (f)  $z - z^* = 2j \operatorname{Im}(z)$

• RECIPROCO:

$$\frac{1}{z_1} = \frac{z_1^*}{|z_1|^2} = \frac{1}{a_1^2 + b_1^2} (a_1 - j b_1)$$

• QUOZIENTE:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{a_2^2 + b_2^2} [(a_1 a_2 + b_1 b_2) + j (b_1 a_2 - a_1 b_2)]$$

• RELAZIONI TRA MODULO E CONIUGAZIONE

$$|z| = |z^*| \quad ; \quad |z|^2 = z z^* \quad ; \quad |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \quad ; \quad (|z_1| + |z_2|) \geq |z_1 - z_2|$$

• DERIVATA DI UNA FUNZIONE COMPLESSA

$$W = u + j v \rightarrow \psi(x, y)$$

$$\downarrow$$

$$f(x + j y) \rightarrow \phi(x, y)$$

(funzione complessa)

$$\leftrightarrow W(t) = \rho(t) \cdot e^{j\phi(t)}$$

$$\frac{dW}{dt} = \dot{\rho}(t) e^{j\phi(t)} + \rho(t) \dot{\phi}(t) j e^{j\phi(t)}$$

E sostituendo  $u_p(t)$  e le sue derivate nell'equazione del moto si ottiene che:

$$-m \omega^2 \bar{U} e^{j\omega t} + c j \omega \bar{U} e^{j\omega t} + k \bar{U} e^{j\omega t} = p_0 e^{j\omega t}$$

$$\bar{U} [(k - m\omega^2) + j\omega c] = p_0 \rightarrow \boxed{\bar{U} = \frac{p_0}{[(k - m\omega^2) + j\omega c]}}$$

Dopo qualche passaggio matematico possiamo esprimere  $\bar{U}$  come:

$$\bar{U} = \frac{p_0}{k} \frac{1}{[1 - (\omega/\omega_n)^2] + j[2\zeta(\omega/\omega_n)]}$$

questa equazione contiene le risposte di stato permanente di entrambe le forze armoniche  $p(t) = p_0 \sin \omega t$  e  $p(t) = p_0 \cos \omega t$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\zeta = \frac{c}{2m\omega_n}$$

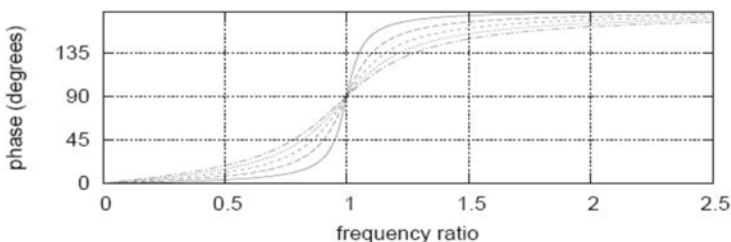
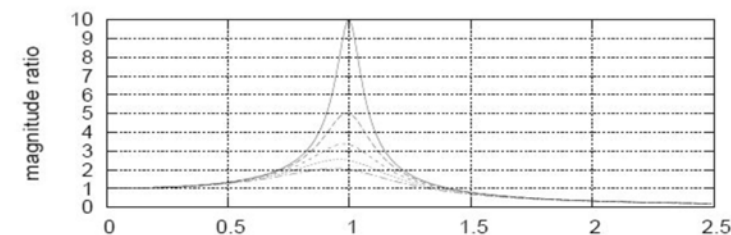
$\bar{U} = \bar{U}(\omega) \rightarrow$  è detta **FUNZIONE COMPLESSA DI RISPOSTA DI FREQUENZA**: essa descrive la risposta di stato permanente del sistema alla forza  $p(t) = p_0 e^{j\omega t}$

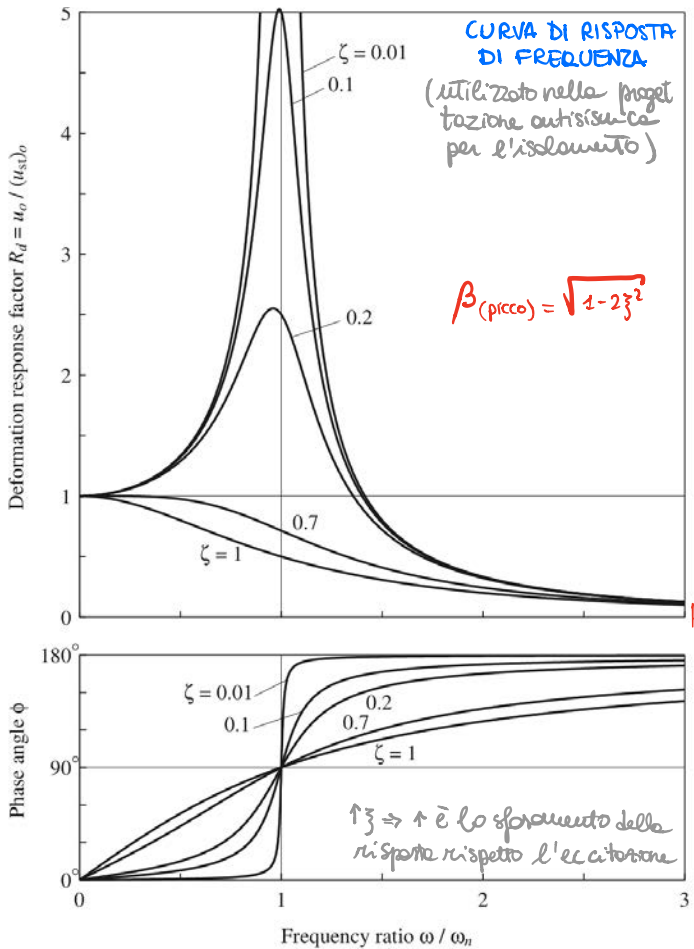
E dopo qualche altro passaggio si ottiene:

$$u_p(t) = \frac{p_0}{k} \frac{1}{[1 - (\omega/\omega_n)^2]^2 + [2\zeta(\omega/\omega_n)]^2} e^{j(\omega t - \theta)}$$

$$\tan \theta = \frac{2\zeta(\omega/\omega_n)}{1 - (\omega/\omega_n)^2}$$

Rappresentazione delle curve di  $\bar{U}$  per valori diversi di  $\zeta$





• Se  $w/w_n \ll 1$ , cioè  $T \gg T_n$ , ovvero la forza applicata varia lentamente (in maniera quasi statica),  $R_d$  è di poco maggiore di 1 ed è sostanzialmente indipendente dallo smorzamento (quindi da  $\zeta$ ), per tanto si ottiene che:

$$R_d \approx 1 \rightarrow u_0 \approx (u_{st})_0 = \frac{p_0}{K}$$

(risposte quasi statiche)

Ciò implica che l'ampiezza della risposta dinamica  $u_0$  è sostanzialmente la stessa di quella statica ed è controllata dalla rigidità  $K$  del sistema.

La fase  $\phi$  ( $\theta$  di fase) è prossima allo  $0^\circ$ , e lo spostamento è sostanzialmente in fase con la forza applicata.

• Se  $w/w_n \gg 1$ , cioè  $T \ll T_n$ , ovvero la forza varia rapidamente,  $R_d$  tende a zero quando  $w/w_n \uparrow$  ed è sostanzialmente indipendente dallo smorzamento (quindi da  $\zeta$ ),

per tanto, per valori grandi di  $w/w_n$  il termine  $[(w/w_n)^2]^2$  è dominante e quindi si può fare la seguente approssimazione:

$$u_0 \approx (u_{st})_0 \frac{w_n^2}{w^2} = \frac{p_0}{m w^2}$$

Ciò implica che la risposta è controllata dalla massa  $m$  del sistema.

La fase  $\phi$  è prossima ad essere  $180^\circ$ , e lo spostamento è sostanzialmente in opposizione di fase rispetto la forza applicata.

• Se  $w/w_n \approx 1$ , cioè  $T \approx T_n$ , ovvero la frequenza della forzante è prossima a quella naturale della struttura,  $R_d$  è molto sensibile allo smorzamento, e per smorzamenti piccoli,  $R_d$  può essere molto più grande dell'unità comportando che l'ampiezza della risposta dinamica può essere molto più grande di quella statica. In particolare se  $w = w_n$  si ha:

$$u_0 = \frac{(u_{st})_0}{2\zeta} = \frac{p_0}{c w_n}$$

RISONANZA  
↳ rincarico sismologico perché si ha l'amplificazione massima

Ciò implica che la risposta è controllata dallo smorzamento  $c$  del sistema.

**FREQUENZE DI RISONANZA E RISPOSTA IN RISONANZA** ( $\omega = \omega_n$ )

Una frequenza forzante è detta **frequenza risonante** quando si registra la **massima risposta in ampiezza**, ovvero quando  **$R_d$  è max.**  
 La frequenza risonante (per lo spostamento) può essere determinata imponendo l'annullamento della derivata prima di (a) rispetto  $\omega/\omega_n$ . Si ottiene:

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2} \quad (d)$$

Sostituendo in

(a)  $\omega \rightarrow \omega_r$  si ottiene il **fattore di amplificazione dinamica per la frequenza risonante  $\omega_r$**

$$R_{d,max} = \frac{1}{2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}}$$

**OSSERVAZIONE**

Se  $\zeta < 0.2 \rightarrow R_{d,max} \approx \frac{1}{2\zeta}$

la differenza tra la frequenza risonante e la frequenza naturale è piccola

$\omega_n \approx \omega_D \approx \omega_r$   
 $\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$   
 $\sqrt{\frac{k}{m}} \quad \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$

Valida per problemi ingegneristici (le strutture reali in genere hanno  $\zeta < 0.2$ )

Guardando i 3 grafici a sx di pagine precedenti si nota come i picchi per le curve di frequenza di risposta dello spostamento, della velocità e dell'accelerazione, avvengano a diverse frequenze. Per tanto  $R_{v,max}$  sarà diversa da  $R_{d,max}$  come  $R_{a,max} \neq R_{d,max}$ :

$$\omega_{v,r} = \omega_n \quad (e) \rightarrow R_{v,max} = \frac{1}{2\zeta}$$

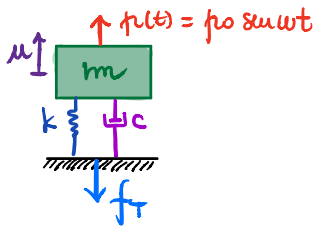
$$\omega_{a,r} = \frac{\omega_n}{\sqrt{1 - 2\zeta^2}} \quad (f) \rightarrow R_{a,max} = \frac{1}{2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}}$$

**OSSERVAZIONE**

Per sistemi non smorzati ( $\zeta = 0$ )  $\Rightarrow$  (d)(e)(f) coincidono tutte con  $\omega_n$ .



### 3. ISOLAMENTO DALLE VIBRAZIONI E STRUMENTI



Consideriamo il sistema massa - molla - smorzatore in figura soggetto ad 1 forza armonica.

La risposta di stato permanente è:

$$u(t) = \frac{p_0}{k} R_d e^{j(\omega t - \theta)} \quad [3.1]$$

La forza trasmissa alla base (cioè al suolo) è:

$$f_T(t) = f_s + f_d = k u(t) + c \dot{u}(t) \quad [3.2]$$

forza trasmissa al suolo
forza delle spring
forza del damper

Sostituendo [3.1] in [3.2] si ottiene dopo derivazione:

$$u(t) = \frac{p_0}{k} R_d j \omega e^{j(\omega t - \theta)}$$

$$f_T(t) = p_0 R_d e^{j(\omega t - \theta)} + \frac{c}{k} p_0 R_d j \omega e^{j(\omega t - \theta)}$$

$$f_T(t) = p_0 R_d \left[ e^{j(\omega t - \theta)} + 2\zeta \frac{\omega}{\omega_n} j e^{j(\omega t - \theta)} \right]$$

$$f_T(t) = p_0 R_d \sqrt{1 + [2\zeta (\frac{\omega}{\omega_n})]^2} e^{j(\omega t - \theta)}$$

RICORDANDO

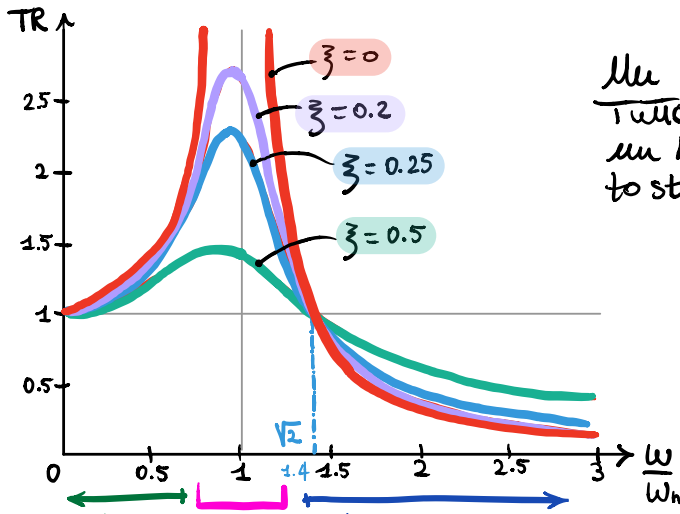
 $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow m = \frac{k}{\omega_n^2}$   
 $\zeta = \frac{c}{2m \omega_n} \rightarrow \frac{c}{k} = \frac{2\zeta}{\omega_n}$

Il rapporto tra l'ampiezza della forza trasmessa  $f_T$  e l'ampiezza della forza applicata alla struttura è detto **TRASMISSIBILITÀ**  $TR$  (parametro adimensionale):

$$TR = \frac{f_{T,max}}{p_0} = \sqrt{\frac{1 + [2\zeta \omega/\omega_n]^2}{[1 - (\omega/\omega_n)^2]^2 + [2\zeta (\omega/\omega_n)]^2}} \quad [4]$$

**N.B.** L'OBIETTIVO È SCEGLIERE IL SUPPORTO (K, c) IN MODO CHE TR SIA IL PIÙ PICCOLO POSSIBILE. La massa m della struttura e la pulsazione della forzante  $\omega$  sono note e sono importanti. Il problema consiste nello scegliere un supporto con k e  $\zeta$  tali che la TR sia minima. (se TR elevato il sistema produce molte vibrazioni)

In questo caso ( $\omega/\omega_n > \sqrt{2}$ ) non si vuole in generale lo smorzamento del sistema di supporto, perché  $\uparrow \zeta$ , in questo range di frequenze, lo smorzatore incrementa le forze trasmesse.



Un buon TR è ottenuto per valori buoni di  $\omega_n$  e  $\zeta$ . Tuttavia un valore molto basso di  $\omega_n$  implica un  $K$  basso e dunque valori troppo alti di spostamenti statici  $p_0/k$  ( $\omega_n = \sqrt{k/m}$ ).

Inoltre, uno  $\zeta$  molto basso implica ampiezze notevoli in corrispondenza della risonanza, che, in molti problemi (es. macchine rotanti), può essere ostacolo se durante il transitorio, cioè prima di raggiungere la frequenza circolare reale  $\omega$ .

La gomma naturale è un buon compromesso ed è spesso utilizzata nel isolamento sismico. I dischi di gomma sono deformabili a taglio  $\rightarrow$  con il loro impiego aumenta  $T$  (mentre si riduce  $\omega_n$ ).

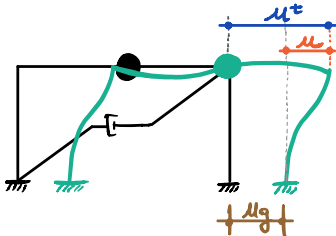
Una soluzione equivalente ma economicamente praticabile è lo sovraccarico (incremento delle masse) che parte a dx del carico, ma di fatto appiunge un carico che la soletta potrebbe non sopportare.

per spostamenti sulla sx devo aumentare  $K$  (non diminuisce completamente perché  $\frac{\omega}{\omega_n} \rightarrow 1$ )  
 $\rightarrow$  quindi irrigidire la struttura non risolve i problemi  
modo rigido

per spostamenti verso dx devo mettere dei gommini  $\rightarrow$  riduco la rigidità (problema: spostamenti troppo elevati)  
segui solitamente questa strada  
isolamento sismico

## RISPOSTA AL MOVIMENTO DEL TERRENO E PRINCIPI DI ISOLAMENTO SISMICO

Nelle zone sismiche, il principale problema di dinamica strutturale è il comportamento delle strutture soggette al moto indotto dal terremoto alla base della struttura.



NOTAZIONE

- $u_g(t)$  = spostamento del terreno
- $u^*(t)$  = spostamento totale (o assoluto) delle masse
- $u(t)$  = spostamento relativo tra massa e terreno

In ogni istante questi spostamenti sono correlati dalla relazione:

$$u^*(t) = u_g(t) + u(t)$$

Dunque:

$$tr = \frac{u_{max}}{u_{go}} = \frac{m \cancel{u_{go}} \omega^2 R_d}{k \cancel{u_{go}}}$$

ricordando che

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \frac{m}{k} = \frac{1}{\omega_n^2}$$

$$R_d = \frac{1}{\sqrt{[1 - (\omega/\omega_n)^2]^2 + [2\zeta(\omega/\omega_n)]^2}}$$

Si ottiene:

$$tr = \frac{u_{max}}{u_{go}} = \frac{(\omega/\omega_n)^2}{\sqrt{[1 - (\omega/\omega_n)^2]^2 + [2\zeta(\omega/\omega_n)]^2}}$$

- se  $\omega/\omega_n \rightarrow 0 \Rightarrow tr \rightarrow 0$
- se  $\omega/\omega_n \rightarrow \infty \Rightarrow tr \rightarrow 1$
- se  $\omega/\omega_n \rightarrow 1$  ( $\omega = \omega_n$ )  $\Rightarrow$  si ha un picco di corrispondenza delle risonanze

### OSSERVAZIONE

Solitamente l'isolamento sismico viene realizzato operando sulle rigidità. Si osserva dunque che:

- $\omega/\omega_n \rightarrow 0 \Rightarrow tr \rightarrow 0$  significa realizzare strutture rigidissime e quindi risulta spesso poco conveniente
- $\omega/\omega_n \rightarrow \infty \Rightarrow tr \rightarrow 1$  significa che lo spostamento non dipende dalle rigidità, quindi diminuendo quest'ultima le forze trasmesse diminuirà di conseguenza. Inoltre la deformazione si concentrerà sui dispositivi di isolamento, limitando il danneggiamento della struttura.

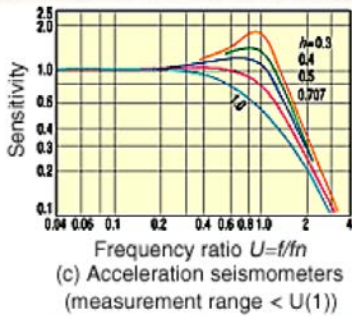
Spesso i dispositivi alla capacità di isolamento associano anche la capacità dissipativa (smorzamento). Le capacità dissipative sono utilissime in condizioni di risonanza (scosse anomale).

## ACCELEROMETRI

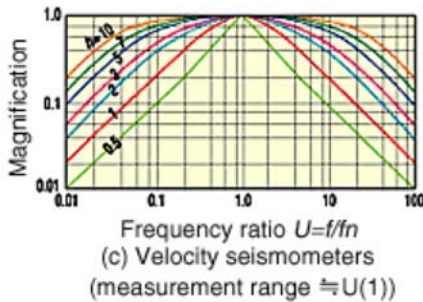
*in condizioni quasi statiche, c ha un piccolo ruolo e per ottenere  $\ddot{u}_g$  (e  $\ddot{y}$ ) si sfruttano l'equilibrio dinamico tra le sole forze di inerzia e di richiamo elastico*

$\nu < 1 \quad TR \approx 1$  (quasi static response)  
 $u_g \approx y \Rightarrow \ddot{u}_g \approx \ddot{y} \approx -k u/m$

Per ottenere piccoli valori di  $\nu$  vengono impiegate rigidità alte e masse piccole. Gli accelerometri sono strumenti costruttivamente semplici e spesso la quantità misurata è la forza  $ku$ , piuttosto che lo spostamento.

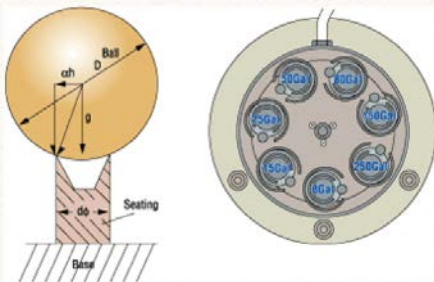


## VELOCIMETRI



*Strumenti ad elevato smorzamento, in cui la coppia delle forze di amplificazione dinamica tende ad annullarsi. Tali strumenti lavorano in risonanza (in quanto il range di risonanza è ampio)*

### Falling-ball sensor



## SISMOMETRI DI SPOSTAMENTO

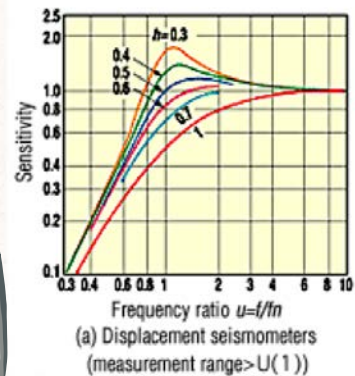
*m grande  
K piccola*

$\nu > 1 \quad tr \approx 1$  (massa quasi-immobile)  
 $y = u_g + u \approx 0 \Rightarrow u_g \approx -u$

*spostamento misurato = spostamento alla base*

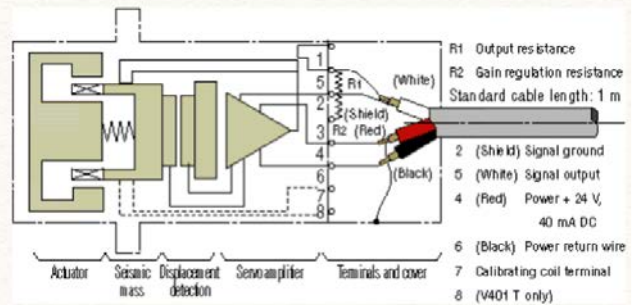
Per ottenere alti valori di  $\nu$  vengono impiegate masse molto grandi, che porta a strumenti piuttosto ingombranti e di complessa concezione. Infatti piccoli spostamenti rendono difficile la realizzazione di smorzamenti viscosi: maggiore la massa, più accurato sarà il sismometro.

*Il trasduttore è progettato in modo che lo spostamento relativo  $u(t)$  misuri lo spostamento del supporto  $u_g(t)$ . Questo può essere ottenuto rendendo la molla del trasduttore flessibile o aumentando la massa (o entrambe), in modo che la massa misurata ferma mentre il supporto sotto si muove*

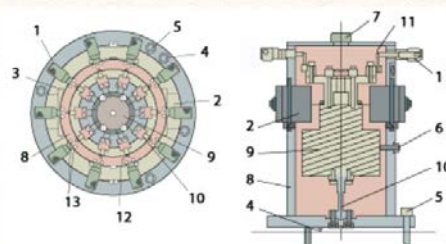


Quando si misurano vibrazioni a bassa frequenza, come quelle di natura sismica, i sismometri sono preferiti agli accelerometri (da cui il nome).

### Servo sensors

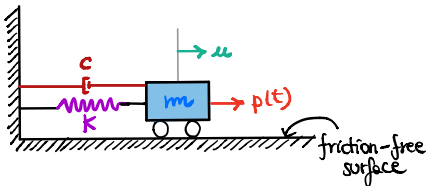


### Seismic mass sensor



# 4. RISPOSTA AD ECCITAZIONI PERIODICHE (SDF)

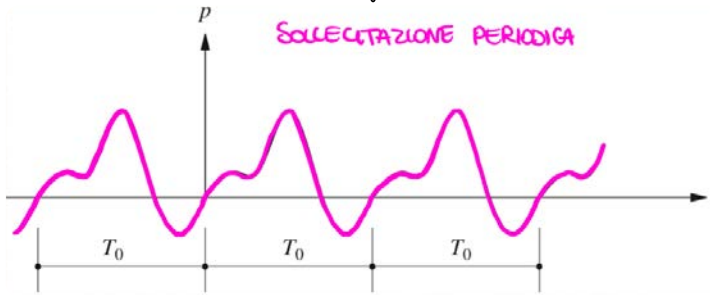
## FORZANTE PERIODICA



Si consideri un oscillatore armonico soggetto ad una sollecitazione periodica  $p(t)$  dotata di sub periodo  $T_0$ , l'equazione del moto è sempre la stessa:

$$m \ddot{u} + c \dot{u} + K u = p(t)$$

AZIONE FORZA DI INERZIA      SMORZAMENTO (e dipende dal materiale)      RICHIAMO ELASTICO



Una funzione periodica è una funzione definita su  $T_0$  che si ripete indefinitamente. Questa volta la forzante sarà esprimibile attraverso una relazione semplice (come visto per le sollecitazioni armoniche).

Ma tale funzione è esprimibile in serie di Fourier (in parole povere: si prende questo segnale e lo si scompone nelle singole sollecitazioni armoniche semplici).

L'accelerazione del terreno solitamente non ha alcuna somiglianza ad una funzione periodica. Nonostante questo siamo interessati allo studio di eccitazioni periodiche in quanto l'analisi può poi essere estesa alle eccitazioni arbitrarie utilizzando le tecniche della trasformata discreta di Fourier (lo vedremo nei prossimi capitoli).

Una funzione periodica può essere separata nelle sue componenti armoniche (seno e coseno) usando le serie di Fourier:

SERIE DI FOURIER

$$p(t) = a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cos i \omega_0 t + \sum_{i=1}^{\infty} b_i \sin i \omega_0 t \quad [4.a]$$

TERMINE COSTANTE

Serie di armoniche semplici dove ciascuna armonica è esprimibile con un'ampiezza  $a_i$  e  $b_i$  e un termine periodico sinusoidale funzione del tempo

$$\omega_i = i \omega_0$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

frequenza dell'armonica fondamentale  
 { pulsazione meccanica  
 fonda della forzante }  
 $\uparrow p(t)$

i coefficienti della serie di Fourier possono essere espressi in funzione di  $p(t)$  poiché seno e cos sono funzioni ortogonali:

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} p(t) dt$$

$$a_i = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} p(t) \cos i \omega_0 t dt$$

$$b_i = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} p(t) \sin i \omega_0 t dt$$

corrisponde al valore della forzante quando si annulla la periodicità, ovvero corrisponde al valore medio di  $p(t)$

ampiezze dell'armonica n-esima di frequenza  $\omega_i = i \cdot \omega_0$  (con  $i > 1$ )

$$\mu_i^c(t) = \frac{a_i}{k} \frac{2\zeta\beta_i \sin(i\omega_0 t) + (1-\beta_i)^2 \cos(i\omega_0 t)}{(1-\beta_i^2)^2 + (2\zeta\beta_i)^2} \quad [4.1]$$

$$\mu_i^s(t) = \frac{b_i}{k} \frac{(1-\beta_i^2) \sin(i\omega_0 t) - 2\zeta\beta_i \cos(i\omega_0 t)}{(1-\beta_i^2)^2 + (2\zeta\beta_i)^2} \quad [4.2]$$

[c sta per coseno e s sta per seno]

dove:

$$\beta_i = i \frac{\omega_0}{\omega_n}$$

RAPPORTO DI FREQUENZA

**OSSERVAZIONE**  
 se  $\zeta = 0$  e un  $\beta_i = 1$ , la risposta stazionaria non è significativa perché la risposta transitoria non decade mai. Quindi si fa qui l'osservazione che  $\zeta \neq 0$  e  $\beta_i \neq 1$ .

Pertanto la risposta stazionaria di un sistema smorzato ad una eccitazione periodica  $p(t)$  è la combinazione delle risposte ai singoli termini della serie di Fourier, cioè:

$$u(t) = \mu_0(t) + \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i^c(t) + \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i^s(t)$$

[4.0]
[4.1]
[4.2]

Sostituendo si ottiene:

$$u(t) = \frac{a_0}{k} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{k} \frac{2\zeta\beta_i \sin(i\omega_0 t) + (1-\beta_i)^2 \cos(i\omega_0 t)}{(1-\beta_i^2)^2 + (2\zeta\beta_i)^2} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{k} \frac{(1-\beta_i^2) \sin(i\omega_0 t) - 2\zeta\beta_i \cos(i\omega_0 t)}{(1-\beta_i^2)^2 + (2\zeta\beta_i)^2}$$

↳ quando  $\beta = 1$  il termine dell'ampiezza del moto cresce ma non va a  $\infty$  perché lo smorzamento attenua l'effetto di risonanza.

**OSSERVAZIONE**  
 Come si nota la risposta  $u(t)$  è una funzione periodica di periodo  $T_0$ . I contributi dei vari termini armonici dipendono da 2 fattori: le ampiezze  $a_i$  e  $b_i$  delle componenti armoniche della forzante  $p(t)$ , e dal rapporto di frequenza  $\beta_i$ .  
 La risposta sarà dominata da quelle componenti armoniche per le quali  $\beta_i$  è massimo all'unità [cioè quando la frequenza forzante  $i\omega_0$  è prossima a quella naturale della struttura].

I coefficienti di Fourier  $P_i$  possono essere espressi in termini di  $p(t)$  in quanto le funzioni esponenziali sono ortogonali:

$$P_i = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} p(t) e^{-j(i\omega_0 t)} dt \quad [4.4]$$

con:  
 $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

il valore complesso del coefficiente  $P_i$  definisce l'ampiezza e la fase dell' $i$ -esima armonica

Come si nota la serie di Fourier in forma complessa è compatta in confronto alla forma normale vista prima.

Inoltre  $P_{-i} = \overline{P_i}$  → valore complesso coniugato  
 $P_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} p(t) dt$  → rappresenta il valore medio di  $p(t)$  (è un valore reale)

La risposta di un sistema lineare ad una forzante periodica può essere determinata combinando le risposte ai singoli termini eccitanti della serie di Fourier [4.3]. Ricordando quanto visto nel capitolo 2, la risposta dell' $i$ -esima componente alla forzante:

$$p(t) = p_0 \cdot e^{j\omega t}$$

è data dall'equazione:

$$u_i(t) = \overline{U_i} e^{j(i\omega_0 t)}$$

$$\overline{U_i} = \overline{U}(\omega) P_i \quad [4.5]$$

FUNZIONE DI RISPOSTA DI FREQUENZA COMPLESSA

$$\overline{U}(i\omega_0) = \frac{p_0}{k} \frac{1}{[1 - (\omega/\omega_n)^2] + j[2\zeta(\omega/\omega_n)]}$$

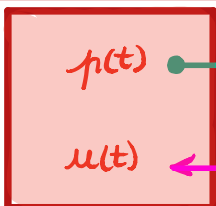
$\omega = i\omega_0$

Sommando tutte le singole risposte  $i$ -esime si ottiene la risposta totale:

$$[4.6] \quad u(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \overline{U}(i\omega_0) \cdot P_i e^{j(i\omega_0 t)}$$

→ la procedura rimboleggiata da questa equazione è detta **ANALISI NEL DOMINIO DELLA FREQUENZA** per l'analisi della risposta strutturale ad eccitazione periodica

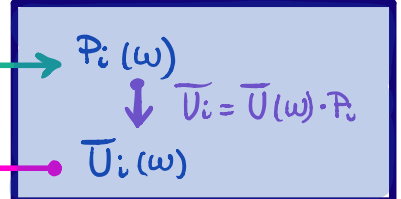
DOMINIO DEL TEMPO



uso la [4.4]:  $P_i = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} p(t) e^{-j(i\omega_0 t)} dt$

uso la [4.6]:  $u(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \overline{U}(i\omega_0) \cdot P_i e^{j(i\omega_0 t)}$

DOMINIO DELLA FREQUENZA



La **soluzione di stato permanente** è calcolata usando il principio di sovrapposizione degli effetti (delle singole armoniche → termini serie di Fourier) (campo lineare). La soluzione della singola  $i$ -esima componente armonica dell'eccitazione è:

$$u_i = \frac{m C_i}{k} \operatorname{Rd} \left( \frac{\omega_i}{\omega_n}, \zeta \right) e^{j \left[ \omega_i t - \theta \left( \frac{\omega_i}{\omega_n}, \zeta \right) \right]}$$

$$u_i = \frac{|C_i|}{\omega_n^2} \operatorname{Rd} \left( \frac{\omega_i}{\omega_n}, \zeta \right) e^{j \left[ \omega_i t - \theta \left( \frac{\omega_i}{\omega_n}, \zeta \right) + \alpha_i \right]}$$

RISPOSTA ALLA SINGOLA COMPONENTE DELL'ECITAZIONE

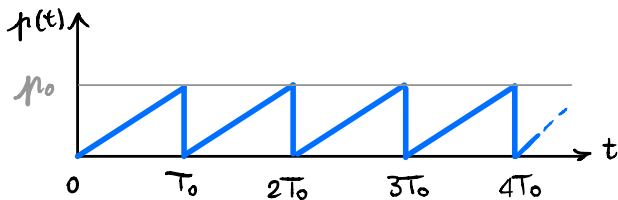
$$\omega_i = 2\pi \frac{i}{T_0}$$

parametro che è funzione della costante di integrazione. Quest'ultima è un numero complesso il cui modulo finisce come coeff. moltiplicativo ( $C_i$ ) e la cui fase finisce nell'esponenziale ( $\alpha_i$ ).

La **soluzione complessiva di stato permanente** è dunque:

$$u(t) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} u_i = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \frac{|C_i|}{\omega_n^2} \operatorname{Rd} \left( \frac{\omega_i}{\omega_n}, \zeta \right) e^{j \left[ \omega_i t - \theta \left( \frac{\omega_i}{\omega_n}, \zeta \right) + \alpha_i \right]} \quad [4.8]$$

**ESEMPIO**



Dato il segnale periodico, per poter scrivere il suo sviluppo in serie di funzioni armoniche, bisogna scrivere la funzione del segnale nell'intervallo  $t \in [0; T_0]$ . In tale intervallo la funzione è lineare:

$$p(t) = \frac{p_0}{T_0} t$$

La soluzione di stato permanente complessiva è data dalle [4.8]:

$$u(t) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{m C_i}{k} \operatorname{Rd} \left( \frac{\omega_i}{\omega_n}, \zeta \right) e^{j \left[ \omega_i t - \theta \left( \frac{\omega_i}{\omega_n}, \zeta \right) \right]}$$

Bisogna per tanto determinare  $C_i$ . Come detto  $C_i$  è un termine complesso, pertanto esprimibile come:

$$C_i = a_i + j b_i$$



Quindi: 
$$u(t) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{m C_i}{K} \operatorname{Re} \left( \frac{\omega_i}{\omega_n}, \xi \right) e^{j \left[ \omega_i t - \theta \left( \frac{\omega_i}{\omega_n}, \xi \right) \right]}$$

Risposta SDF smorzato ad  $p(t)$  dato

$$u(t) = \frac{p_0}{2K} - \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{p_0}{i 2\pi K} \operatorname{Re} \left( \frac{\omega_i}{\omega_n}, \xi \right) \operatorname{sen} \left( \omega_i t - \theta \left( \frac{\omega_i}{\omega_n}, \xi \right) \right)$$

↓  
Se il sistema non è smorzato ( $\xi=0$ )

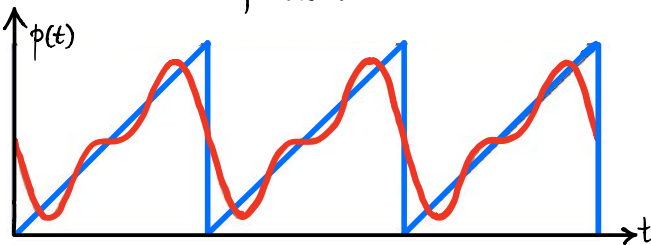
$$[4.9] \quad u(t) = \frac{p_0}{2K} - \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{p_0}{i 2\pi K} \cdot \frac{1}{1 - \left( \frac{\omega_i}{\omega_n} \right)^2} \operatorname{sen}(i \omega_0 t)$$

Ad esempio → supponendo che  $\frac{\omega_0}{\omega_n} = 2$ , la [4.9] diventa:

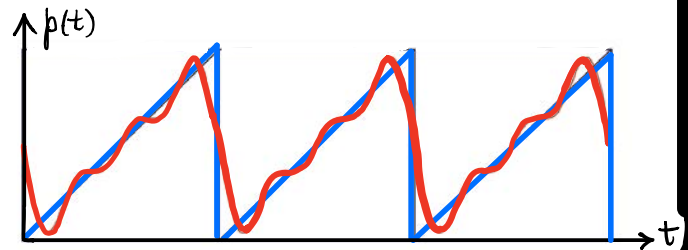
$$u(t) = \frac{p_0}{2K} - \frac{p_0}{2\pi K} \sum_{i=1}^{+\infty} \left[ \frac{1}{i} \cdot \frac{1}{1 - \left( i \frac{\omega_0}{\omega_n} \right)^2} \operatorname{sen}(i \omega_0 t) \right]$$

$$u(t) = \frac{p_0}{2K} - \frac{p_0}{2\pi K} \left[ \frac{\operatorname{sen}(1 \cdot \omega_0 t)}{-3} + \frac{\operatorname{sen}(2 \omega_0 t)}{-30} + \frac{\operatorname{sen}(3 \omega_0 t)}{-105} + \dots \right]$$

↳ teoricamente i termini della serie che descrivono  $u(t)$  sono infiniti, ma imponendo un certo errore ammissibile (tolleranza) possiamo troncare i termini prima.



CONFRONTO FORZANTE  $p(t)$  CON L'APPROSSIMAZIONE DELLA FORZANTE STESSA CON I PRIMI 2 TERMINI DI FOURIER



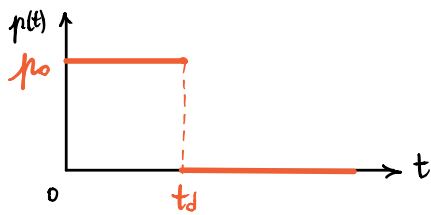
CONFRONTO FORZANTE  $p(t)$  CON L'APPROSSIMAZIONE DELLA FORZANTE STESSA CON I PRIMI 3 TERMINI DI FOURIER

In questo caso è sufficiente considerare i soli primi 3 termini di  $u(t)$  per ottenere errori inferiori al 2% (inegneristicamente trascurabili). I diagrammi sopra che rappresentano il livello di approssimazione delle forzanti ottenuto con i primi 2 e 3 termini di Fourier, mostrano che una rappresentazione **NON accurata delle forzanti determina una stima accurata della risposta**. La ragione è che le frequenze più alte contenute nelle forzanti in tal caso non danno alcun contributo alla risposta.

**OSSERVAZIONE**

D'altra parte bisogna scegliere i termini giusti, in quanto bisogna scegliere solo i termini vicini alla risonanza → occorre fare attenzione al troncamento.

• **RECTANGULAR PULSE FORCE**



Iniziamo la trattazione con l'impulso più semplice, quello rettangolare. L'equazione che bisogna risolvere è

$$m \ddot{u} + k u = p(t) = \begin{cases} p_0 & \text{per } t \leq t_d \\ 0 & \text{per } t \geq t_d \end{cases}$$

Con le seguenti condizioni iniziali:

$$\begin{cases} u(0) = 0 \\ \dot{u}(0) = 0 \end{cases}$$

1<sup>a</sup> FASE → FASE DI VIBRAZIONE FORZATA (per la durata dell'eccitazione)

Durante questa fase il sistema è soggetto ad una forza costante. La risposta del sistema è:

$$[5.3] \quad u(t) = \underbrace{\frac{p_0}{k}}_{\text{deformazione statica } (u_{st})_0} (1 - \cos \omega_n t) = \frac{p_0}{k} \left( 1 - \cos \frac{2\pi t}{T_n} \right) \quad \text{per } t \leq t_d$$

2<sup>a</sup> FASE → FASE DI VIBRAZIONE LIBERA (segue alla fine dell'impulso forzante)

Durante questa fase il sistema oscilla liberamente a partire dalle nuove condizioni che si sono determinate al tempo  $t = t_d$  (ovvero alla fine dell'impulso). Ricordando quanto visto nei capitoli precedenti per la risposta di un sistema privo di smorzamento soggetto ad oscillazioni libere:

$$u(t) = u(0) \cos \omega_n t + \frac{\dot{u}(0)}{\omega_n} \sin \omega_n t$$

e modificando opportunamente questa equazione imponendo che l'oscillazione libera parta al tempo  $t_d$ , otteniamo:

$$[5.4] \quad u(t) = u(t_d) \cos \omega_n (t - t_d) + \frac{\dot{u}(t_d)}{\omega_n} \sin \omega_n (t - t_d) \quad \text{per } t \geq t_d$$

sono ottenute imponendo  $t = t_d$  nelle [5.3]

$$\begin{cases} u(t_d) = \frac{p_0}{k} (1 - \cos \omega_n t_d) \\ \dot{u}(t_d) = \frac{p_0}{k} \omega_n \sin \omega_n t_d \end{cases}$$

Normalizzando [5.3] e [5.4] rispetto la deformazione statica  $(u_{st})_0$  si ottiene:

$$\begin{cases} \frac{u(t)}{(u_{st})_0} \rightarrow = 1 - \cos \omega_n t = 1 - \cos \frac{2\pi t}{T_n} & \text{per } t \leq t_d \quad [5.5.a] \\ \frac{u(t)}{(u_{st})_0} \rightarrow = \left( 2 \sin \frac{\pi t_d}{T_n} \right) \sin \left[ 2\pi \left( \frac{t}{T_n} - \frac{1}{2} \frac{t_d}{T_n} \right) \right] & \text{per } t \geq t_d \quad [5.5.b] \end{cases}$$

**MAXIMUM RESPONSE** →

Durante le 2 fasi (vibrazione forzata - vibrazioni libere) occorrono dei picchi di risposta. Il più grande di tutti i massimi è la massima risposta.

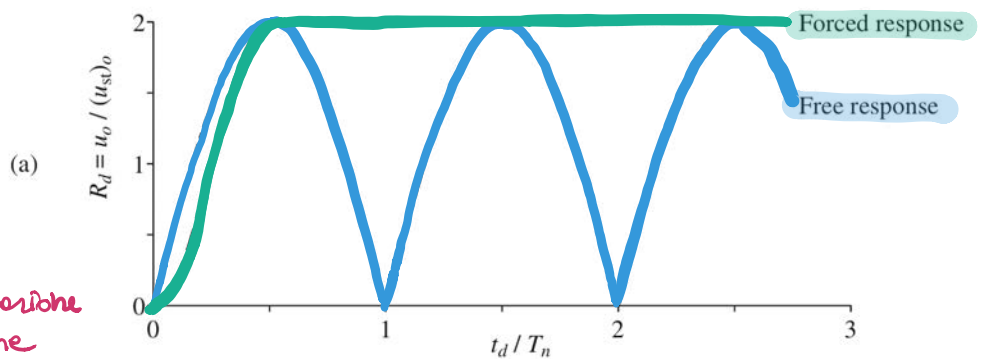
Il numero di picchi che si sviluppano durante l'oscillazione forzata dipende dal rapporto  $t_d/T_n$ : più  $t_d \uparrow$  più picchi si formano.

Il primo picco si ha per:  $t_0 = T_n/2 \rightarrow u_0 = 2 \frac{f_0}{k}$  ( $u_{st}f_0$ )

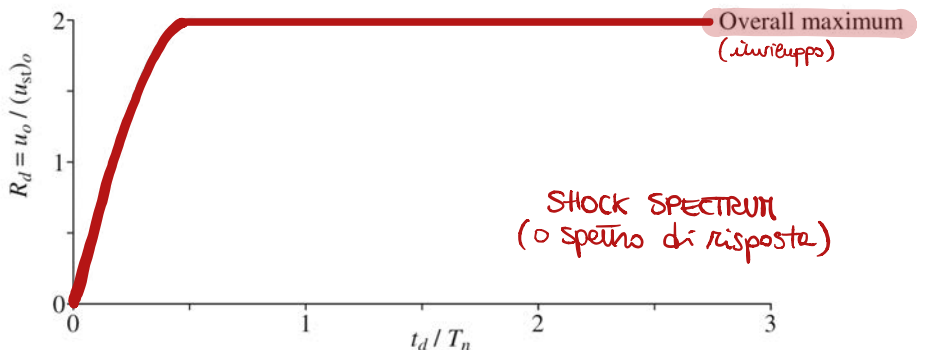
dunque  $t_d$  deve essere più grande di  $T_n/2$  per avere almeno 1 picco nella fase di vibrazione forzata. Se si sviluppano più picchi questi hanno tutti lo stesso valore. Quindi possiamo concludere che: se  $t_d < T_n/2$  nessun picco si svilupperà durante la fase di vibrazione forzata.

Durante la fase di oscillazione libera il sistema oscilla con moto armonico semplice.

Per tanto la risposta (in termini di fattore di risposta o deformazioni) per un sistema soggetto ad una forza impulsiva può essere plottata come segue:



Un grafico così fatto, il quale mostra la deformazione massima di un SDF come funzione del periodo  $T_n$  naturale della struttura (o un parametro correlato), è detto **SPETTRO DI RISPOSTA**. Quando l'eccitazione è un singolo impulso è detto **SPETTRO DI SHOCK**. Lo spettro di risposta caratterizza completamente il problema.



Si osserva come  $R_d$  dipenda dal rapporto  $t_d/T_n$  e non solo singolarmente da  $t_d$  o da  $T_n$ .

$$R_d = \frac{u_0}{(u_{st})_0} = \begin{cases} 2 \sin \pi t_d / T_n & \text{per } \frac{t_d}{T_n} \leq \frac{1}{2} \\ 2 & \text{per } \frac{t_d}{T_n} \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

2<sup>a</sup> FASE → FASE DI VIBRAZIONE LIBERA (segue alla fine dell'impulso forzante)

Durante questa fase il sistema oscilla liberamente a partire dalle nuove condizioni che si sono determinate al tempo  $t = t_d$  (ovvero alla fine dell'impulso). Ricordando quanto visto nei capitoli precedenti per la risposta di un sistema privo di smorzamento soggetto ad oscillazioni libere. Modificando opportunamente questa equazione imponendo che l'oscillazione libera parte al tempo  $t_d$ , otteniamo:

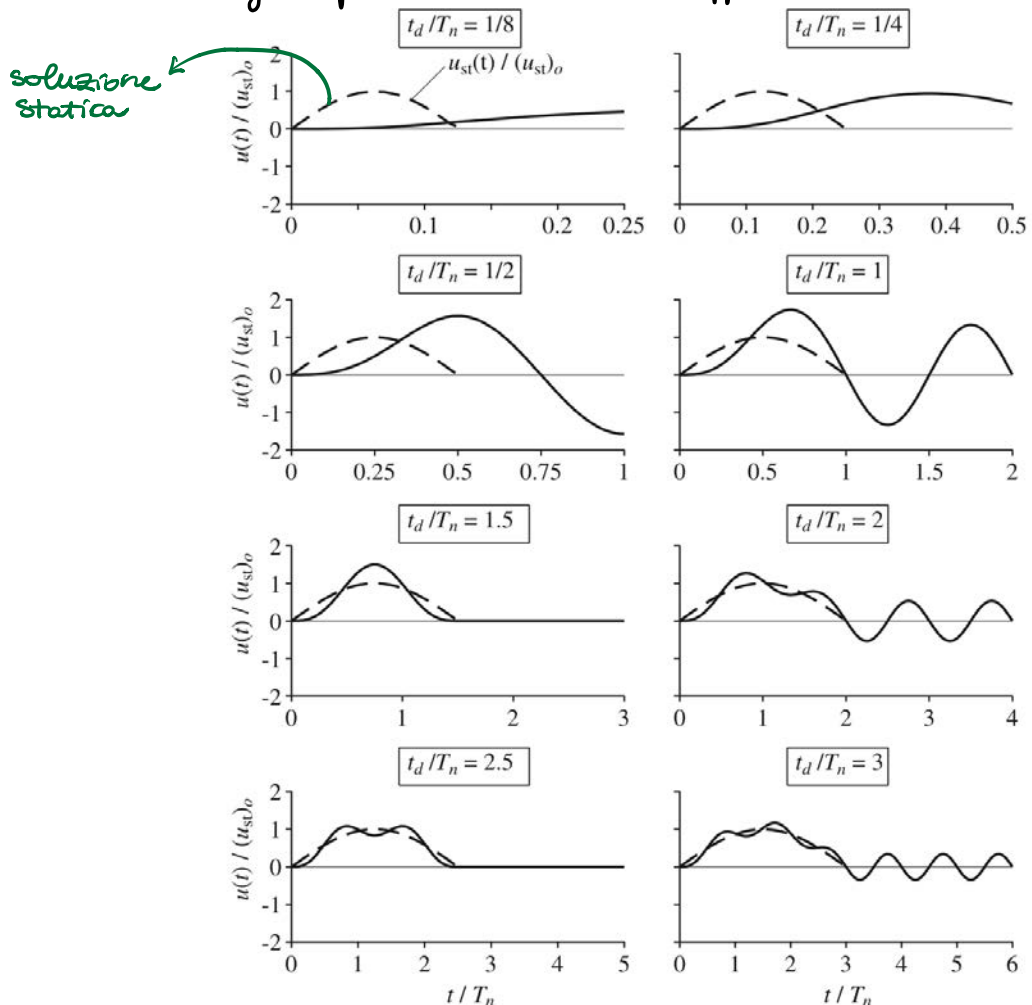
$$\frac{u(t)}{(u_{st})_0} = \frac{(T_n/t_d) \cos(\pi t_d/T_n) \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T_n} - \frac{1}{2} \frac{t_d}{T_n}\right)\right]}{(T_n/2t_d)^2 - 1} \quad \begin{matrix} \text{per } t \geq t_d \\ \text{per } \frac{t_d}{T_n} \neq \frac{1}{2} \end{matrix}$$

→  $u(t_d)$  e  $\dot{u}(t_d)$  sono ottenute imponendo  $t = t_d$  nelle [5.5]

$$\frac{u(t)}{(u_{st})_0} = \frac{\pi}{2} \cos 2\pi\left(\frac{t}{T_n} - \frac{1}{2}\right) \quad \begin{matrix} \text{per } t \geq t_d \\ \text{per } \frac{t_d}{T_n} = \frac{1}{2} \end{matrix}$$

RESPONSE HISTORY →

La variazione della risposta normalizzata è plottata di seguito per diversi valori del rapporto  $t_d/T_n$



## OSSERVAZIONE

Se invece consideriamo sempre un sistema SDF soggetto ad una forzante impulsiva sinusoidale ma stavolta smorzato ovvero:

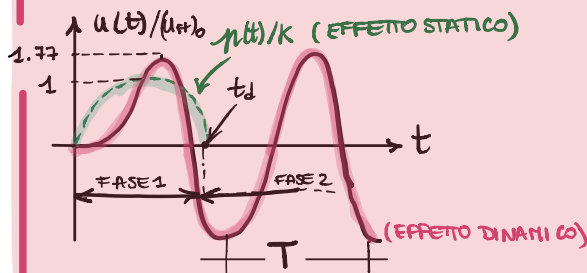
1<sup>a</sup> FASE  $\rightarrow t \in [0; t_d]$ :  $u(t) = \frac{p_0}{k} \frac{1}{1-\beta^2} (\sin \omega t - \beta \sin \omega_n t)$   
 $\hookrightarrow$  oscillatore non smorzato soggetto alla sollecitazione armonica

2<sup>a</sup> FASE  $\rightarrow t \in [t_d; \infty]$ :  $u(t) = \frac{i(t_d)}{\omega_n} \sin \omega_n t + u(t_d) \cos \omega_n t$

$\hookrightarrow$  equazione delle oscillazioni libere  
 $\hookrightarrow$  cambio S.R.  $t \rightarrow t_d$ :

$$u(t-t_d) = \frac{i(t_d)}{\omega_n} \sin \omega_n (t-t_d) + u(t_d) \cos \omega_n (t-t_d)$$

La risposta dinamica globale della struttura dipende dal confronto tra la durata e la forma della sollecitazione impulsiva e il modo di vibrare proprio della struttura, ovvero tra la durata  $t_d$  e il periodo proprio  $T_n$ .



Il rapporto  $\frac{u(t)}{u(st)_0}$  dipende dal rapporto  $\frac{t_d}{T_n}$

per  $t_d = \frac{3}{4} T_n \rightarrow$  si ottiene una risposta dinamica max  $\rightarrow 1.77$  di quella statica max, ovvero c'è un'amplificazione della risposta statica di  $\approx 80\%$ .

L'istante in cui si ha il picco, ovvero la max elongazione, si può ottenere derivando rispetto al tempo l'equazione di  $u(t)$  ed eguagliandola a zero:

$$u(t) = \frac{p_0}{k} \frac{1}{1-\beta^2} (\sin \omega t - \beta \sin \omega_n t)$$

$$\dot{u}(t) = \frac{p_0}{k} \frac{1}{1-\beta^2} (\omega \cos \omega t - \omega_n \beta \cos \omega_n t)$$

$\hookrightarrow \dot{u}(t) = 0$  quando:  $\omega \cos \omega t - \omega_n \beta \cos \omega_n t = 0$

$\downarrow$   
 $\left[ \begin{array}{l} \cos \omega t = \cos \omega_n t \\ \omega t = 2\pi n \pm \omega_n t \end{array} \right.$

La risposta del sistema a questo impulso è  $I$  la risposta ad un impulso unitario:

$$u(t) = I \left( \frac{1}{m\omega_n} \sin \omega_n t \right)$$

risposta ad un impulso unitario

La massima deformazione è proporzionale al valore dell'impulso:

$$u_0 = \frac{I}{m\omega_n} = \frac{I}{k} \frac{2\pi}{T_n}$$

#### OSSERVAZIONE

Per impulsi particolarmente brevi, guardando gli spettri di risposta,  $R_d$  risulta piccolo, perché gran parte della sollecitazione viene contrastata dall'inerzia della struttura, così che nella struttura si producono sforzi molto minori (pochi danni) di quelli creati da sollecitazioni più durevoli.

#### OSSERVAZIONE

Per sollecitazioni di lunga durata ( $t_d/T_n > 1$ ),  $R_d$  dipende principalmente dalla rapidità con cui la sollecitazione raggiunge il suo massimo valore.

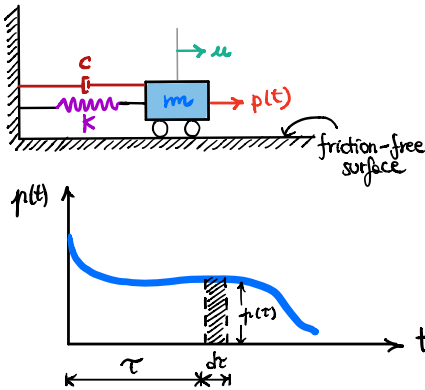
Per sollecitazioni di breve durata ( $t_d/T_n < 0.25$ ),  $u_0$  (l'ampiezza) dipende principalmente dall'entità dell'impulso applicato [ $I = \int_0^{t_d} p(t) dt$ ], mentre non risulta particolarmente influenzata dalle forme dell'impulso stesso.

#### OSSERVAZIONE

Se la struttura è molto flessibile ( $k$  piccolo e  $m$  molto grandi  $\rightarrow$  tratto periodi propri grandi) l'effetto dinamico è molto basso perché il periodo  $T_n$  è talmente grande che arrivare con un'azione impulsiva ad un  $t_d \approx 0.6 T_n$  è quasi impossibile (non esistono azioni impulsive che al contempo siano molto energetiche ma anche molto lente). Viceversa strutture con periodi molto piccoli, hanno problemi con impulsi di pochi centesimi di secondo.

## 6. RISPOSTA AD ECCITAZIONI ARBITRARIE (SDF)

### FORZANTE ARBITRARIA



Si consideri un oscillatore armonico soggetto ad una sollecitazione arbitraria  $p(t)$  dotata di sub periodo  $T_0$ , l'equazione del moto è sempre la stessa:

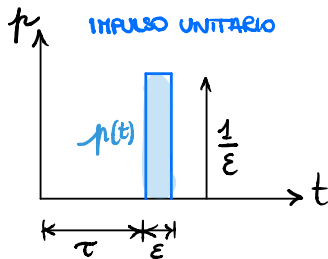
$$m \ddot{u} + c \dot{u} + K u = p(t)$$

AZIONE FORZA DI INERZIA  
 SMORZAMENTO (e dipende dal) materiale  
 RICHIAMO ELASTICO

(a)

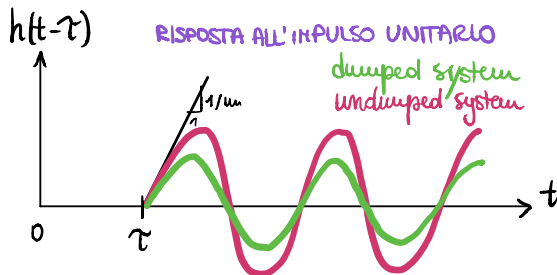
In molte situazioni pratiche accade che l'eccitazione dinamica non né armonica né periodica, ma varia arbitrariamente nel tempo. Abbiamo trattato nel capitolo precedente la risposta di un oscillatore soggetto ad un impulso. L'analisi precedente può utilizzarsi per la valutazione della risposta ad una eccitazione generica: l'intero processo di carico (ossia  $p(t)$ ) può essere interpretato come una successione di impulsi infinitesimi, e la risposta del sistema  $u(t)$  è data dalla somma delle singole risposte ai singoli impulsi. Queste singole risposte possono essere scritte in termini di risposta del sistema ad un impulso unitario.

### RISPOSTA AD UN IMPULSO UNITARIO



Una forza di grande intensità che agisce per un molto breve periodo di tempo, il cui integrale nel tempo è finito, è detta forza impulsiva ( $t = \tau \rightarrow$  inizio dell'impulso):

$$p(t) = \frac{1}{\epsilon} \rightarrow \text{durata dell'impulso}$$



Quando  $\epsilon \rightarrow 0 \Rightarrow p(t) \rightarrow \infty$  ma  $\int_t p(t) = 1$

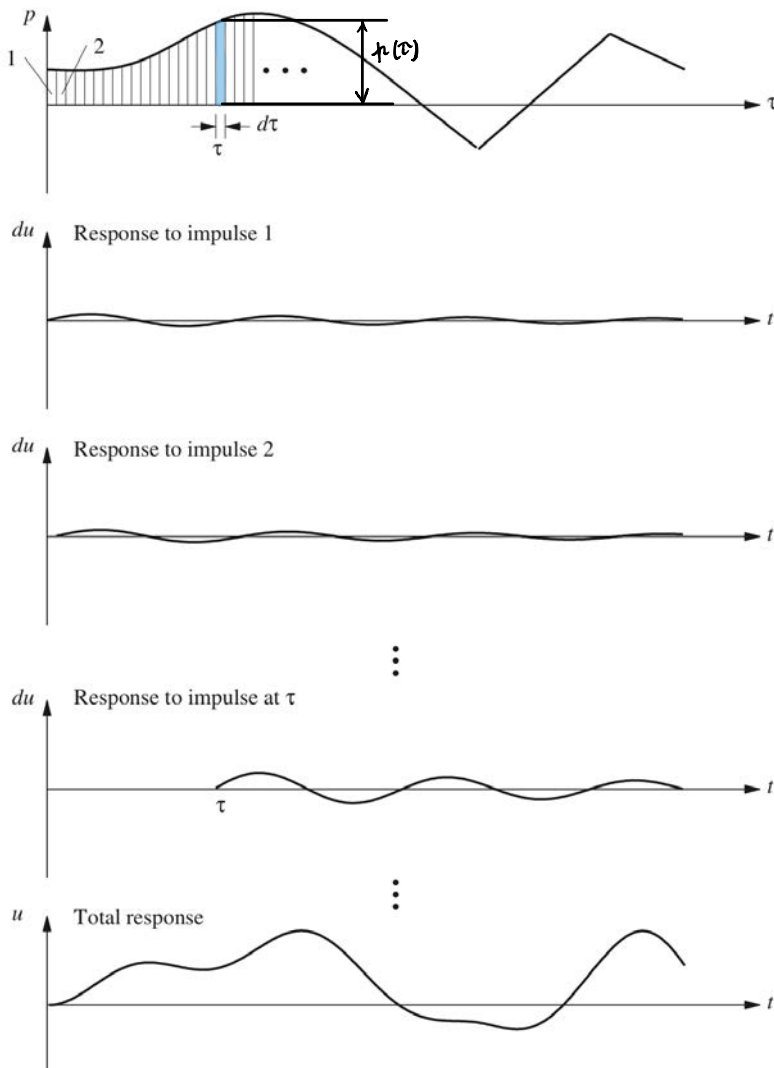
in questo caso, una forza così forte è detta: IMPULSO UNITARIO

Per la 2ª legge di Newton:  $p(t) = m \ddot{u}(t) \rightarrow$  integrando entrambi i membri:

$$\int_{t_1}^{t_2} p(t) dt = m \int_{t_1}^{t_2} \ddot{u}(t) dt = m [\dot{u}(t)]_{t_1}^{t_2}$$

chiamando  $\dot{u}(t_1) = \dot{u}_1$  e  $\dot{u}(t_2) = \dot{u}_2$

**RISPOSTA AD UNA FORZA ARBITRARIA**



Una forza  $p(t)$  che varia arbitrariamente nel tempo può essere rappresentata, come già detto, da una sequenza di impulsi infinitesimali. La risposta di un sistema dinamico lineare ad uno di questi impulsi, a quello in particolare al tempo  $\tau$  di intensità  $p(\tau)d\tau$ , è:

$$du(t) = [p(\tau) \cdot d\tau] \cdot h(t-\tau)$$

La risposta totale del sistema al tempo  $t$  è la somma di tutti questi impulsi fino a quel tempo!:

$$u(t) = \int_0^t p(\tau) \cdot h(t-\tau) d\tau$$

**INTEGRALE DI CONVOLUZIONE**

Se adesso specializziamo l'integrale di convoluzione con quanto ricavato in precedenza, ovvero se sostituiamo  $h(t-\tau)$  con la [6.4] otteniamo l'**INTEGRALE DI DUHAMEL**:

ci fornisce la risposta del sistema attenuata come conseguenza delle microrisposte della struttura a dei microimpulsi istantanei

$$u(t) = \int_0^t p(\tau) \left[ \frac{1}{m\omega_D} e^{-\xi\omega_n(t-\tau)} \text{sen}[\omega_D(t-\tau)] \right] d\tau$$

**INTEGRALE DI DUHAMEL PER SISTEMI SMORZATI**

$$u(t) = \frac{1}{m\omega_D} \int_0^t p(\tau) e^{-\xi\omega_n(t-\tau)} \text{sen}[\omega_D(t-\tau)] d\tau \quad [6.6]$$

se il sistema non è smorzato ( $\xi=0 \Rightarrow \omega_D \rightarrow \omega_n$ ) la [6.6] diventa:

**INTEGRALE DI DUHAMEL PER SISTEMI NON SMORZATI**

$$u(t) = \frac{1}{m\omega_n} \int_0^t p(\tau) \text{sen}[\omega_n(t-\tau)] d\tau \quad [6.7]$$

→ forma particolare dell'integrale di convoluzione

**N.B.** In questo risultato sono le condizioni iniziali a riposo  $\rightarrow u(0) = 0$  e  $\dot{u}(0) = 0$



Le oscillazioni libere, come ricavato nei capitoli precedenti, sono esprimibili tramite la [6.3]:

$$u(t) = e^{-\zeta \omega_n t} \left[ u(0) \cos \omega_D t + \frac{\dot{u}(0) + \zeta \omega_n u(0)}{\omega_D} \sin \omega_D t \right]$$

c'è un ritardo nell'applicazione dell'azione

Imponendo le condizioni iniziali e traslando l'origine  $t \rightarrow t - \tau$ :

$$du(t) = e^{-\zeta \omega_n (t-\tau)} \left[ \frac{A(\tau) d\tau}{\omega_D} \sin[\omega_D (t-\tau)] \right]$$

↳ ritardo dovuto al fatto che l'impulso è applicato al tempo  $\tau$  (e non a  $t=0$ )

↓  
Si vuole l'effetto a  $t-\tau$

Sommando tutti gli effetti elementari generati nell'intervallo temporale  $[0; t]$  (in virtù della linearità dell'oscillatore, vale il principio di sovrapposizione degli effetti):

$$\int du(t) dt = \int_0^t e^{-\zeta \omega_n (t-\tau)} \left[ \frac{A(\tau)}{\omega_D} \sin[\omega_D (t-\tau)] \right] d\tau$$

$$u(t) = \frac{1}{\omega_D} \int_0^t A(\tau) e^{-\zeta \omega_n (t-\tau)} \sin[\omega_D (t-\tau)] d\tau$$

INTEGRALE DI DUHAMEL  
(è un integrale di convoluzione)

Per trattare l'analisi nel dominio delle frequenze sono necessari alcuni richiami sulla teoria dei segnali in quanto si farà uso dei concetti di trasformata e autotrasformata di Fourier.

## ELEMENTI DI TEORIA DEI SEGNALE

Un segnale  $s(t)$  è una qualsiasi funzione reale o complessa del tempo  $t$  che sia "fisicamente realizzabile". L'energia associata ad un segnale è definita come:

$$E(s) = \int_a^b |s(t)|^2 dt$$

→ definizione matematica di energia e non in senso meccanico

Il segnale nasce come una funzione continua, ma nella realtà questo è un vettore di  $n$  dimensioni, poiché il segnale è campionato (basta pensare al segnale di un terremoto, questo viene registrato ad intervalli finiti di tempo).

Se  $E(s) < +\infty$  si parla di segnale ad energia finita. In questa categoria ricadono i segnali fisici che, dopo un po', finiscono (tenuono), al contrario di un'armonica ( $E = \infty$ ). La radice dell'energia si dice VALORE EFFICACE (o RMS) e a questo valore si riferiscono le normative sulle vibrazioni:

$$RMS = \sqrt{E(s)}$$

In questo modo si può riscrivere l'espressione della serie di Fourier:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{-T/2}^{T/2} s(\tau) e^{-j2\pi f_n \tau} d\tau \right] e^{j2\pi f_n t} \cdot \Delta f$$

A questo punto si fa tendere il periodo  $T \rightarrow \infty$ , il segnale diventa sempre più diluito e si può trattare il segnale non periodico come un segnale periodico con un periodo infinito. D'altra parte, per  $T \rightarrow \infty$   $f_n \rightarrow a$  diventa una variabile continua (ovvero  $f_n \rightarrow f$ ) e si può scrivere:

$$T \rightarrow \infty \Rightarrow \Delta f \rightarrow df \quad f_n \rightarrow f$$

In questo modo si ottiene:

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} s(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau \right] e^{j2\pi f t} df$$

con  $t \in (-\infty; +\infty)$   
 $\downarrow$   
 nella serie di Fourier  
 $t \in [-T/2; T/2]$  ovvero  
 $T \rightarrow \infty \Rightarrow t \in (-\infty; +\infty)$

la somma di termini infinitesimi (c'è  $df$ ) è un integrale

Un segnale NON periodico può così essere scritto come sovrapposizione di armoniche di ampiezza elementare data dal termine tra parentesi moltiplicato per  $df$ .

Una forma più compatta si può scrivere:

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df$$

dove:

$$X(f) = \mathfrak{Z}[s(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

TRASFORMATA  
 DI FOURIER  
 DEL SEGNALE

Questa è la generalizzazione dell'analisi di Fourier perché nelle serie di Fourier si sviluppa un'infinita numerabile di armoniche aventi una certa ampiezza e frequenza che è multiplo della frequenza fondamentale; ora si sviluppa in un insieme continuo di armoniche, le cui ampiezze rappresentano le ordinate della trasformata di Fourier  $\rightarrow$  si ottiene una DISTRIBUZIONE CONTINUA DI COEFFICIENTI DI FOURIER per ogni frequenza e il valore del coefficiente rappresenta l'importanza della frequenza corrispondente nel segnale. Questa distribuzione di coefficienti si dice TRASFORMATA DI FOURIER

- SCALAMENTO NEL TEMPO E NELLA FREQUENZA:** se si applica un coefficiente  $K$  al tempo, il segnale si comprime nel dominio del tempo (se  $|K| > 1$ ) e diventa più veloce. Questo corrisponde ad una decompressione nel dominio delle frequenze e sempre le trasformate di Fourier è più diluite. Se si rallenta invece il segnale, questo tende a concentrarsi nel dominio delle frequenze.

$$\mathcal{Z}[s(kt)] = \frac{1}{|k|} X\left(\frac{f}{k}\right)$$

$$\mathcal{Z}\left[\frac{1}{|k|} s\left(\frac{t}{k}\right)\right] = X(kf)$$

- TRASLAZIONE IN FREQUENZA - MODULAZIONE:** se si moltiplica il segnale per un'oscillazione (cioè si modula il segnale) con argomento  $\Delta f$ , ciò corrisponde ad una traslazione di  $\Delta f$  nel dominio delle frequenze, cioè si sposta le trasformate

$$\mathcal{Z}[s(t)e^{\pm 2\pi i \Delta f t}] = X(f \pm \Delta f)$$

- RELAZIONI DI PARITÀ:** se il segnale  $s(t)$  è reale, allora:

$$- \operatorname{Re}[X(f)] = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cos(2\pi f t) dt \quad \text{è una funzione PARI}$$

$$- \operatorname{Im}[X(f)] = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \sin(2\pi f t) dt \quad \text{è una funzione DISPARI}$$

$$- |X(f)| \quad \text{è una funzione PARI}$$

$$- \arg X(f) \quad \text{è una funzione DISPARI}$$

Se il segnale è reale, la parte immaginaria è nulla e, quando si pone alla trasformata, non può nascere nuova informazione e ciò si traduce in una correlazione tra la parte a frequenza positiva e la parte a frequenza negativa. Questo è un vantaggio perché, se mi ha solo metà segnale, l'altra metà è definita.

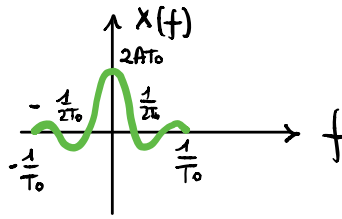
- PRODOTTO E CONVOLUZIONE:** Dati 2 segnali  $h(t)$  e  $s(t)$ , si definisce come convoluzione la seguente operazione:

$$h(t) * s(t) = \int h(t-\tau) s(\tau) d\tau$$

convoluzione ↑

La convoluzione corrisponde a sovrapporre e spostare di  $\tau$  i segnali e fornire il prodotto scalare ed è un'operazione commutativa.

Quindi se si fa la trasformata di una convoluzione nel dominio del tempo, si ottiene un prodotto delle trasformate; viceversa, ad un prodotto nel dominio del tempo corrisponde una convoluzione nel dominio



dopo qualche passaggio:

$$X(f) = [A \cos(2\pi T_0 f)] / (\pi f)$$

Guardando  $X(f)$  si nota che:

$$\operatorname{Re}[X(f)] = X(f)$$

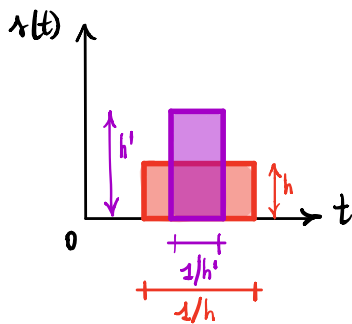
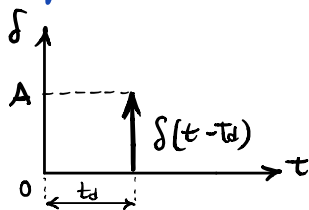
$$\operatorname{Im}[X(f)] = 0 \rightarrow \text{perch\`e il segnale \`e simmetrico e reale, la sua trasformata presenta solo la parte reale (se il segnale fosse stato antisimmetrico, } \operatorname{Im}[X(f)] \neq 0)$$

N.B. se  $T_0$  \`e grande (ovvero parte simmetrica lunga), la curva si fa stretta. In altri termini, pi\`u si apre e si spande nel tempo, pi\`u si riducono le frequenze.

N.B. Una CONCENTRAZIONE NEL DOMINIO DEL TEMPO SI SPALMA NEL DOMINIO DELLE FREQUENZE (con un impulso, si eccita la struttura su tutto il range delle frequenze; con un impulso di frequenza, si eccita su tutto il range dei tempi).

### FUNZIONE GENERALIZZATA DI DIRAC (delta di Dirac)

La funzione di Dirac \`e l'espressione analitica dell'impulso nel tempo.



Essa si rappresenta con una freccia parte dall'origine dove si esplica l'impulso e che termina all'ordinata A. In questo modo non si indica che l'ordinata vale A, bensì che in quel punto si concentra un'area di valore A. Infatti, se si vuole rappresentare l'impulso unitario, cioè  $\delta = 1$ , e dunque un'area unitaria, questa si può ottenere tracciando un rettangolo di dimensioni  $1/h \cdot h$ . Per avere una pi\`u corretta rappresentazione dell'impulso, si restringe la base e si pone ad un secondo rettangolo  $1/h' \cdot h'$ . Così procedendo, si costruisce la delta, che \`e di fatto un rettangolo con base nulla e altezza infinita. Pertanto, come funzione, la  $\delta$  ha ordinata infinita e si usa dunque la freccia per indicare l'area nell'orig.

La delta di Dirac si scrive nel seguente modo:

$$s(t) = \delta(t - t_0)$$

(si legge: delta di Dirac puntata su  $t_0$ )

La delta di Dirac gode di una particolare propriet\`a, poich\`e vale la seguente relazione:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot \delta(t - t_0) dt = s(t_0)$$

### TRASFORMATA DI FOURIER DI SEGNALE PERIODICI

È noto che un segnale periodico può essere sviluppato in serie di Fourier e dunque scomposto in un'infinità numerabile di armoniche le cui frequenze sono multiple di una frequenza fondamentale e che sono moltiplicate per un coefficiente  $\mu_n$ :

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mu_n \cdot e^{j n \frac{2\pi}{T} t} \quad t \in (-\infty; \infty)$$

coeff. di Fourier  
termini costanti  
(armoniche) ←  $\mu_n = \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) \cdot e^{-j n \frac{2\pi}{T} t} dt$

↳ periodo del segnale

Si calcola dunque la trasformata del segnale, applicando la definizione di trasformata di Fourier:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j 2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mu_n e^{j 2\pi n f_0 t} \right) e^{-j 2\pi f t} dt$$

$\frac{1}{T} = f_0$  (frequenza fondamentale)

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mu_n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j 2\pi n f_0 t} \cdot e^{-j 2\pi f t} dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mu_n \delta(f - n f_0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mu_n \delta(f - f_0)$$

corrisponde alla trasformata di un esponenziale complesso (cioè un'armonica) ed è pari alle delta di Dirac puntate a  $n \cdot f_0$ .

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mu_n \delta(f - f_0)$$

TRASFORMATA DI FOURIER DI UN SEGNALE PERIODICO

Così la trasformata di Fourier di un segnale periodico è una somma di tante delta di Dirac spaziate di  $f_0$  e di ampiezze pari al coefficiente di Fourier  $\mu_n$  (in altri termini una funzione periodica può essere vista come somma di un'infinità di funzioni armoniche). Dunque in questa trasformata i termini di Fourier ottenuti con l'analisi "classica" (sviluppo in serie di Fourier) sono significativi ma ora sono associati alle funzioni delta perché, nel passaggio alla trasformata di Fourier, si fa tendere il periodo  $T$  a infinito. Ricordando che la trasformata di una singola armonica è una delta, la trasformata di una funzione periodica sarà costituita da una sommatoria di impulsi pontrati alle frequenze  $n f_0$  e con ampiezze  $\mu_n$ .



Il segnale troncato corrisponde, in questo caso, alla singola delta di Dirac, la cui trasformata è una funzione armonica e questa è valutata in corrispondenza di  $n f_0$ .

$$\begin{cases} X_T(f) = \mathcal{F}[\delta(t-nT)] = e^{-j2\pi nTf} \\ X_T(nf_0) = e^{-j2\pi nTnf_0} = e^{-j2\pi n \frac{1}{T} nf_0} = e^{-j2\pi n^2} \end{cases}$$

Si applica la formula di Eulero:

$$X_T(nf_0) = e^{-j2\pi n^2} = \cos(2\pi n^2) - j \sin(2\pi n^2)$$

Poiché  $n$  è un numero intero (la delta, nel segnale originale, sono a una distanza relativa che è un multiplo di  $T$ ), l'argomento delle funzioni trigonometriche è un multiplo di  $2\pi$  per ogni  $n$  e dunque:

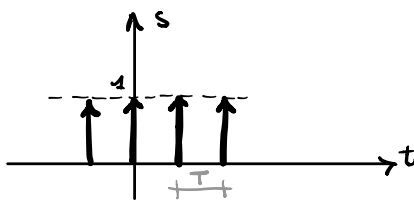
$$X_T(nf_0) = \cos(2\pi n^2) - j \sin(2\pi n^2) = 1 - j \cdot 0 = 1$$

Si ottiene così:

$$\begin{aligned} X(f) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} X_T(nf_0) \delta(f-nf_0) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} \delta(f-nf_0) \\ &= \int_0^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f-nf_0) \end{aligned}$$

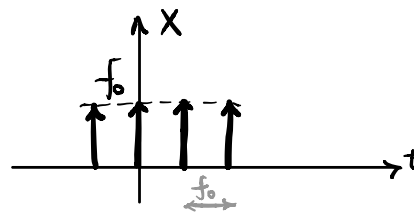
$$X(f) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f-nf_0)$$

TRASFORMATA DI FOURIER DI UNA SEQUENZA PERIODICA DI IMPULSI



$$X(f) = \text{Re } X(f)$$

Trasformata di Fourier



Così, nel dominio delle frequenze, si trova una sequenza di delta di Dirac equispaziate di  $f_0 = \frac{1}{T}$

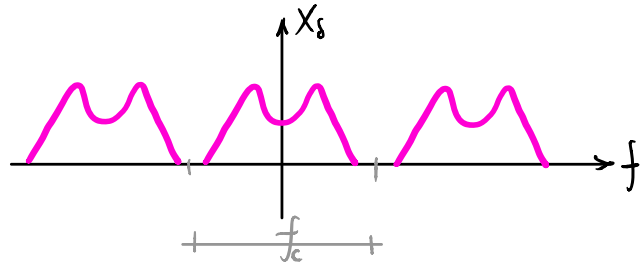
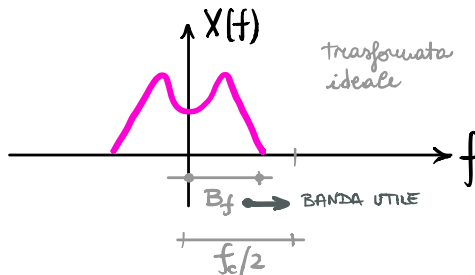
$$X_s(f) = T_c \cdot X(f) * \frac{1}{T_c} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - n f_c) = X(f) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - n f_c)$$

D'altra parte, la delta di Dirac è una funzione fotografica (infatti, nella conclusione si integra il prodotto tra  $X$  e  $\delta$ ) e, per effetto della sommatoria, la "fotografia" di  $X(f)$  è applicata molte volte, ottenendo:

$$X_s(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(f - n f_c)$$

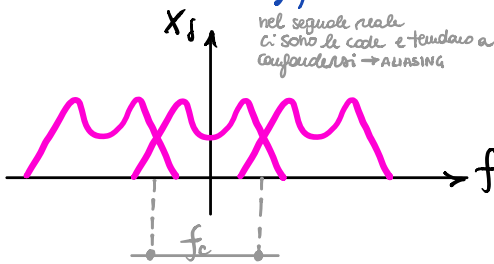
TRASFORMATA DI FOURIER DI UN SEGNALE CAMPIONATO

La relazione precedente mostra che la trasformata di un segnale campionato fornisce una sequenza di trasformate del segnale originario. Così, data la trasformata del segnale reale (non noto), la trasformata del segnale campionato è costituita da un numero infinito di repliche della trasformata del segnale che si vuole ottenere.



In questo modo basta tenere una replica e scartare tutte le altre.

In realtà, quando la frequenza di campionamento  $f_c$  è troppo piccola (si parla di **SOTTOCAMPIONAMENTO**), si determina il **problema di aliasing**:



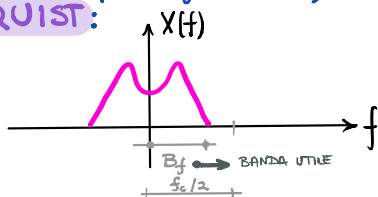
il sottocampionamento si traduce, nel campo delle frequenze, in una sovrapposizione di repliche, e si ricava un segnale confuso, con perdita di informazione.

Questo è un problema tipico dei segnali limitati in banda, poiché i segnali ideali non esistono

a causa delle code provocate dal rumore di fondo. La presenza delle code fa sì che però ci sia sempre una sovrapposizione delle repliche e dunque la trasformata non sarebbe mai nota, visto che le repliche non potrebbero essere separate.

Per tanto, si lavora con segnali limitati in banda nei quali, però, un sotto campionamento causa l'**aliasing** (perdita di informazione).

Per evitare questo fenomeno, si adotta un campionamento secondo il **CRITERIO DI NYQUIST**:



$$f_c = \frac{1}{T_c} > 2 B_f$$

CRITERIO DI NYQUIST

$B_f$  rappresenta la banda del segnale per segnali limitati in banda (segnali non limitati devono essere filtrati preventivamente mediante filtri anti-aliasing).

Quindi:

$$T_0 = \frac{T}{N+1}$$

$$\bar{X}(nf_0) = \frac{T}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \bar{s}(mT_0) \cdot e^{-jn \frac{2\pi}{N} m}$$

TRASFORMATA DI FOURIER DISCRETA (DFT)  
 { completezza computazionale }  
 (della DFT:  $N^2$  operazioni)

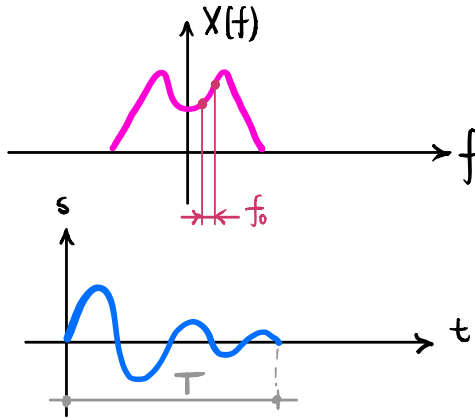
$$f_0 = \frac{B}{N+1}$$

$$\bar{s}(mT_0) = \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{N-1} \bar{X}(nf_0) \cdot e^{jm \frac{2\pi}{N} m}$$

ANTITRASFORMATA DI FOURIER DISCRETA

3 PARAMETRI DELLA DFT sono 3 dei quali almeno 2 devono essere fissati (il 3° verrà di conseguenza):

① LUNGHEZZA TEMPORALE / RISOLUZIONE IN FREQUENZA



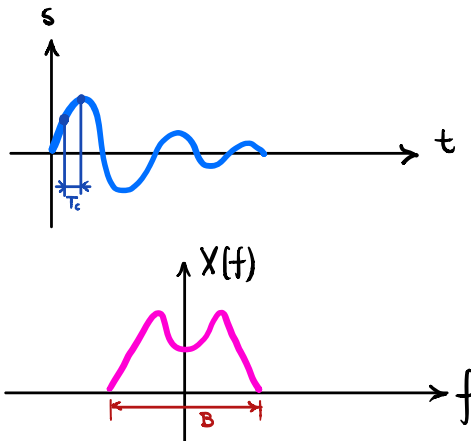
La **risoluzione in frequenza**  $f_0$  è la separatura tra due componenti nel dominio delle frequenze.

Se questa risoluzione  $f_0$  è alta, allora si applicano tutti i componenti nel dominio delle frequenze e si riesce ad ottenere una buona visione della trasformata.

$f_0$  è il reciproco della lunghezza del segnale  $T$  nel dominio del tempo:

$$T = \frac{1}{f_0}$$

② PERIODO DI CAMPIONAMENTO / SUPPORTO IN FREQUENZA



Esso si lega al **SUPPORTO IN FREQUENZA DEL SEGNALE**, pari a 2 volte la banda utile (cioè 2 volte la frequenza di Nyquist).

$$T_c = \frac{1}{B}$$

Al diminuire del periodo di campionamento, si riesce ad avere un supporto in frequenza  $B$  maggiore e si vede la trasformata per un'estensione superiore (come se fosse un "ripiego" che si apre). Questo "ripiego" viene

aperto fino a quanto interessa perché, spingendo  $T_c \rightarrow 0$ , l'impiego computazionale aumenta.



## ANALISI NEL DOMINIO DELLE FREQUENZE (eccitazione aperiodica)

Presentiamo di seguito l'analisi nel dominio delle frequenze. Quando l'eccitazione non è periodica la funzione complessa di risposta in frequenza (vista per eccitazioni periodiche), è rappresentata dall' **integrale di Fourier** che coinvolge la **trasformata di Fourier dell'eccitazione**. Il prodotto tra questa trasformata e la funzione complessa di risposta in frequenza dà la **trasformata diretta di Fourier della risposta**, la **trasformata inversa di Fourier** dà poi la risposta come una funzione del tempo. Questo è noto come il **metodo nel dominio delle frequenze per l'analisi della risposta dinamica**.

Le trasformate dirette e inverse di Fourier devono essere valutate numericamente nei problemi pratici che coinvolgono eccitazioni che variano arbitrariamente nel tempo. Questo approccio numerico porta al metodo della **DFT (discrete Fourier transform)**.

Come abbiamo visto in precedenza, un'eccitazione periodica può essere rappresentata dalle serie di Fourier normali  $[p(t) = a_0 + \sum a_i \cos i\omega_0 t + \sum b_i \sin i\omega_0 t]$  o in maniera compatta dalla serie di Fourier complessa  $[p(t) = \sum P_i e^{j i \omega_0 t}]$ .

Quando l'eccitazione è non periodica  $p(t)$  può essere rappresentata dall' **integrale di Fourier**:

$$[6.8] \quad p(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} P(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

INTEGRALE DI FOURIER  
(o trasformata di Fourier inversa Fourier transform)

$$[6.9] \quad P(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(t) e^{-i\omega t} dt$$

TRASFORMATA DI FOURIER  
(direct Fourier transform)

### OSSERVAZIONE

Nella [6.8]  $p(t)$  è stata espressa come la sovrapposizione di 2 funzioni armoniche:  $[P(\omega)/2\pi] e^{i\omega t}$ , dove il coefficiente complesso  $P(\omega)$  per una data  $p(t)$  è da determinare tramite la [6.9]. Incluso nella sovrapposizione c'è un'infinito numero di funzioni armoniche le cui frequenze variano continuamente. Invece, una funzione periodica almeno visto essere rappresentata come la sovrapposizione di un numero infinito di funzioni armoniche con frequenze discrete  $i\omega_0$  (con  $i = 0; \pm 1; \pm 2 \dots$ ).

La risposta di un sistema lineare ad una eccitazione arbitraria  $p(t)$  può essere ottenuta combinando le risposte ai termini singoli di eccitazione armonica nell' **integrale di Fourier [6.8]**. La **risposta del sistema all'eccitazione  $P(\omega) e^{i\omega t}$**  è dato da:  **$H(\omega) \cdot P(\omega) e^{i\omega t}$** . Sovrapponendo le risposte a tutti i termini armonici nella [6.8] si ottiene la risposta totale:

$$[6.10] \quad u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} U(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

autotrasformata di Fourier di  $U(\omega)$   
(inverse Fourier transform)

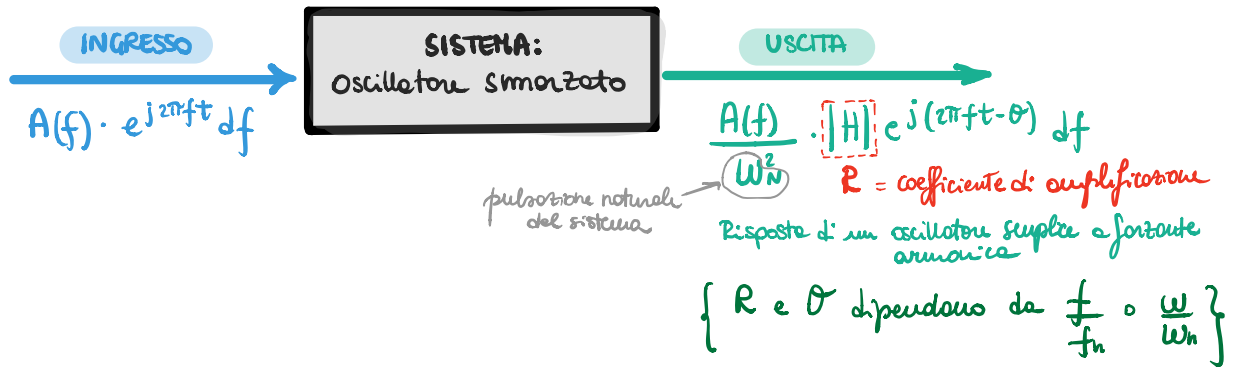
$$[6.11] \quad U(\omega) = H(\omega) \cdot P(\omega)$$

trasformata di Fourier dell'eccitazione  $p(t)$

funzione complessa di risposta in frequenza

Quanto descritto è il **metodo nel dominio delle frequenze per l'analisi della risposta strutturale ad una forzante arbitraria**.

La risposta può essere vista come somma delle risposte conseguenti alle infinite eccitazioni armoniche di ampiezza  $A(f)df$ :



La risposta alle infinite armoniche si ottiene applicando il principio di sovrapposizione degli effetti (sommando i contributi elementari):

$$u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A(f)}{\omega_n^2} R_d e^{j(2\pi ft - \theta)} df = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A(f)}{\omega_n^2} \cdot R_d e^{j(2\pi ft + \alpha - \theta)} df$$

RISPOSTA COMPLESSIVA

|| mettendo  $A(f)$  in forma polare  $|A(f)| e^{j\alpha(f)}$

$$u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{|A(f)|}{\omega_n^2} R_d e^{-j\theta} \right] e^{j2\pi ft} df$$

Quest'ultima espressione non è altro che la formula dell'antitrasformata applicata al termine tra parentesi quadre. Se si applica allora la trasformata, si ottiene la trasformata di un'antitrasformata che dà fuori il termine tra parentesi e questo corrisponde alla trasformata di  $u(t)$ , cioè alla risposta nel dominio delle frequenze.

Quindi poi trasformando secondo Fourier ambo i membri, si pone al dominio delle frequenze:

$$U(f) = \frac{A(f)}{\omega_n^2} R_d e^{-j\theta} = H(f) \cdot A(f)$$

RISPOSTA NEL DOMINIO DELLE FREQUENZE

da omettere se si lavora con  $p(t)$  al posto di  $A(t)$

$$H(f) = \frac{e^{-j\theta}}{\sqrt{[K - (2\pi f)^2 \cdot m]^2 + (2\pi f \cdot c)^2}}$$

$$= \frac{1}{\omega_n^2} \frac{1}{\sqrt{[1 - (\frac{2\pi f}{\omega_n})^2]^2 + 4\zeta^2 (\frac{2\pi f}{\omega_n})^2}} e^{-j\theta}$$

FUNZIONE DI RISPOSTA IN FREQUENZA (FRF)

$$H(f) = \frac{R_d}{\omega_n^2} e^{-j\theta}$$

dove  $R_d = R_d \left( \frac{2\pi f}{\omega_n}, \zeta \right)$   
 $\theta = \theta \left( \frac{2\pi f}{\omega_n}, \zeta \right)$

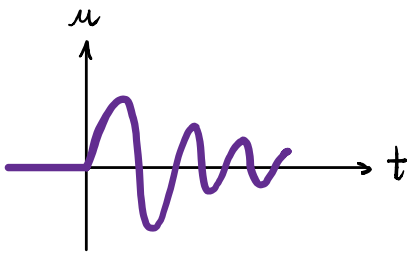
Carta di iduttività del sistema nel dominio della frequenza  $\omega/\omega_n$

con  $\theta = \arctan \left[ \frac{(2\pi f)c}{K - (2\pi f)^2 m} \right] = \arctan \left[ \frac{2\zeta (2\pi f / \omega_n)}{1 - (2\pi f / \omega_n)^2} \right]$

⇒

$$h(t) = \frac{1}{\omega_0} e^{-\frac{3}{2}\omega_0 t} \sin \omega_0 t$$

FUNZIONE DI RISPOSTA ALL'IMPULSO (IRF)



La IRF rappresenta la risposta dinamica di un oscillatore semplice ad un impulso, cioè ad una delta di DIRAC. La risposta ha solo la componente in seno perché applicare un impulso equivale ad applicare una velocità iniziale al sistema (e questa moltiplica il seno) e non uno spostamento iniziale (che moltiplica il coseno). Inoltre, la IRF non è definita per  $t < 0$  ed è nulla perché l'impulso è solo in avanti.

Così la risposta di un oscillatore semplice ad una eccitazione qualunque si può ottenere come convoluzione tra l'eccitazione e l'IRF, con il vantaggio che la convoluzione è un'operazione semplice e stabile in campo lineare. L'IRF rappresenta una "carta di identità" del sistema che permette di prevedere la risposta del sistema in campo lineare.

### OSSERVAZIONE

In conclusione, ci sono 2 metodi duali per trovare la risposta. Questi 2 metodi forniscono 2 risposte diverse:

- con la convoluzione, un errore speso nel tempo diventa concentrato nella frequenza
- con le trasformate di Fourier, un errore del metodo speso in frequenza diventa concentrato nel tempo

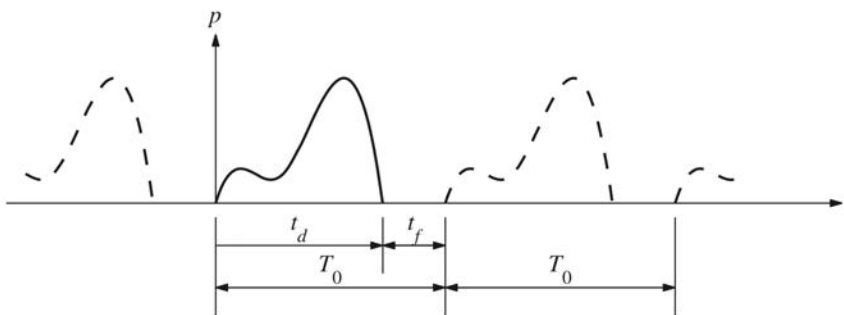
Quindi se si vuole calcolare la risposta al terremoto per valutare la sollecitazione, è meglio avere un errore distribuito nel tempo o nella frequenza. Il peggiore è l'errore concentrato nel tempo, perché si otterrebbe una concentrazione che  $\propto$ .

↳ è meglio sfruttare la convoluzione che, al momento, ha un errore concentrato in frequenza.

Quindi la forzante  $p(t)$  è definita da un set di valori discreti  $p_n \equiv p(t_n) \equiv p(n\Delta t)$ .

**N.B.** L'intervallo di campionamento  $\Delta t$  dovrebbe essere piccolo abbastanza comparato sia con il periodo delle armoniche più significativi dell'eccitazione, sia con il periodo naturale  $T_n$  del sistema.  
 La prima richiesta assicura una rappresentazione accurata dell'eccitazione e della componente vibrosonale forzata della risposta.  
 La seconda pure assicura la rappresentazione accurata della risposta di sistemi SDF leggermente i ad eccitazioni con ampie bande di frequenza come la maggior parte delle eccitazioni del terreno durante i terremoti.

**RAPPRESENTAZIONE DELL'ECCITAZIONE IN SERIE DI FOURIER**



Consideriamo una estensione periodica dell'eccitazione  $p(t)$ , con il suo periodo definito come  $T_0$  (figure accanto), e si rimpiazza  $p(t)$  con il vettore  $p_n$  descrivente la funzione forzata discretizzata. Partendo dalle serie di Fourier in forma complessa

per la forzante  $p(t)$ : 
$$p(t) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} P_i e^{j(i\omega_0 t)}$$
 [A.0], il vettore  $p_n$  può essere

espresso come sovrapposizione di  $N$  funzioni armoniche:

coefficiente complesso che definisce ampiezza e fase delle  $i$ -esima armonica  $\leftarrow$

$$p_n = \sum_{i=0}^{N-1} P_i e^{j(i\omega_0 t_n)} = \sum_{i=0}^{N-1} P_i e^{j(2\pi n i / N)}$$
 [A.1]

$\omega_i = i \cdot \omega_0$   
 pulsazione dell' $i$ -esima armonica

$\omega_0 = 2\pi / T_0$   $\rightarrow$  pulsazione della 1<sup>a</sup> armonica (o dell'armonica fondamentale) nell'estensione periodica di  $p(t)$

$\rightarrow P_i = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} p(t) e^{-j(i\omega_0 t)} dt$

sostituendo a  $p(t)$  il vettore discreto  $p_n$  si ottiene:

$$P_i = \frac{1}{T_0} \sum_{n=0}^{N-1} p_n e^{-j(i\omega_0 t)} \Delta t = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} p_n e^{-j(2\pi n i / N)}$$
 [A.2]

Le equazioni [A.1] e [A.2] rappresentano la coppia di trasformate discrete di Fourier (DFT).

**FUNZIONE COMPLESSA DI RISPOSTA IN FREQUENZA**

La funzione complessa di risposta in frequenza  $H(\omega)$  è calcolata come:

$$H_i(\omega_i) = \frac{1}{K} \frac{1}{[1 - (\omega_i/\omega_n)^2] + j[2\zeta(\omega_i/\omega_n)]} \quad [A.3]$$

Una espansione di Fourier a 2 lati (two-sided Fourier expansion) include sia le frequenze positive che negative  $\omega_i$  e  $-\omega_i$ :

$$p(t) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} P_i e^{j(i\omega_0 t)}$$

e  $H_{-i}$  è il complesso coniugato di  $H_i$ .

In una espansione di Fourier solo da 1 lato (one-sided Fourier expansion) sono incluse invece solo le frequenze positive:

$$p_n = \sum_{i=0}^{N-1} P_i e^{j(i\omega_0 t_n)} = \sum_{i=0}^{N-1} P_i e^{j(2\pi n i/N)}$$

Le frequenze corrispondenti a  $N/2 < i \leq N-1$  sono le controparti delle frequenze negative. Così, i valori di  $H_i$  in entrambi i lati di  $i = N/2$  devono essere complessi coniugati. I valori di  $H_i$  possono essere determinati da [A.3] con  $\omega_i$ :

$$\omega_i = \begin{cases} i \omega_0 & \text{per } i \in [0; \frac{N}{2}] \\ -(N-i) \omega_0 & \text{per } i \in (\frac{N}{2}; N-1] \end{cases}$$

**CALCOLO DELLA RISPOSTA**

Nell'approccio con la DFT, per prima cosa dobbiamo calcolare la risposta ad ogni componente armonica dell'eccitazione nel dominio delle frequenze. Questo richiede il calcolo del prodotto:

$$U_i = H_i \cdot P_i \quad \text{con } i \in [0; N-1]$$

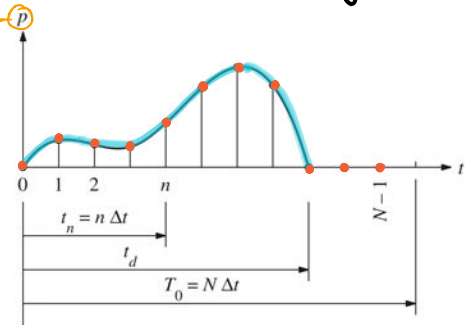
Poi, la risposta  $u_n \equiv u(t_n)$  all'istante di tempo (discreto)  $t_n \equiv n \cdot \Delta t$  è calcolata come:

Soluzione clinica con la DFT ← 
$$u_n = \sum_{i=0}^{N-1} U_i \cdot e^{j(i\omega_0 t_n)} = \sum_{i=0}^{N-1} U_i \cdot e^{j(2\pi n i/N)}$$
 → la sequenza di risposta  $u_n$  rappresenta l'antitrasformata discreta della sequenza  $U_i$

## SCHEMA RIASSUNTIVO METODO DFT

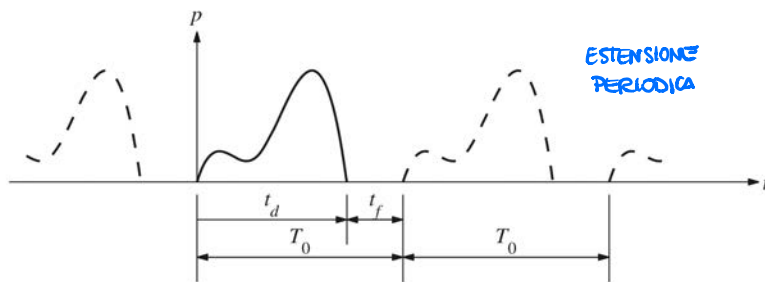
La **procedura classica DFT** per l'analisi di risposte di un sistema SDF governato dall'equazione del moto:

$$m \ddot{u} + c \dot{u} + k u = p(t)$$



può essere ritrattata nei seguenti passi:

- 1 Definire una **estensione periodica** dell'eccitazione  $p(t)$ , di periodo  $T_0$ :



$$T_0 \geq t_d + \frac{T_s}{2}$$

e discretizzare l'eccitazione  $p(t)$  tramite un vettore  $p_n$ :

$$p_n \equiv p(t_n) \equiv p(n \Delta t)$$

con  $n \in [0; 1; \dots; N-1]$

- 2 Calcolare  $P_i$ , cioè la DFT di  $p_n$ :

$$P_i = \frac{1}{T_0} \sum_{n=0}^{N-1} p_n e^{-j(i\omega_0 t_n)} \Delta t = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} p_n e^{-j(2\pi n i / N)}$$

- 3 Determinare la **funzione di risposta in frequenza**  $H_i \equiv H(\omega_i)$ :

$$H_i(\omega_i) = \frac{1}{k} \frac{1}{[1 - (\omega_i / \omega_n)^2] + j[2\zeta (\omega_i / \omega_n)]}$$

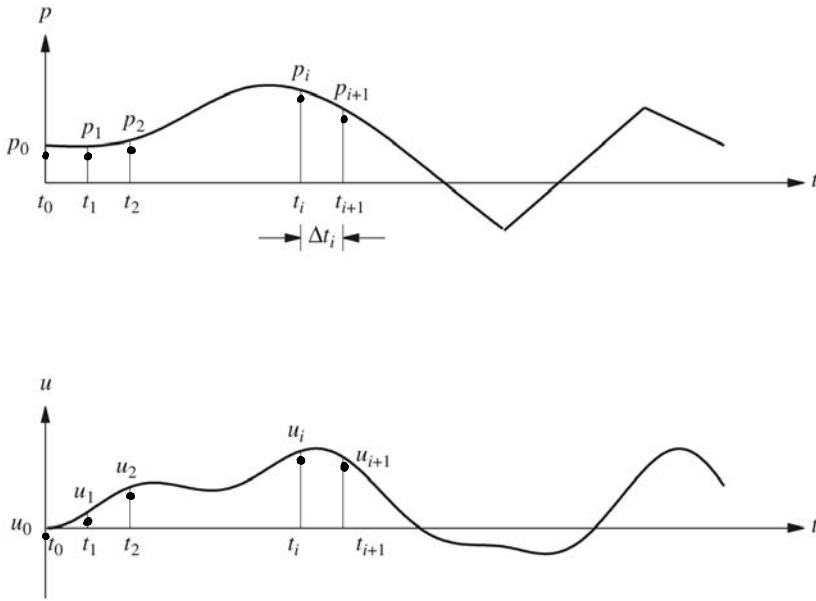
con:

$$\omega_i = \begin{cases} i \omega_0 & i \in [0; \frac{N}{2}] \\ -(N-i) \omega_0 & i \in (\frac{N}{2}; N-1] \end{cases}$$

- 4 Calcolare  $U_i$  come prodotto tra:  $U_i = H_i \cdot P_i$  con  $i \in [0; N-1]$

- 5 Calcolare l'**autotrasformata discreta** del vettore  $U_i$  (inverse DFT) per ottenere la risposta  $u_n \equiv u(t_n)$  all'istante di tempo (discreto)  $t_n \equiv n \Delta t$ :

$$u_n = \sum_{i=0}^{N-1} U_i \cdot e^{j(i\omega_0 t_n)} = \sum_{i=0}^{N-1} U_i \cdot e^{j(2\pi n i / N)}$$



Tale metodo prevede di **discretizzare** la **forzante**  $p(t)$ , ossia formata da un set discreto di valori  $p_i$  con  $p_i = p(t_i)$  (cioè come se la forzante fosse campionata). L'intervallo di tempo (o intervallo di tempo di campionamento) è **usualmente** scelto costante (sebbene non sia necessario):

$$\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$$

con  $i = 0, 1, \dots, N$

Di conseguenza la forzante diventa un vettore contenente i valori

assunti nei vari istanti di tempo:  $\{P\} = \{p_0, p_1, p_2, \dots, p_i, p_{i+1}, \dots, p_N\}$

La risposta è calcolata negli istanti di tempo discreti  $t_i$ ; lo spostamento, la velocità e l'accelerazione del sistema sono rispettivamente:  $u_i$ ,  $\dot{u}_i$  e  $\ddot{u}_i$ :

il nostro scopo è  $\rightarrow \{u\} = \{u_0, u_1, u_2, \dots, u_i, u_{i+1}, \dots, u_N\}$   
 calcolare  $u$  (e, ove  
 richiesto, anche  $\dot{u}$  e  $\ddot{u}$ )  $\{ \dot{u} \} = \{ \dot{u}_0, \dot{u}_1, \dot{u}_2, \dots, \dot{u}_i, \dot{u}_{i+1}, \dots, \dot{u}_N \}$   
 $\{ \ddot{u} \} = \{ \ddot{u}_0, \ddot{u}_1, \ddot{u}_2, \dots, \ddot{u}_i, \ddot{u}_{i+1}, \dots, \ddot{u}_N \}$

La risposta all'istante  $i+1$  viene calcolata a partire dall'**equazione del moto**, da una **espressione alle differenze**, e dalle **risposte note** ad uno o a più istanti precedenti. Questo calcolo è possibile farlo attraverso appunto il **metodo di integrazione al passo**, la cui impostazione richiede **3 ingredienti**:

① **EQUAZIONE DEL MOTO SCRITTA ALL'ISTANTE  $i$  (presente) E ALL'ISTANTE  $i+1$  (futuro)**

$$m \ddot{u}_i + c \dot{u}_i + k u_i = p_i \quad [7.1]$$

$$m \ddot{u}_{i+1} + c \dot{u}_{i+1} + k u_{i+1} = p_{i+1} \quad [7.2]$$

② **EQUAZIONI ALLE DIFFERENZE**  $\rightarrow$  collega uno step e quelli precedenti (relazione passato-presente-futuro)

in base alle tipologie di espressione si definiscono diverse famiglie di metodi di integrazione:

(a) **ALGORITMI ESPliciti (o al presente)**: esprimiamo gli stati del futuro come funzione del presente e del passato  
 costruita con la [7.1]

$$u_{i+1} = f(u_i, \dot{u}_i, \ddot{u}_i, u_{i-1}, \dot{u}_{i-1}, \ddot{u}_{i-1})$$

Mettendo [7.3] e [7.4] nell'equazione di equilibrio al tempo  $i$ -esimo si ottiene l'incognita  $u_{i+1}$ :

$$m \ddot{u}_i + c \dot{u}_i + K u_i = p_i$$

$$\frac{m}{\Delta t^2} (u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) + \frac{c}{2\Delta t} (u_{i+1} - u_{i-1}) + K u_i = p_i$$

$\downarrow$  incognita
 $\downarrow$  assunte nel metodo come quantità note

$$u_{i+1} \left( \frac{m}{\Delta t^2} + \frac{c}{2\Delta t} \right) = p_i - u_i \left( -\frac{2m}{\Delta t^2} + K \right) - u_{i-1} \left( \frac{m}{\Delta t^2} + \frac{c}{2\Delta t} \right)$$

$\uparrow$   $K$ 
 $\uparrow$   $p_i$

$\leftarrow$  fornisce l'incognita (cioè lo spostamento nel futuro)

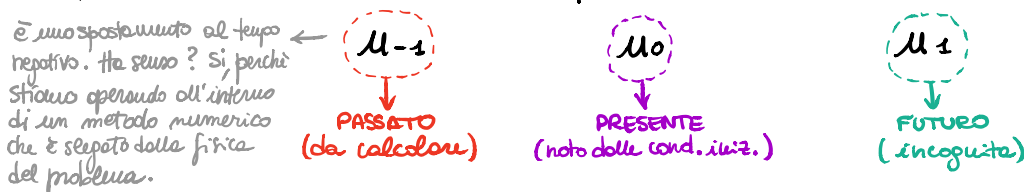
$$u_{i+1} = \frac{\hat{p}_i}{\hat{K}}$$

$\rightarrow$  mediante questa relazione, conoscendo il passato e il presente ( $u_{i-1}, u_i$ ) si può determinare il futuro

La definizione del metodo è completa una volta definite le **condizioni iniziali**: si parla di **INIZIALIZZAZIONE** del metodo: occorre immercare il metodo e fissare lo stato al tempo  $t=0$ :

CONDIZIONI INIZIALI  $\rightarrow u_0$  e  $\dot{u}_0$  (spostamento e velocità iniziali)

Come detto per determinare lo spostamento al futuro bisogna conoscere gli spostamenti al presente e al passato. Per tutto per  $i=0$ , si ha:



Quindi per determinare  $u_1$  sono richiesti  $u_0$  e  $u_{-1}$ . Per determinare  $u_{-1}$  si particularizzano le espressioni alle differenze [7.3] e [7.4] per  $i=0$ . Esse diventano:

$$\dot{u}_0 = \frac{u_1 - u_{-1}}{2\Delta t} \qquad \ddot{u}_0 = \frac{u_1 - 2u_0 + u_{-1}}{\Delta t^2}$$

Ricavando  $u_1$  dalla prima delle 2 equazioni, e sostituendola poi nella seconda si ricava il valore di  $u_{-1}$ :

$$\left[ \begin{aligned} \dot{u}_0 \cdot 2\Delta t &= u_1 - u_{-1} \\ \rightarrow u_1 &= u_{-1} + \dot{u}_0 \cdot 2\Delta t \end{aligned} \right. \rightarrow \ddot{u}_0 \Delta t^2 = u_{-1} + \dot{u}_0 2\Delta t - 2u_0 + u_{-1}$$

$$u_{-1} = u_0 - \Delta t \dot{u}_0 + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{u}_0$$



**OSSERVAZIONE**

Il metodo delle differenze finite va in tilt (fornendo risultati senza senso) in presenza di round-off numerico se l'intervallo di tempo scelto non è sufficientemente piccolo. Per la stabilità di questo algoritmo bisogna soddisfare questo requisito:

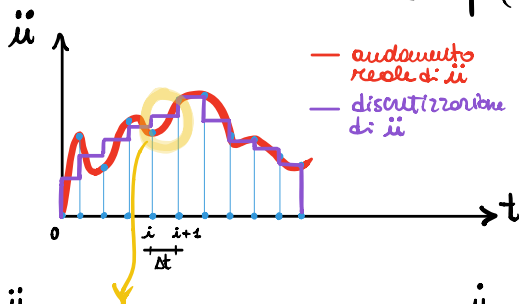
$$\frac{\Delta t}{T_n} < \frac{1}{\pi}$$

Tipicamente per definire una risposta adeguata si sceglie:  $\frac{\Delta t}{T_n} \leq 0.1$ .

In molte analisi di risposta ad un risona, si sceglie un time step ancora più piccolo per definire in maniera accurata l'accelerazione di suolo  $\ddot{u}_g(t)$ , tipicamente:  $\Delta t = 0.01 \div 0.02$  sec.

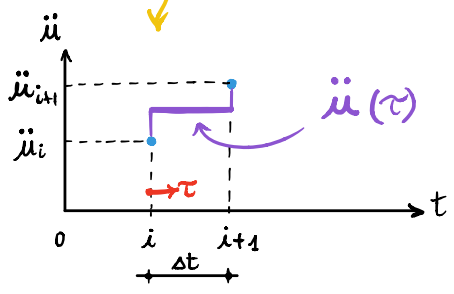
**2. AVERAGE ACCELERATION METHOD (METODO DELL'ACCELERAZIONE MEDIA) (implicito)**

Questo è il più semplice tra i metodi impliciti. Tale metodo assume che l'accelerazione sia costante tra uno step ed il successivo, pari al valore medio delle accelerazioni nei 2 step (se step piccoli → piccolo errore):



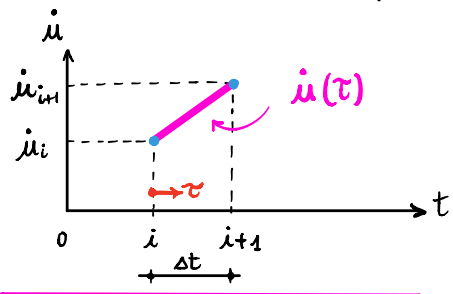
$$\ddot{u}(\tau) = \frac{1}{2} (\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i+1}) \quad \text{per } \tau \in [0; \Delta t]$$

Di conseguenza, se l'accelerazione è costante, la velocità risulterà avere un andamento lineare mentre lo spostamento sarà quadratico



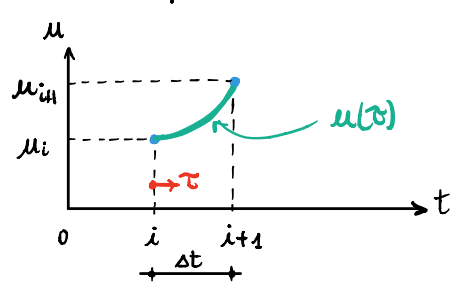
$$\ddot{u}(\tau) = \frac{1}{2} (\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i+1})$$

accelerazione (costante)



$$\dot{u}(\tau) = \dot{u}_i + \frac{\tau}{2} (\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i+1})$$

velocità (lineare)



$$u(\tau) = u_i + \dot{u}_i \tau + \frac{\tau^2}{4} (\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i+1})$$

spostamento (quadratico)

Imponendo che  $\tau = \Delta t$  (intervallo di tempo tra 2 steps) si ottengono le espressioni alle differenze che legano presente e futuro:

$$[7.5] \quad \ddot{u}_{i+1} = \ddot{u}_i + \frac{\Delta t}{2} (\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i+1})$$

$$[7.6] \quad u_{i+1} = u_i + \dot{u}_i \Delta t + \frac{\Delta t^2}{4} (\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i+1})$$

ALGORITMO → METODO DELL'ACCELERAZIONE MEDIA	
1.0 Initial calculations	1.1 $\ddot{u}_0 = \frac{p_0 - c\dot{u}_0 - ku_0}{m}$ 1.2 $\hat{k} = k + \frac{2c}{\Delta t} + \frac{4m}{(\Delta t)^2}$
2.0 Calculations for time step i	2.1 $\hat{p} = p_{i+1} + c \left[ \frac{2u_i}{\Delta t} + \dot{u}_i \right] + m \left[ \frac{4u_i}{(\Delta t)^2} + \frac{4\dot{u}_i}{\Delta t} + \ddot{u}_i \right]$ 2.2 $u_{i+1} = \frac{\hat{p}}{\hat{k}}$ 2.3 If required: $\dot{u}_{i+1} = \frac{2}{\Delta t}(u_{i+1} - u_i) - \dot{u}_i$ $\ddot{u}_{i+1} = \frac{1}{m}(p_{i+1} - c\dot{u}_{i+1} - ku_{i+1})$
3.0 Repetition for the next time step	Replace $i$ by $i + 1$ and repeat steps 2.1, 2.2, and 2.3 for the next time step.

### 3. METODO DI NEWMARK (implicito) [→ il più usato]

Newmark sviluppò una famiglia di metodi time-stepping (metodi di integrazione al passo) che si basano sulle seguenti equazioni:

ESPRESSIONI ALLE DIFFERENZE

$$\ddot{u}_{i+1} = \ddot{u}_i + [(1-\gamma)\Delta t]\ddot{u}_i + (\gamma\Delta t)\ddot{u}_{i+1} \quad [7.7]$$

$$u_{i+1} = u_i + \Delta t\dot{u}_i + [(0.5-\beta)\Delta t^2]\ddot{u}_i + [\beta\Delta t^2]\ddot{u}_{i+1} \quad [7.8]$$

Queste relazioni ricordano le espressioni alle differenze del metodo dell'accelerazione media, ma ora sono scritte in forma parametrica:  $\ddot{u}_{i+1}$  e  $u_{i+1}$  infatti sono funzione adeno dei parametri  $\beta$  e  $\gamma$  che definiscono la versione di accelerazione su un intervallo di tempo e governano la stabilità e l'accuratezza del metodo. I valori tipici di questi parametri sono:

$$\gamma = 0.5 \quad \text{e} \quad \beta = \frac{1}{6} \div \frac{1}{4}$$

Le equazioni [7.7] e [7.8], combinate con l'espressione di equilibrio [7.9] alla fine di ogni step di tempo:

EQUAZIONE DI EQUILIBRIO

$$m\ddot{u}_{i+1} + C\dot{u}_{i+1} + Ku_{i+1} = p_{i+1} \quad [7.9]$$

sono utilizzate per il calcolo di  $u_{i+1}$ ,  $\dot{u}_{i+1}$  e  $\ddot{u}_{i+1}$  al tempo  $i+1$  a partire dai valori noti al tempo  $i$  di  $u_i$ ,  $\dot{u}_i$ , e  $\ddot{u}_i$ .

### OSSERVAZIONE

Il metodo di Newmark è stabile se:

$$\frac{\Delta t}{T_n} \leq \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\gamma - 2\beta}} \quad [7.10]$$

(a) per  $\gamma = 0.5$  e  $\beta = 1/4 \rightarrow$  il metodo di Newmark  $\equiv$  *Average acceleration method* e la condizione [7.10] diventa:

$$\frac{\Delta t}{T_n} < \infty$$

Ciò implica che l' *Average acceleration method* è stabile  $\forall \Delta t$ , non importa quanto sia grande, è accurato solo se  $\Delta t$  è piccolo abbastanza.

(b) per  $\gamma = 0.5$  e  $\beta = 1/6 \rightarrow$  il metodo di Newmark  $\equiv$  *Linear acceleration method* e la condizione [7.10] diventa:

$$\frac{\Delta t}{T_n} \leq 0.551$$

Ciò ha poca importanza perché deve essere usato un time step più piccolo di  $\Delta t = 0.551 T_n$  per ottenere una rappresentazione accurata dell'eccitazione e della risposta.

**N.B.** I metodi impliciti sono più stabili di quelli espliciti

### STABILITÀ ED ERRORI DI UNA PROCEDURA NUMERICA

I metodi time-stepping non sono procedure esatte. I 3 più importanti requisiti per una procedura numerica sono:

- (a) **CONVERGENZA**: più gli intervalli di tempo <sup>(di integrazione)</sup> diventano più piccoli, più la soluzione numerica dovrebbe avvicinarsi alla soluzione esatta.
- (b) **STABILITÀ**: la soluzione numerica dovrebbe essere stabile in presenza di errori di round-off (arrotondamento/troncamento).
- (c) **ACCURATEZZA**: la procedura numerica dovrebbe fornire risultati che siano abbastanza vicini alla soluzione esatta.

Quindi come abbiamo potuto capire dall'esempio, diventa di assoluta importanza la scelta del time-step. Come scegliere  $\Delta t$ ?  $\Delta t$  deve essere abbastanza piccolo da portare a una buona accuratezza e abbastanza lungo da essere computazionalmente efficiente (time step troppo piccoli comportano un maggiore onere computazionale).

Per sistemi SDF i criteri di stabilità non sono restrittivi poiché  $\Delta t$  deve essere considerevolmente più piccolo rispetto al limite di stabilità (diciamo 0.1 o meno) per rispettare il criterio di Nyquist (per ottenere una adeguata accuratezza nella soluzione numerica). Quindi nei SDF la scelta dei  $\Delta t$  è basata sul criterio di Nyquist.

Tuttavia la stabilità dei metodi numerici è importante nell'analisi di sistemi NDF per i quali è spesso necessario usare metodi incondizionatamente stabili (perché alcuni modi di vibrazione ad alte frequenze possono rendere instabile la procedura) [vedere capitolo più avanti].

Una tecnica utile per selezionare il passo di integrazione  $\Delta t$  è risolvere il problema con un passo che sembra ragionevole (a sentimento), quindi ripetere la soluzione con un passo più piccolo e confrontare i risultati, continuando il processo finché 2 risultati successivi non sono sufficientemente simili.

## METODI DI INTEGRAZIONE AL PASSO IN CASO DI RISPOSTA NON LINEARE

La risposta dinamica di un sistema oltre il suo limite elastico (ovvero quando la struttura subisce grandi spostamenti o deformazioni plastiche), una soluzione analitica in genere non è ottenibile anche se la variazione nel tempo dell'eccitazione è descritta da una semplice funzione. Per tanto nell'analisi di sistemi non lineari è necessario lo sviluppo di metodi numerici. Quando la struttura presenta un comportamento non lineare, si ricorda che l'equazione del moto diventa:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + f(u) = p(t)$$

Forza esterna: funzione non lineare

### CENTRAL DIFFERENCE METHOD

Questo metodo, già trattato in precedenza, può essere adottato per risolvere l'equazione del moto non lineare, al tempo  $i$ :

$$m\ddot{u}_i + c\dot{u}_i + f(u_i) = p(t_i)$$

Le equazioni alle differenze:  $\dot{u}_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta t}$  e  $\ddot{u}_i = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta t^2}$

sostituite all'equazione del moto, danno:

## 8. ANALISI SISMICA DI SISTEMI LINEARI (SDF) E SPETTRI DI RISPOSTA

Una delle più importanti applicazioni della teoria della dinamica delle strutture è analizzare la risposta delle strutture all'accelerazione del terreno causata da un terremoto. In questo capitolo tratteremo la risposta di sistemi SDF lineari ed elastici. Ma poiché i terremoti possono causare danni a molte strutture, siamo anche interessati alla risposta plastica o non elastica di tali strutture. Quest'ultimo argomento sarà affrontato nel capitolo successivo (cap. 9).

In questo capitolo ci concentreremo nella risposta sismica (deformazioni, sollecitazioni interne, tensioni) di semplici strutture in funzione del tempo e di come questa risposta dipende dai parametri del sistema. Inoltre introdurremo il concetto di Spettro di risposta insieme alle procedure per determinare il picco di risposta del sistema direttamente dallo spettro di risposta. Infine ci studieremo le caratteristiche degli spettri di risposta, che ci condurranno allo spettro di progetto di nuove strutture e alla valutazione di sicurezza di strutture già esistenti contro futuri terremoti.

### ECCITAZIONE SISMICA

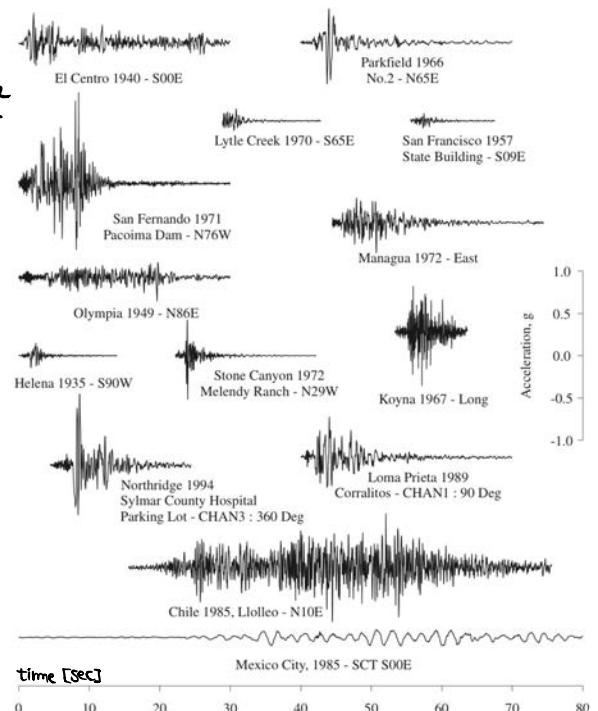
Per scopi ingegneristici, l'accelerazione al suolo è il modo più utile di definire il movimento (le scosse) del terreno durante un terremoto. L'equazione differenziale che governa la risposta delle strutture (sistemi SDF) all'eccitazione sismica (movimento del suolo  $u_g(t)$ ) è la seguente:

[8.1]

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = -m\ddot{u}_g(t)$$

accelerazione al suolo

Per tanto per una data accelerazione al suolo  $\ddot{u}_g(t)$ , il problema da risolvere (ovvero calcolare la risposta della struttura in termini di spostamenti  $u(t)$ ) è completamente definito per un SDF di cui siano note: massa, rigidità e smorzamento. Lo strumento utilizzato per misurare le componenti del movimento del terreno durante un evento sismico è l'accelerografo. A lato vi riportiamo una collezione di registrazioni di accelerogrammi (diagrammi accelerazione in funzione del tempo) di alcuni terremoti (in particolare in figura è riportata per ogni luogo solo la componente orizzontale di accelerazione). Tutti quanti sono stati plottati con la stessa scala di tempo e di accelerazione. Si può notare l'ampia variabilità di ampiezza, durata e in generale dell'aspetto dei diversi records.



Dalla [8.2] è chiaro che, per una data accelerazione al suolo  $\ddot{u}_g(t)$ , la risposta in termini di spostamento  $u(t)$  del sistema dipende soltanto dalla frequenza naturale  $\omega_n$  o del periodo naturale  $T_n$  del sistema e dal suo rapporto di smorzamento  $\xi$ . Questo si traduce formalmente nel dire che:

$$u = u(t, T_n, \xi)$$

Così 2 sistemi che hanno gli stessi valori di  $T_n$  e  $\xi$ , avranno la stessa risposta  $u(t)$  anche se un sistema ne è più morbido dell'altro, o uno sia più rigido dell'altro.



L'accelerazione al suolo  $\ddot{u}_g(t)$  durante un terremoto varia (come si evince dal grafico a lato) irregolarmente, così che una rappresentazione analitica della soluzione della

equazione di moto può essere esclusa. Quindi sono necessari i metodi numerici trattati nel capitolo precedente per determinare la risposta strutturale.

### QUANTITÀ DI RISPOSTA

Di grande interesse nell'ingegneria strutturale è la deformazione del sistema, o lo spostamento  $u(t)$  della massa rispetto al suolo in movimento, al quale le sollecitazioni sono linearmente correlate ( $M, V$  nelle travi e nelle colonne del sistema SDF).

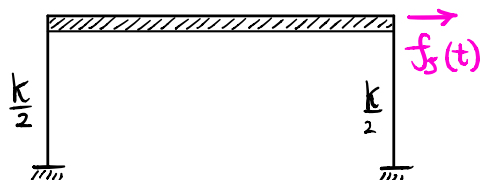
Conoscere lo spostamento totale  $u^t(t)$  della massa è utile per provvedere ad adeguate distanze tra gli edifici per prevenire che si tocchino durante un terremoto.

Conoscere l'accelerazione totale  $\ddot{u}^t(t)$  della massa è utile quando la struttura è atta al supporto di strumentazione sensibile e il moto di queste strumentazioni deve essere determinato.

La soluzione numerica della [8.2] può essere implementata per fornire risultati per  $u(t)$ ,  $\dot{u}(t)$ ,  $\ddot{u}(t)$  così come per le quantità totali  $u^t(t)$ ,  $\dot{u}^t(t)$ ,  $\ddot{u}^t(t)$ .

Una volta che la risposta temporale (response history)  $u(t)$  è stata valutata con l'analisi dinamica della struttura, le sollecitazioni possono essere determinate attraverso l'analisi statica della struttura ad ogni istante di tempo. Sono stati menzionati nel capitolo introduttivo 2 metodi. Tra i 2, l'approccio che si preferisce è quello basato sulle forze statiche equivalenti perché è relazionata alle forze del sistema specificati nei codici di calcolo (EC8, NTC).

In ogni istante di tempo, la forza statica equivalente è la forza statica esterna che produce lo stesso spostamento  $u(t)$  determinato con l'analisi dinamica:



$$f_s(t) = k \cdot u(t)$$

lateral stiffness of the structure

Esprimendo  $k$  in termini di massa  $m$  (ricordando che  $\omega_n = \sqrt{k/m}$ ):

$$f_s(t) = m \cdot \omega_n^2 \cdot u(t) = m \cdot A(t) \quad [8.3]$$

$$A(t) = \omega_n^2 \cdot u(t) \quad [8.4]$$

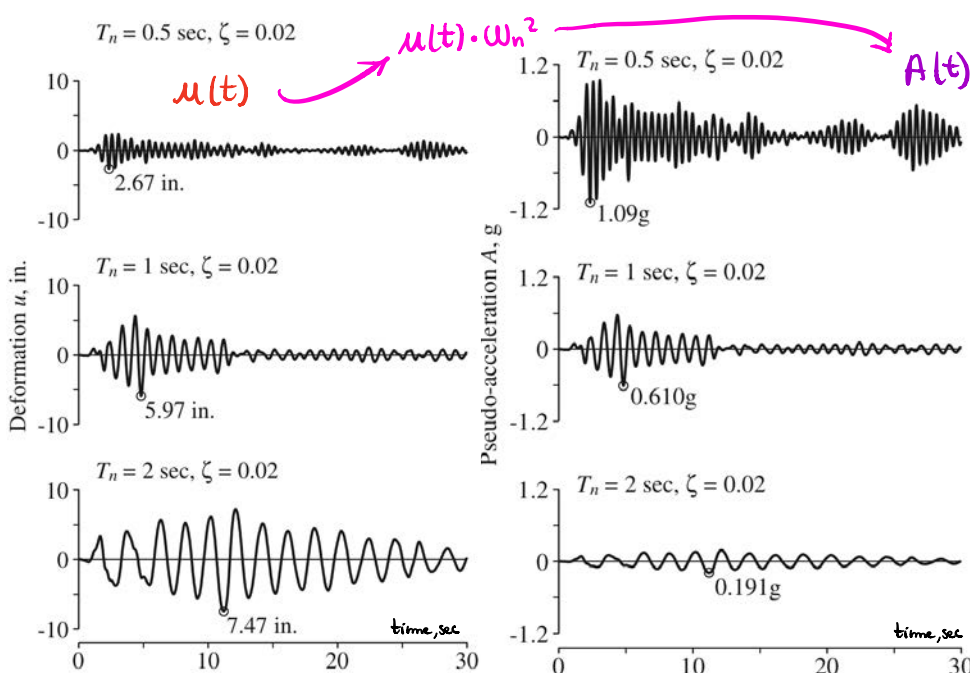
PSEUDO-ACCELERAZIONE

**OSSERVAZIONE**

La forza statica equivalente è  $m$  volte  $A(t)$  → pseudo-accelerazione e non  $m$  volte l'accelerazione totale  $\ddot{u}(t)$  → N.B.  $A(t) \neq \ddot{u}(t)$ . Porteremo di questa distinzione più avanti.

La risposta di pseudo-accelerazione  $A(t)$  può essere facilmente calcolata dalla risposta  $u(t)$ , moltiplicandola per  $\omega_n^2 = [2\pi/T_n]^2$ .

Al lato, riprendendo la risposta dei 3 sistemi esaminati in precedenza ( $\zeta = 2\%$  e  $T_{n,1} = 0.5, T_{n,2} = 1, T_{n,3} = 2$  sec.), moltiplicando ciascuna risposta  $u(t)$  per la corrispondente  $\omega_n^2$ , si ottengono i grafici delle pseudo-accelerazioni.



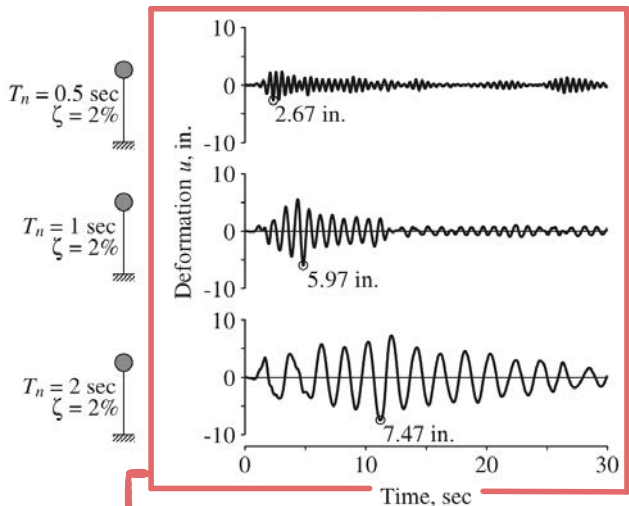
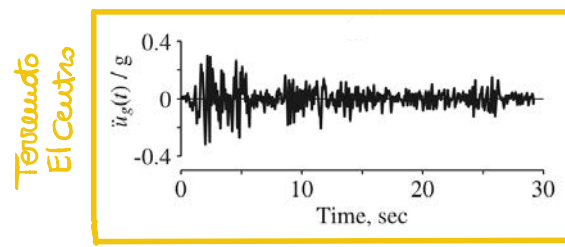
Adesso tratteremo nel dettaglio: lo spettro di risposta degli spostamenti, e i 2 spettri correlati: lo spettro di pseudo-velocità e lo spettro di pseudo-accelerazione.

**OSSERVAZIONE**

Come già in precedenza detto, per il calcolo delle sollecitazioni è richiesta soltanto la risposta  $u(t)$ . Ovviamente, poi, è lo spettro di risposta degli spostamenti che fornisce tutte le informazioni necessarie per calcolare i valori di picco degli spostamenti  $D \equiv u_0$  e le sollecitazioni interne (enocote).

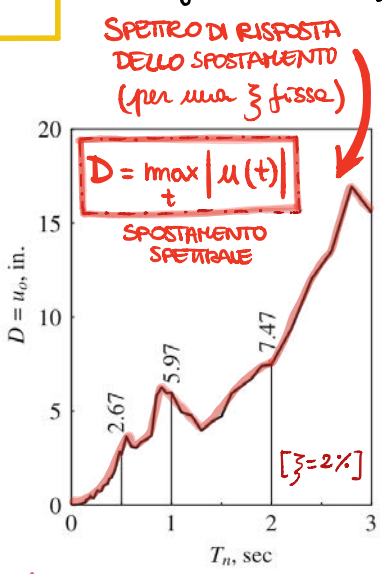
Gli spettri di risposta di pseudo-velocità e pseudo-accelerazione sono invece ricavati perché utili nello studio delle caratteristiche dello spettro di risposta (degli spostamenti), nel costruire lo spettro di progetto, nel capire i risultati d'ordine dei codici di calcolo (EC8-NTC).

**1 SPETTRO DI RISPOSTA DEGLI SPOSTAMENTI**



→ Risposta temporale dei 3 sistemi nel tempo in termini di spostamento  $u(t)$

I grafici a lato mostrano la procedura per determinare lo spettro di risposta degli spostamenti. Lo spettro è ricavato a partire dal terremoto di El Centro (accelerogramma a lato). Questo induce la



variazione di  $u(t)$  nel tempo dei 3 sistemi esaminati in precedenza ( $\zeta = \text{cost} = 0.02$ ). Per ogni si determina dalla risposta  $u(t)$  nel tempo il valore di picco di spostamento:

$$D \equiv u_0 = \max_t |u(t)|$$

(solitamente il picco si ha durante la scossa di terremoto; comunque, per sistemi poco smorzati con periodi alti, il picco

d'risposta può verificarsi anche dopo che lo shock sismico sia terminato durante la fase di oscillazione libera).

Nel caso in esame abbiamo i seguenti picchi di spostamento:

per un valore di  $\zeta$  fisso pari a:  $\zeta = 0.02$

→	$D = 2.67$ inches	→ per il sistema con	→ $T_n = 0.5$ sec
	$D = 5.97$ inches	→ per il sistema con	→ $T_n = 1$ sec
	$D = 7.47$ inches	→ per il sistema con	→ $T_n = 2$ sec



### 3 SPETTRO DI RISPOSTA DELLA PSEUDO - ACCELERAZIONE

Per un sistema SDF, la quantità  $A$  che lega la frequenza naturale  $\omega_n^2$  del sistema al suo **picco di spostamento**  $D$  dovuto all'eccitazione sismica, è detta **pseudo-velocità**:

$$\text{PSEUDO-ACCELERAZIONE SPETRALE} \quad A = \omega_n^2 \cdot D = \left(\frac{2\pi}{T_n}\right)^2 D \quad [8.8]$$

Questa quantità ha la stessa unità di misura di una accelerazione [ $\text{in}/\text{s}^2$ ]. Inoltre essa è correlata (è proporzionale) al valore di **picco del taglio alla base**  $V_{b0}$  (o del valore di **picco delle forze statiche equivalenti**  $f_{s0}$ ):

$$V_{b0} = f_{s0} = m \cdot A \quad [8.9]$$

La [8.9] sarebbe la [8.5] particolare per l'istante di tempo in cui si ha il picco di risposta.

**Perché il prefisso pseudo?** Il prefisso pseudo è utilizzato perché  $A$  non è uguale al **picco totale di accelerazione**  $\ddot{u}_0$  (definito in precedenza), sebbene  $A$  abbia le unità di misura di una accelerazione. [Vedere osservazione più avanti].

#### OSSERVAZIONE

Il picco del taglio alla base [8.9] può essere riscritto come (poiché  $m = W/g$ ):

$$V_{b0} = \underbrace{\left(\frac{A}{g}\right)}_{\text{accelerazione gravitazionale}} \underbrace{W}_{\text{peso della struttura}}$$

↙ coefficiente di taglio alla base o coefficiente di forze laterali

$A/g$  è il coefficiente di taglio alla base o il coefficiente di forze laterali. Esso è usato nei codici per rappresentare un coefficiente attraverso il quale si possa ricavare direttamente il taglio alla base moltiplicandolo per il peso della struttura.

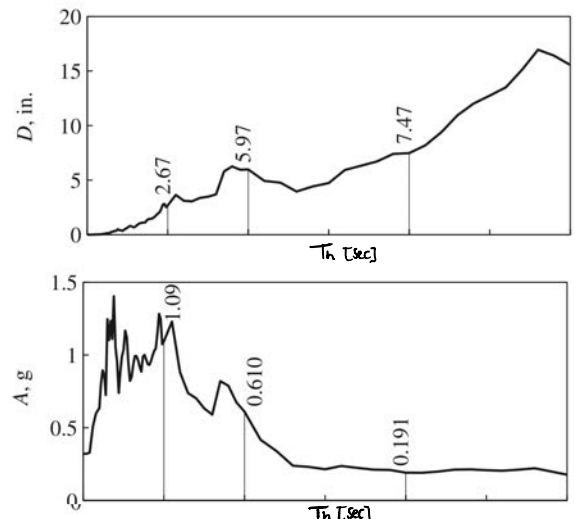
Lo **spettro di risposta della pseudo-accellerazione** è un plot di  $A$  in funzione di  $T_n$  del sistema.

Utilizzando i dati dell'esempio precedente, una volta ricavato lo spettro di risposta dello spostamento utilizzando la [8.8] si ricava lo spettro della pseudo-accellerazione. Per  $\xi = \text{cost} = 0.02$ :

$$\begin{aligned} D = 2.67 \text{ in} &\rightarrow T_n = 0.5 \text{ sec} \rightarrow A = \left(\frac{2\pi}{0.5}\right)^2 2.67 = 1.09 \text{ g} \\ D = 5.97 \text{ in} &\rightarrow T_n = 1 \text{ sec} \rightarrow A = \left(\frac{2\pi}{1}\right)^2 5.97 = 0.61 \text{ g} \\ D = 7.47 \text{ in} &\rightarrow T_n = 2 \text{ sec} \rightarrow A = \left(\frac{2\pi}{2}\right)^2 7.47 = 0.19 \text{ g} \end{aligned}$$

↑ normalizzata rispetto g

Mantenendo  $\xi = \text{cost}$ , variando  $T_n$  e ripetendo il calcolo si costruisce la curva spettrale  $A$ .

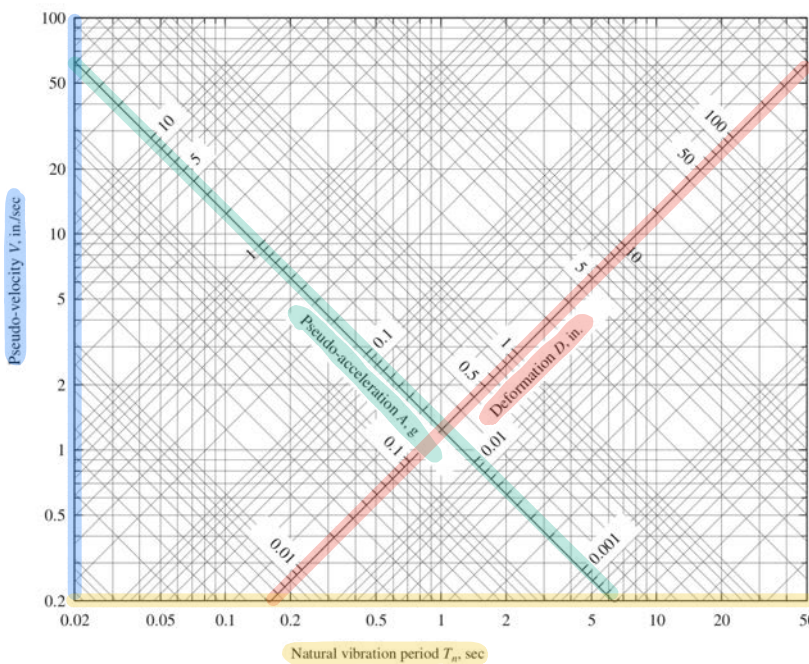


**OSSERVAZIONE**

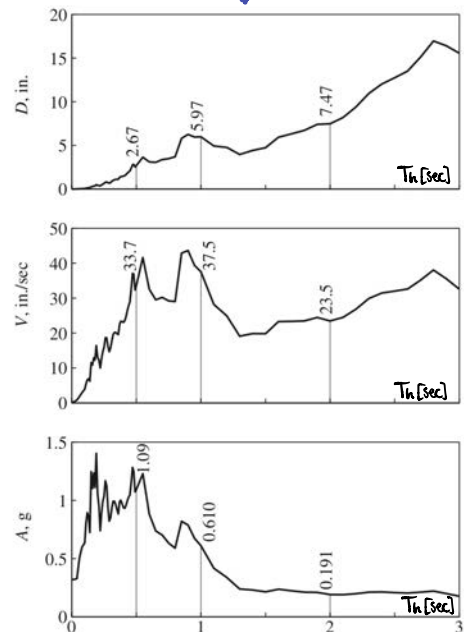
Si fa notare la similitudine tra queste equazioni [B.10] che legano D, V, ed A con l'equazione (vista nei capitoli precedenti e qui richiamata) che lega i fattori di risposta dinamica  $R_d, R_v, R_a$  (per sistemi SDF soggetti ad 1° forza armonica):

$$\frac{R_a}{\omega/\omega_n} = R_v = \frac{\omega}{\omega_n} R_d$$

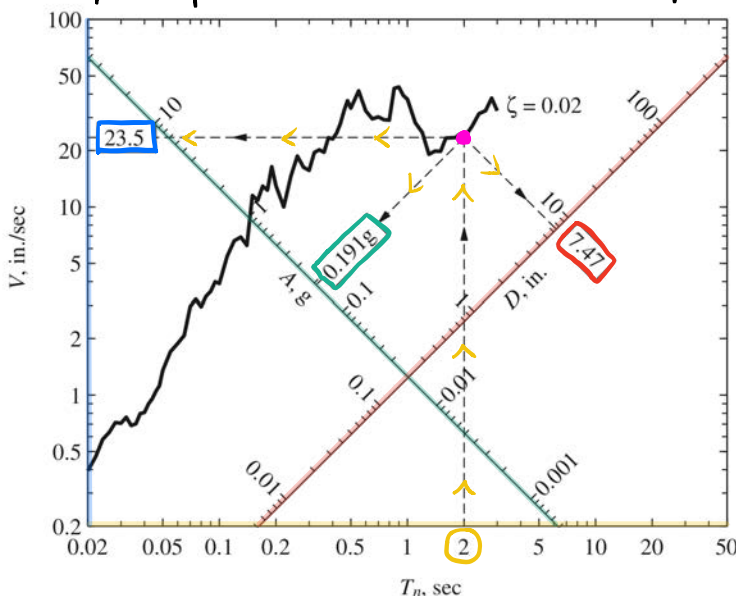
Questa equazione permette la rappresentazione contemporanea di  $R_d, R_v, R_a$  nel diagramma logaritmico a 4 vie. Similmente si può costruire un grafico per la rappresentazione di  $A, V$  e  $D$ .



Lo spettro combinato D-V-A è un grafico logaritmico a 4 vie avente in ordinate le scale per V ed in ascisse il  $T_n$  (in scala logaritmica standard). Le 2 scale per D e A inclinate di  $+45^\circ$  e  $-45^\circ$  rispetto l'asse dei  $T_n$  sono pure assi con scale logaritmiche, ma diverse. Una volta che questo grafico è stato costruito, i 3 spettri di risposta (di spostamento, pseudo-velocità e pseudo-accelerazione)



i 3 spettri possono essere letti in un unico plot:



Utilizzando le relazioni lineari tra i logaritmi:

$$\log V = \log \left( \frac{2\pi}{T_n} D \right) = \log 2\pi - \log T_n + \log D$$

$$\log A = \log \left( \frac{2\pi}{T_n} V \right) = \log 2\pi - \log T_n + \log V$$

### A cosa servono gli spettri di risposta?

Se per un dato terremoto è disponibile lo spettro di risposta, il valore di picco di spostamento o di una sollecitazione può essere determinato prontamente per qualsiasi sistema lineare SDF.

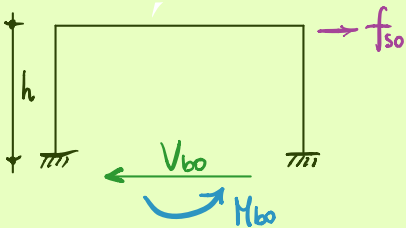
Per un dato  $T_n$  e una data  $\xi$ , i valori spettrali  $D, V, A$  sono letti dallo spettro di risposta. Adesso, tutte le quantità di interesse possono essere espresse in termini di  $D, V, A$  e in funzione delle proprietà del sistema: massa  $m$  e rigidità  $k$ .

In particolare, il picco di spostamento del sistema è:

$$u_0 = D = \frac{T_n}{2\pi} \quad V = \left(\frac{T_n}{2\pi}\right)^2 A$$

ed il picco della forza statica equivalente  $f_{s0}$  è:

$$f_{s0} = k \cdot D = m \cdot A$$



L'analisi statica del sistema SDF soggetto alle forze laterali  $f_{s0}$  prevede e fornisce le sollecitazioni (es. tagli e momenti in travi e colonne). Si sottolinea nuovamente che non è necessaria più alcuna analisi dinamica oltre a quella condotta per determinare  $u(t)$ .

In particolare, i picchi di taglio e di momento alla base del portale sono:

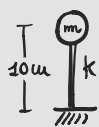
$$V_{b0} = k D = m A$$

$$M_{b0} = h \cdot V_{b0}$$

**N.B.** Qualsiasi spettro di risposta (che sia di spostamento, o di pseudo-velocità, o di pseudo-accelerazione) è sufficiente per il calcolo del picco degli spostamenti e delle forze richieste per il calcolo strutturale. Per questo motivo gli spettri "veri" di velocità e accelerazione non sono richiesti.

### ESEMPIO

Si consideri un serbatoio d'acqua appoggiato al terremoto di El Centro (per lo spettro di risposta vedere pagine precedenti). Si calcoli il max momento fluttuante durante il terremoto.



$m = 10000 \text{ kg}$   
 $k = 38.7 \text{ kN/m}$   
 $\xi = 2\%$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = 3.14 \text{ rad/s} \rightarrow T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2 \text{ sec}$$

Entro nello spettro con  $T_n = 2 \text{ sec}$  e  $\xi = 0.02$

$$\rightarrow \begin{cases} D = 190 \text{ mm} \\ A = 1.87 \text{ m/s}^2 \end{cases}$$

Determino la forza statica equivalente:

$$f_{s0} = k \cdot D = 18.7 \text{ kN}$$

una volta determinata

le sollecitazioni e le tensioni possono essere calcolate usando la statica



Inoltre lo spettro può essere diviso in 3 campi di periodo:

1  $T_n < 0.5 \text{ sec}$  → REGIONE GOVERNATA DALL'ACCELERAZIONE

↓  
la risposta strutturale è correlata maggiormente direttamente all'accelerazione del suolo sigo.

{ in questa regione A può essere idealizzata come costante di valore uguale proprio a sigo amplificata di un fattore che dipende da  $\xi$  [ $A \approx C \cdot sigo$ ].  
↳  $C = C(\xi)$

2  $0.5 < T_n < 3 \text{ sec}$  → REGIONE GOVERNATA DALLA VELOCITÀ

↓  
la risposta strutturale risulta essere meglio correlata alla velocità del suolo sigo piuttosto che ad altri parametri del terreno.

{ in questa regione V può essere idealizzato come un valore costante pari a sigo amplificata di un fattore che dipende da  $\xi$  [ $V \approx C \cdot sigo$ ].  
↳  $C = C(\xi)$

3  $T_n > 3 \text{ sec}$  → REGIONE GOVERNATA DALLO SPOSTAMENTO

↓  
la risposta strutturale è correlata maggiormente allo spostamento del suolo sigo.

{ in questa regione D può essere idealizzato con un valore costante pari a sigo amplificato di un fattore funzione di  $\xi$  [ $D \approx C \cdot sigo$ ].  
↳  $C = C(\xi)$

Le osservazioni precedenti hanno messo in luce l'utilità dello spettro logaritmico a 4 vie. Queste sarebbero state difficili da scoprire dai singoli spettri.

### OSSERVAZIONE

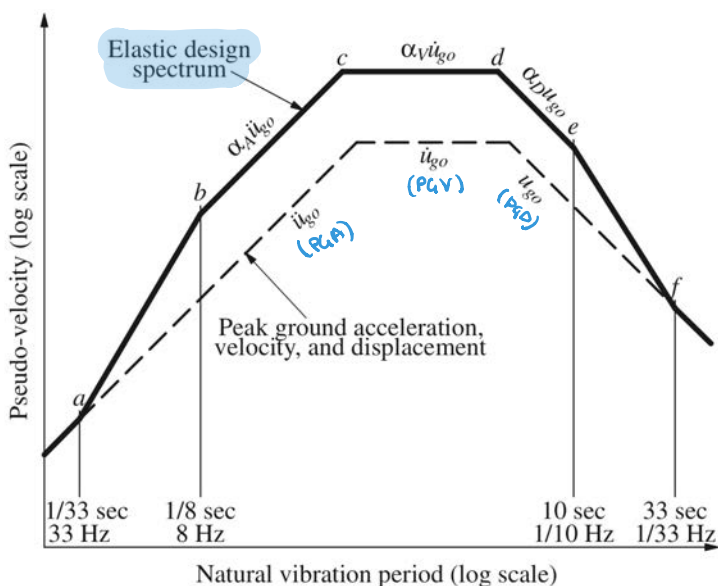
L'idealizzazione dello spettro che è stata fatta (pezze tratteggiate) è di beneficio per la costruzione di uno spettro di progetto rappresentativo di molti terreni.

Abbiamo visto fin ora cosa succede cambiando  $T_n$ . Ci occupiamo adesso, invece, degli effetti dello smorzamento  $\xi$ . Questo ha una notevole influenza sullo spettro di risposta: l'introduzione dello smorzamento  $\xi$  rende la risposta molto meno sensibile al periodo  $T_n$ . Lo smorzamento riduce le risposte di una struttura, e questa riduzione avviene in quantità differenti nelle 3 regioni spettrali. Quando:

- $T_n \rightarrow 0 \Rightarrow \xi$  non influenza la risposta (perché la struttura si muove rigidamente con il terreno).
- $T_n \rightarrow \infty \Rightarrow \xi$  non influenza la risposta (perché la massa rimane ferma mentre il terreno sottostante si muove).

I ricercatori hanno sviluppato procedure per costruire questi **spettri di progetto** dai parametri di ground motion. Di seguito è sintetizzata una procedura:

1. Plot the three dashed lines corresponding to the peak values of ground acceleration  $\ddot{u}_{go}$ , velocity  $\dot{u}_{go}$ , and displacement  $u_{go}$  for the design ground motion.
2. Obtain from Table 6.9.1 or 6.9.2 the values for  $\alpha_A$ ,  $\alpha_V$ , and  $\alpha_D$  for the  $\zeta$  selected.
3. Multiply  $\ddot{u}_{go}$  by the amplification factor  $\alpha_A$  to obtain the straight line  $b-c$  representing a constant value of pseudo-acceleration  $A$ .
4. Multiply  $\dot{u}_{go}$  by the amplification factor  $\alpha_V$  to obtain the straight line  $c-d$  representing a constant value of pseudo-velocity  $V$ .
5. Multiply  $u_{go}$  by the amplification factor  $\alpha_D$  to obtain the straight line  $d-e$  representing a constant value of deformation  $D$ .
6. Draw the line  $A = \ddot{u}_{go}$  for periods shorter than  $T_a$  and the line  $D = u_{go}$  for periods longer than  $T_f$ .
7. The transition lines  $a-b$  and  $e-f$  complete the spectrum.



*probabilità di non superamento*

**TABLE 6.9.1** AMPLIFICATION FACTORS: ELASTIC DESIGN SPECTRA

Damping, $\zeta$ (%)	Median (50th percentile)			One Sigma (84.1th percentile)		
	$\alpha_A$	$\alpha_V$	$\alpha_D$	$\alpha_A$	$\alpha_V$	$\alpha_D$
1	3.21	2.31	1.82	4.38	3.38	2.73
2	2.74	2.03	1.63	3.66	2.92	2.42
5	2.12	1.65	1.39	2.71	2.30	2.01
10	1.64	1.37	1.20	1.99	1.84	1.69
20	1.17	1.08	1.01	1.26	1.37	1.38

Source: N. M. Newmark and W. J. Hall, *Earthquake Spectra and Design*, Earthquake Engineering Research Institute, Berkeley, Calif., 1982, pp. 35 and 36.

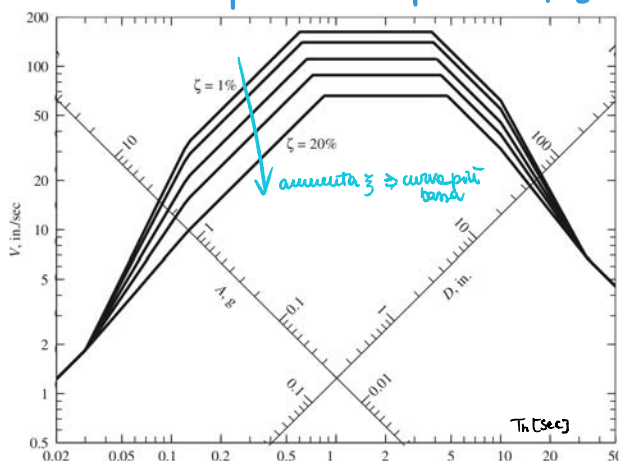
**TABLE 6.9.2** AMPLIFICATION FACTORS: ELASTIC DESIGN SPECTRA

	Median (50th percentile)	One Sigma (84.1th percentile)
$\alpha_A$	$3.21 - 0.68 \ln \zeta$	$4.38 - 1.04 \ln \zeta$
$\alpha_V$	$2.31 - 0.41 \ln \zeta$	$3.38 - 0.67 \ln \zeta$
$\alpha_D$	$1.82 - 0.27 \ln \zeta$	$2.73 - 0.45 \ln \zeta$

Si osserva che i periodi  $T_a, T_b, T_e, T_f$  sono fissi (in funzione del tipo di terreno). I periodi  $T_c, T_d$  sono determinati dall'intersezione dei rami della costante  $-A (= \alpha_A \ddot{u}_{go})$ , della costante  $-V (= \alpha_V \dot{u}_{go})$  e della costante  $-D (= \alpha_D u_{go})$ . Poiché sia  $\alpha_A$ , che  $\alpha_V$ , che  $\alpha_D$  sono funzioni di  $\zeta$ , anche  $T_c$  e  $T_d$  saranno funzioni di  $\zeta$ .

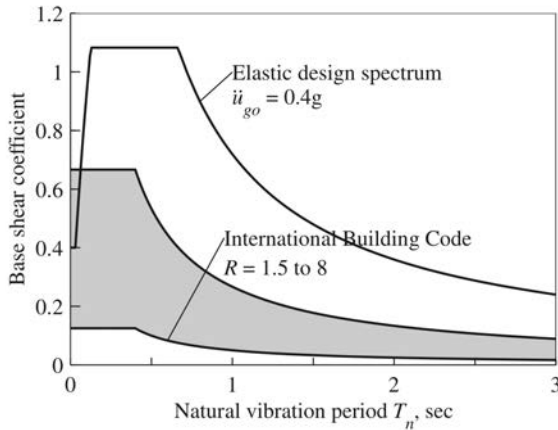
Ripetendo la procedura per diversi  $\zeta$  si ottiene lo **spettro di risposta di progetto elastico**

Esso è la base per il calcolo della forza di progetto e di spostamento per un sistema SDF per essere progettato in modo da rimanere elastico. Per questo scopo lo spettro di progetto è usato nella stessa maniera di quello di risposta quando è usato per il calcolo del periodo di risposta.



# 9.

## ANALISI SISMICA DI SISTEMI NON LINEARI (SDF) E SPETTRI DI RISPOSTA ELASTOPLASTICI



Abbiamo visto che il picco di taglio alla base indotto in un sistema lineare dall'accelerazione del terreno è:

$$[9.1] \quad V_b = \frac{A}{g} W$$

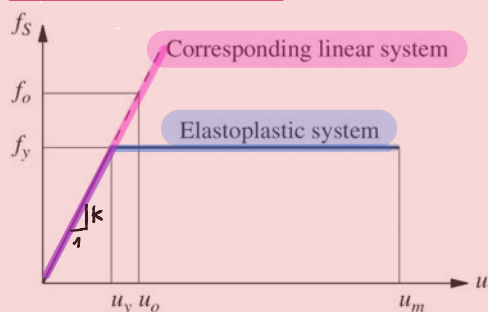
coefficiente di taglio alla base  $\left( \frac{A}{g} \right)$   $\rightarrow$  pseudo-accellerazione corrispondente a  $T_n$  e  $\xi$  della struttura  $\rightarrow$  peso del sistema

Molte strutture sono però progettate per un taglio alla base più piccolo rispetto al taglio alla base elastico [9.1] associato allo shock più forte che possa verificarsi nel sito in

erava. Questo concetto si intuisce dal grafico sopra, nel quale il coefficiente di taglio alla base  $A/g$  (scelto dallo spettro di progetto di 0.4 per farlo coincidere con il picco di accelerazione di suolo [PGA = 0.4g  $\rightarrow$  terremoto El Centro])  $\Rightarrow A/g = 0.4$ , comparato ad esempio al valore del coefficiente di taglio alla base dell'International Building Code, risulta maggiore. Questa disparità di valori implica che le strutture progettate per il valore delle forze indicate dai codici si deformeranno oltre il limite di comportamento elastico quando soggette ad accelerazioni al suolo rappresentate dallo spettro 0.4g. Per questo motivo non deve sorprendere il fatto che le strutture si danneggiano durante scosse intense. La sfida per gli ingegneri è quella di progettare una struttura in modo che il danno sia accettabile entro certi limiti di tollerabilità.

La risposta delle strutture che si deformano oltre il limite elastico (dunque in campo non elastico) durante uno shock sismico, diventa per tutto di centrale importanza. Vedremo di seguito per prima l'idealizzazione di questo comportamento strutturale (ossia gli oscillatori elastoplastici), poi il confronto di risposta tra sistemi elastici e non elastici, con lo scopo di capire come lo smorzamento influenzi le risposte strutturali, poi una procedura per determinare lo spettro di risposta per la forza di smorzamento associato a diversi valori del fattore di duttilità, ed infine una procedura per determinare lo spettro di progetto per i sistemi non elastici a partire dallo spettro elastico di progetto.

**OSSERVAZIONE**



Si vuole valutare il picco di spostamento di un sistema elastoplastico e confrontarlo con il picco causato dalla stessa eccitazione nel corrispondente sistema lineare. I sistemi hanno stessa rigidità  $k$ , la stessa massa  $m$  e lo stesso smorzamento  $c$ , pertanto:  $T_n$  del sistema elastoplastico  $\equiv T_n$  del sistema lineare quando le oscillazioni sono piccole ( $u \leq u_y$ ). Per oscillazioni più grandi, il periodo naturale  $T_n$  del sistema non elastico non è definito.

In merito ai diagrammi visti in precedenza possiamo definire i seguenti parametri: forza di snervamento normalizzata  $\bar{f}_y$ , fattore di riduzione della forza di smorzamento  $R_y$ , e fattore di duttilità  $\mu$ .

**FORZA DI SNERVAMENTO NORMALIZZATA**

$$\bar{f}_y = \frac{f_y}{f_o} = \frac{u_y}{u_o} \quad [-] \leq 1$$

[9.2]

•  $f_o, u_o$  sono i valori di picco indotti dal terremoto ( $f_o$  sarebbe  $f_{s0}$  di prima).

• la [9.2] deriva da:

$$\frac{f_y}{f_o} = \frac{k \cdot u_y}{k \cdot u_o}$$

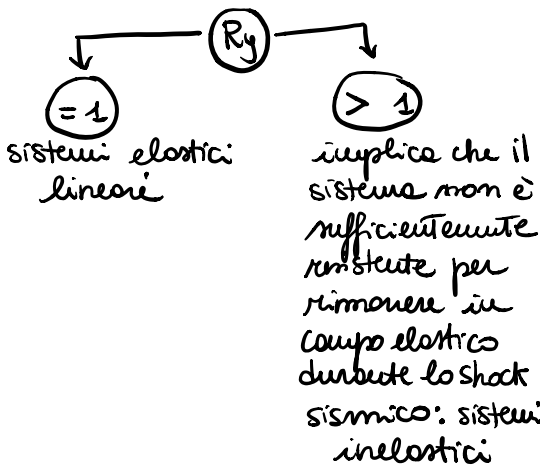
•  $f_o$  può essere interpretata come la forza minima necessaria affinché la struttura rimanga in campo elastico durante lo shock sismico.

•  $\bar{f}_y < 1$  implica che  $f_y$  è meno del minimo di forze richiesta dal sistema per rimanere in campo elastico durante lo shock sismico. un sistema così si snerva e subisce spostamenti in campo inelastico.

**FATTORE DI RIDUZIONE DELLA FORZA DI SMORZAMENTO**

$$R_y = \frac{f_o}{f_y} = \frac{u_o}{u_y} = \frac{1}{\bar{f}_y} \quad [-] \geq 1$$

[9.3]



•  $\bar{f}_y = 1$  → sistema che rimane elastico lineare ( $f_y = f_o$ ). Questo sistema subisce spostamenti fino a  $f_y$  durante lo shock sismico

**FATTORE DI DUTTILITÀ**

$$\mu = \frac{u_{mm}}{u_y} \quad [-] \geq 1$$

[9.4]

$u_{mm}$  = picco (massimo assoluto → senza segno) di spostamento dell'oscillatore elastoplastico a causa dello shock sismico.

$u_y$  = spostamento a snervamento

Per sistemi che si deformano nel range inelastico  $u_{mm} > u_y \Rightarrow \mu > 1$  (ho duttilità)

Per sistemi che si deformano in campo elastico  $\Rightarrow u_{mm} = u_y \Rightarrow$

$\mu = 1$   
non ho duttilità

Ci riferiremo anche ad  $\omega_n$  e  $T_n$  come la frequenza e il periodo di piccole oscillazioni del sistema inelastico. Similmente  $\zeta$  è il rapporto di smorzamento del sistema basato sullo smorzamento critico  $2m\omega_n$  del sistema inelastico che vibra entro il suo range elastico. È pure lo smorzamento del corrispondente sistema elastico. Quindi  $\rightarrow u(t)$  dipende da:  $\omega_n, \zeta$  e  $u_y$ .

Possiamo ulteriormente modificare l'equazione del moto [9.7] introducendo il fattore di duttilità:

$$\boxed{\mu(t) \equiv \frac{u(t)}{u_y}} \rightarrow \begin{aligned} u(t) &= u_y \cdot \mu(t) \\ \dot{u}(t) &= u_y \cdot \dot{\mu}(t) \\ \ddot{u}(t) &= u_y \cdot \ddot{\mu}(t) \end{aligned}$$

Sostituendo e dividendo per  $u_y$ :

$$\begin{aligned} \frac{u_y}{u_y} \ddot{\mu}(t) + 2\zeta \omega_n \frac{u_y}{u_y} \dot{\mu}(t) + \omega_n^2 \frac{u_y}{u_y} \tilde{f}_s(\mu) &= -\frac{\ddot{u}_g(t)}{u_y} \\ \ddot{\mu}(t) + 2\zeta \omega_n \dot{\mu}(t) + \omega_n^2 \tilde{f}_s(\mu) &= -\frac{1}{u_y} \ddot{u}_g(t) \end{aligned}$$

Indicando con  $\boxed{a_y = \frac{f_y}{m}}$   $\rightarrow$  e ricordando che  $\begin{cases} m = k/\omega_n^2 \\ f_y = k \cdot u_y \end{cases}$

accelerazione massima a cui può essere sottoposto il sistema  $\rightarrow a_y = \frac{k \cdot u_y}{k/\omega_n^2} \Rightarrow a_y/\omega_n^2 = u_y$

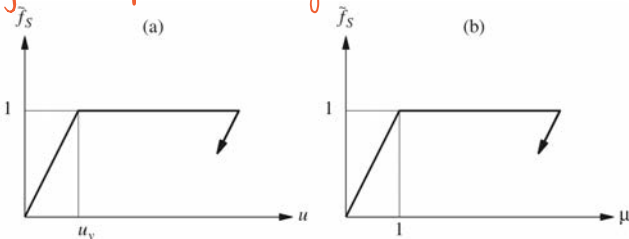
[9.8]

$$\ddot{\mu}(t) + 2\zeta \omega_n \dot{\mu}(t) + \omega_n^2 \tilde{f}_s(\mu) = -\omega_n^2 \cdot \frac{\ddot{u}_g(t)}{a_y}$$

rapporto di accelerazioni tra l'accelerazione del suolo e una accelerazione che è minima della forza di smorzamento della struttura.

$a_y$  può essere interpretata come l'accelerazione da ripetere alle masse meccaniche per produrre la forza di smorzamento  $f_y$  [ $f_y = m \cdot a_y$ ]

relazione forza - spostamento di forza adimensionale



La [9.8] indica che raddoppiando l'accelerazione del terreno  $\ddot{u}_g(t)$ , si produce la stessa risposta  $\mu(t)$  quando sia dimezzata la forza di smorzamento. Inoltre la [9.8] ci dice che  $\mu(t)$  dipende da:  $\omega_n, \zeta$  e  $a_y$ . Ma  $a_y$  a sua volta dipende da  $\omega_n, \zeta$  e  $f_y$ , pertanto  $\mu(t)$  dipende da  $\omega_n, \zeta$  e  $f_y$ .

$$\begin{aligned} a_y &= f_y/m = \frac{k \cdot u_y}{k/\omega_n^2} \\ \bar{f}_y &= \frac{u_y}{u_0} \rightarrow u_y = \bar{f}_y \cdot u_0 \rightarrow f(\zeta, \omega_n) \\ &\rightarrow a_y = \bar{f}_y u_0 \omega_n^2 \end{aligned}$$



Esiste un compromesso tra resistenza e duttilità pertanto: strutture resistenti non hanno bisogno di duttilità per sopravvivere ad un terremoto; strutture poco resistenti invece ne hanno di bisogno proprio per compensare la mancanza di duttilità. Questo concetto ha modificato le norme: esse non sono più basate sul principio di duttilità, ma sul principio di resistenza.

### OSSERVAZIONE

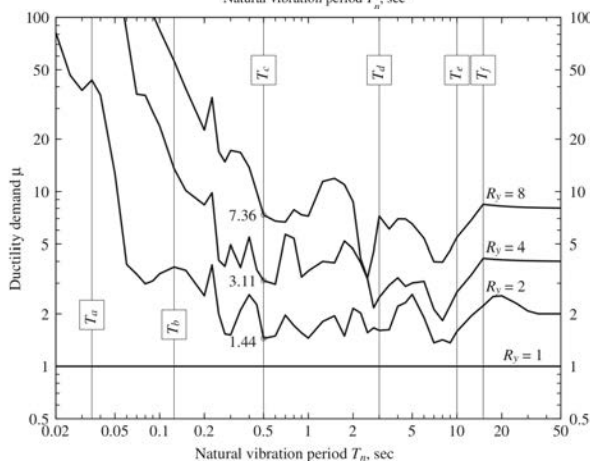
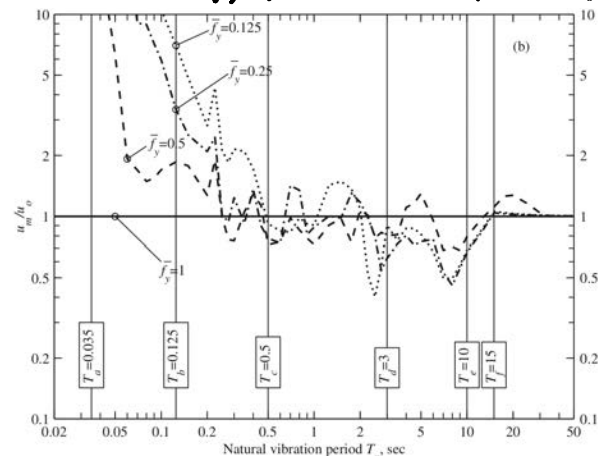
Come la risposta di un sistema SDF è condizionata dall'azione inelastica, ossia dallo snervamento?

Lo spostamento nel tempo di sistemi snervati differisce da quello dei sistemi elastici. Diversamente dai sistemi elastici, quelli inelastici dopo che sono andati incontro a snervamento non oscillano più attorno la posizione di equilibrio iniziale. Lo snervamento causa un cambiamento delle posizioni iniziali di equilibrio del sistema ed il sistema oscilla attorno una nuova posizione di equilibrio, fino a che questa non viene di nuovo cambiata da un ulteriore snervamento.

Quindi dopo che lo shock sismico ha cessato di esistere il sistema tenderà ad una condizione di riposo che generalmente è diversa da quella iniziale (in altre parole rimane una deformazione permanente nella struttura).

Sistemi con buone forze di snervamento, si snervano più frequentemente e per lunghi intervalli. Con una forza di snervamento maggiore, le deformazioni permanenti tendono ad aumentare generalmente.

Adesso mostreremo come la domanda di duttilità e la relazione tra  $u_m$  e  $u_0$  dipendono da  $T_n$  e da  $\bar{f}_y$  (o il suo reciproco  $R_y$ ).



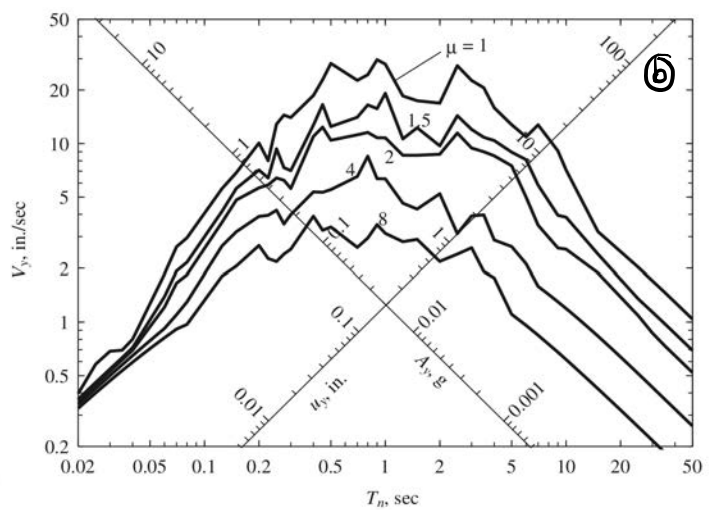
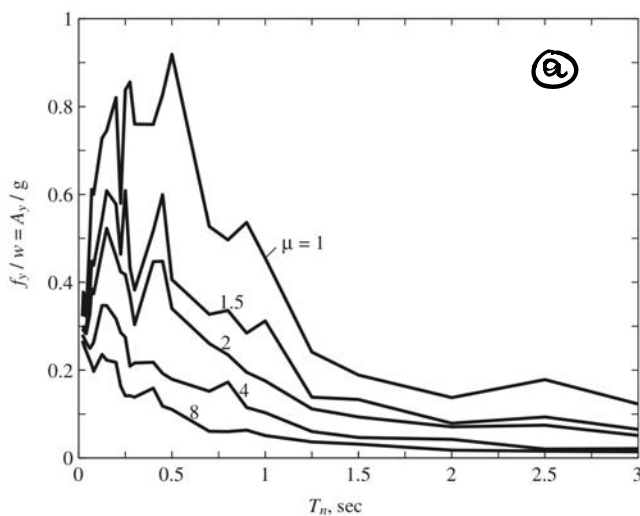
- per  $T_n > T_f$  (periodi lunghi, cioè nella regione dello spettro sismico agli spostamenti)  $u_m$  è indipendente da  $\bar{f}_y$  ed è essenzialmente uguale al picco di spostamento  $u_0$  del sistema lineare corrispondente ( $u_m/u_0 \approx 1$ ). Perché? Per una massa fissa, un sistema così fatto è molto flessibile e la sua massa rimane ferma mentre il terreno sotto si muove. Si ha:  $u_m \approx u_0 \approx u_{g0} \Rightarrow \mu \approx 1/\bar{f}_y$  o  $\mu \approx R_y$ .

- per  $T_n \in$  regione governata dalla velocità  $u_m$  può essere più grande o più piccolo di  $u_0$  (cioè  $u_m/u_0$  può o non eccedere 1). Sia  $u_m$  che  $u_0$  sono influenzate indipendentemente da  $\bar{f}_y$ .  $\mu$  può essere  $>$  o  $<$  di  $R_y$ .

- per  $T_n \in$  regione governata dall'accelerazione  $u_m > u_0$ ,  $u_m/u_0 \uparrow$  al  $\downarrow$  di  $\bar{f}_y$  e al  $\downarrow$  di  $T_n$ .  $\Rightarrow \mu \gg R_y \Rightarrow$  la richiesta di duttilità per sistemi con  $T_n$  molto bassi può essere alta anche se la loro resistenza è visibilmente sotto quello richiesto affinché il sistema rimanga elastico.

COSTRUZIONE DELLO SPETTRO DI RISPOSTA A DUTILITÀ COSTANTE:

- 1 Definire numericamente l'accelerazione di suolo  $\ddot{u}_g(t)$ .
- 2 Scegliere un valore fisso di rapporto di smorzamento  $\xi$  per il quale lo spettro sarà piatto.
- 3 Selezionare un valore di  $T_n$ .
- 4 Determinare la risposta  $u(t)$  del sistema lineare con  $T_n$  e  $\xi$  uguali al valore scelto. Da  $u(t)$  determinare il picco di spostamento  $u_0$  e la forza di picco  $f_0 = K \cdot u_0$ .
- 5 Determinare la risposta  $u(t)$  del sistema elastoplastico avente stesso  $T_n$  e  $\xi$  e forze di snervamento  $f_y = F_y \cdot f_0$ , per una  $F_y < 1$  scelta. Da  $u(t)$  si determina poi il picco di spostamento  $u_m$  e il valore del fattore di duttilità associato:  $\mu = u_m / (u_0 \cdot F_y)$ . Si ripete questo  $\forall$  valore di  $F_y$  per ottenere un numero adeguato di punti  $(F_y, \mu)$  che copra il range di duttilità di interesse.
- 6 Per una  $\mu$  scelta si determina  $F_y$  dai risultati al punto 5. Se più di un valore di  $F_y$  corrisponde alla  $\mu$  scelta, si sceglie il valore più grande di  $F_y$ . Si determinano le ordinate spettrali per il valore di  $F_y$  trovato. Si calcola poi:  $u_y = u_0 \cdot F_y$ . Da  $u_y$  si calcolano  $D_y, V_y, A_y$ . Questi dati forniscono un punto sul plot dello spettro di risposta.
- 7 Si ripetono i passi da 3  $\rightarrow$  6 per un range di  $T_n$  per il valore di  $\mu$  scelto.
- 8 Si ripetono i passi da 3  $\rightarrow$  7 per più valori di  $\mu$ .



I diagrammi sopra, rappresentano gli spettri di risposta a duttilità costante per sistemi elastoplastici con  $\xi = 5\%$  soggetti all'accelerogramma di El Centro per diversi valori di  $\mu = 1, 1.5, 2, 4, 8$  in 2 forme differenti:

- (a) Diagramma lineare  $A_y/g$  vs  $T_n$ .
- (b) Diagramma logaritmico a 4 vie con  $D_y, V_y, A_y$ .

sulla forza di progetto è importante, ma per il picco  $U_m$  entrambi sono trascurabili.

2. Lo smorzamento ha influenza trascurabile nella risposta di sistemi nella regione sensibile alle accelerazioni ( $T_n < T_a$ ) dello spettro, mentre l'effetto dello smorzamento sul picco di spostamento e la richiesta di duttilità sono molto importanti, ma gli effetti sulla forza di progetto sono piccoli. Per  $T_n \rightarrow 0$ ,  $A$  (oppure  $A_y$ )  $\rightarrow$  picco di accelerazione implicando che questo parametro di risposta non è condizionata né dallo smorzamento né dallo smorzamento.
3. Lo smorzamento è molto efficace nel ridurre la risposta dei sistemi con  $T_n$  nella regione sensibile alle velocità dello spettro, mentre lo smorzamento è anche più efficace.

Per tutto, in generale, gli effetti dello smorzamento non possono essere condotti in termini di una quantità fissa di un equivalente smorzatore viscoso. L'efficacia dello smorzamento nella riduzione della risposta è più piccola per i sistemi inelastici e decresce quando gli spostamenti inelastici aumentano.

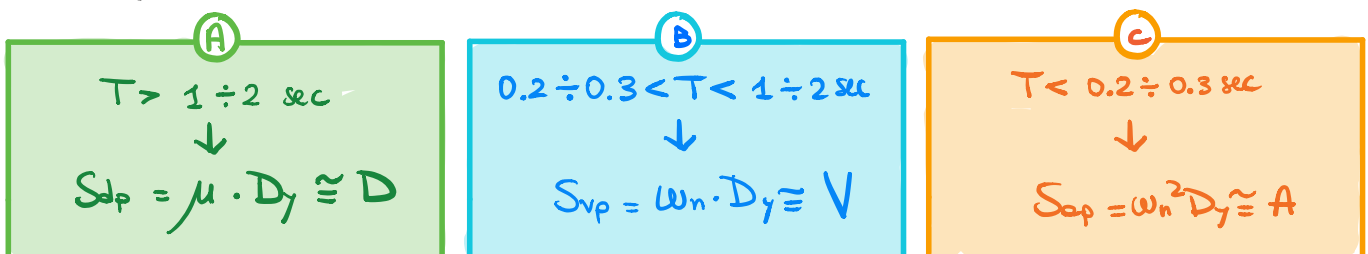
### RELAZIONI TRA SPETTRI DI RISPOSTA ELASTICI ED ELASTOPLASTICI

Si è capito che non conviene lavorare con gli spettri elastici in quanto essendo prudenti estremamente, non sono attendibili.

Per tutto occorre costruire tanti spettri elasto-plastici ma questa idea ha delle controindicazioni, poiché il comportamento è complesso e può essere difficile estendere il concetto a sistemi a più gradi di libertà.

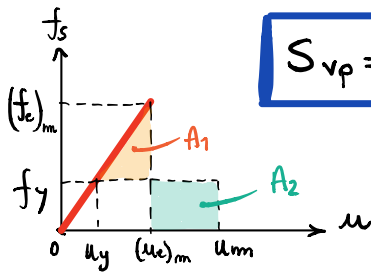
L'impostazione pratica infatti è diversa: si parte dallo spettro elastico lineare e si modifica questo tenendo conto del concetto di duttilità.

Questa operazione si basa su alcune analisi statistiche su tipici spettri di risposta elasto-plastici che porta ad i seguenti risultati (validi nei diversi intervalli di periodo naturale):



- $D, V, A \rightarrow$  sono i valori spettrali del corrispondente oscillatore elastico
- $S_{dp}, S_{vp}, S_{ap} (\text{oppure } \mu D_y, V_y, A_y) \rightarrow$  sono i valori spettrali dell'oscillatore elasto-plastico

• **CASO B** → zona di equivalenza tra le velocità (spetto elastico e inelastico)



$$S_{vp} = V$$

questa equivalenza può essere vista in termini di energie cinetiche. Il picco di energia cinetica è:  $\frac{1}{2} m S_{vp}^2$  e non dipende da K.

Dato che il picco di energia cinetica in un ciclo eguaglia il picco di energia potenziale, è possibile ottenere  $S_{vp}$  direttamente dal diagramma a lato eguagliando le 2 aree.

{ Quando l'oscillatore elastico è allungato, questo si allunga fino al max  $(u_e)_m$ .  
L'oscillatore elastoplastico invece si allunga fino ad  $u_m$ . }

$$A_1 = A_2$$

$$\frac{1}{2} K [(u_e)_m - u_y]^2 = f_y [u_m - (u_e)_m]$$

$$\frac{1}{2} K [(u_e)_m - u_y]^2 = K \cdot u_y [u_m - (u_e)_m]$$

$$\frac{1}{2} [(u_e)_m - u_y]^2 = u_y [\mu u_y - (u_e)_m]$$

$$\frac{(u_e)_m^2}{2} + \frac{2\mu u_y^2}{2} - \cancel{u_y (u_e)_m} = 2\mu u_y^2 - \cancel{u_y (u_e)_m}$$

$$(u_e)_m^2 = 2\mu u_y^2 - u_y^2 = u_y^2 (2\mu - 1)$$

$$u_y = \frac{(u_e)_m}{\sqrt{2\mu - 1}}$$

$$f_y = K \cdot u_y = \frac{K \cdot (u_e)_m}{\sqrt{2\mu - 1}} = \frac{(f_e)_m}{\sqrt{2\mu - 1}}$$

$$f_y = \frac{(f_e)_m}{\sqrt{2\mu - 1}}$$

forze che finisce sull'oscillatore elastoplastico

forze che finisce sull'oscillatore elastico in corrispondenza dello spostamento spettrale

poiché  $f_y = m \cdot S_{sp} \Rightarrow S_{sp} = \frac{(f_e)_m}{m} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\mu - 1}}$

||  
A

quindi:

$$S_{sp} = \frac{A}{\sqrt{2\mu - 1}}$$

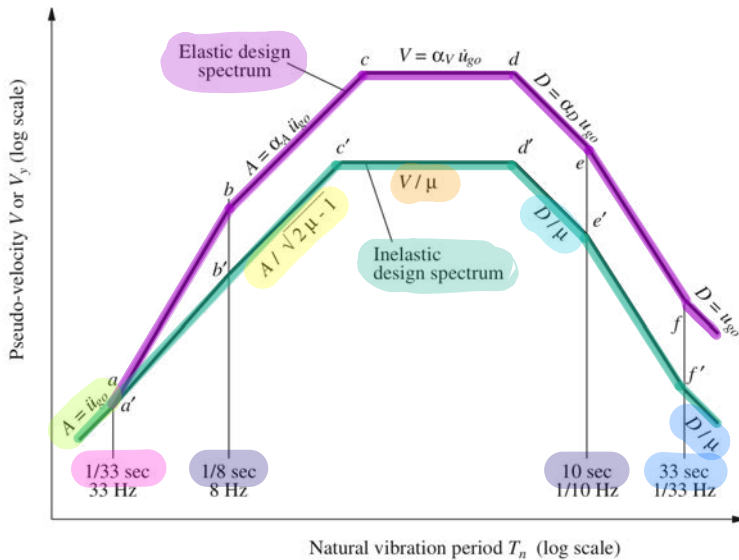
ACCELERAZIONE SPETTRALE

per  $0.2 \div 0.3 < T_n < 1 \div 2$  sec

Nuovamente, lo spettro elastoplastico si ottiene da quello elastico.

## SPETTRO INELASTICO DI PROGETTO A DUTTILITÀ COSTANTE

Adesso descriveremo una procedura per costruire lo spettro inelastico di progetto per sistemi elastoplastici per un determinato valore prefissato di duttilità. Per ottenere questo spettro si può procedere: o seguendo una via statistica (spettro di progetto associato ad i possibili terremoti della zona di interesse con una certa probabilità di eccedenza), oppure, seguendo un approccio più semplice (quello che vediamo) nel quale la costruzione dello spettro di progetto a duttilità costante è ottenuta a partire dallo spettro di progetto elastico, il quale viene moltiplicato per la forza di snervamento normalizzata  $F_y$ , oppure diviso dal fattore di riduzione della forza di snervamento  $R_y$ .



Una volta ricavato lo spettro elastico di progetto (spezzata a-b-c-d-e-f) con la procedura esposta nel capitolo precedente, questo viene diviso per il fattore  $R_y$  per un valore scelto di duttilità  $\mu$ :

$$R_y = \begin{cases} 1 & \text{per } T_n < T_a \\ \sqrt{2\mu - 1} & \text{per } T_b < T_n < T_c \\ \mu & \text{per } T_n > T_c \end{cases}$$

per costruire lo spettro inelastico di progetto (spezzata a'-b'-c'-d'-e'-f')

Per ottenere ciò ci reguiamo i seguenti passi:

1. Si divide l'ordinata  $A$  (costante) del segmento b-c per  $\sqrt{2\mu - 1}$ , individuando così il segmento b'-c'.
2. Si divide l'ordinata  $V$  (costante) del segmento c-d per  $\mu$ , individuando il segmento c'-d'.
3. Si divide l'ordinata  $D$  (costante) del segmento d-e per  $\mu$ , individuando il segmento d'-e'.
4. Si divide per  $\mu$  l'ordinata del punto f individuando f'. Si uniscono così i punti e' → f'. Si traccia per  $T_n > 33$  sec  $D_y = D_0 / \mu$ .
5. L'ordinata a' dello spettro inelastico a  $T_n = 1/33$  sec si prende uguale a quello dello spettro elastico (ordinata a ≡ ordinata a') perché sarebbe ordinata di a ÷  $R_y = 1$ . Si congiungono i punti a' e b'.
6. Si traccia  $A_y = iigo$  per  $T_n < 1/33$  sec.

**N.B.** I periodi associati ai punti a', b', e' ed f' sono dei valori fissi (uguali a quelli già definiti nello spettro elastico). Questi valori, ricordiamo, variano in funzione del tipo di terreno e dello smorzamento.

2. per  $T_b < T_n < T_c$  si ha  $R_y = \sqrt{2\mu - 1}$   $\Downarrow$

$$f_y = f_0 / R_y = \frac{f_0}{\sqrt{2\mu - 1}} \quad \text{e} \quad \mu_m = \mu \mu_0 / R_y = \frac{\mu}{\sqrt{2\mu - 1}} \mu_0$$

3. per  $T_n > T_c$  si ha  $R_y = \mu \Rightarrow f_y = f_0 / R_y = \frac{f_0}{\mu}$  e  $\mu_m = \mu \mu_0 / R_y = \mu_0$

Cosa significano queste relazioni?

1.  $\rightarrow$  ci dice che la forza richiesta dal sistema elastoplastico è la stessa per tutte le  $\mu$  ed uguale alla minima forza richiesta dal sistema elastico. Il picco di spostamento del sistema elastoplastico è  $\mu$  volte il sistema elastico. (Se  $f_y < f_0$  la domanda di duttilità sarebbe più grande).

2.  $\rightarrow$  ci dice che la forza richiesta dal sistema elastoplastico è la stessa uguale alla minima forza richiesta dal sistema elastoplastico diviso  $\sqrt{2\mu - 1}$  ( $\uparrow$  è  $\mu$   $\uparrow$  è la riduzione). Il picco di spostamento del sistema elastoplastico è più grande di quello elastico aumentato di  $\mu / \sqrt{2\mu - 1}$

3.  $\rightarrow$  ci dice che la forza richiesta dal sistema elastoplastico è la stessa uguale alla minima forza richiesta dal sistema elastoplastico divisa per  $\mu$ . Il picco invece di spostamento è lo stesso.

### APPLICAZIONI DELLO SPETTRO DI PROGETTO

Lo spettro di progetto è uno strumento utile nel progetto strutturale di nuove strutture e nella valutazione di sicurezza di quelle esistenti.

#### • STRUCTURAL DESIGN FOR ALLOWABLE DUCTILITY (new structures)

Si consideri un sistema che debba essere progettato per una duttilità  $\mu$  ammissibile, la quale è decisa sulle basi di spostamenti ammissibili e sulla capacità duttile che può essere raggiunta in base ai materiali e ai dettagli costruttivi scelti. Il nostro scopo è quello di determinare le forze di snervamento e lo spostamento di progetto per il sistema. Per i valori quindi noti di duttilità ammissibile  $\mu$ , di  $T_n, \frac{1}{3}$ , il valore  $A_y/g$  è letto dallo spettro inelastico. Per tutto la minima resistenza di snervamento per limitare la ductility demand alla duttilità ammissibile è:

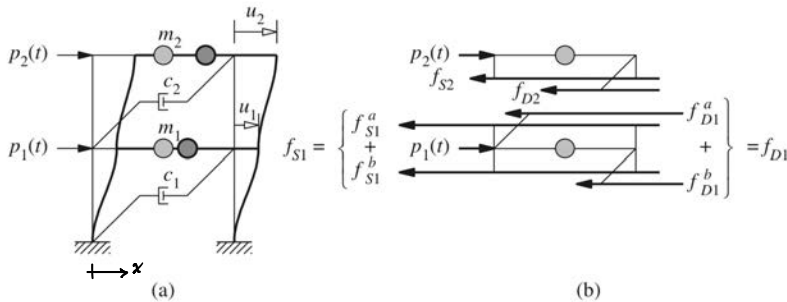
$$f_y = \frac{A_y}{g} \cdot W$$

$R_y = \frac{f_y}{A_y}$   
 elastoplastico  $\nearrow$   $R_y = \frac{f_y}{A_y}$   $\leftarrow$  elastico

Il picco di spostamento è invece:  $\mu_m = \mu \left( \frac{T_n}{2\pi} \right)^2 \cdot A_y = \mu \frac{1}{R_y} \left( \frac{T_n}{2\pi} \right)^2 \cdot A$

## 10. SISTEMI A MOLTI GRADI DI LIBERTÀ (MDF)

In realtà le strutture reali hanno più gradi di libertà (non solo 1 → SDF). Allora è necessario andare a studiare i cosiddetti **modi di vibrazione** delle strutture complesse in quanto non avranno 1 solo modo di vibrazione ma  $N$  (pari al n° di gradi di libertà). Le strutture reali sono sistemi continui, e come tali presenterebbero oo gradi di libertà, ma in particolari condizioni, queste possono essere schematizzate con sistemi discreti con un numero finito di gradi di libertà.



Formuliamo adesso le equazioni di moto del sistema MDF più semplice: un telaio a 2 piani idealizzato (figura a) soggetto alle forze esterne  $p_1(t)$  e  $p_2(t)$ . In questa idealizzazione le travi ed i piani sono rigidi (infinitamente rigidi) in flessione.

e molti fattori sono trascurati: la deformabilità anulare (sia di travi che di colonne), e l'effetto della forza anulare sulla rigidità delle colonne. Un sistema così idealizzato è detto: **TELAIO SHEAR-TYPE**. La massa che è distribuita in realtà lungo tutta la struttura, è idealizzata essere concentrata ai livelli di piano. Inoltre, come fatto per i sistemi SDF, si fa l'assunzione che la dissipazione di energia della struttura sia rappresentata dal meccanismo di dissipazione dello smorzatore viscoso lineare.

Il numero di spostamenti indipendenti richiesti per definire la posizione finale (posizione dopo lo spostamento) di tutte le masse rispetto la loro posizione di equilibrio è detto **numero di gradi di libertà**. Ad esempio, il sistema MDF di figura (a), con masse concentrate ad ogni piano, ha 2 g.d.l.: lo spostamento  $u_1$  del 1° piano (in direzione dell'asse  $x$ ) e lo spostamento  $u_2$  del 2° piano (in direzione dell'asse  $x$ ).

Utilizzando la **seconda legge del moto di Newton** ricaviamo la legge del moto che governa il sistema in figura. Le forze agenti ad ogni piano sono mostrate in figura (b): in ogni piano  $i$ -esimo (a cui corrisponde la massa  $i$ -esima) sono applicate le forze esterne  $p_i(t)$ , la forza elastica (o inelastica) resistente  $f_{Si}$ , e la forza di smorzamento  $f_{Di}$ . La forza esterna è positiva se agente nello stesso verso dell'asse  $x$ , mentre le forze elastica e di smorzamento sono rappresentate in verso opposto perché, essendo forze interne, esse si oppongono al moto.

Scriviamo adesso la 2ª legge del moto di Newton per ogni massa  $i$ :

$$p_i - f_{Si} - f_{Di} = m_i \ddot{u}_i \quad \rightarrow \quad m_i \ddot{u}_i + f_{Di} + f_{Si} = p_i(t) \quad [10.1]$$

La [10.1] contiene 2 equazioni per  $i=1$  e per  $i=2$  (1 per ogni piano):

$$\begin{cases} m_1 \ddot{u}_1 + f_{D1} + f_{S1} = p_1(t) \\ m_2 \ddot{u}_2 + f_{D2} + f_{S2} = p_2(t) \end{cases} \quad [10.2]$$

Se **vetto**re delle forze di smorzamento  $\{f_D\}$  è relazio

$$f_{D1} = f_{D1}^b + f_{D1}^a$$

Gli spostamenti relativi [guardando figura (a)] di ogni pino sono:

$$\begin{cases} \Delta u_1 \equiv u_1 \\ \Delta u_2 = u_2 - u_1 \end{cases}$$

Quindi:

$$f_{D1} = f_{D1}^b + f_{D1}^a = C_1 \cdot \Delta u_1 - C_2 \cdot \Delta u_2 = C_1 u_1 + C_2 (u_1 - u_2)$$

Mentre la forza al 2° pino vale:

$$f_{D2} = C_2 \cdot \Delta u_2 = C_2 \cdot (u_2 - u_1)$$

Per tanto in forma matriciale avremo:

$$\begin{Bmatrix} f_{D1} \\ f_{D2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 + C_2 & -C_2 \\ -C_2 & C_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{Bmatrix} \xrightarrow[\text{compatta}]{\text{in forma}} \boxed{\{f_D\} = [c] \{\dot{u}\}} \quad [10.5]$$

*matrice di smorzamento*

Così il vettore delle forze resistenti di smorzamento  $\{f_D\}$  è relazio

Sostituendo [10.4] e [10.5] in [10.3] si ottiene:

$$[m] \{\ddot{u}\} + \underbrace{\{f_D\}}_{[c] \{\dot{u}\}} + \underbrace{\{f_s\}}_{[k] \{u\}} = \{p(t)\}$$

$$\boxed{[m] \{\ddot{u}\} + [c] \{\dot{u}\} + [k] \{u\} = \{p(t)\}} \quad [10.6]$$

Questa equazione matriciale rappresenta le 2 equazioni differenziali ordinarie che governano il problema: governano gli spostamenti  $u_1(t)$  e  $u_2(t)$  di pino del sistema MDF soggetto alle forze esterne  $p_1(t)$  e  $p_2(t)$ . Ogni equazione contiene entrambe le incognite  $u_1(t)$  e  $u_2(t)$ .

Abbiamo introdotto il sistema lineare MDF a 2 g.d.l. idealizzando un telaio a 2 pini. Un altro modo classico di rappresentare un sistema MDF lineare a 2 g.d.l. è quello di utilizzare un sistema costituito da 2 masse, molle e smorzatori soggetto a 2 forze esterne  $p_1(t)$  e  $p_2(t)$ . Vediamo di seguito come le condizioni di equilibrio dinamico portano alla stessa equazione di modo [10.6].



Si nota adesso che, qualora il sistema fosse non elastico, il vettore delle forze resistenti non è relazionata al vettore degli spostamenti tramite la matrice di rigidezza  $[K]$ , ma sarà funzione degli spostamenti stessi:

$$\{f_s\} = \{f_s(\{u\})\}$$

↘ funzione implicita di  $\{u\}$

Il nostro scopo adesso è, una volta note  $[m]$ ,  $[K]$  se il sistema è elastico lineare oppure la relazione forza - spostamento  $\{f_s(\{u\}; \{u\})\}$  se il sistema non è elastico,  $[c]$  e l'eccitazione dinamica ( $\{p(t)\}$  oppure l'accelerazione al nodo  $\ddot{u}_g(t)$ ), è quello di determinare le risposte della struttura SDF.

Il termine risposta indica qualunq. quantità di risposta: spostamenti, velocità, accelerazioni di ogni modo, e anche le sollecitazioni interne e le tensioni negli elementi strutturali.

Quando l'eccitazione è un set di forze esterne è di interesse il calcolo di  $\{u(t)\}$ ,  $\{\dot{u}(t)\}$  ed  $\{\ddot{u}(t)\}$ .

Quando l'eccitazione è un sisma, le quantità di risposta relative al terreno:  $\{u\}$ ,  $\{\dot{u}\}$  ed  $\{\ddot{u}\}$ , come quelle di risposta totali:  $\{u^t\}$ ,  $\{\dot{u}^t\}$ ,  $\{\ddot{u}^t\}$ , possono essere necessarie. Gli spostamenti relativi  $\{u(t)\}$  associati agli spostamenti della struttura sono quelli più importanti poiché le sollecitazioni in una struttura sono direttamente collegate ad  $\{u(t)\}$ .

La risposta dinamica di sistemi lineari con smorzamento classico può essere ottenuta tramite l'analisi modale classica. Per tali sistemi esistono diverse frequenze naturali di vibrazione e diversi modi di vibrazione. Le loro equazioni di moto, quando trasformate in coordinate modali, diventano disaccoppiate. Così la risposta per ogni modo naturale di vibrazione può essere calcolata indipendentemente dagli altri, e le risposte modali possono essere combinate per ottenere la risposta totale.

Ogni modo risponde con un proprio portatore autonomo di spostamento: la forma modale, con una propria frequenza naturale; e con un proprio smorzamento. Ogni risposta modale può essere calcolata come funzione del tempo dalla analisi di un sistema SDF avente come  $T_n$  e  $\zeta$  quelle proprie del modo scelto. Queste equazioni dei SDF possono essere poi risolte o con i metodi classici o con metodi numerici.

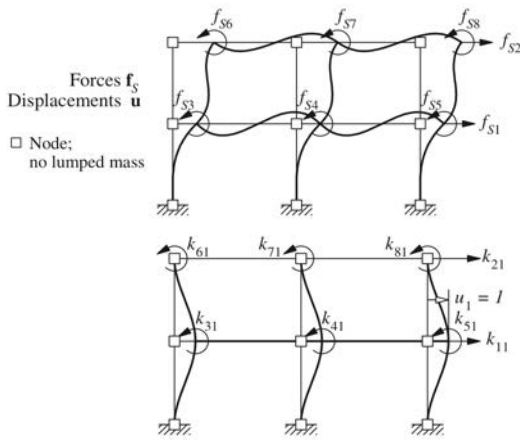
### OSSERVAZIONE

L'analisi modale classica non si può applicare a strutture che sono costituite da sottosistemi con molti diversi livelli di smorzamento. Per tali sistemi il modello classico di smorzamento non è appropriato, i modi classici di vibrazione non esistono, e le equazioni di moto non possono essere disaccoppiate attraverso il passaggio in coordinate modali. Per tanto questi possono essere analizzati:

- (1) Trasformando le equazioni di moto agli autovettori del problema

Definiamo adesso 3 tipi di forze:

(1) FORZE ELASTICHE



Relazioniamo le forze esterne  $f_{S_i}$  agenti sulla componente rigida della struttura agli spostamenti risultanti. Per i sistemi lineari questa relazione può essere ottenuta con il metodo di sovrapposizione degli effetti e attraverso il concetto di coefficienti di influenza di rigidezza.

In pratica si applica uno spostamento unitario lungo il g.d.l.  $j$ -esimo, tenendo gli altri spostamenti nulli. Per mantenere questi spostamenti imposti, devono essere applicate delle forze generalizzate lungo tutti i p.d.l.. Il coefficiente di influenza di rigidezza  $K_{ij}$  è la forza richiesta lungo il p.d.l.

$i$ -esimo a causa dello spostamento unitario imposto nel g.d.l.  $j$ -esimo. La forza  $f_{S_i}$  nel p.d.l.  $i$ -esimo associata ad  $u_j$  (con  $j = 1 \rightarrow N$ ) è ottenuta come sovrapposizione:

$$f_{S_i} = K_{i1} u_1 + K_{i2} u_2 + \dots + K_{ij} u_j + \dots + K_{iN} u_N$$

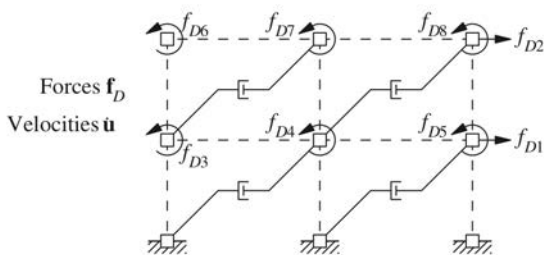
Una equazione del genere deve essere scritta per ogni  $i = 1 \rightarrow N$ . Il set di  $N$  equazioni può essere scritto in forma matriciale come:

$$\begin{Bmatrix} f_{S1} \\ \vdots \\ f_{SN} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1j} & \dots & K_{1N} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2j} & \dots & K_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ K_{N1} & K_{N2} & \dots & K_{Nj} & \dots & K_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{Bmatrix}$$

$$\{f_S\} = [K]\{u\}$$

matrice di rigidezza della struttura  
(matrice simmetrica:  $K_{ij} = K_{ji}$ )

(2) FORZE DI SMORZAMENTO



Il meccanismo attraverso il quale l'energia di una struttura vibrante è dissipata può essere idealizzata dallo smorzatore viscoso equivalente. Fatta questa assunzione relazioniamo le forze esterne  $f_{D_i}$  agenti sulla componente smorzata della struttura, alle velocità  $u_j$ . Impartiamo una velocità unitaria lungo il p.d.l.  $j$ -esimo, mantenendo le altre nulle. Queste velocità genereranno forze di smorzamento

interne che si oppongono alle velocità stesse, allora, per equilibrio, nasceranno delle forze esterne. Il coefficiente di influenza dello smorzamento  $C_{ij}$  è la forza esterne