



Appunti universitari
Tesi di laurea
Cartoleria e cancelleria
Stampa file e fotocopie
Print on demand
Rilegature

NUMERO: 2412A

ANNO: 2019

A P P U N T I

STUDENTE: Montagna Jessica

MATERIA: Onde Coerenti Teletrasporto Olografia - Prof. Pirri

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.

RIPASSO - ELETTROMAGNETISMO 1-2

08/03/18 oc

È importante tenere a mente che \vec{E} e \vec{B} sono definiti mediante la forza di Lorentz che agisce su una carica puntiforme in moto nel punto \vec{r} e all'istante t :

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$$

Partendo da queste considerazioni possiamo scrivere le equazioni di Maxwell nel vuoto in forma integrale:

$$1^{\text{a}} \text{ eq.} \rightarrow \oint_{\text{Sup. chiusa}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = q/\epsilon_0$$

$$2^{\text{a}} \text{ eq.} \rightarrow \oint_{\text{Sup. chiusa}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$3^{\text{a}} \text{ eq.} \rightarrow \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \int_{S(L)} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

$$4^{\text{a}} \text{ eq.} \rightarrow \oint_L \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \left[I_L + \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_{S(L)} \vec{E} \cdot d\vec{S} \right]$$

Le cariche q e il vettore \vec{j} non sono indipendenti, ma collegate dal principio di conservazione della carica.

$$\oint_{\text{Sup. chiusa}} \vec{j} \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt} q$$

La forma differenziale delle eq. di Maxwell può essere ottenuta dando per scontati due teoremi relativi ai campi vettoriali, cioè:

• il Teorema della divergenza secondo cui:

dato un campo vettoriale \vec{C} in una zona dello spazio il flusso di \vec{C} attraverso una superficie chiusa S è uguale all'integrale della divergenza di \vec{C} esteso al volume racchiuso in S detto $V(S)$:

$$\text{divergenza di } \vec{C} = (\vec{\nabla} \cdot \vec{C})$$

$$\oint_S \vec{C} \cdot d\vec{S} = \int_{V(S)} (\vec{\nabla} \cdot \vec{C}) dV$$

• il Teorema di Stokes secondo cui:

dato un campo vettoriale \vec{C} in una zona dello spazio la circolazione di \vec{C} lungo una curva chiusa L è uguale al flusso del rotore di \vec{C} attraverso una superficie S che ha come contorno L detta $S(L)$:

quindi in forma differenziale si ha

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

L'integrale di linea di \vec{B} lungo la linea γ è uguale alla variazione del flusso di \vec{E} attraverso una sup con contorno γ moltiplicata per $\mu_0 \epsilon_0$ + la corrente attraverso γ a meno della costante μ_0

• **Conservazione della carica**

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{d\rho}{dt} = 0$$

$$\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = - \frac{dq}{dt}$$

il flusso della corrente attraverso la superficie S è uguale a meno della variazione di carica interna ad S .

Per sintetizzare tutta la fisica fino al 1900 dobbiamo introdurre altre 2 relazioni:

• **Legge del moto**

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

• **Gravitazione**

$$\vec{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u}_r$$

Si può dimostrare che \vec{E} e \vec{B} soddisfano alle equazioni

$$\nabla^2 \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{d^2 \vec{B}}{dt^2}$$

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d^2 \vec{E}}{dt^2}$$

Si tratta dell'equazione differenziale che descrive il moto di un'onda. Prendendo il caso di un'onda che si propaga in direzione x a velocità v e'

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Ricordando che la costante che appare nelle eq. è il quadrato dell'inverso della velocità di propagazione dell'onda

$$\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$$

da cui otteniamo che la velocità di propag. delle onde em nel vuoto è una costante

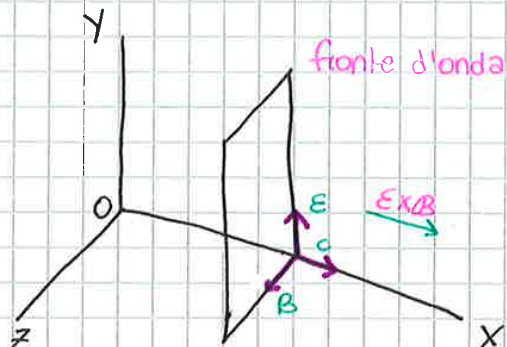
$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

Qualunque tipo di funzione $f(x,t) = f(x \pm vt)$ soddisfa: l'eq. alle derivate parziali

$$\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} \quad \text{eq. delle onde}$$

Si può dimostrare che

- il campo em soddisfa all'eq. delle onde
- \vec{B} e \vec{E} sono \perp l'uno all'altro
- la velocità di propagazione dell'onda em nel vuoto è costante e vale $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$
- la direzione di propagazione è data dal prodotto vettoriale $\vec{E} \times \vec{B}$



$$E(x,t) = E(x - ct)$$

$$B(x,t) = B(x - ct)$$

N.B. Un fronte d'onda è una superficie sulla quale, ad un certo istante di tempo, \vec{E} e \vec{B} risultano costanti

Vengono definite onde armoniche onde del tipo

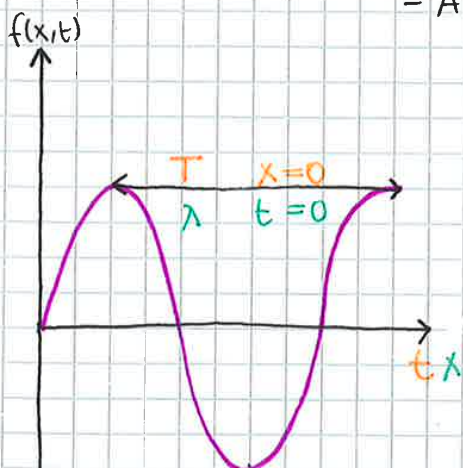
$$f(x \pm vt) = A \sin[k(x \pm vt)] = A \sin[kx \pm \omega t] \quad \text{con } \omega = v \cdot k$$

Tali onde sono caratterizzate da una periodicità spaziale e temporale. Quindi, nel caso in cui x sia sostituito da $x + 2\pi/k$, la $f(x,t)$ assume lo stesso valore

$$f(x,t) = A \sin[k(x \pm vt)]$$

$$f(x + 2\pi/k, t) = A \sin[k(x + 2\pi/k \pm vt)]$$

$$= A \sin[k(x \pm vt) + 2\pi] = A \sin[k(x \pm vt)]$$



Quindi la quantità $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ detta lunghezza d'onda, caratterizza il periodo spaziale

Possiamo ragionare in modo analogo sostituendo t con $t + 2\pi/\omega$ e notando che $f(x,t)$ assume lo stesso valore

$$f(x,t) = A \sin[k(x \pm \omega t)]$$

$$f(x, t + 2\pi/\omega) = A \sin[kx \pm \omega(t + 2\pi/\omega)]$$

$$= A \sin[kx \pm \omega t \pm 2\pi]$$

$$= A \sin[kx \pm \omega t]$$

ONDE E.M. PIANE

Un caso particolare per la soluzione \vec{E} e \vec{B} per l'eq. delle onde em è dato dalle funzioni armoniche. Prendiamo come di solito la direzione di propagazione // all'asse x , il campo E // a y e quello B // a z

Tale situazione è generale

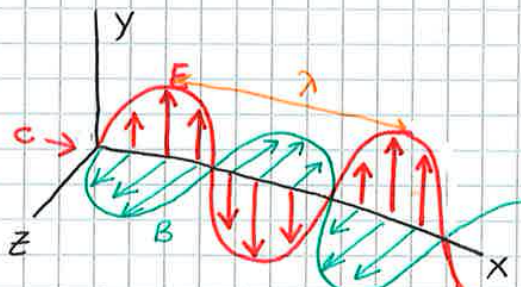
$$\vec{E}(x,t) = \vec{E}(x-ct) = \vec{E}_0 \sin[k(x-ct)]$$

$$\vec{B}(x,t) = \vec{B}(x-ct) = \vec{B}_0 \sin[k(x-ct)]$$

dove

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \rightarrow \quad kc = \omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T} \quad \rightarrow \quad c = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T}$$

vettore d'onda



Possiamo fare ricorso anche alle proprietà dei numeri complessi, ottenendo:

$$\vec{E}(x,t) = \vec{E}(x-ct) = \text{Im} \left\{ \vec{E}_0 e^{i[k(x-ct)]} \right\} \quad (A)$$

$$\vec{B}(x,t) = \vec{B}(x-ct) = \text{Im} \left\{ \vec{B}_0 e^{i[k(x-ct)]} \right\}$$

$\frac{2\pi}{\lambda}$ numero d'onda

$$f(x,y,z,t) \rightarrow f_0 e^{i(kx - \omega t + \phi)}$$

dove abbiamo che

- $kx - \omega t + \phi \rightarrow$ fase
- $kx - \omega t \rightarrow$ fase ad un t fissato
- $x = \omega t \rightarrow$ piano \perp all'asse x

Quindi i fronti d'onda (luoghi dei pt dove l'onda ha la stessa fase ad un dato istante) sono idealmente dei piani infinitamente estesi di cui le immagini mostrano solo una piccola parte

Inserendo le soluzioni ammesse per i campi \vec{E} e \vec{B} nelle eq. ottenute dalle leggi di F-H e A-M:

$$\begin{aligned} \vec{E}(x,t) &= E(x-ct) \\ \vec{B}(x,t) &= B(x-ct) \end{aligned} \quad \begin{aligned} &\rightarrow -\frac{dB}{dt} = \frac{dE}{dx} \\ &\rightarrow \mu_0 \epsilon_0 \frac{dE}{dt} = -\frac{dB}{dx} \end{aligned}$$

Rappresentando \vec{E} e \vec{B} come funzioni armoniche (A), si ottiene una relazione generale tra i moduli dei campi

$$E(P,t) = c B(P,t)$$

dalla quale notiamo che E e B sono in fase, cioè raggiungono gli zeri e i valori max allo stesso istante

DEFINIZIONE di RAGGI e FRONTI d'ONDA

Un'onda che si propaga nella direzione x e che scriviamo come $\xi = f(x - vt)$ non è concentrata sull'asse x , ma si propaga in uno spazio 3D con caratteristiche della perturbazione identiche su piani \perp all'asse x .

Possiamo così scrivere $\xi = f(\vec{r} \cdot \vec{u} - vt)$

generico pto del piano che ha le stesse caratteristiche ξ nella perturbazione

direzione in cui l'onda si muove con velocità v

Abbiamo che $(\vec{r} \cdot \vec{u} - vt) = \Phi$ fase dell'onda

Ma l'equazione $f(\Phi)$ finisce col definire la più generica onda che si propaga in direzione \vec{u} con velocità v , e non è necessariamente un'onda piana; infatti, la sua natura dipende da come nasce la perturbazione della sorgente

Le superfici che presentano all'istante t lo stesso valore di Φ sono detti fronti d'onda

Si ha che \vec{u} è \perp ai fronti d'onda e che le curve tangenti a \vec{u} sono dette raggi.

Se le proprietà del mezzo sono omogenee ($v = \text{cost}$) i raggi sono delle rette. Invece, se le proprietà del mezzo non sono omogenee i raggi non sono più rette

Se le proprietà del mezzo sono isotrope (non dipendono dalla direzione) i fronti d'onda si ripetono identici e \parallel ; invece, se le proprietà del mezzo sono anisotrope i fronti d'onda si deformano anche in modo complicato

IL VETTORE di POYNTING

Come tutte le onde anche quelle em trasportano energia propagandosi. Tale energia può essere visualizzata come un flusso di energia per unità di tempo e di superficie.

Si descrive il modulo e la direzione del flusso di energia, trasportata da \vec{E} e da \vec{B} che si propaga, attraverso il vettore di Poynting definito come

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$$

che definisce:

- come dir e verso la direzione e il verso del flusso di energia
- come modulo l'en. per unità di tempo e superficie attraverso un'area posta ortogonale alla direzione di propagazione

$$\langle P(z) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T P(z, t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{4\pi c^2}{c\mu_0} E_0^2 \sin^2(kz - \omega t) dt$$

$$\langle P_s \rangle = \langle P(z) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{4\pi c^2}{c\mu_0} E_0^2 \sin^2(kz - \omega t) dt = \frac{2\pi c^2}{c\mu_0} E_0^2$$

$$\langle P_s \rangle = \frac{2\pi c^2}{c} |\vec{S}|$$

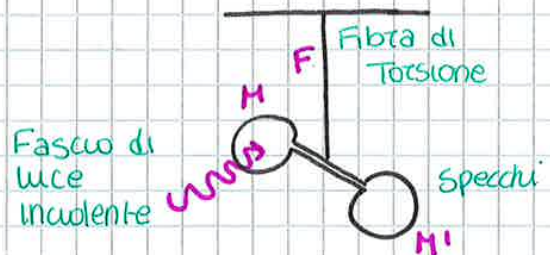
$$\rightarrow E_0^2 = \frac{\langle P_s \rangle c\mu_0}{2\pi} \frac{1}{c^2} \rightarrow E_0 \propto \frac{1}{c}$$

L'ampiezza di una onda sferica decresce come $1/c$

QUANTITA' di MOTO del CAMPO EM e la PRESSIONE di RADIAZIONE

Il fatto che le onde em abbiano qta' di moto può essere verificato sperimentalmente misurando la forza (o meglio la pressione) su di una superficie investita da una onda em

Si può dimostrare che le onde em trasportano una qta' di moto p per unità di volume pari alla densità di energia w del campo em diviso c



$$p = \frac{w}{c}$$

Quindi in sintesi possiamo dire che le **ONDE MECCANICHE**

- Sono con buona approssimazione un fenomeno lineare
- Hanno necessita' di un supporto materiale su cui o entro cui propagarsi
- Trasferiscono en. e qta' di moto su lunghe distanze, alla velocità di propagazione v , senza trasferire la materia del substrato

Alla propagazione di un'onda meccanica e' di norma associato un movimento di particella di materia, ma e' un moto locale, non su lunghe distanze

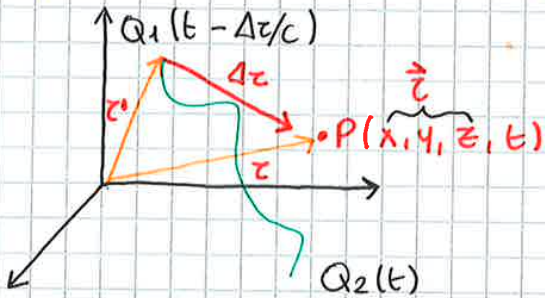
→ **longitudinali** il moto delle particelle di materia e' parallelo o antiparallelo alla direzione di propagazione dell'onda

→ **trasversali** il moto delle particelle di materia e' perpendicolare alla direzione di propagazione dell'onda

POTENZIALI di LIÉNARD-WIECHERT

6

Andremo ad affrontare il caso più generale possibile, in cui si ha una carica puntiforme in moto arbitrario, ammettendo che queste possano oscillare anche a velocità relativistiche



dove $\Delta \vec{z} = \vec{z} - \vec{z}'$

Vedremo che i risultati non dipendono dall'estensione del volume, ma adesso ragioniamo su un volume qualsiasi finito per ottenere i campi V e \vec{A} , al fine di determinare

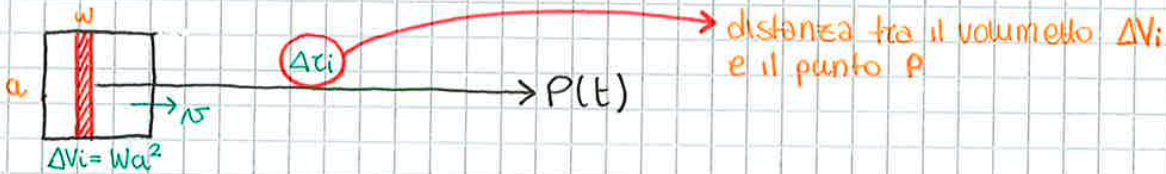
$$\vec{E} = -\nabla V - \partial \vec{A} / \partial t$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

NOTAZIONE:

$Q_1(t - \Delta z/c)$ è la posizione occupata dalla particella all'istante $t - \Delta z/c$, a distanza Δz dal punto $P(t)$

Quindi consideriamo la particella carica come un volume cubico di lato $a \ll \Delta z$, dotato di densità di carica ρ , che si muove con velocità \vec{v} lungo l'asse x verso il punto P



Consideriamo l'espressione del potenziale scalare ritardato e discretizziamo l'integrale, vedendo il cubetto come una serie di staccoline che sono più o meno vicine al punto P

$$V(\vec{r}, t) = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(\vec{z}', t - |\vec{z} - \vec{z}'|/c)}{|\vec{z} - \vec{z}'|} dV'$$

$$t_i = t - \frac{\Delta z_i}{c}$$

$$\sum_i \frac{\rho_i \Delta V_i}{\Delta z_i} = \frac{1}{z} \sum_i \rho_i \Delta V_i = \frac{Q}{z}$$

Consideriamo il volumetto come congelato nel tempo, quindi la carica non si sta muovendo

$$V(\vec{r}, t) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 z}$$

Supponiamo che la carica si muova in direzione x. L'informazione luminosa si propaga ad una certa velocità, quindi per arrivare allo stesso t con alcuni volumetti devo partire prima.

- Si possono sostanzialmente verificare 2 casi: uno in cui la distribuzione di carica è ferma ($\vec{v} = 0$) e l'altro in cui questa si muove nel tempo ($\vec{v} \neq 0$)

Dato che a è molto piccolo, approssimiamo Δr_i con r' , il valore medio della distanza tra il pto P e il centro della carica durante il moto. Inoltre supponiamo che ρ sia uniforme all'interno del cubo di lato a . In questo modo si ottiene, ricordando che $\Delta V_i = w a^2$

$$\sum_i \frac{\rho_i \Delta V_i}{\Delta r_i} \approx \frac{1}{r'} \sum_{i=1}^N \rho w a^2 = N \frac{\rho w a^2}{r'} = \frac{\rho a^2}{r'} N w \cdot \frac{a}{a} = \frac{\rho a^3}{r'} \left(\frac{N w}{a} \right)$$

Sappiamo che $\rho a^3 = Q$ è la carica totale e che $b = N w$, quindi possiamo scrivere:

$$V(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{\rho_i \Delta V_i}{\Delta r_i} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\rho a^3}{r'} \left(\frac{N w}{a} \right) \right) \rightarrow \text{il contributo è uguale al volume}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r'} \left(\frac{b}{a} \right) \rightarrow \text{termine correttivo}$$

La lunghezza b corrisponde alla distanza che viene percorsa dalla carica nell'intervallo temporale $\Delta t = t_N - t_i$ con $t_i = t - \Delta r_i/c$ sommata al lato del cubo a . Ne consegue che

$$\Delta t = \frac{r_1 - r_N}{c} = \frac{b}{c}$$

$$\Rightarrow b = a + v \Delta t = a + v \frac{b}{c} \Rightarrow b = \frac{a}{1 - v/c}$$

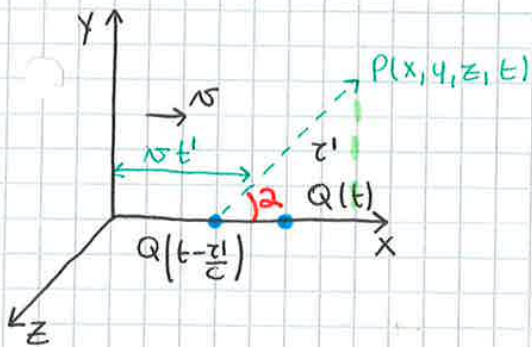
con v calcolata al tempo $t' = (t - r'/c)$, con r' valore medio della distanza tra il punto P e il centro della carica durante il moto. Sostituiamo nell'espressione per il campo V e otteniamo

$$V(\vec{r}, t) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r'} \frac{b}{a} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r'} \frac{a}{1 - v/c} \cdot \frac{1}{a} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r'} \left\{ \frac{1}{1 - v/c} \right\} |_{t'}$$

CONSIDERAZIONI:

- La formula contiene un termine simile al potenziale elettrostatico $Q/4\pi\epsilon_0 r'$ calcolato al tempo ritardato, con l'aggiunta di un termine correttivo $\{1/(1 - v/c)\} |_{t'}$
- quando la carica si muove verso P , il contributo dell'integrale aumenta, dato che il termine correttivo è maggiore di 1
- quando la carica si allontana da P , il contributo dell'integrale diminuisce, dato che il termine correttivo è < 1
- Notiamo che a NON compare nella formula, quindi posso considerarlo piccolo a piacere, fino ad arrivare alla carica puntiforme
- » la direzione di v è importante

CARICA PUNTFORME IN MOTO RETTILINEO UNIFORME



Consideriamo il caso di una carica puntiforme Q in moto rettilineo uniforme con velocità \vec{v}

Supponiamo che la carica Q al tempo $t=0$ si trovi nell'origine e che il moto rettilineo uniforme avvenga lungo l'asse x

Al tempo t la carica ha percorso la lunghezza $x = vt$ essendo il moto rect uniforme

Vogliamo calcolare a calcolare V e \vec{A} in un pto P qualsiasi di coordinate (x, y, z) a un dato tempo t , utilizzando l'espressione dei potenziali di Liénard-Wiechert.

Ragioniamo cui il potenziale scalare: $V(x, y, z; t) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r' - (\vec{v} \cdot \vec{r}')/c}$

Ragionando sulla figura abbiamo che

$$P(t) = (x, y, z) \quad Q(t') = (vt', 0, 0)$$

quindi

$$t' = t - r'/c \rightarrow r' = \sqrt{(x - vt')^2 + y^2 + z^2} \quad (2)$$

Dalla prima eq. ricaviamo che $r' = c(t - t')$; quindi, sostituendolo nella (2):

$$c(t - t') = \sqrt{(x - vt')^2 + y^2 + z^2}$$

Il nostro obiettivo adesso è trovare un'espressione di t' che dipenda solamente dalle coordinate di P e dal tempo t :

$$c^2(t - t')^2 = (x - vt')^2 + y^2 + z^2$$

$$c^2t^2 + c^2t'^2 - 2c^2tt' = x^2 + v^2t'^2 - 2xvt' + y^2 + z^2$$

$$\underbrace{(v^2 - c^2)}_a t'^2 - \underbrace{2(xv - c^2t)}_b t' + \underbrace{x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2}_c = 0$$

$$at'^2 + bt' + c = 0$$

Da questa eq. di secondo grado otteniamo 2 soluzioni per t' , cioè:

$$t' = \frac{\mp b/2 \pm \sqrt{(b/2)^2 - ac}}{\pm a}$$

Ma poiché $t - t' > 0$ dobbiamo considerare la soluzione che ci consente di avere t' anteriore a t , quindi, consideriamo solo una radice in quanto l'altra viola questa condizione

$$-at' = b/2 - \sqrt{(b/2)^2 - ac} \quad \leftarrow$$

Possiamo anche calcolare il campo em $\vec{E} = -\vec{\nabla}V - \partial\vec{A}/\partial t$
 $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$

CONSIDERAZIONI FINALI:

- Nel caso non relativistico $v \ll c$ la formula per il V si riduce alla consueta formula del potenziale elettrostatico calcolato all'istante t , invece, nel caso relativistico, è presente un fattore extra $1/\sqrt{1-v^2/c^2}$
- Il den è nella forma $\tau = x'^2 + y'^2 + z'^2$ con $x' = \frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$, $y' = y$, $z' = z$
- L'em. contiene in maniera naturale i termini relativistici. Storicamente, ciò ha portato ad una grande spinta verso la formulazione della Teoria della relatività speciale.

NB: Per trasformazioni di Lorentz di coordinate tra sys in moto relativo rettilineo uniforme lungo X si ha:

$$\begin{cases} X \Rightarrow X' = \frac{X - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ Y \Rightarrow Y' = Y \\ Z \Rightarrow Z' = Z \end{cases}$$

A partire dai potenziali di L-W, è possibile dimostrare che cariche puntiformi con $\vec{a} \neq 0$ emettono radiazione em, tenendo conto anche di effetti relativistici.

Vediamo alcuni esempi:

- **dipolo oscillante**
- **Effetto Bremsstrahlung:** radiazione em prodotta da particelle cariche che subiscono accelerazione tramite interazione con altre particelle cariche. Tipicamente le radiazioni Bremsstrahlung è prodotta da e^- incidenti su un materiale, i quali interagiscono con i nuclei atomici, subendo una decelerazione.
- **Radiazione di Sinotrone:** particelle cariche in moto su orbite circolari emettono radiazioni em in conseguenza dell'accelerazione centripeta che subiscono. Maggiore è la velocità delle particelle cariche e più collimata è la radiazione emessa in direzione tangente alla traiettoria.

Adesso ragioniamo sulla magnetostatica, che si basa su altre 2 equazioni di Maxwell

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

magnetostatico ← $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}(\vec{r}) \quad (= -\Delta \vec{A})$

Tenendo a mente la proprietà dell'operatore $\vec{\nabla}$, abbiamo che

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$$

quindi, deve \exists una funzione vettoriale $\vec{A}(x, y, z)$ tale che

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r})$$

Questa funzione prende il nome di potenziale vettore.

Possiamo considerare di essere sempre in una condizione analoga alla precedente dove ho una distribuzione di cariche continua, in moto statico.

Sfruttando la 4^a eq di Maxwell o l'eq di Ampere otteniamo

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \mu_0 \vec{j}(\vec{r})$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A} = \mu_0 \vec{j}(\vec{r})$$

$$\Delta \vec{A} - \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = -\mu_0 \vec{j}(\vec{r}) \rightarrow \text{Strutturalmente uguale all'eq. di Poisson a meno della divergenza di } \vec{A}$$

Ragioniamo in termini matematici

considerando una qualunque eq. φ dello spazio $\rightarrow \varphi(\vec{r})$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \cdot \varphi(\vec{r})) = 0$$

Consideriamo un altro potenziale vettore del tipo $\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \varphi$ e applichiamo il rotore ad entrambi i membri

$$\vec{B}' = \vec{\nabla} \times \vec{A}' = \vec{\nabla} \times (\vec{A} + \vec{\nabla} \varphi) = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$$

Quindi \exists un'infinità di potenziali vettori che differiscono per una qualsiasi funzione spaziale. Noi allora scegliamo quella che ci annulla la divergenza di \vec{A}

Possiamo notare allora che $\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}(\vec{r})$

Quindi se considero la simmetria tra questa eq. e quella di Poisson, a meno del fattore $1/4\pi$, avremo che

$$A(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\mu_0 \vec{j} dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(x', y', z')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dz'$$

dove \vec{j} è la densità di corrente in ogni punto

Nello stesso volume posso avere cariche in moto stazionario

Operiamo qualche semplificazione:

$$\Delta V + \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\rho/\epsilon_0$$

per essere in grado di scrivere un'altra equazione differenziale

Adesso sfruttiamo la **IV**:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(-\vec{\nabla} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)$$

$$\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A} = \mu_0 \vec{j} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{\nabla} V}{\partial t} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}$$

trattolino in A e V con la stessa logica di prima

$$-\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + \Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{\nabla} V}{\partial t} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}$$

$$\Delta \vec{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{\nabla} V}{\partial t} = -\mu_0 \vec{j}$$

$$\Delta \vec{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \mu_0 \epsilon_0 \vec{\nabla} \frac{\partial V}{\partial t} = -\mu_0 \vec{j}$$

$$\Delta \vec{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \vec{\nabla} \left[(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t} \right] = -\mu_0 \vec{j}$$

Abbiamo ottenuto due eq. differenziali accoppiate che contengono sia **A** che **V**

Sapendo che \vec{A} e \vec{A}' danno vita allo stesso campo \vec{B} , proviamo ad inventare un nuovo V :

$$V' = V - \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

e proviamo a dimostrare che il campo elettrico che nasce da V' è pari a quello che otterremmo da V

$$\begin{aligned} \vec{E}' &= -\vec{\nabla} \cdot V' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} = -\vec{\nabla} \left(V - \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{A} + \vec{\nabla} \phi \right) \\ &= -\vec{\nabla} \cdot V + \cancel{\frac{\partial \vec{\nabla} \cdot \phi}{\partial t}} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \cancel{\frac{\partial \vec{\nabla} \cdot \phi}{\partial t}} = \vec{E}(\vec{r}, t) \end{aligned}$$

anche qui ho un grado di libertà

Vado a perdere questo grado di libertà imponendo che

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

Eq. di Calibrazione di Lorenz

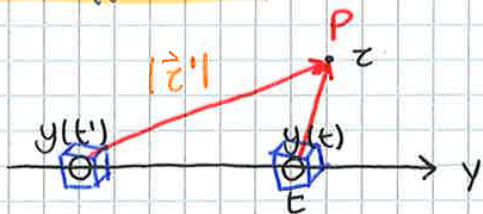
da cui avremo che

$$\Delta \vec{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j}$$

A questo punto devo entrambi i membri dell'eq. di Lorenz rispetto al tempo

$$\nabla \frac{\partial A}{\partial t} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$$

È difficile pensare ad una distribuzione di carica che si muove, quindi ragioniamo con una sola carica e poi applichiamo il principio di sovrapposizione:



$$y - y' = c \Delta t \quad \Delta t = t - t'$$

Voglio valutare E e B (ovvero potenziali scalari e vettore) all'istante t nel punto z quando la carica si trova in y

Non mi interessa che tipo di moto è perché intendo considerare un intervallo di tempo piccolo

$$|\vec{z}'| = \text{costante}$$

Nel punto z all'istante t ho B ed E prodotti dalla carica in un tempo precedente tale per cui la distanza è sufficiente a fare arrivare l'informazione in P

La carica crea una configurazione di campo, ma il pto P non si accorge dello spostamento della carica e continua ad avere info di quando al tempo t' la carica si trovava in y'

EFFETTO di RITARDO

Adesso consideriamo una distribuzione di carica $\rho(\vec{r}', t) \Rightarrow$ Se considero un volumetto in y' non è quello a ricevere l'effetto di campo, ma quello che c'era in y all'istante t, quindi diremo che:

$$t - \Delta t = t - \frac{|\vec{z}'|}{c}$$

include l'effetto di ritardo

$$\rho(\vec{r}', t) \Rightarrow \rho(\vec{r}, t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c)$$

I discorsi fatti per la densità di carica, valgono anche per la densità di corrente

$$\vec{j}(\vec{r}', t) \Rightarrow \vec{j}(\vec{r}, t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c)$$

In termini di potenziali le relazioni citate di modo che la radiazione emessa a raggiungere il punto P abbiamo che:

$$V(\vec{r}, t) = \int_{V'} \frac{\rho(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

$$A(\vec{r}, t) = \mu_0 \int_{V'} \frac{\vec{j}(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

questi potenziali si dicono **POTENZIALI RITARDATI**



vediamo che soddisfano le eq. di Maxwell

- >> Potenziale scalare e vettore sono delle onde e lo si vede ponendo uguale a zero
- >> Al tempo t e in z i campi e quindi i potenziali si riferiscono e sono dovuti alla configurazione di carica all'istante precedente

Ragioneremo a grandi distanze su

$$A(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{j}(t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c) \cdot \vec{k}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dS d\tau \quad \rightarrow \text{vettore dell'asse}$$

e cerchiamo di capire se una approssimazione a FE è ragionevole. Noi lavoriamo con atomi le cui dim sono dell'ordine degli Å, quindi il fatto che la mia distribuzione sia molto piccola rispetto alla distanza su cui voglio andare a valutare il campo, mi autorizza a trascurare zi (piccolo rispetto ad r , quindi la distrib di carica può essere considerata uniforme e/o localizzata nella origine).

Ragionando sull'integrale ottengo:

$$\begin{aligned} A(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j}(t - \vec{r}/c) \cdot \vec{k}}{|\vec{r}|} SL = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{k} \frac{I}{|\vec{r}|} L = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{k} \frac{dq/dt}{|\vec{r}|} L = \frac{\mu_0}{4\pi |\vec{r}|} \vec{k} \frac{d}{dt} (qL) \quad \rightarrow \text{tempo ritardato} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi |\vec{r}|} \vec{k} \frac{d}{dt} (L q_0 \sin \omega t) = \frac{\mu_0}{4\pi |\vec{r}|} \vec{k} \frac{d}{dt} p(t - r/c) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{k} \frac{L q_0 \omega \cos[\omega(t - |\vec{r}|/c)]}{|\vec{r}|} = A_\varepsilon \vec{k} \end{aligned}$$

Se voglio il modulo considero

$$A_\varepsilon = \frac{\mu_0}{4\pi |\vec{r}|} L q_0 \omega \cos[\omega(t - |\vec{r}|/c)] = \frac{\mu_0 \omega}{4\pi r} p_0 \cos[\omega(t - r/c)]$$

Sapendo che $A_x = A_y = 0$

Se vogliamo calcolare il rotore di A, dobbiamo a calcolare le singole componenti, cioè:

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A} \\ \vec{B} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ -(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z}) \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Poiché abbiamo appurato che $A_x = A_y = 0$, otteniamo

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} \quad B_y = -\frac{\partial A_z}{\partial x} \quad B_z = 0$$

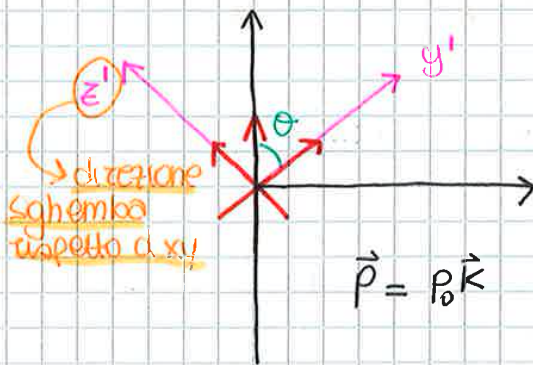
Ricordando che $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ cerchiamo a sviluppare i vari conti delle derivate:

Poiché stiamo ragionando con un $y \gg \lambda$ (siamo in condizioni di FE) possiamo trascuare in B_x la dipendenza da $1/y^2$, cioè:

$$B_x = \frac{\epsilon_0 \omega \mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{\omega}{c} \frac{1}{y} \sin[\omega(t - y/c)] \right\}$$

$$= \frac{\rho_0 \omega^2 \mu_0}{4\pi c} \frac{1}{y} \sin[\omega(t - y/c)]$$

Adesso proviamo a ragionare su un pto generico dello spazio, essendo in coordinate cilindriche avremo:



Posso scomporre il dipolo in 2 dipoli che oscillano // rispetto ad un asse dove non abbiamo contributo al momento di dipolo, che invece \neq nell'asse \perp

$$p_{z'} = p_0 \sin \theta \mathbf{k}'$$

$$p_{y'} = p_0 \cos \theta \mathbf{k}'$$

L'effetto di p_0 viene smorzato dalla presenza del $\sin \theta$, che oscilla tra -1 e 1 e può darci valore max per $\theta = 0$, quindi:

$$B(\tau) = \frac{\rho_0 \sin \theta \omega^2 \mu_0}{4\pi c} \frac{1}{z} \sin[\omega(t - z/c)]$$

Nel caso in cui $\theta = 0^\circ$ ricadiamo nel caso del dipolo

Adesso procediamo con ragionamenti analoghi al calcolo di E , e lo facciamo partendo da

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V - \frac{\partial A_z}{\partial t} \mathbf{k}$$

da cui

$$E_x = -\partial V / \partial x - \frac{\partial A_x}{\partial t} \mathbf{i}$$

$$E_y = -\partial V / \partial y - \frac{\partial A_y}{\partial t} \mathbf{j}$$

$$E_z = -\partial V / \partial z - \frac{\partial A_z}{\partial t} \mathbf{k}$$

Ragioniamo sempre in coordinate cilindriche, tanto basta ruotare intorno all'asse z .

Adesso il nostro scopo è quello di andare a scrivere $v(\vec{r})$, ovvero il potenziale di questo dipolo oscillante, che non sarà altro che il potenziale generato da due particelle puntiformi

Andando a calcolare questo potenziale scalare, ci mettiamo nella condizione in cui

$$L \ll |\vec{r}| = r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$$

$$-\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \left\{ -\cos\left[\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right] \left[\frac{\omega}{c} \frac{\partial z}{\partial z} \frac{z}{z^3} + \left[\frac{\partial z}{\partial z} \frac{1}{z^2} - \frac{3}{z^4} \frac{\partial z}{\partial z} \cdot z \right] \sin\left[\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right] \right\}$$

$$= -\frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \left\{ -\cos\left[\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right] \frac{\omega}{c} \frac{z^2}{z^4} + \left[\frac{1}{z^3} - \frac{3z^2}{z^5} \right] \sin\left[\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right] \right\}$$

Ricordando il potenziale vettore A, andiamo a scrivere le sue derivate:

$$-\frac{\partial A_x}{\partial t} = 0 \quad -\frac{\partial A_y}{\partial t} = 0$$

$$-\frac{\partial A_z}{\partial t} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\omega^2 \rho_0}{c} \sin\left[\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right]$$

Quindi possiamo andare a scrivere tutte le componenti del campo elettrico in funzione dei termini ricavati:

$$E_x = \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \cos\left[\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right] \frac{\omega}{c} \frac{xz}{z^4} + \left[\frac{3xz}{z^5} \right] \sin\left[\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right] \right\}$$

$$E_y = \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \cos\left[\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right] \frac{\omega}{c} \frac{yz}{z^4} + \left[\frac{3yz}{z^5} \right] \sin\left[\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right] \right\}$$

$$E_z = \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \cos\left[\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right] \frac{\omega}{c} \frac{z^2}{z^4} - \left[\frac{1}{z^3} - \frac{3z^2}{z^5} \right] \sin\left[\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right] \right\} +$$

$$+ \frac{\mu_0 \omega^2 \rho_0}{4\pi c} \sin\left[\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right]$$

Adesso valutiamo cosa accade lungo l'asse y, cioè $(0, y, 0)$

$$E_x = 0 \quad E_y = 0$$

$$E_z = \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \left\{ -\frac{1}{y^3} \sin\left[\omega\left(t - \frac{y}{c}\right)\right] + \frac{\mu_0 \omega^2 \rho_0}{4\pi y} \sin\left[\omega\left(t - \frac{y}{c}\right)\right] \right\}$$

posso trascurarla a grande distanza dal dipolo

Lungo l'asse z, cioè $(0, 0, z)$ abbiamo

$$E_x = 0 \quad E_y = 0$$

$$E_z \approx \frac{1}{z^4} - \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z} = \frac{\mu_0}{4\pi c} \rho_0 \omega^2 \sin\left[\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right]$$

trascurato

MFF

Quindi andando a confrontare questi risultati del campo elettrico con quelle del campo magnetico, otteniamo

$$\frac{E}{B} = c$$

ovvero che E e B sono onde che si propagano in modo \perp l'uno all'altro e anche alla direzione di propagazione.

Ciò dimostra la trasversalità delle onde em.

Se siamo a grande distanza z dal dipolo di lunghezza L , cioè a $z \gg L$, i campi diventano:

$$E(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\omega^2 p_0 \sin\theta}{z} \sin[kz - \omega t]$$

$$B(\vec{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi c} \frac{\omega^2 p_0 \sin\theta}{z} \sin[kz - \omega t]$$

$$B(z) = \frac{E(z)}{c}$$

Il valore medio del vettore di Poynting su un periodo T vale:

$$\langle |\vec{S}| \rangle = \left\langle \frac{E \cdot B}{\mu_0} \right\rangle$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\mu_0} \frac{\mu_0 \omega^2 p_0 \sin\theta}{4\pi z} \frac{\mu_0 \omega^2 p_0 \sin\theta}{4\pi z c} \right)$$

$$= \frac{\mu_0 \omega^4 p_0^2 \sin^2\theta}{32 \cdot \pi^2 z^2 c}$$

→ Rivedi per FMTA

OSSERVAZIONE:

Il campo E lungo z è diverso da 0, questo lo deduciamo in quanto ha una dipendenza funzionale, ma non sono di fronte ad un'onda perché non ho B , bensì un effetto indotto stazionario

↳ Ma allora perché NON mi accorgo di questo campo?

→ Perché non abbiamo trasporto di energia ($S = E \times B$)

Il campo E mette in oscillazione le cariche. Se il campo ha energia ma in questo non è così.

19/03/2019 oc

OSSERVAZIONI:

$$\square \vec{A} = -\mu_0 \mathcal{J}$$

$$\square V = -\rho / \epsilon_0$$

delambertiano

Il risultato che abbiamo ricavato fino ad ora sono di tipo non relativistico dove si ha che la carica oscilla a $v \ll c$

→ E' una sorta di caso particolare del caso generale.

Attraverso l'utilizzo dei potenziali ritardati, e' possibile ricavare le soluzioni per il campo em generato da un dipolo oscillante nel caso non relativistico ($v \ll c$)

Si trova che:

- a piccole distanze si ottengono le formule del dipolo statico, le quali vanno calcolate al tempo t , considerando il momento di dipolo istantaneo $p(t)$
- per grandi distanze si ricava che il dipolo oscillante e' sorgente di onde sferiche, di intensita' variabile lungo il fronte d'onda (lungo l'asse del dipolo e' nulla, nel piano equatoriale raggiunge il valore massimo)
- in regioni di spazio sufficientemente piccole e lontane, l'onda sferica e' approssimabile come onda piana polarizzata linearmente

$$\frac{\partial^2 h(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 h(x,t)}{\partial t^2} = A \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \left(A \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + B \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} \right)$$

$$= A \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right) + B \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} \right) \equiv 0$$

Dato che f e g soddisfano singolarmente l'eq. d'onda

L'eq. d'onda c è lineare perché è costituita da somme di operatori lineari, cioè tali per cui

$$T(Af + Bg) = AT(f) + BT(g)$$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$ $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}$

ESEMPIO di TERMINE non LINEARE

Supponiamo di avere un termine del tipo $T(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2$. Se consideriamo la funzione $h = Af + Bg$ e l'operatore fosse lineare, dovrebbe valere

$$T(h) = T(Af + Bg) = AT(f) + BT(g) \quad (1)$$

Dimostriamo che **NON** è così

$$T(h) = \left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)^2 = \left(\frac{\partial}{\partial t}(Af + Bg)\right)^2 = \left(A \frac{\partial f}{\partial t} + B \frac{\partial g}{\partial t}\right)^2 =$$

$$= A^2 \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2 + B^2 \left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)^2 + 2AB \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial g}{\partial t} = A^2 T(f) + B^2 T(g) + \dots \quad (2)$$

→ (1) ≠ (2) ⇒ l'operatore NON è lineare

Fisicamente, un sys descritto da eq. non lineari non garantirebbe la validità del principio di sovrapposizione

SOLUZIONI GENERALI - EQ. D'ONDA 1D

$$\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2} = 0$$

Vogliamo ricavare la forma più generale delle sue soluzioni, seguendo la dim sviluppata da D'Alembert.

Per prima cosa effettuiamo un cambio di variabili e vogliamo risolvere

$$\frac{\partial^2 \psi(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} = 0$$

$$\begin{cases} x \Rightarrow \xi = x - vt \\ t \Rightarrow \eta = x + vt \end{cases}$$

Per il calcolo delle derivate rispetto a (x,t) dalla funzione espressa dalle variabili (ξ, η) utilizziamo la regola della catena, sfruttando il fatto che conosciamo l'espansione di (ξ, η) rispetto a (x,t) , cioè:

$$\xi(x,t) = x - vt$$

$$\eta(x,t) = x + vt$$

Non tutte le soluzioni della eq. delle onde si propagano: \exists soluzioni chiamate **onde stazionarie** il cui profilo non si propaga. Consideriamo eq. generale delle onde $\psi(\xi, \eta) = g(\xi) + f(\eta) = g(x - vt) + f(x + vt)$ e imponiamo

regressiva $\leftarrow f(x + vt) = A \sin(kx + \omega t)$ e $g(x - vt) = A \sin(kx - \omega t)$ \rightarrow progressiva

Utilizziamo le formule di addizione:

$$A \sin(kx + \omega t) = A (\sin(kx) \cos(\omega t) + \cos(kx) \sin(\omega t))$$

$$A \sin(kx - \omega t) = A (\sin(kx) \cos(\omega t) - \cos(kx) \sin(\omega t))$$

Sommando le 2 funzioni otteniamo $\psi(x, t) = 2A \sin(kx) \cos(\omega t)$

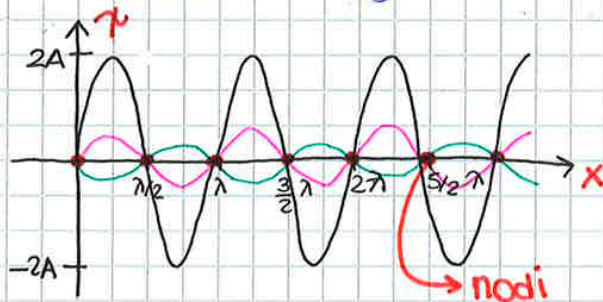
La funzione si annulla, indipendentemente dal tempo t , ovvero ha dei **nod** in posizioni fisse dello spazio che non dipendono dal tempo. Il termine $\cos(\omega t)$ modula l'ampiezza (meando oscillazione nel tempo), ma non genera propagazione.

$\forall x = \frac{n}{2} \lambda \quad n=0, 1, 2, \dots$

 $f, g \in C^0$

Ampiezza modulata dal tempo. Non c'è propagazione lungo x

\rightarrow onda stazionaria



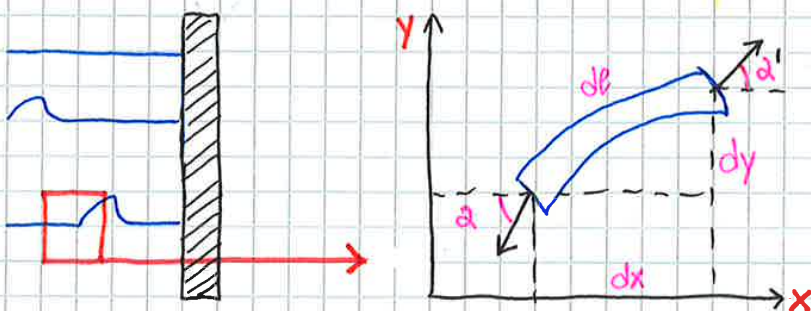
ONDE MECCANICHE

Per onde meccaniche si intendono casi in cui la perturbazione ondosa è effettivamente legata a spostamenti fisici della materia dalla propria posizione di equilibrio. Ad esempio:

- onde su una corda tesa
- onde sonore
- onde del mare

Osti 3 tipi di onde prevedono tutti il \exists di un mezzo in cui avviene la propagazione del fenomeno ondoso. Le particelle di materia coinvolte dal fenomeno ondoso oscillano intorno a posizioni di equilibrio, quindi lo spostamento netto all'interno del materiale in un ciclo è nullo. Per tanto il onda **non** trasporta materia, ma energia e quantità di moto.

ONDA MECCANICA SU UNA CORDA



Consideriamo il caso di una corda tesa, vincolata a un estremo, che subisce una perturbazione (spostamento) allo stesso libero.

In figura si suppone che

ONDA STAZIONARIA IN 1 CORDA A ESTREMI FISSATI

Consideriamo il caso in cui una corda di lunghezza L sia vincolata a entrambi le estremità ($x=0, x=L$): lo spostamento deve essere nullo in ogni istante nel pto $x=0$ e nel pto $x=L$. Questa info si traduce nelle condizioni al contorno

$$\psi(0, t) = \psi(L, t) = 0$$

L'eq. dell'onda ammette soluzioni del tipo $\psi(x, t) = A \sin(kx - \omega t) + A \sin(kx + \omega t)$ con $\omega/k = v = \sqrt{T/\rho}$

La somma di un'onda progressiva e una regressiva con la stessa ampiezza genera un'onda stazionaria

$$\psi(x, t) = 2A \sin(kx) \cos(\omega t)$$

Combinando questa info con le condizioni al contorno, abbiamo che due nodi devono coincidere con gli estremi

$$x=0 \quad \psi(0, t) = 0 \quad \sin(0) = 0$$

$$x=L \quad \psi(L, t) = 0 \quad \sin(kL) = 0$$

$$\frac{2\pi}{\lambda} L = n\pi \quad \text{lunghezza della corda}$$

Abbiamo quindi trovato l'importante risultato che affinché possano \exists onde stazionarie nella corda a 2 estremi fissati, la λ deve rispettare la relazione $\lambda = \frac{2L}{n}$

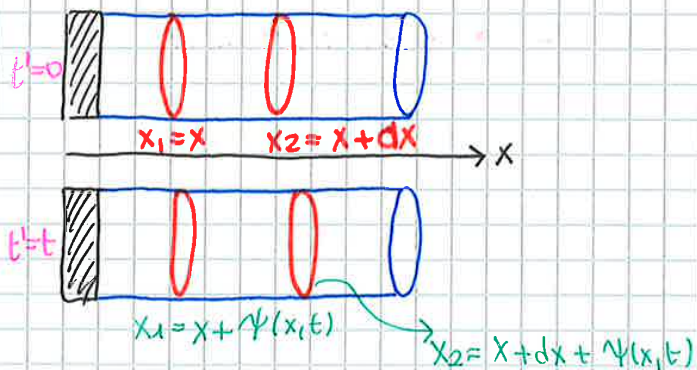
Sappiamo inoltre che $v = \sqrt{T/\rho}$ e troviamo quindi la relazione che lega la frequenza delle onde stazionarie alla lunghezza e alle proprietà elastiche e inerziali della corda:

Frequenze Armoniche $\omega_n = \frac{v}{\lambda} = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T}{\rho}}$, $n=0, 1, 2, \dots$

ESEMPIO

Le note emesse dagli strumenti a corda corrispondono a onde stazionarie di freq. fondamentale $n=1$, in cui le armoniche di ordine superiore contribuiscono a creare il particolare timbro dello strumento

ONDE di PRESSIONE IN UN GAS



Consideriamo un gas contenuto in un tubo a pareti rigide, alla cui estremità è collocato un pistone che può essere considerato come sorgente di perturbazione che altera la pressione di un volume di gas contiguo. La variazione di pressione porta ad un aumento del volume di gas, che comprime quello successivo, propagando la perturbazione

da qui otteniamo l'eq. d'onda di spostamento con $v = \sqrt{\frac{\beta}{\rho_{eq}}}$ dove

- β è legato alle propr. elastiche del materiale, ρ_{eq} a quelle inerziali
- Spostamento lungo x , propagazione onda lungo x (onda longitudinale)

Adesso dim che la funzione $S(x,t)$ soddisfa essa stessa l'eq delle onde partendo dalla relazione $S P = -\beta \frac{\partial \psi}{\partial x}$

$$\frac{\partial^2 S P}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(-\beta \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = -\beta \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right)$$

$$\frac{\partial^2 S P}{\partial t^2} = -\beta \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right) = -\beta v^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right)$$

$$\frac{\partial^2 S P}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 S P}{\partial t^2} = -\beta \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) = 0$$

↳ eq. delle onde di pressione con $v = \sqrt{\frac{\beta}{\rho_{eq}}}$ (1)

Questo è un meccanismo semplificato tramite il quale avviene la propag. del suono. Le sorgenti sonore agiscono come membrane vibranti che alterano la pressione del gas (aria), generando un'onda sonora che si propaga.

L'onda di pressione trasporta en. e quantità di moto ed è in grado di far entrare in vibrazione altre membrane. In particolare il timpano, che da inizio al processo di percezione del suono. Quindi v è la velocità del suono nel mezzo che stiamo considerando.

ESEMPIO: calcolo della velocità del suono nell'aria

Vogliamo esprimere la (1) rispetto alla pressione. Quindi usiamo $\beta = \rho_{eq} \frac{S P}{P}$ e scriviamo

$$v = \sqrt{\frac{S P}{S P}}$$

Notiamo che il processo di espansione e compressione del gas è abbastanza rapido da non dare tempo al Sgs di scambiare calore → processo adiabatico

Quindi vale la legge $P V^\gamma = \text{cost}$. Dato che $\rho = m/V$ posso scrivere $P = \text{cost} \cdot \rho^\gamma \equiv C \rho^\gamma$ → capacità termica

$$\rightarrow \frac{S P}{S P} \approx \frac{dP}{d\rho} = \gamma C \rho^{\gamma-1} = \gamma \frac{C \rho^\gamma}{\rho} = \gamma \frac{P}{\rho}$$

Quindi la velocità di prop. dell'onda diventa $v = \sqrt{\gamma \frac{P}{\rho}}$ → Pressione

Per l'aria in cond. standard $T = 0^\circ\text{C}$ $\gamma = 1.4$ $\rho = 1.22 \text{ kg/m}^3$ $P = 10^5 \text{ Pa}$ → densità

$$\Rightarrow v \approx 329.4 \text{ m/s} (\sim 331 \text{ m/s})$$

OP. DIFFERENZIALI SU ONDE ARMONICHE

Consideriamo un'onda armonica in forma exp complessa e ricordando che $\Psi = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

calcoliamo a scendere le seguenti espressioni:

$$\frac{\partial}{\partial t} [\vec{E}_0 \exp i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)] = -i\omega \vec{E}_0 \exp i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} [\vec{E}_0 \exp i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)] = i k_x \vec{E}_0 \exp i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} [\vec{E}_0 \exp i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)] = i k_y \vec{E}_0 \exp i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} [\vec{E}_0 \exp i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)] = i k_z \vec{E}_0 \exp i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)$$

Quindi abbiamo che dato un operatore $T = \partial/\partial t, \dots$, vale $T(\Psi) = \lambda_T \Psi$, con λ_T numero complesso. Si può quindi dire che le onde armoniche sono autofunzioni degli operatori di diff. sopra citati, dato che applicando un operatore differenziale a un'onda armonica, si ottiene l'onda stessa moltiplicata per un autovalore complesso.

Sfruttando il fatto che le onde armoniche sono autofunzioni degli op. differenziale, si ricavano alcune proprietà semplicemente sostituendo l'onda armonica nelle eq. di Maxwell.

Dalla 1^a eq. otteniamo:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

$$i k_x E_x + i k_y E_y + i k_z E_z = 0$$

$$i(\vec{k} \cdot \vec{E}) = 0 \Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{E} \perp \vec{k}$$

Dalla 3^a eq. ricaviamo:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \rightarrow -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = +i\omega \vec{B}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{u}_x & \hat{u}_y & \hat{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \hat{u}_x (\partial_y E_z - \partial_z E_y) - \hat{u}_y (\partial_x E_z - \partial_z E_x) + \hat{u}_z (\partial_x E_y - \partial_y E_x) = i(\vec{k} \times \vec{E})$$

$$i(\vec{k} \times \vec{E}) = i\omega \vec{B} \quad \vec{k} \times \vec{E} = \omega \vec{B}$$

Quindi, sostituendo le onde armoniche nelle eq. di Maxwell confermiamo che \vec{E}, \vec{B} e \vec{k} sono una terna di vettori ortogonali.

$$\vec{E} \perp \vec{B} \quad \vec{E} \perp \vec{k} \quad \vec{B} \perp \vec{k}$$

Sviluppiamo questa affermazione scrivendo l'espressione completa delle 3 onde, tutte con la stessa fase

$$\vec{E} = E_{0,x} e^{i(kz - \omega t)} \hat{u}_x + E_{0,y} e^{i(kz - \omega t)} \hat{u}_y$$

$$\vec{E}^{(1)} = E_{0,x}^{(1)} e^{i(kz - \omega t)} \hat{u}_x + E_{0,y}^{(1)} e^{i(kz - \omega t)} \hat{u}_y$$

$$\vec{E}^{(2)} = E_{0,x}^{(2)} e^{i(kz - \omega t)} \hat{u}_x + E_{0,y}^{(2)} e^{i(kz - \omega t)} \hat{u}_y$$

Costante in ogni punto e in ogni istante, quindi possiamo ragionare solo con le componenti

Se imponiamo che $E_{0,y}^{(1)} = E_{0,x}^{(2)} = 0$ otteniamo $\vec{E} = \vec{E}^{(1)} + \vec{E}^{(2)}$

$$E_{0,x}^{(1)} = E_{0,x} \quad E_{0,y}^{(2)} = E_{0,y}$$

In modo analogo possiamo ragionare per il campo magnetico

NOTA:

Dato che $E_x = E_{0,x} \sin(kz - \omega t)$
 $E_y = E_{0,y} \sin(kz - \omega t)$

hanno la stessa fase, l'angolo θ con l'asse x definito da

$$\text{tg } \theta = \frac{E_y}{E_x} \rightarrow \theta = \arctan(E_y / E_x) \text{ rimane costante in}$$

qualsiasi punto e istante, quindi il campo \vec{E} oscilla sempre lungo la stessa direzione \Rightarrow polarizzazione lineare

Se guardo uno dei fronti d'onda vedo che \vec{E} è un vettore che giace sul piano xy

Quindi abbiamo visto che \exists una posizione (un valore della fase), che ha come componenti E_{0x} e E_{0y}

Possiamo ragionare così anche per \vec{B}

Quando diciamo che le 2 onde oscillano lungo la stessa direzione, e perché variano in sintonia \Rightarrow sono in fase.

POLARIZZAZIONE CIRCOLARE

Rispetto al caso appena analizzato, cosa accade se sommiamo due onde polarizzate linearmente con differenza di fase?

Consideriamo il caso precedente, imponendo a una delle 2 onde polarizzate ortogonalmente uno sfasamento di $\pi/2$, e imponendo anche che $E_{0,x}^{(1)} = E_{0,y}^{(2)} \equiv E_0$. Quindi:

$$\vec{E}^{(1)} = E_0 e^{i(kz - \omega t + \pi/2)} \hat{u}_x$$

$$\vec{E}^{(2)} = E_0 e^{i(kz - \omega t)} \hat{u}_y$$

$$\vec{E} = \vec{E}^{(1)} + \vec{E}^{(2)} = E_0 e^{i(kz - \omega t + \pi/2)} \hat{u}_x + E_0 e^{i(kz - \omega t)} \hat{u}_y$$

Quindi, prendendo in considerazione solo la parte Im otteniamo

$$E_x = E_0 \sin(kz - \omega t + \pi/2) = E_0 \cos(kz - \omega t)$$

$$E_y = E_0 \sin(kz - \omega t)$$

AMPIEZZA COMPLESSA

Abbiamo visto che una onda con \neq stati di polarizzazione può essere ottenuta sommando due onde PL lungo direzioni ortogonali. Gli ingredienti che vanno ad incidere sullo stato finale di polarizzazione sono:

- le ampiezze delle onde polarizzate ortogonalmente
- lo sfasamento relativo

Utilizzando le proprietà dell'exp, posso includere il termine di sfasamento nell'ampiezza dell'onda

$$E_x = E_{0,x} e^{i(kz - \omega t + \delta)} = E_{0,x} e^{i\delta} e^{i(kz - \omega t)}$$

In questo modo, ammetto valori $\in \mathbb{C}$ per le componenti del vettore ampiezza, in modo da tenere conto degli sfasamenti. La forma + generale possibile per l'onda è quindi la somma di onde polarizzate linearmente ortogonali e con ampiezze complesse

$$\vec{E} = E_{0,x} e^{i(kz - \omega t)} \hat{u}_x + E_{0,y} e^{i(kz - \omega t)} \hat{u}_y \quad E_{0,x}, E_{0,y} \in \mathbb{C}$$

CENNI SU ELEMENTI OTTICI

È possibile sfruttare le proprietà di interazione tra rad em e materia per modificare alcune caratteristiche delle onde, come la direzione di polarizzazione, la fase. Per farlo si utilizzano **elementi ottici**, quali ad esempio i **polarizzatori** e le **lamine di ritardo**.

POLARIZZATORI → sono filtri che bloccano il passaggio di radiazione con polarizzazione che non coincide con l'asse del polarizzatore. Quindi sono utilizzati per selezionare una polarizzata linearmente lungo una data direzione

LAMINE DI RITARDO → sono usate per produrre sfasamenti tra le 2 componenti ortogonali polarizzate \perp con le quali possiamo descrivere un'onda armonica

In pratica, combinando questi 2 elementi ottici, posso creare stati di polarizzazione della radiazione em. in modo controllato

↓
→ descrizione matriciale di Jones

⚠ Un termine più generale per indicare la ciclicità è **ellittica** perché la PC è un caso particolare della PE

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_0 e^{i(kz - \omega t)} = E_{0,x} e^{i(kz - \omega t + \pi/2)} \hat{u}_x + E_{0,y} e^{i(kz - \omega t + \pi/2 - \pi/2)} \hat{u}_y \\ &= E_{0,x} e^{i(kz - \omega t + \pi/2)} \hat{u}_x + E_{0,y} e^{i(kz - \omega t)} \hat{u}_y \end{aligned}$$

Quindi moltiplicando per un opportuno fattore di normalizzazione complesso modifichiamo l'ampiezza e gli sfasamenti globali, ma non alteriamo lo stato di polarizzazione, che dipende dal rapporto tra le componenti di ampiezza e dagli sfasamenti relativi

POLARIZZAZIONE CIRCOLARE SINISTRORSA

POLARIZZAZIONE ELLITTICA

L'unica differenza rispetto al caso circolare risiede nel fatto che i moduli delle 2 componenti (x e y) sono diversi

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(kz - \omega t)} = E_0 e^{i(kz - \omega t)} \hat{u}_x + 2E_0 e^{i(kz - \omega t - \pi/2)} \hat{u}_y$$

$$E_{0,x} = E_0 \quad E_{0,y} = 2E_0$$

$$\begin{bmatrix} E_{0,x} \\ E_{0,y} \end{bmatrix} = E_0 \begin{bmatrix} 1 \\ -2i \end{bmatrix}$$

Notiamo come la notazione matriciale di Jones è utile perché semplifica notevolmente i calcoli

EX 1: Per ottenere la polarizzazione dell'onda risultante dalla sovrapposizione di più onde basta sommare i vettori di Jones per le singole onde.

Ad esempio la somma di un'onda a PCsx e una a PCdx è:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Cioè un'onda con PL lungo x con ampiezza doppia rispetto alle componenti circolari

EX 2: Si possono rappresentare gli elementi ottici come operatori sullo spazio vettoriale che descrive la polarizzazione, quindi con matrice 2x2 a valori complessi. Per calcolare l'effetto dell'elemento ottico su un'onda con una particolare polarizzazione quindi basta fare un prodotto matriciale

Sappiamo che gli elementi ottici sono dei dispositivi che ci permettono di controllare il rapporto tra le ampiezze (polarizzatore) e gli sfasamenti relativi (lamine di ritardo), quindi adesso analizzeremo due esempi in cui calcoleremo l'effetto dell'elemento ottico sullo stato di polarizzazione attraverso il calcolo matriciale di Jones

LAMINA A QUARTO D'ONDA

La lamina a quarto d'onda è un dispositivo che permette di creare uno sfasamento di $\pi/2$ tra le 2 componenti a PL ortogonali dell'onda. Questo perché la velocità dell'onda all'interno del materiale che costituisce la lamina è diversa a seconda che la componente sia orientata lungo l'asse veloce della lamina o \perp a esso.

ovvero che ritarda y rispetto a x, introducendo lo sfasamento nella prima

Quando l'onda emerge dalla lamina, una delle 2 componenti sarà in ritardo (sfasata) rispetto all'altra

Supponiamo infatti di avere una lamina a quarto d'onda con l'asse veloce lungo x che viene attraversata da luce polarizzata linearmente a un angolo di 45° rispetto all'asse x

Rappresentiamo la lamina con l'operatore T e l'onda con il vettore E_0 , per il

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \quad E_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow T \cdot E_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$$

Quindi, se valutiamo l'effetto della lamina sull'onda otteniamo un'onda con polarizzazione circolare sinistra.

Quindi, per ottenere luce polarizzata circolarmente possiamo procedere in 2 modi:

1. utilizzare un polarizzatore per ottenere luce linearmente polarizzata lungo una determinata direzione
2. utilizzare una lamina a quarto d'onda posizionando l'asse veloce a 45° rispetto alla direzione di polarizzazione dell'onda incidente precedentemente ottenuta

In generale in un sys ottico posso avere una successione di elementi ottici che modificano lo stato di polarizzazione dell'onda. Per quanto complesso possa essere il sys, l'effetto totale degli elementi ottici sarà dato dal prodotto matriciale delle matrici che li rappresentano

$$\begin{bmatrix} T_{11}^{(n)} & T_{12}^{(n)} \\ T_{21}^{(n)} & T_{22}^{(n)} \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} T_{11}^{(2)} & T_{12}^{(2)} \\ T_{21}^{(2)} & T_{22}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11}^{(1)} & T_{12}^{(1)} \\ T_{21}^{(1)} & T_{22}^{(1)} \end{bmatrix} = T^{(n)} \cdots T^{(2)} T^{(1)} = \prod_{i=1}^n T_i = T_{off}$$

$$\vec{E}^{TR} = T_{off} \cdot \vec{E}^{INPUT}$$

matrice
2x2

Inalterati nell'attraversamento dell'elemento ottico, a meno di un fattore complesso. Ciò implica che posso avere una variazione dell'ampiezza e della fase globali, ma non variazioni del rapporto tra le componenti di ampiezza o sfasamenti relativi.

CONCLUSIONI

Il calcolo matriciale di Jones ci permette di trattare la polarizzazione in modo elegante e compatto. I suoi vantaggi sono:

- calcolare l'azione di un elemento ottico su uno stato qualsiasi di polarizzazione (a patto di conoscere l'espressione matriciale)
- calcolare l'azione di n elementi ottici in successione tramite prodotto di matrici 2×2
- calcolare gli stati che rimangono invariati sotto l'azione dell'elemento ottico (autovettori)

Bisogna notare come:

- possiamo trattare solo radiazione completamente polarizzata. E altri tipi di approccio matriciale che permettono di trattare anche luce non polarizzata \rightarrow algebra di Muller
- non si può insieme nella trattazione elementi ottici non lineari, in quanto la loro azione sugli stati non è rappresentabile con una matrice

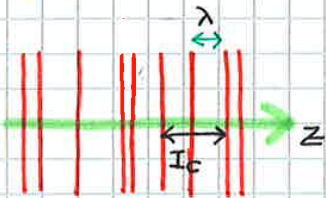
Quindi abbiamo bisogno di una teoria che ci permetta di tenere conto delle inevitabili fluttuazioni dei campi. Questa Teoria ci consentirà di mettere in relazione la coerenza con osservabili misurabili, come l'intensità di radiazione. Quindi cercheremo di capire quando un campo reale può essere effettivamente approssimato con un campo ideale.

Adesso cerchiamo di capire in modo intuitivo le conseguenze delle fluttuazioni casuali in un campo EM ideale. Quindi, prendiamo come modello ideale l'onda piana armonica e la rendiamo imperfetta

COERENZA TEMPORALE

Consideriamo un'OP $\vec{E} = E_0 \sin(kz - \omega t) \hat{u}_x$ che si propaga lungo z : i suoi fronti d'onda (lungo dei pti a fase costante) sono i piani \perp a z

Se consideriamo i fronti d'onda associati alle fasi $\pi/2 + 2m\pi$ notiamo che essi costituiscono i piani nei quali E assume il suo valore max. I suddetti fronti d'onda sono equispaziali, cioè la loro separazione è λ in ogni istante considerato, ovvero la separazione non dipende dal tempo



A questo punto immaginiamo di introdurre delle fluttuazioni casuali nel campo, il cui risultato sia quello di far variare in modo casuale la spaziatura dei fronti d'onda

Se si può identificare una distanza caratteristica lungo z , tale per cui $z_2 - z_1 < l_c$ implica che la spaziatura tra fronti d'onda sia molto simile, si potrà allora di l_c come lunghezza di coerenza, ovvero quella porzione di spazio (longitudinale) in cui il campo reale si comporta come una onda ideale. Dato che stiamo considerando la spaziatura nella direzione di propagazione dell'onda, possiamo associare un tempo di coerenza $\tau_c = l_c/c$, ovvero il tempo impiegato dall'onda per percorrere la distanza l_c .

Se la diff. di fase tra 2 punti con separazione longitudinale è cost nel tempo, si ha coerenza temporale

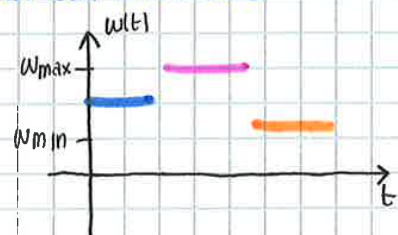
L'assenza di coerenza temporale implica che la spaziatura dei fronti d'onda subisce fluttuazioni casuali.

Dato che $\omega = 2\pi/\lambda$, è intuitivo immaginare che la non-monocromaticità della sorgente sia legata alla perdita di coerenza temporale

ESEMPIO:

Rinunciamo alla perfetta monocromaticità della sorgente, ovvero assumiamo che la ω possa assumere valori diversi compresi in un intervallo $[\omega_{min}, \omega_{max}]$:

Supponiamo anche che in media la frequenza cambi dopo un tempo τ_c



Quindi l'unico modo per ottenere un'onda localizzata nello spazio (non infinitamente estesa) è di rinunciare alla perfetta monocromaticità. Tutte le sorgenti di radiazioni IR, per quanto possano essere ottimizzate avranno sempre un contributo dato da sovrapposizione di più frequenze, quindi larghezza di banda $\Delta\omega \neq 0$

Per tanto, è importante notare come se la larghezza di banda è piccola $\Delta\omega/\bar{\omega} \ll 1$ la radiazione possa essere considerata quasi monocromatica, a pulsazione media, e quindi esprimibile in una forma simile a quella di cui OP in ogni punto:

$$\rightarrow E(t) = E_0(t) \exp[i(\phi(t) - \bar{\omega}t)]$$

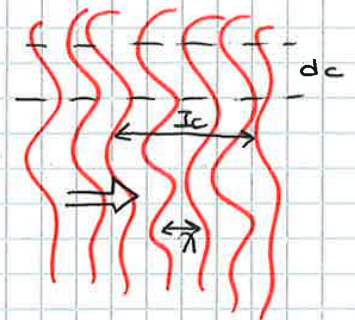
Ma con ampiezza e fase dipendenti dal t per tenere conto delle fluttuazioni casuali. Quindi, l'espressione del campo diventa

$$E(\vec{r}, t) = E_0(\vec{r}, t) \exp[i(\phi(\vec{r}, t) - \bar{\omega}t)]$$

Per intervalli temporali $\ll \tau \approx 1/\Delta\omega$, le variazioni di $E_0(\vec{r}, t)$ e $\phi(\vec{r}, t)$ sono piccole

COERENZA SPAZIALE

Torniamo a considerare l'onda piana $\vec{E} = E_0 \sin(kz - \omega t) \hat{u}_x$ che si propaga lungo z, nella quale abbiamo già rinunciato alla monocromaticità \Rightarrow fluttuazioni nella spazialità dei fronti d'onda \Rightarrow perdita di coerenza temporale



Supponiamo adesso che siano presenti anche fluttuazioni casuali nella forma dei fronti d'onda

Se si può identificare una distanza caratteristica d_c trasversale alla direzione di propagazione tale per cui

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 < d_c^2$$

implica che la forma dei fronti d'onda sia molto simile, si parla allora di d_c come lunghezza di coerenza trasversale, ovvero quella porzione di spazio (trasversalmente) in cui il campo reale si comporta come un'onda ideale

\rightarrow Se la differenza di fase tra 2 punti con separazione trasversale è costante nel tempo, si ha coerenza spaziale

L'assenza di coerenza spaziale implica che la forma dei fronti d'onda subisce delle fluttuazioni casuali. Si può dimostrare che la perdita di coerenza spaziale è legata alla estensione finita delle sorgenti, cioè quando le sorgenti non sono puntiformi.

DEFINIZIONE MATEMATICA

Adesso vogliamo capire come trattare matematicamente la situazione appena vista in modo intuitivo.

EX: Calcoliamo la $M_{12}(\tau)$ per un'onda quasi monocromatica: per semplicità consideriamo il caso scalare $\vec{E} = E_0(\vec{r}, t) \exp[i(\phi(\vec{r}, t) - \omega t)]$

$$\begin{aligned}
 M_{12}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \vec{E}(\vec{r}_1, t) \vec{E}(\vec{r}_2, t + \tau) dt \\
 &= \langle E_0(\vec{r}_1, t) e^{i(\phi(\vec{r}_1, t) - \omega t)} E_0(\vec{r}_2, t + \tau) e^{-i(\phi(\vec{r}_2, t + \tau) - \omega(t + \tau))} \rangle \\
 &= \langle E_0(\vec{r}_1, t) E_0(\vec{r}_2, t + \tau) e^{i(\phi(\vec{r}_1, t) - \phi(\vec{r}_2, t + \tau))} \rangle e^{i\omega\tau} \\
 &= |M_{12}(\tau)| e^{i\alpha_{12}(\tau)} e^{i\omega\tau}
 \end{aligned}$$

→ $M_{12}(\tau) = |M_{12}(\tau)| e^{i\alpha_{12}(\tau)} e^{i\omega\tau}$

Per intervalli temporali $\tau < \tau_c$ con $\tau_c \approx 1/\Delta\omega$ tempo di coerenza, si ha che $|M_{12}(\tau)|$ e $\alpha_{12}(\tau)$ variano lentamente in funzione di \vec{r}_1 , \vec{r}_2 e τ . Come conseguenza, posso fare le seguenti approssimazioni:

$$|M_{12}(\tau)| \approx |M_{12}(0)| \quad \alpha_{12}(\tau) \approx \alpha_{12}(0)$$

→ $M_{12}(\tau) = |M_{12}(0)| e^{i\alpha_{12}(0)} e^{i\omega\tau}$

$$\alpha_{12}(\tau) = \alpha_{12}(0) + \omega\tau$$

Abbiamo ottenuto una soluzione oscillante in τ , come nel caso dell'OP. In questo caso, però il grado di coerenza $|M_{12}(\tau)| \approx |M_{12}(0)|$ non è per forza uguale a 1.

MISURA del GRADO di COERENZA

Vogliamo trovare un modo per misurare il grado di coerenza di un campo, e quindi di una sorgente.

Consideriamo due onde armoniche $\vec{E}^{(1)}$ e $\vec{E}^{(2)}$. Per il PDS avremo che il campo risultante è $\vec{E} = \vec{E}^{(1)} + \vec{E}^{(2)}$. Sperimentalmente si riesce a misurare l'intensità del campo \vec{E} , che è proporzionale alla media temporale del quadrato del suo modulo $\langle |\vec{E}|^2 \rangle = \langle \vec{E} \cdot \vec{E}^* \rangle$

→
$$\begin{aligned}
 I_{TOT} &= \langle (\vec{E}^{(1)} + \vec{E}^{(2)}) \cdot (\vec{E}^{(1)*} + \vec{E}^{(2)*}) \rangle \\
 &= \langle |\vec{E}^{(1)}|^2 \rangle + \langle |\vec{E}^{(2)}|^2 \rangle + \langle 2 \operatorname{Re} \{ \vec{E}^{(1)} \cdot \vec{E}^{(2)*} \} \rangle \\
 &= I_1 + I_2 + 2 \operatorname{Re} [\langle \vec{E}^{(1)} \cdot \vec{E}^{(2)*} \rangle]
 \end{aligned}$$

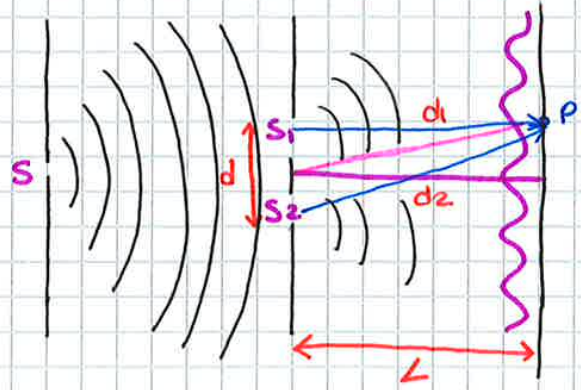
Notiamo che il termine $\langle \vec{E}^{(1)} \cdot \vec{E}^{(2)*} \rangle$ è molto simile a quello formale a $M_{12}(\tau) \equiv \langle \vec{E}^{(1)}(t) \cdot \vec{E}^{(2)*}(t + \tau) \rangle$

Se sperimentalmente riusciamo a fare in modo che $\vec{E}^{(1)}$ sia il campo \vec{E} calcolato nel punto P_1 ad un istante t e $\vec{E}^{(2)}$ il campo \vec{E} calcolato nel punto P_2 ad un istante $t + \tau$, possiamo scrivere

$$I_{TOT} = I_1 + I_2 + 2 \operatorname{Re} \{ |M_{12}(\tau)| \} = I_1 + I_2 + 2 \sqrt{I_1 I_2} \operatorname{Re} \{ \gamma_{12}(\tau) \}$$

ESPERIMENTO di YOUNG

La radiazione generata da una sorgente S illumina 2 piccole aperture S_1 e S_2 separate da una distanza d , che fungono da sorgenti di onde sferiche.



NB La dim delle aperture deve essere molto minore della λ della radiazione, secondo il principio di Huygens. Uno schermo posto a distanza $L \gg d$ registra il pattern di interferenza, che mostra picchi di intensità nei punti in cui c'è interferenza costruttiva.

L'intensità delle frange del pattern di interferenza è data da

$$I_{TOT} = I_1 + I_2 + 2 \operatorname{Re} [\langle \vec{E}^{(1)} \cdot \vec{E}^{(2)*} \rangle]$$

In qsto caso la diff. di fase fra le 2 "onde" è dettata dal fatto che \neq una spaziatura trasversale delle 2 sorgenti. In principio, essendo S_1 e S_2 a distanza \neq dal particolare punto sullo schermo considerato, il segnale che giunge sullo schermo nel punto P è partito dalle sorgenti ai tempi $t_1 = t - d_1/c$ e $t_2 = t - d_2/c$, propagandosi a velocità c . Quindi, valgono le seguenti affermazioni

$$E^{(1)}(P, t) = K_1 E(S_1, t - d_1/c)$$

$$E^{(2)}(P, t) = K_2 E(S_2, t - d_2/c)$$

\rightarrow K_1 e K_2 sono delle costanti che tengono conto del fatto che l'onda è sferica

Imponendo

$$t' = t - d_1/c$$

$$\tau = (d_1 - d_2)/c$$

otteniamo

$$\begin{aligned} I_{TOT} &= 2I + 2 \operatorname{Re} [\langle E(S_1, t') E^*(S_2, t' + \tau) \rangle] \\ &= 2 [I + \operatorname{Re} [\gamma_{12}(\tau)]] \\ &= 2I [1 + \operatorname{Re} [\gamma_{12}(\tau)]] \end{aligned}$$

Nel caso di sorgente quasi monocromatica, supponendo che $\tau \ll \tau_c$, si può dimostrare che

$$\gamma_{12}(\tau) \approx |\gamma_{12}| e^{i(\omega\tau + 2\gamma_{12}(0))}$$

e quindi il contrasto delle frange coincide con il grado di coerenza. In particolare, considerata la geometria del problema, il contrasto delle frange dà informazioni sulla CS della sorgente S sulla scala dimensionale individuata da d .

APPLICAZIONI di INTERFEROMETRIA: ONDE GRAVITAZIONALI

Il Nobel per la fisica nel 2017 è stato assegnato per il contributo della realizzazione dell'osservatorio LIGO (Laser Interferometer Gravitational-wave Observatory).

Il set-up sperimentale è molto simile ad uno gigantesco interferometro di Michelson.

Lo scopo dell'interferometro è quello di rilevare la presenza di OG, che NON sono onde EM, bensì delle perturbazioni in forma ondulatoria dello spazio-tempo prodotte da masse gigantesche (stelle, buchi neri, ...)

In pratica le OG sono in grado di indurre cambiamenti nel cammino ottico dei 2 fasci laser che viaggiano in direzioni \perp , deformando lo spazio-tempo in modo \neq nei 2 bracci dell'interferometro.

↳ Ciò si manifesta in piccole perturbazioni nel pto in cui i 2 fasci sono ricombinati.

È stato affermato che la sensibilità del sistema è di 10^{-19} m di differenza di cammino.

Lo stesso ragionamento può essere fatto con i **campi magnetici** → **spize ampereane**
 In questo caso si vengono a generare dei momenti di dipolo magnetico, che in assenza di un campo magnetico è pari a

$$\vec{M} = \sum_i m_i = 0$$

Nel caso in cui entra in gioco un campo magnetico esterno che si viene a generare un

$$M = \sum m_i \neq 0$$

In modo analogo se **inserisco un materiale** si genera un campo magnetico $B \neq B_0$

In questo caso **entano in gioco delle correnti libere**, e possiamo scrivere:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \mu_0 \vec{M}$$

I_0 **correnti libere**

Implicitamente abbiamo sviluppato questo metodo per materiali non conduttori, e quindi per **isolanti (dielettrici)**

Adesso vogliamo capire come inserire queste informazioni all'interno delle eq. di Maxwell.

Per comodità andremo ad usare le eq. di Maxwell nel **vuoto** in forma differenziale in presenza di sorgenti di cariche libere ρ_0 e di correnti libere \vec{j}_0

- $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_0 = \rho_0 / \epsilon_0$
- $\vec{\nabla} \times \vec{E}_0 = -\partial \vec{B}_0 / \partial t$
- $\vec{\nabla} \cdot \vec{B}_0 = 0$
- $\vec{\nabla} \times \vec{B}_0 = \mu_0 \vec{j}_0 + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}_0}{\partial t}$
- $\vec{\nabla} \cdot \vec{P}_0 = 0$

Adesso proviamo a inserire un materiale in una regione di spazio vuoto e vedere se continuano a valere le eq. di Maxwell

$$\begin{aligned} \epsilon_0 \vec{E}_0 = \vec{D} &= \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} & \vec{E} &= \vec{E}_0 - \vec{P} / \epsilon_0 \\ \mu_0 \vec{H} = \vec{B}_0 &= \vec{B} - \mu_0 \vec{M} & \vec{B} &= \vec{B}_0 + \mu_0 \vec{M} \end{aligned}$$

In questo caso devo tenere conto della **distribuzione di cariche presenti nel materiale** a livello microscopico, che chiamo **cariche di polarizzazione**



Quindi la prima eq. di Maxwell diventa

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = (\rho_0 + \rho_{pol}) / \epsilon_0$$

Il fatto che **non** monopoli magnetici continua a valere, quindi la 2ª eq. rimane uguale

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

Poiché **variano solo i campi presenti all'interno del materiale**, deduco che la terza eq. di Maxwell rimane anch'essa invariata

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t$$

$$\nabla \times \vec{B}_0 + \mu_0 \nabla \times \vec{H} = \mu_0 \vec{J}_0 + \mu_0 \vec{J}_{mgn} + \mu_0 \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}_0}{\partial t} - \mu_0 \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

Quindi, otteniamo:

$$\mu_0 \nabla \times \vec{H} = \mu_0 \vec{J}_{mgn} \rightarrow \vec{J}_{mgn} = \nabla \times \vec{H}$$

Ma per tanto **connesso** proprietà locali con le proprietà macroscopiche del mio sistema

Quindi avremo che la 4^a eq. di Maxwell nei materiali diventa

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J}_0 + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \nabla \times \vec{H} \right) + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

La terza invece assume sempre la medesima forma, tenendo conto dei campi globali

$$\nabla \times \vec{E} = - \partial \vec{B} / \partial t$$

Queste 2 eq. valgono in generale \forall materiale.

Se il materiale è **OMogeneo e isotropo**, abbiamo che si hanno le seguenti relazioni di proporzionalità:

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} \quad \vec{H} = \chi_m \vec{B}_0 / \mu_0$$

\vec{E}_0 : scriviamo in questo modo per questioni storiche e per mantenere una certa sym

Quindi, sostituendo abbiamo:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}_0 + \mu_0 \frac{\chi_m}{\mu_0} \nabla \times \vec{B}_0 + \mu_0 \epsilon_0 \chi_e \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Ragioniamo sugli ultimi 2 termini:

$$\mu_0 \epsilon_0 \left(\chi_e \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} (1 + \chi_e)$$

Quindi l'eq diventa:

ϵ_r costante dielettrica relativa

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}_0 + \chi_m \nabla \times \vec{B}_0 + \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{B} - \chi_m \nabla \times \vec{B}_0 = \mu_0 \vec{J}_0 + \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\nabla \times (\vec{B} - \vec{B}_0 \chi_m) = \mu_0 \vec{J}_0 + \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \mu_0 \vec{H} = \vec{B}_0 + \mu_0 \chi_m \frac{\vec{B}_0}{\mu_0}$$

$$\vec{B} - \chi_m \vec{B}_0 = \vec{B}_0$$

$$\mu_r \nabla \times \vec{B}_0 = \mu_r \mu_0 \vec{J}_0 + \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (*)$$

Sapendo che $(1 + \chi_m) = \mu_r$ vado a moltiplicare entrambi i membri per μ_r che è la permeabilità magnetica relativa

19/04/2018

È bene ricordare che ϵ_r e μ_r si mischiano in un condensatore induttivo e conduttivo.

Inoltre, per i materiali dielettrici abbiamo che $\mu_r \sim 1$

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{c}{n}$$

→ Posso ragionare con la Legge di Snell per il cavallo

In particolare, per l'aria $n=1$, per il vetro $n \approx 1.5$

Come cambia l'eq. di propagazione dell'onda in un materiale?

Formalmente le formule sono identiche, ma contengono i contributi del materiale.

$$E(x,t) = E_0 e^{i(k(x-vt))}$$

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$ (determinata dalla sorgente)
 $\lambda v = v$
 $\lambda = \frac{c}{nv}$ (dipendenza del materiale)

Nel vuoto avremmo avuto

$$\lambda_0 = \frac{c}{v}$$

quindi per un materiale avremo che

$$\lambda = \lambda_0/n$$

Ragioniamo sulla relazione di $E(x,t)$ e applichiamo la proprietà distributiva

$$E = E_0 e^{i(kx - kv t)} = E_0 e^{i(kx - \omega t)}$$

$\omega = 2\pi \nu = \frac{2\pi}{\lambda} v$
 $E = E_0 e^{i\left(\frac{2\pi}{\lambda} x - \omega t\right)} = E_0 e^{i\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} n x - \omega t\right)}$

Consideriamo un'onda



→ cammino ottico
 è come se il percorso dell'onda fosse modulato dal materiale

Quindi vanno a sovrapporre 2 onde separate

$$E_1 \rightarrow E_0 e^{i\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} e - \omega t\right)}$$

$$E_2 \rightarrow E_0 e^{i\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} n e - \omega t\right)}$$

queste 2 onde all'uscita saranno sfasate di una quantità

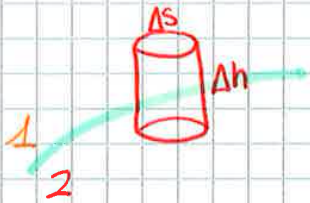
Questo approccio viene usato per costruire degli strumenti noti come separatori, che si basano sulla differenza di fase che ne viene fuori ed è stato costruito controllando l'indice e la sua lunghezza

$$\frac{2\pi}{\lambda_0} (n-1) e$$

$$\Delta(E_2 - E_1)$$

→ $B_{1t} = B_{2t}$

Adesso vogliamo ragionare sfruttando la 1^a eq. di Maxwell, sfruttando un cubetto che interseca l'interfaccia.



Consideriamo questo cubetto infinitesimo con $\Delta h \rightarrow 0$, quindi il **volumetto collassa**, e allora

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = D_{n1} \Delta S - D_{n2} \Delta S \stackrel{!}{=} 0$$

sto considerando una q infinitesima
 $\rightarrow v_0 = 0$ assenza di q libere superficiali

Da ciò deduciamo che $D_{n1} = D_{n2}$, ma D non è esattamente il campo E , che invece dipende dalle proprietà ottiche ed elettriche del materiale nel seguente modo:

$$\epsilon_0 \epsilon_{r1} E_{n1} = \epsilon_0 \epsilon_{r2} E_{n2} \rightarrow n_1^2 E_{n1} = n_2^2 E_{n2}$$

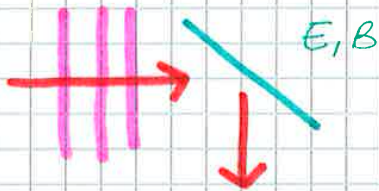
Posso ragionare allo stesso modo anche per il campo magnetico, sfruttando la stessa geometria e la 2^a eq. di Maxwell

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = B_{1m} \Delta S - B_{2m} \Delta S \stackrel{!}{=} 0$$

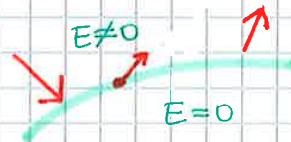
Era praticamente zero perché non esistono i monopoli magnetici

Anche in questo caso abbiamo che $B_{1m} = B_{2m}$

Per far cambiare direzione all'onda, devo mettere uno specchio, materiale che devia l'eu. dell'onda di 90°

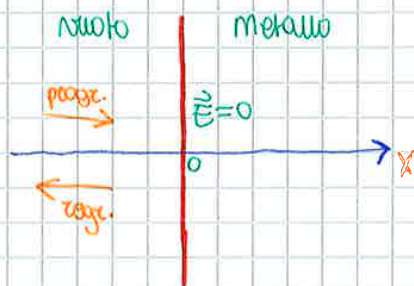


Per fare ciò mi serve un materiale che presenti le seguenti proprietà



I materiali che presentano queste proprietà sono i **conduttori perfetti**. Ragioniamo in termini di campo E , fatto che campo elettrico e magnetico sono tra loro correlati

→ $E_{1t} = 0 \Rightarrow$ **il campo all'interfaccia è nullo**
 $n_1^2 E_{1n} = 0 = n_2^2 E_{2n} \Rightarrow E_{m1} = 0$



Per $x=0$ l'onda si deve annullare in ampiezza

ONDE EM IN MEZZI OMOGENEI ISOTROPI

Partiamo dalle eq. di Maxwell generali in funzione di \vec{D} e \vec{H}

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= \rho \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\partial \vec{B} / \partial t \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \vec{j} + \partial \vec{D} / \partial t\end{aligned}$$

→ Leghiamo \vec{E} e \vec{H} attraverso le relazioni costitutive in un mezzo omogeneo e isotropo:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon \vec{E}$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} = \frac{\vec{B}}{\mu}$$

↙ direzioni preferenziali

Sfruttando le relazioni costitutive, possiamo scrivere le eq. di Maxwell nel seguente modo:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \rho / \epsilon_0 & \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\partial \vec{B} / \partial t & \text{dove } \epsilon_0 &\Rightarrow \epsilon \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 & \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu \vec{j} + \mu \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} & \mu_0 &\Rightarrow \mu\end{aligned}$$

Se ammettiamo i termini di sorgente ($\rho=0, \vec{j}=0$), otteniamo le stesse equazioni nel caso in vuoto, cioè:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0 & \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\partial \vec{B} / \partial t \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 & \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

→ da cui ricaviamo le seguenti due equazioni accoppiate:

$$\begin{aligned}\nabla^2 \vec{E} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} &= 0 \\ \nabla^2 \vec{B} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} &= 0\end{aligned}$$

Anche in questo caso otteniamo delle soluzioni oscillatorie, con la differenza che la velocità di propagazione è:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} \equiv \frac{c}{n}$$

nei materiali anisotropi è un tensore.

→ indice di rifrazione che non è uguale per tutte le frequenze

Possiamo riferirci alla struttura di \vec{E} in termini exp, e notare che

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(kx - \omega t)} \quad \frac{\omega}{|k|} = \frac{c}{n}$$

INDICE DI RIFRAZIONE NEI DIELETTRICI PERFETTI

Le condizioni sopra citate sono rispettate da un dielettrico perfetto

Per i dielettrici, vale $\mu_r \approx 1$, che implica $n = \sqrt{\epsilon_r \mu_r} \approx \sqrt{\epsilon_r}$. A questo punto vogliamo ricavare l'espressione di ϵ_r , a partire dalla polarizzabilità del dielettrico, tramite l'eq di Clausius-Mossotti

$$\epsilon_r = 1 + \frac{Nq^2}{\epsilon_0 - Nq^2/3}$$

→ # di atomi per ωV
→ polarizzabilità del dielettrico

Sapendo che il momento di dipolo si scrive $\vec{p} = (\xi e) \vec{z}$, andando a sostituirvi il risultato precedente, otteniamo:

$$\vec{p} = (\xi e) \frac{\xi e \vec{E}_0 e^{i\omega t}}{[m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)]} e^{i\omega t}$$

$$= \frac{(\xi e)^2}{m} \frac{1}{[\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega]} \vec{E}_0 e^{i\omega t}$$

polarizzabilità complessa

Quindi abbiamo trovato un'espressione per la polarizzabilità α , che è anch'essa un numero complesso. Essendo $\alpha \in \mathbb{C}$, possiamo esprimerlo in forma esponenziale $|\alpha| e^{i\delta}$. Dato un numero complesso $z = a + ib$, vale la relazione

$$\frac{1}{z} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}$$

In questo caso $z = [\omega_0^2 - \omega^2] + i\gamma\omega$. Quindi avremo che

$$\alpha = \frac{(\xi e)^2}{m} \frac{[\omega_0^2 - \omega^2]}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2]} - i \frac{(\xi e)^2}{m} \frac{(\gamma\omega)}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2]}$$

Quindi andiamo a calcolare $|\alpha|$ e δ :

$$|\alpha| = \frac{(\xi e)^2}{m} \frac{1}{\sqrt{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2]}}$$

$$\tan \delta = \frac{\gamma\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}$$

Abbiamo che δ descrive lo sfasamento tra il campo locale \vec{E}_1 e il momento di dipolo. Infatti passando dalla notazione complessa a quella con significato fisico (prendiamo per convenzione la parte Im)

$$\vec{p}(t) = \text{Im}[\alpha \vec{E}(t)] = |\alpha| \vec{E}_0 \sin(\omega t + \delta)$$

Avendo calcolato l'espressione per α , siamo in grado di calcolare ϵ_c tramite l'eq. di Clausius-Mossotti:

$$\epsilon_c = 1 + \frac{N\alpha}{\epsilon_0 - \frac{N\alpha}{3}} \quad \alpha, \epsilon_c \in \mathbb{C}$$

$$n \sim \sqrt{\epsilon_c} \quad n \in \mathbb{C}$$

INDICE DI RIFRAZIONE COMPLESSO

Dato che $n \in \mathbb{C}$, possiamo scrivere: $n = n_1 - i n_2$ con $n_2 > 0$

Per capire le implicazioni di una componente Im dell'indice di rifrazione, consideriamo un'onda piana polarizzata linearmente lungo x che si propaga lungo z .

La sua fase è

$$(\omega t - k z) = \omega(t - k z / \omega) = \omega(t - n z / c)$$

- Nella maggior parte dei casi, ω_0 sono nel range degli UV per i gas. Quindi, nel visibile l'indice di rifrazione n_1 è circa costante e maggiore di 1. Ciò vale anche per le sostanze trasparenti, anche se non assorbono la luce visibile.

→ lontano dalla risonanza $n_2 \approx 0$ e n_1 è circa costante

- Se la radiazione ha frequenza comparabile alla frequenza di risonanza del materiale, il coefficiente di assorbimento, α o n_2 , cresce.

Nel caso di alcune classi di vetri abbiamo che la radiazione visibile è completamente trasmessa, permettendo la visione attraverso i vetri. Aumentando però la frequenza di radiazione fino al range dei raggi X, l'assorbimento aumenta, perché ci avviciniamo alla frequenza di risonanza. Su questo principio funzionano i vetri al piombo utilizzati per schermare i raggi X permettendo la visione in ambienti medici e di ricerca.

- Abbiamo visto che differenti materiali hanno, in principio, frequenze di risonanza, quindi di assorbimento, differenti. Se noi sperimentalmente irraggiamo un campione con radiazione a diverse frequenze e misuriamo per quali frequenze si hanno picchi di assorbimento, siamo in grado di risalire al materiale che stiamo studiando.

→ spettroscopia di assorbimento

Anolando a sostituire nell'eq. otteniamo la seguente eq. per l'amp. $\psi(z)$:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} e^{i\omega t} + \epsilon_M \omega^2 \psi e^{i\omega t} - \mu \omega i \dot{\psi} e^{i\omega t} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + [\omega^2 \epsilon_M - i\omega \mu] \psi = 0$$

Se ipotizziamo una soluzione del tipo $\psi(z) = A e^{i\alpha z}$, andando a sostituire nell'eq. troviamo

$$-A\alpha^2 e^{i\alpha z} + [\omega^2 \epsilon_M - i\omega \mu] A e^{i\alpha z} = 0$$

$$\Rightarrow \alpha^2 = \omega^2 \epsilon_M - i\omega \mu$$

Se imponiamo per α la forma $\alpha = k - i\beta$, con $k, \beta \in \mathbb{R}$, al fine di ottenere una formula di smorzamento. Adesso andiamo a sostituire nella equazione per α otteniamo

$$(k - i\beta)(k - i\beta) = \omega^2 \epsilon_M - i\omega \mu$$

$$[k^2 - \beta^2] - i[2\beta k] = \omega^2 \epsilon_M - i\omega \mu$$

Possiamo uguagliare parte reale e Im delle 2 equazioni.

Im $2\beta k = \omega \mu \quad \rightarrow \quad \beta = \frac{\omega \mu}{2k}$

Re $k^2 - \beta^2 = \omega^2 \epsilon_M$

$$k^2 - \left(\frac{\omega \mu}{2k}\right)^2 = \omega^2 \epsilon_M$$

moltiplichiamo per k^2

Per la parte Re otteniamo l'equazione

$$k^4 - \omega^2 \epsilon_M k^2 - \omega^2 \mu^2 / 4 = 0$$

che possiamo interpretare nella seguente forma $ay^2 + by + c = 0$ quindi dobbiamo andare a risolvere un'eq. di 2° grado una volta trovata y , calcoliamo k tramite $y = k^2$, usando le formule risolutive di una eq. di 2° grado:

$$y = \frac{\omega^2 \epsilon_M \pm \sqrt{\omega^4 \epsilon_M^2 + \omega^2 \mu^2}}{2} = \frac{\omega^2 \epsilon_M}{2} \left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{\mu^2}{\epsilon_M^2}} \right]$$

A questo punto scegliamo k , considerando solo la soluzione y che contiene il segno $+$, altrimenti prenderemmo la radice di un numero negativo:

$$k = \pm \sqrt{y} = \pm \omega \sqrt{\frac{\epsilon_M}{2} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{\mu^2}{\epsilon_M^2}} \right]}$$

dove $\beta = \frac{\omega \mu}{2k} \quad \rightarrow \quad \alpha = k - i\beta$

OSSERVAZIONI:

- k e β hanno lo stesso segno e dipendono dalla frequenza della radiazione e dalla conducibilità del materiale

CAMPO MAGNETICO

Sapendo che \vec{B} rispetta l'eq. notiamo che ha una soluzione formalmente identica al campo elettrico \vec{E} .

$$\nabla^2 \vec{B} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} - \nabla \mu \frac{\partial B}{\partial t} = 0$$

Anche \vec{B} subisce una attenuazione della ampiezza. Vogliamo capire la relazione di fase tra \vec{E} e \vec{B} , e per farlo ragioniamo come nel caso di propagazione delle onde nel vuoto.

Avevamo visto che le OP armoniche sono autofunzioni degli operatori di derivazione. Come conseguenza, avevamo visto che la terza eq di Maxwell implica l'ortogonalità tra \vec{E} , \vec{B} e direzione di propagazione (individuata da \vec{k})

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t \Rightarrow \vec{k} \times \vec{E} = \omega \vec{B} \Rightarrow \vec{k} \times \vec{E}_0 = \omega \vec{B}_0$$

Nel caso di propagazione lungo z e \vec{E} lungo x : $B_0 = \frac{k}{\omega} E_0$

Nel caso di un conduttore, abbiamo visto che le soluzioni sono OP la cui ampiezza viene smorzata da un fattore esponenziale.

Consideriamo il caso di una onda che si propaga lungo z e \vec{E} lungo x :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-\beta|z|} e^{i(\omega t - |k|x)}$$

Possiamo scriverla come $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - |k|x + i|\beta|z)} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - kz)}$

con una OP armonica con \vec{k} complesso.

In analogia con il caso nel vuoto scriviamo $B_0 = \frac{k}{\omega} E_0$

La differenza principale rispetto a prima è che $k = |k| e^{i\delta}$ è un numero \neq reale. La conseguenza di ciò è che nella relazione tra le ampiezze subentra uno sfasamento.

$$B_0 = \frac{|k|}{\omega} E_0 e^{i\delta}$$

Il campo \vec{E} e quello \vec{B} sono quindi sfasati tra loro di un fattore δ , ovvero l'argomento del vettore d'onda complesso k .

ESEMPIO: Nel caso in cui $\epsilon \ll \epsilon_0$, abbiamo visto che $k = \beta = \sqrt{\omega \epsilon \mu / 2}$ sappiamo quindi che

$$\tan \delta = \beta / k = 1 \quad \delta = \pi/4$$

CONCLUSIONI:

- La propagazione di un'onda em in un conduttore si accompagna ad una attenuazione della ampiezza, ovvero una perdita di energia.
- L'energia che l'onda comunica al mezzo viene dissipata per effetto joule.
- Il coefficiente di attenuazione dipende dalla frequenza dell'onda e si raddoppia quando la frequenza aumenta.

Ad esempio, consideriamo la situazione in cui la densità di corrente sta aumentando nel tempo. Il campo vettoriale \vec{B} generato dalla corrente ha in ogni istante linee di forza circolari su piani perpendicolari all'asse del cilindro. Inoltre, il modulo di \vec{B} cresce con la corrente.

Dato che \vec{B} sta variando nel tempo, genera un \vec{E}_i orientato lungo l'asse del cilindro con verso opposto rispetto al campo impresso.

Se consideriamo la linea chiusa ℓ (di area $S \sim h dr$) rappresentata in figura che agisce su un piano passante per l'asse del cilindro.

Possiamo applicare la legge di Faraday
$$\oint_{\ell} \vec{E}_i \cdot d\vec{\ell} = - \frac{d\phi_s(\vec{B})}{dt}$$

Se percorriamo la curva in senso antiorario, il campo \vec{B} e il vettore normale alla superficie hanno la stessa direzione, quindi il secondo membro della legge di Faraday è < 0 . Se restringiamo a piacere il lato corto della linea chiusa ($dr \rightarrow 0$), l'integrale a primo membro diventa:

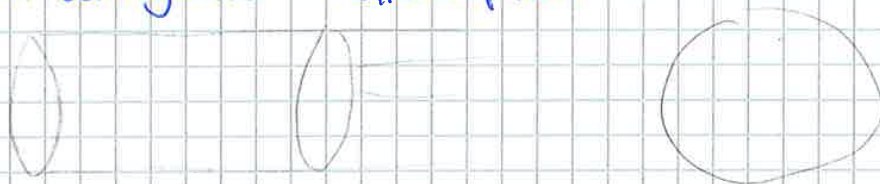
$$\oint_{\ell} \vec{E}_i \cdot d\vec{\ell} = E_i(\tau + d\tau)h - E_i(\tau)h$$

Quindi la qta' appena calcolata deve essere < 0 . Per tanto si avrà che

$$E_i(\tau) > E_i(\tau + d\tau)$$

ovvero il campo elettrico autoindotto ha intensità maggiore a distanze minori dall'asse del cilindro. Dato che il campo autoindotto contrasta il campo impresso, il campo complessivo nel conduttore sarà inferiore quanto più ci avviciniamo all'asse del cilindro.

Quindi in un contesto a sim cilindrica la validità della legge di Faraday ha come conseguenza l'effetto pelle.



In realtà la situazione è più complicata, ma le conseguenze a livello qualitativo sono le stesse.

In particolare, il campo \vec{B} variabile nel tempo genera correnti parassite causate da e^- che si muovono in verticale, il cui effetto finale è quello di aumentare la corrente totale verso la superficie e di diminuirla verso l'interno del conduttore.

↳ Una trattazione matematica rigorosa dell'effetto pelle permette di ricavare l'espressione per la densità di corrente \vec{j} , che può essere espressa tramite le funzioni di Bessel.

Una delle strategie per mitigare l'effetto pelle è usare cavi (fil. lit.) composti da un fascio di conduttori cilindrici isolati fra loro il cui diametro è minore dello spessore della pelle nel range di frequenza in cui i cavi devono lavorare.

Quindi, per essere emessi, gli e^- hanno bisogno di avere en. Superiore a W . Se consideriamo l'acqua em. costituita da particelle chiamate fotoni che scambiano en. $h\nu$, l'en. cinetica max degli e^- emessi sarà data da

$$E_{k, \max} = h\nu - W$$

In qsto modo siamo in grado di giustificare le evidenze exp:

- (1) \rightarrow perché $h\nu < W$
- (2) \rightarrow perché aumenta il # di fotoni incidenti per unità di tempo, ma la loro en. rimane invariata.

ESEMPI di WORK FUNCTION

Element	Plane	ϕ /eV	Method
---------	-------	------------	--------

La tabella mostra i valori di work function caratteristici di alcuni metalli, ricavati attraverso misure di effetto fotoelettrico. I valori sono riportati in eV, ovvero l'en. acquistata da un e^- sottoposto alla ddp di 1V in vuoto:

$$1\text{eV} = 1.602 \cdot 10^{-19}\text{J}$$

Valori di qsto tipo corrispondono a f_s dell'ordine di 10^{15}Hz (UV). Infatti, l'en. associata al fotone e

$$h\nu = 6.626 \cdot 10^{-34}\text{Js} \cdot 10^{15}\text{s}^{-1} = 6 \cdot 10^{-19}\text{J} \rightarrow \text{qualche eV}$$

RADIAZIONE in UNA CAVITA'

Molte considerazioni nascono dallo spettro di emissione della radiazione termica emessa dai corpi caldi a una certa T (radiazione di corpo nero). Lo spettro può essere ricavato solo ipotizzando che il campo em. sia **quantizzato**.

Consideriamo il CN come una cavità cubica di lato a con pareti perfettamente riflettenti. Risolviamo le eq. di Maxwell con le condizioni al contorno che E sia nullo alle pareti.

Quello che si ottiene sono onde stazionarie in 3D:

$$\vec{E} = \left[E_{0,x} \cos\left(\frac{l\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi z}{a}\right) \hat{u}_x + E_{0,y} \sin\left(\frac{l\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi z}{a}\right) \hat{u}_y + E_{0,z} \sin\left(\frac{l\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi z}{a}\right) \hat{u}_z \right] \cos(\omega t + \phi)$$

con $l, m, n \in \mathbb{N}$, tali che si possa definire

$$\vec{k} = \frac{\pi}{a} (l\hat{u}_x + m\hat{u}_y + n\hat{u}_z)$$

$$P_i = \frac{e^{-E_i/k_B T}}{Z}$$

$$Z = \sum_j e^{-E_j/k_B T}$$

e si trova che l'en. media di un modo quantistico è pari a:

$$\overline{E_{qu}} = \frac{h\nu}{e^{h\nu/k_B T} - 1}$$

Per ottenere la densità di en. (quantistica) per $u dV$ e $u d\nu$, moltiplichiamo l'en. media di ogni modo per la densità di modi

$u(T, \nu) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{1 \cdot h\nu}{e^{h\nu/k_B T} - 1}$

LEGGE DI PLANCK → En. media in un intorno di frequenza
 (densità di modi) → en. di un singolo fotone
 → # di fotoni medio a una data T

IL FOTONE

Il fotone è una particella elem e rappresenta il quanto del campo em. In quanto particella elem, alcuni fenomeni che la coinvolgono possono essere spiegati solo attraverso la meccanica quantistica.

PROPRIETÀ

- Non ha massa $m_f = 0$
- la sua velocità nel vuoto è pari a quella della luce c
- la sua en. è legata alla ν della radiazione tramite $E_f = h\nu = \hbar\omega$
- l'impulso del fotone è $p = \hbar k$

Data un'onda em monocromatica, siamo in grado di calcolare il quanto di en. tramite le relazioni che legano la freq. dell'onda all'energia dei fotoni. Inoltre, sappiamo che l'intensità dell'onda corrisponde al fatto che sono coinvolti un maggior numero di fotoni.

LASER

Sia dall'ambiente di ricerca che dall'industria, c'è richiesta di sorgenti di radiazioni em che assaiamo:

- coerenza spaziale e temporale
- possibilità di raggiungere elevate intensità e di emettere radiazione continua o impulsata.

Il processo LASER (Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation) permette di produrre radiazioni em con le caratteristiche menzionate sopra, in un range di frequenze molto ampio.

Consideriamo un gas a bassa densità di atomi e racchiuso in una cavità. Chiamiamo N_1 e N_2 il numero di atomi nei livelli energetici E_1 e E_2 ; inoltre, introduciamo la funzione $u(T, \nu)$, che descrive la densità di eu. associata al campo eu per $u d\nu$ e l' $u d\nu$ all'eq. termico.

Le eq. che governano i processi sono

ASSORBIMENTO

$$-\frac{dN_1}{dt} = B_{12} N_1 u(T, \nu) = \frac{dN_2}{dt}$$

EMISSIONE SPONTANEA

$$\frac{dN_1}{dt} = A_{21} N_2 = -\frac{dN_2}{dt}$$

EMISSIONE STIMOLATA

$$\frac{dN_1}{dt} = B_{21} N_2 u(T, \nu) = -\frac{dN_2}{dt}$$

dove B_{12} , B_{21} e A_{21} sono i coefficienti di Einstein

All'equilibrio la variazione totale della popolazione nei livelli E_1 e E_2 è nulla, ovvero i processi si compensano; vale la seguente eq. di equilibrio termico:

$$B_{21} N_2 u(T, \nu) = A_{21} N_2 + B_{12} N_1 u(T, \nu)$$

$$B_{21} u(T, \nu) = \left(\frac{N_2}{N_1}\right) [A_{21} + B_{12} u(T, \nu)] = e^{-\frac{\Delta E}{k_B T}} [A_{21} + B_{12} u(T, \nu)]$$

prob. di occup dei livelli → $E_2 - E_1$

Alle alte T è lecito aspettarsi che $u(T, \nu)$ diventi dominante e l'eq. tende a \dots , quindi

$$T \rightarrow \infty \Rightarrow B_{12} u(T, \nu) = B_{21} u(T, \nu)$$

$$B_{12} = B_{21} \quad \text{rel di Einstein}$$

Usando questa condizione abbiamo

$$u(T, \nu) = \frac{A_{21}}{B_{21}} \left[e^{\Delta E / k_B T} - 1 \right]^{-1}$$

usando la legge di Planck e ponendo $\Delta E = h\nu$, otteniamo

$$A_{21} = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} B_{12} \quad \text{rel di Einstein}$$

← em. spontanea → assorbimento

Possiamo notare che assorbimento e em. stimolata sono governati dallo stesso coefficiente e che \exists una connessione tra il coeff di assorbimento e quello di em. stimolata.

Il coeff di em. spontanea cresce con la freq. di transizione $\nu = \frac{E_2 - E_1}{h}$

In assenza di radiazione $u(T, \nu) \sim 0$, quindi l'unico processo che si verifica è l'em. spontanea, la cui eq. ha come soluzione l'andamento nel tempo della popolazione N_2 :

Se $N_2 > N_1$ il processo di emissione stimolata è favorito. Possiamo anche relazionarlo con la densità di energia: infatti, sappiamo che entrambi i processi coinvolgono lo scambio di un fotone di en. $h\nu$:

$$\frac{dU(\nu)}{dt} = -h\nu \frac{dN_2}{dt} = h\nu B_{21} U(\nu) (N_2 - N_1) \quad (1)$$

Se $N_2 - N_1 > 0$, la densità di en associata al campo em. cresce, quindi aumenta l'ampiezza dell'onda di partenza.

Avviene quindi l'amplificazione della radiazione.

$N_2 - N_1 > 0 \iff$ INVERSIONE di POPOLAZIONE

Il meccanismo per ottenere l'inv. di popolazione si chiama pompaggio, e in generale dipende dal tipo di mezzo usato per l'amplificazione della radiazione.

I più importanti tipi di pompaggio sono: ottico, scarica elettrica, chimico.

PRINCIPI di BASE del LASER

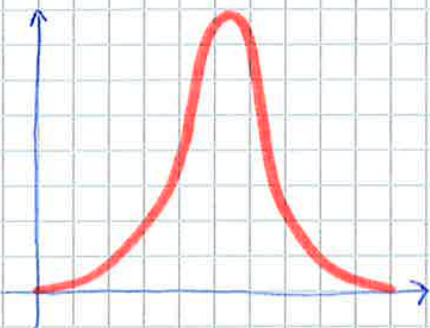
Un dispositivo laser emette radiazione coerente con una certa potenza di output. Il dispositivo è costituito dalle seguenti parti:

mezzo attivo: mezzo che amplifica la radiazione attraverso emissione stimolata dominante, in quanto siamo in presenza di inversione di popolazione.

sistema di pompaggio: per ottenere l'inv. di popolazione nel mezzo attivo.

risonatore: permette di far passare tante volte la rad. nel mezzo attivo, in modo da massimizzare l'amplificazione.

LASER IDEALE a 2 LIVELLI



Utilizzeremo l'eq. per la densità di energia ricavata in precedenza (1). Teniamo conto del fatto che anche i fotoni che non hanno esattamente $\nu_0 = (E_2 - E_1)/h$ possono venire scambiati nei processi di emissione stimolata e assorbimento, introducendo una funzione che descrive la forma della linea di transizione (line shape) $g(\nu - \nu_0)$, tale che

$$\int g(\nu - \nu_0) d\nu = 1$$

Nel caso del gas a bassa densità, la principale fonte di allargamento della linea di transizione è l'effetto Doppler. Gli atomi si muovono casualmente generando shift Doppler sia positivi che negativi della frequenza di transizione.

CONDIZIONE di SOGLIA

Affinche' ci sia effettivamente **amplificazione** nel laser, il guadagno deve superare le perdite, quindi:

$$K_{\nu} > \alpha \iff G \cdot V > 1$$

Ricordandoci che $K_{\nu} = \frac{h\nu}{c} B_{21} g(\nu - \nu_0) (N_2 - g_2/g_1 N_1)$ nel caso di laser a 2 livelli con gas come mezzo attivo, possiamo notare che:

- le perdite del dispositivo (incorporate in α), vanno a porre delle condizioni sul pompaggio.
- Solo quando ν si avvicina al valore ν_0 per il quale $g(\nu - \nu_0)$ è massima si verifica la condizione di soglia.

La condizione di soglia per il funzionamento del laser, espone quindi importanti aspetti che concorrono durante la costruzione di un dispositivo laser, ovvero il design del risonatore ottico e il sys di pompaggio. Questi 2 aspetti, sono inoltre intimamente correlati con la scelta del mezzo attivo, il quale va a determinare la frequenza della radiazione amplificata e che è suscettibile a un determinato sistema di pompaggio.

In particolare, il pompaggio (indispensabile per ottenere inversione di popolazione) sostenuto in maniera continuativa sviluppa notevole potenza.

Condizione stazionaria

Un'altra cosa importante da evidenziare è che il guadagno G non è indipendente dalla densità di energia. Se così fosse, sarebbe possibile ottenere intensità infinita come conseguenza di un numero infinito di acq. Quello che succede è che il guadagno G diminuisce con l'aumentare dell'intensità del fascio, fino a quando si raggiunge una situazione stazionaria, nella quale

$$G_{\infty} V = 1$$

il guadagno è pari alle perdite

Alternativamente si può immaginare che la differenza di popolazione $N_2 - N_1$ raggiunga un valore tale per cui

$$(N_2 - N_1)_{\infty} = \frac{\alpha}{\sigma}$$

LASER REALI

La situazione nei dispositivi reali è più complicata, e il funzionamento è basato su più di 2 livelli (in genere 3 o 4). Inoltre, il mezzo può non essere un gas, ma un liquido o un solido. E altre configurazioni del risonatore ottico più complesse, ad esempio costituito da una cavità con 2 specchi piatti // alle estremità.

Nonostante le differenze rispetto ai casi reali, il valore del semplice modello a 2 livelli risiede nel fatto che le definizioni, considerazioni e le problematiche che sono state esposte sono in generale ancora valide nei sistemi più complessi.

ESEMPIO 3: Laser He:Ne

mezzo attivo: miscela di He e Ne

pompaggio: scarica elettrica

Questo laser permette la produzione di un fascio di $\lambda = 633 \text{ nm}$ (RED).
Le potenze che si raggiungono sono $< 100 \text{ mW}$. È anche possibile far funzionare il laser He-Ne su λ differenti (dall'IR al verde).
Si può ottenere radiazione polarizzata, e hanno un basso costo.

applicazioni: avendo un basso costo e una bassa richiesta di potenza, è comunemente usato per allineamenti, interferometria, olografia.

ESEMPIO 4: Laser CO₂

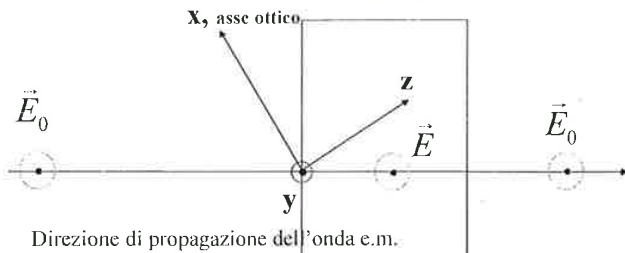
mezzo attivo: miscela di CO₂, N₂, He

pompaggio: scarica elettrica

Con questo laser raggiungiamo le potenze maggiori $\sim 1 \text{ kW}$. Emette su differenti λ , di cui la principale è $10.6 \mu\text{m}$ (INFRAROSSO).
È abbastanza semplice implementare in questo tipo di laser sistemi che consentono di ottenere piccoli impulsi di elevata potenza.

applicazioni: Processing industriale, taglio di materiali plastici e metallici, saldature, applicazioni militari (LIDAR).

Facciamo incidere una onda e.m. polarizzata come in figura ortogonalmente al piano x,z (contenente l'asse ottico), perpendicolarmente alla faccia di un blocco di materiale dielettrico tipo «calcite».



Il pedice \parallel indica tutte le proprietà del materiale e tutte le caratteristiche dell'onda parallele all'asse ottico. Il pedice \perp indica tutte le proprietà del materiale e tutte le caratteristiche dell'onda parallele al piano y,z perpendicolare all'asse ottico.

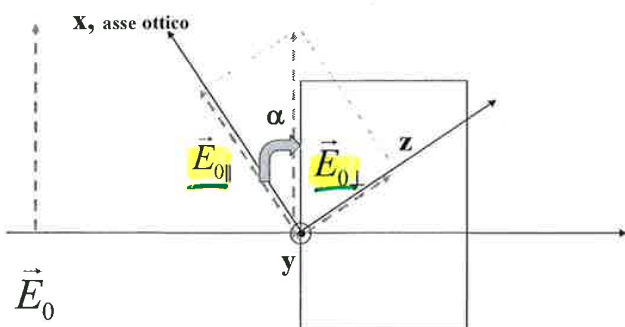
Nel materiale il campo elettrico dell'onda vale

$$\vec{E} = \vec{E}_0 - \frac{\vec{P}}{\epsilon_0} \quad \text{se} \quad \vec{P} = \epsilon_0 \chi_{e\parallel} \vec{E}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 - \frac{\vec{P}_\perp}{\epsilon_0} = \vec{E}_0 - \frac{\epsilon_0 \chi_{e\perp} \vec{E}}{\epsilon_0}$$

Cosa cambia ?

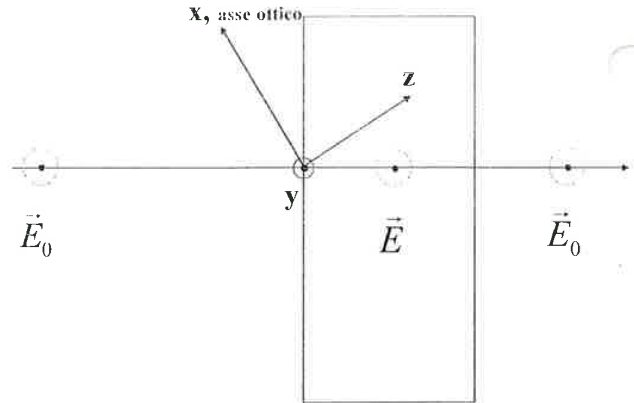
se facciamo incidere una onda e.m., polarizzata come in figura sul piano x,z contenente l'asse ottico, perpendicolarmente alla faccia di un blocco di materiale dielettrico tipo «calcite».



Ricordiamo che il pedice \parallel indica tutte le proprietà del materiale e tutte le caratteristiche dell'onda parallele all'asse ottico. Il pedice \perp indica tutte le proprietà del materiale e tutte le caratteristiche dell'onda parallele al piano y,z perpendicolare all'asse ottico.

Con questa notazione il campo elettrico dell'onda nel vuoto diventa

$$\vec{E}_0 = \vec{E}_{0\parallel} + \vec{E}_{0\perp}$$



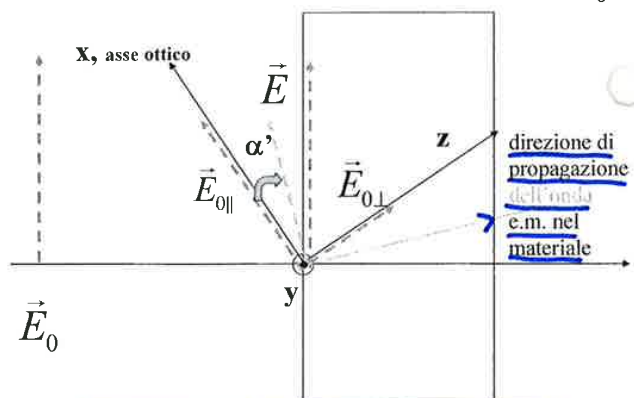
$$\vec{E} = \vec{E}_0 - \frac{\vec{P}_\perp}{\epsilon_0} = \vec{E}_0 - \frac{\epsilon_0 \chi_{e\perp} \vec{E}}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{E}_0}{1 + \chi_{e\perp}} = \frac{\vec{E}_0}{\epsilon_\perp}$$

Quindi campo elettrico nel vuoto e campo elettrico nel materiale rimangono paralleli e la direzione di propagazione rimane perpendicolare alla faccia del materiale.

Nel materiale il campo elettrico diventa

$$\vec{E} = \vec{E}_\parallel + \vec{E}_\perp = \vec{E}_0 - \frac{\vec{P}}{\epsilon_0}$$



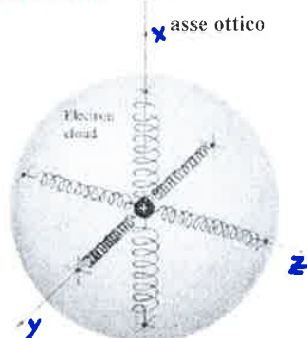
Quindi il vettore di polarizzazione del materiale avrà due componenti

$$\vec{P} = \vec{P}_\parallel + \vec{P}_\perp = \chi_{e\parallel} \epsilon_0 \vec{E}_\parallel + \chi_{e\perp} \epsilon_0 \vec{E}_\perp$$

Con $\chi_{e\parallel}$ $\chi_{e\perp}$ ϵ_\parallel ϵ_\perp sono rispettivamente le suscettività elettriche e le costanti dielettriche relativi in direzione dell'asse ottico e sul piano perpendicolare all'asse ottico.

Polarizzazione delle onde e.m. con cristalli birifrangenti «dicroici»

↳ **sdoppiano i fasci**



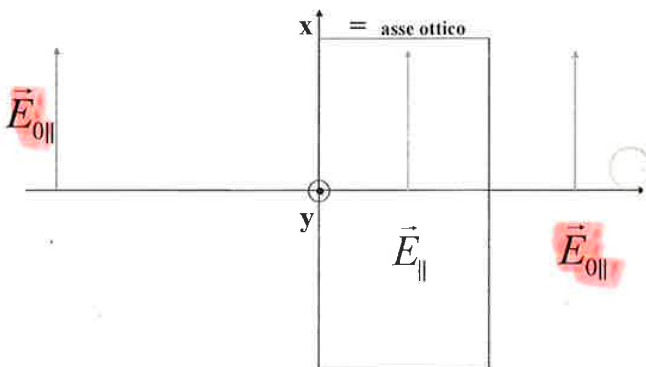
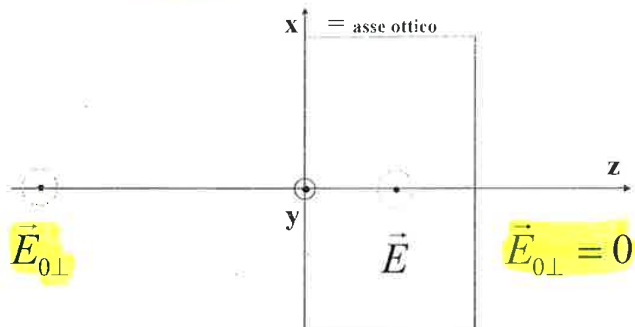
Le costanti elastiche del sistema sono:

k_{\perp} sul piano y,z

k_{\parallel} sull'asse ottico

Esistono materiali, detti **dicroici**, in cui le cariche oscillanti sul piano y,z assorbono il campo e.m. senza rimetterlo in forma e.m. (rimettono l'energia come calore).

Nei materiali **dicroici**, in cui le cariche oscillanti sul piano y,z assorbono il campo e.m. senza rimetterlo in forma e.m. abbiamo

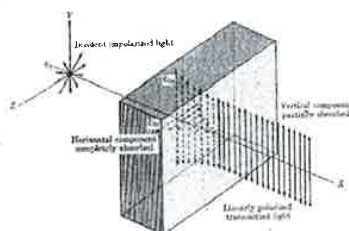


comportamento di un filtro: POLARIZZATORE

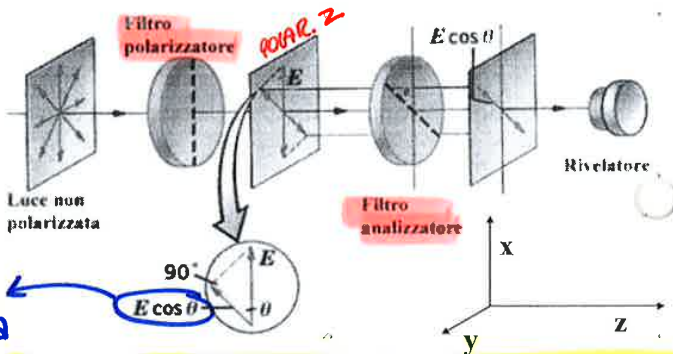
Polarizzazione per dicroismo

Alcune sostanze assorbono le onde straordinaria e ordinaria in proporzioni molto differenti. L'onda che si propaga in un materiale sufficientemente spesso viene gradualmente polarizzata.

Questo fenomeno, detto **dicroismo**, è alla base del principio di funzionamento dei polarizzatori, dispositivi ottici che polarizzano la radiazione per assorbimento selettivo.



è quella che passa



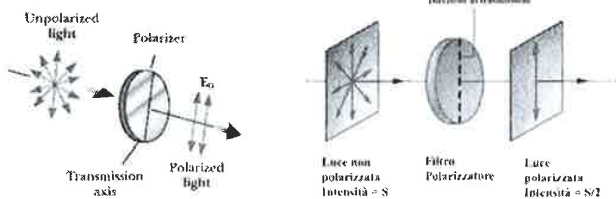
Dopo il primo polarizzatore dicroico la luce naturale risulta polarizzata in direzione asse x .

Il campo elettrico dell'onda, vibrante in direzione x ha ampiezza E , incontra un secondo polarizzatore dicroico con asse ottico inclinato di un angolo θ rispetto all'asse x sul piano xy .

Il vettore campo elettrico dell'onda è scomponibile in direzione dell'asse ottico del polarizzatore $E \cos \theta$ e in direzione perpendicolare $E \sin \theta$.

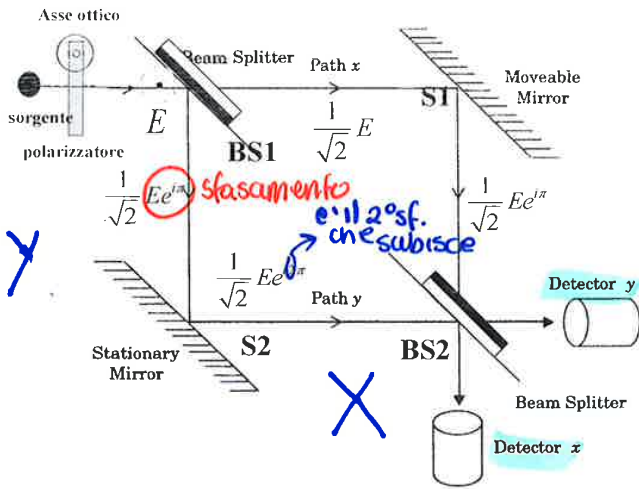
Il campo elettrico dopo il secondo polarizzatore ha ampiezza $E \cos \theta$ perché la componente $E \sin \theta$ viene assorbita.

IMPORTANTE



10/05/18

Interferometro di Mach-Zehnder



Una onda e.m. polarizzata E entra nel sistema dotato di 4 bracci uguali di lunghezza L .

Il Beam Splitter **BS1** divide il fascio in due sottofasci di uguale intensità cioè di uguale modulo del campo

$$\frac{E_0}{\sqrt{2}}$$

L'onda sul percorso x incontra **BS2** dividendosi in due contributi:

contributo verso detector y si riflette su **BS2** sul lato metallico e si sfasa di π

$$E(x, \text{verso } Dy) = \frac{1}{2} E e^{i2\pi}$$

contributo verso detector x non interagisce con **BS2**

$$E(x, \text{verso } Dx) = \frac{1}{2} E e^{i\pi}$$

L'onda sul percorso y incontra **BS2** dividendosi in due contributi:

contributo verso detector y non interagisce con **BS2**

$$E(y, \text{verso } Dy) = \frac{1}{2} E e^{i2\pi}$$

contributo verso detector x si riflette su **BS2** sul lato dielettrico e non si sfasa

$$E(y, \text{verso } Dx) = \frac{1}{2} E e^{i3\pi}$$

Quindi sul detector x abbiamo

$$E(\text{su } Dx) = \frac{1}{2} E e^{i\pi} + \frac{1}{2} E e^{i2\pi} = 0$$

Sul detector y abbiamo

$$E(\text{su } Dy) = \frac{1}{2} E e^{i2\pi} + \frac{1}{2} E e^{i2\pi} = E$$

Seguiamo i due fasci lungo il percorso fino ai detectors.

Dopo Beam Splitter **BS1** il fascio si spezza in due contributi:

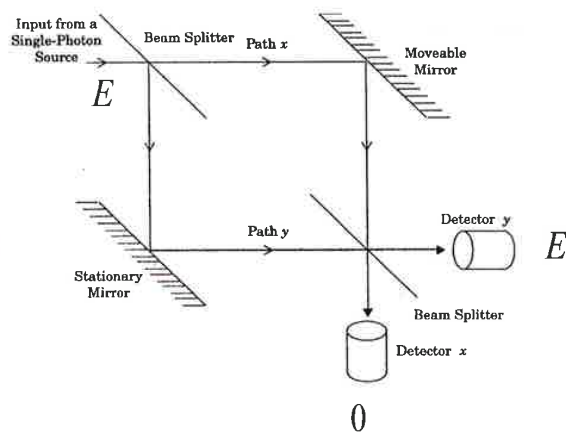
percorso x $E(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} E$

percorso y $E(y) = \frac{1}{\sqrt{2}} E e^{i\pi}$ con lo sfasamento sul lato metallico del **BS1**.

Sul percorso x l'onda incontra lo specchio metallico **SI** e si sfasa divenendo $E(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} E e^{i\pi}$

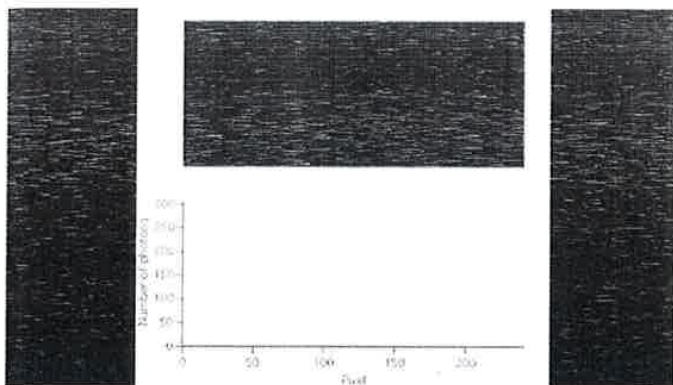
Sul percorso y l'onda incontra lo specchio metallico **S2** e si sfasa divenendo $E(y) = \frac{1}{\sqrt{2}} E e^{i2\pi}$

In conclusione



Tutta l'energia e.m. arriva sempre al detector y a causa della interferenza

sempre costruttiva al detector y
sempre distruttiva al detector x



Osserviamo che lo schermo conta singole interazioni discrete del campo e.m.. Chiamiamo questi pacchetti di energia **FOTONI**.

Il video mostra l'accumulo sullo schermo retrostante a un sistema di due fenditure di fotoni sparati uno alla volta in un esperimento effettuato nel 2005 in un laboratorio francese da Aspect ed altri.



Fotone

Idea di Einstein corroborata da numerosi esperimenti (effetto fotoelettrico, effetto Compton):

$$E = h\nu \quad \text{e. fotoelettrico}$$

$$p = \frac{h}{\lambda} \quad \text{e. Compton}$$

$$\rightarrow E = h \frac{c}{\lambda} = pc$$

il fotone ha massa = 0 !!

In questi esperimenti, si osserva che ogni singolo fotone raggiunge lo schermo in una posizione apparentemente casuale, ma una volta che un numero elevato di fotoni è passato la distribuzione non è uniforme, bensì ripresenta perfettamente le frange di luce ed oscurità osservate da Young, con molti fotoni che colpiscono le aree di luce e nessun fotone che arriva nelle zone d'ombra.

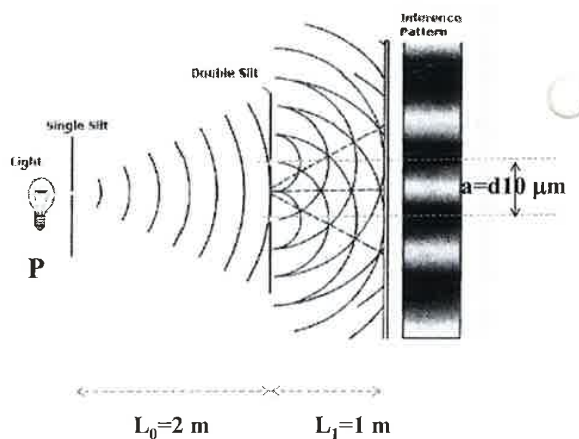
Siccome abbiamo ridotto la potenza della sorgente e nel sistema è presente un fotone alla volta la creazione delle frange di interferenza non è dovuta ad interazioni tra fotoni diversi ma è un **effetto di autointerferenza**.

Se la luce è immaginata come un'onda, si attribuisce ad essa la proprietà di essere distribuita nello spazio. Essa può passare attraverso entrambe le fenditure nell'esperimento di Young, producendo la figura di interferenza.

Ma se, a seguito di evidenze sperimentali in conflitto con l'ipotesi ondulatoria, si adotta un modello della luce come composta di fotoni e se si osserva l'interferenza persistere anche quando l'intensità della luce è così bassa che solo un fotone alla volta passa attraverso le fenditure, **quale spiegazione si può fornire?**

Il problema della doppia fenditura: il sorgere delle frange nell'esperimento di Young non è dovuta all'interazione tra fotoni diversi, bensì ad autointerferenza di un singolo fotone. Questo sembra in contraddizione con le proprietà di particella che vanno ascritte al fotone.

Calcoliamo la potenza della sorgente monocromatica con $\lambda = 500 \text{ nm}$ per avere un solo fotone alla volta nel sistema.



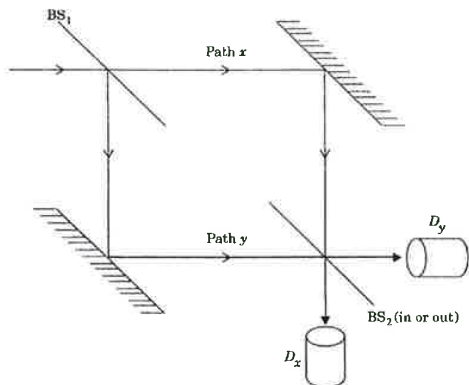
Ogni fotone ha energia $h\nu$ e abbiamo N_{fot} emessi sull'angolo solido 4π .

Un singolo fotone emesso dalla sorgente verso lo schermo impiega un tempo Δt ad arrivare con

$$\Delta t = \frac{L_0 + L_1}{c} \approx 10^{-8} \text{ s}$$

Fase del fotone: interferometro Mach-Zender

Ragioniamo su un interferometro Mach-Zender dove il secondo Beam Splitter **BS2** può essere inserito o rimosso a piacere e introduciamo un fotone alla volta.



- **BS₂ assente** → ognuno dei detector **D_x** e **D_y** registra il 50% dei fotoni entranti e ci dice quale ramo è stato percorso dal fotone: $x \rightarrow D_x, y \rightarrow D_y$
- **BS₂ inserito** → abbiamo interferenza: solo il detector **D_y** registra gli eventi, non sappiamo più nulla sul percorso seguito dal fotone

L'angolo sotto cui la sorgente supposta puntiforme vede un'area di $dS=1mm^2$ di **BS1** vale

$$\frac{d\Omega}{4\pi} = \frac{dS}{4\pi L_0^2}$$

$$d\Omega = \frac{dS}{L_0^2} \approx 10^{-6} \text{ rad}$$

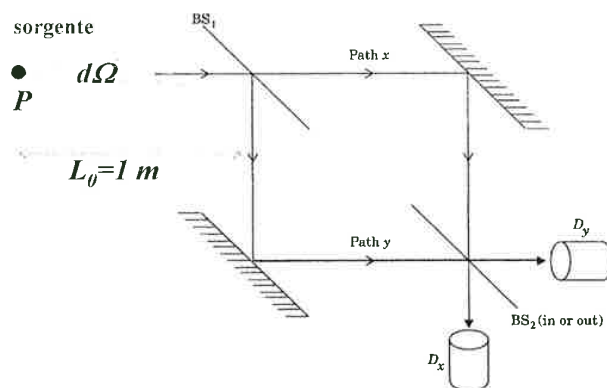
Se un singolo fotone viene emesso nell'angolo solido $d\Omega$ nell'intervallo di tempo Δt il numero di fotoni emesso su tutto l'angolo solido nell'unità di tempo vale

$$\frac{N_{\text{fot}}}{\Delta t} = \frac{4\pi}{d\Omega} \frac{1}{\Delta t} \approx 4\pi \cdot 10^{14} \text{ fot} / s$$

Quindi la potenza della sorgente deve essere inferiore a

$$P = \frac{N_{\text{fot}}}{\Delta t} h\nu = \frac{4\pi}{d\Omega} \frac{h\nu}{\Delta t} \approx 500 \mu W$$

Prima di tutto chiediamoci l'intensità di una sorgente per avere un fotone alla volta nell'interferometro dotato di 4 bracci uguali di lunghezza $L=0,5 m$.

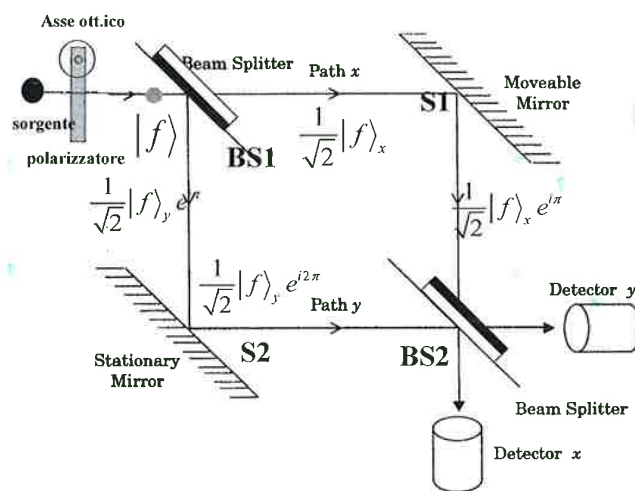


Ogni fotone ha energia $h\nu$, monocromatico con $\lambda=500 \text{ nm}$, e abbiamo N_{fot} emessi sull'angolo solido 4π .

Un singolo fotone emesso dalla sorgente verso l'interferometro, in modo da colpire una area di $dS=1mm^2$ di **BS1**, impiega un tempo Δt ad arrivare ai detector

$$\Delta t = \frac{L_0 + 4L}{c} \approx 10^{-8} \text{ s}$$

Vediamo di sviluppare una algebra che possa descrivere il fotone nell'interferometro.



Indichiamo lo stato del fotone come un vettore astratto $|f\rangle$:

Visto che il risultato degli esperimenti con campi e.m. continui e con fotoni è lo stesso, trattiamo il vettore che rappresenta il fotone con la stessa algebra dei campi e.m.

In presenza del Beam Splitter 2 BS2:

il fotone della «storia» sul percorso x incontra BS2 dividendosi in due «sotto-storie»:

verso il detector y se si riflette su BS2 sul lato metallico e si sfasa di π

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} |f\rangle_{x, versoDy} e^{i2\pi} \right)$$

verso detector x se non interagisce con BS2

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} |f\rangle_{x, versoDx} e^{i\pi} \right)$$

il fotone della «storia» sul percorso y incontra BS2 dividendosi in due «sotto-storie»:

verso detector y se non interagisce con BS2

$$\frac{1}{2} |f\rangle_{y, versoDy} e^{i2\pi}$$

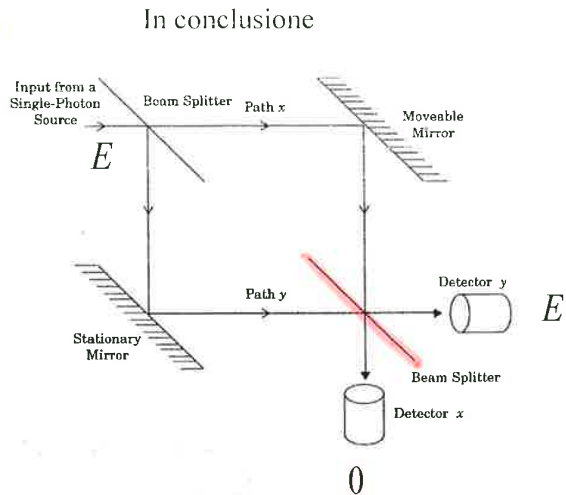
verso detector x se si riflette su BS2 sul lato dielettrico e non si sfasa

$$\frac{1}{2} |f\rangle_{y, versoDx} e^{i2\pi}$$

Quindi sul detector x abbiamo

$$\frac{1}{2} |f\rangle_{x, versoDx} e^{i\pi} + \frac{1}{2} |f\rangle_{y, versoDx} e^{i2\pi} = 0$$

Sul detector y abbiamo

$$\frac{1}{2} |f\rangle_{x, versoDy} e^{i2\pi} + \frac{1}{2} |f\rangle_{y, versoDy} e^{i2\pi} = |f\rangle_{versoDy}$$


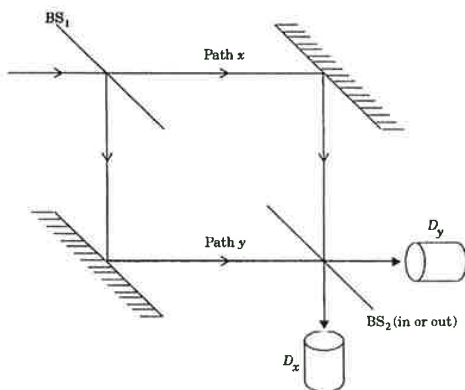
Tutti i fotoni arrivano sempre al detector y a causa della interferenza

sempre costruttiva al detector y
sempre distruttiva al detector x

Cioè in conclusione i fotoni sono descrivibili singolarmente da entità dotate di energia, polarizzazione e fase, inoltre soddisfano il principio di sovrapposizione.

SCELTA RITARDATA

Ragioniamo su una variante dell'interferometro Mach-Zender dove il secondo specchio semi-riflettente BS2 può essere inserito o rimosso a piacere



- * BS₂ assente → ognuno dei detector D_x e D_y registra il 50% dei fotoni entranti e ci dice quale ramo è stato percorso dal fotone: x → D_x, y → D_y
- * BS₂ inserito → abbiamo interferenza: solo il detector D_y registra gli eventi, non sappiamo più nulla sul percorso seguito dal fotone

Scelta ritardata: inizialmente BS₂ è assente e viene inserito solo dopo che il fotone ha passato BS₁

Secondo una possibile interpretazione della teoria del fotone particellare ciascun fotone si comporta come una particella (BS₂ è inizialmente disinserito) e sceglie uno dei 2 rami con probabilità 1/2.

La successiva inserzione di BS2 non cambia questa scelta e, anche se esso è presente, quando il fotone lo raggiunge non può dar luogo a interferenza!

Ma cosa succede nella realtà?

Nello schema di descrizione particellare del campo e.m. devono permanere le proprietà di 1. sovrapposizione, 2. polarizzazione in due stati e 3. fase senza le quali non avremmo i fenomeni interferenziali.

Sostituiamo quindi il campo elettrico con un vettore di stato (come abbiamo fatto per l'interferometro di Mach-Zehnder), che mantiene però l'algebra di sovrapposizione, polarizzazione in due stati e fase, esprimibile in modo equivalente come:

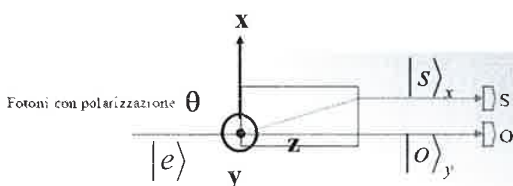
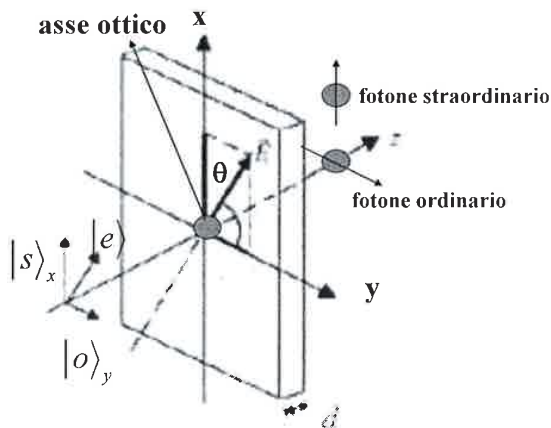
$$|e\rangle = \cos\theta |s\rangle_x e^{i\phi_x} + \sin\theta |o\rangle_y e^{i\phi_y}$$

$$|e\rangle = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} e^{i\phi_x} + \begin{pmatrix} 0 \\ \sin\theta \end{pmatrix} e^{i\phi_y}$$

Dove $|e\rangle$ rappresenta lo stato (presenza) del fotone polarizzato in una direzione θ rispetto all'asse x sul piano x,y, $|s\rangle_x$, $|o\rangle_y$ rappresentano una base ortonormale rispetto agli assi x e y per la scomposizione del vettore di stato, Φ_x e Φ_y rappresentano la fase dello stato.

Quindi il vettore di stato del fotone, che sostituisce il campo e.m. è: $|e\rangle = \cos\theta |s\rangle_x + \sin\theta |o\rangle_y$

$$|e\rangle = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} e^{i\phi_x} + \begin{pmatrix} 0 \\ \sin\theta \end{pmatrix} e^{i\phi_y}$$



L'intensità dello stato del fotone possiamo scriverlo come

$$I = \left[(\cos\theta \ 0)e^{i\phi_x} + (0 \ \sin\theta)e^{i\phi_y} \right] \left[\begin{pmatrix} \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} e^{i\phi_x} + \begin{pmatrix} 0 \\ \sin\theta \end{pmatrix} e^{i\phi_y} \right]$$

$$I = (\cos^2\theta + \sin^2\theta) = 1$$

Oppure con notazione alternativa $I = \langle e || e \rangle$

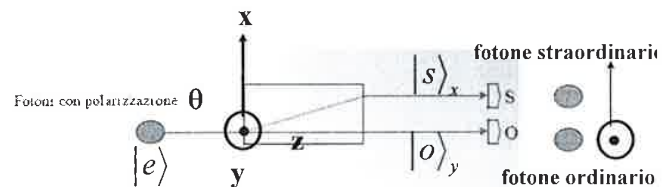
$$I = (\cos\theta e^{-i\phi_x} \langle s| + \sin\theta e^{-i\phi_y} \langle o|) \cdot (\cos\theta |s\rangle e^{i\phi_x} + \sin\theta |o\rangle e^{i\phi_y})$$

siccome $\langle s || o \rangle = 0$; $\langle s || s \rangle = \langle o || o \rangle = 1$

$$I = (\cos^2\theta + \sin^2\theta) = 1$$

I fotoni sono caratterizzati da una direzione di propagazione e da una energia che dipende dall'onda, da uno stato di polarizzazione che dipende dai versori unitari, da una fase contenuta nell'esponentiale complesso.

L'intensità deve confermare o meno la presenza della particella, cioè deve valere 1 o 0.



Un fotone in ingresso con polarizzazione lungo la direzione $|e\rangle$

$$|e\rangle = \cos\theta |s\rangle_x + \sin\theta |o\rangle_y$$

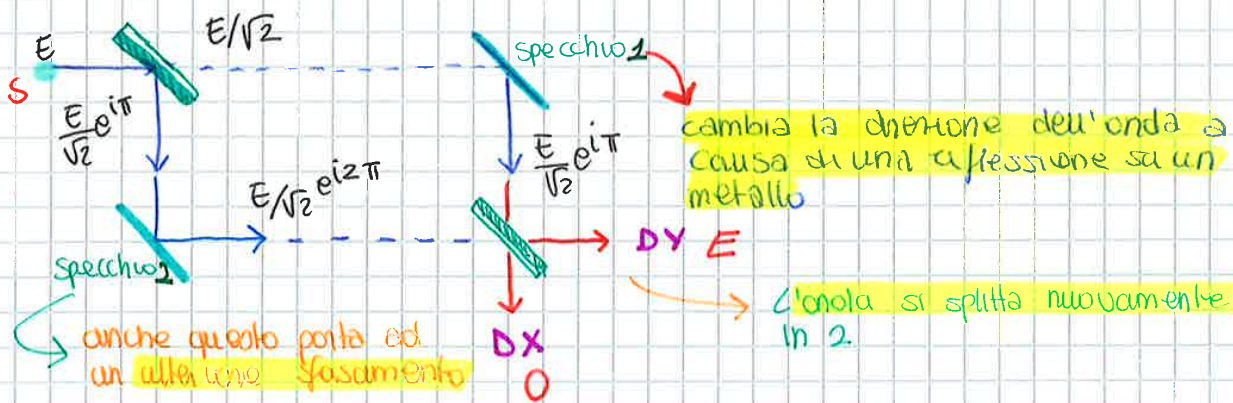
All'ingresso del cristallo birifrangente il fotone deve scegliere il percorso tra il raggio ordinario o quello straordinario.

Se N sono i fotoni in ingresso si rileva sperimentalmente che i conteggi sul detector S sono N_S e quelli sul detector O sono N_O in modo tale che

$$\frac{N_S}{N} = \cos^2\theta$$

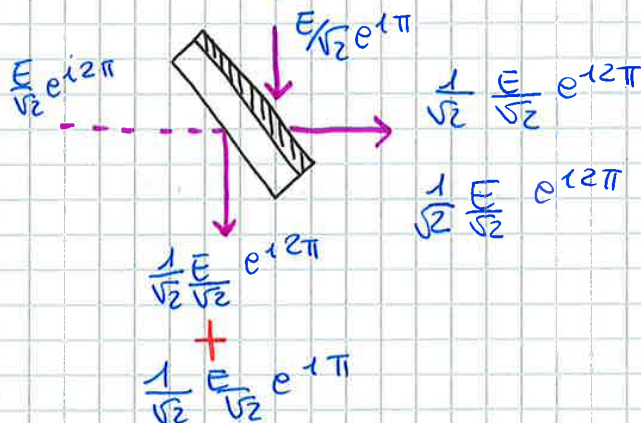
$$\frac{N_O}{N} = \sin^2\theta$$

cioè i coefficienti al quadrato della scomposizione dello stato rappresenta la probabilità che un fotone scelga un percorso associato alla base della scomposizione



Adesso ragioneremo meglio sui fenomeni interferenziali che scateniscono dal secondo beam-splitter

E_{eff} → non subisce alcuno sfasamento



! Il sistema è dotato di 4 bracci uguali di lunghezza L realizzati con dei regolatori micromeccanici, in modo da avere delle ampiezze E_f ma identiche

Adesso andiamo a vedere cosa arriva nei 2 detector:

DX: $\frac{E}{2} (\cos 2\pi + i \sin 2\pi) + \frac{E}{2} (\cos \pi + i \sin \pi) = \dots = 0$ non arriva luce int. distruttiva

DY: $\frac{E}{2} (\cos 2\pi + i \sin 2\pi) + \frac{E}{2} (\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = \dots = E$

Qui ho sempre interferenza costruttiva. In questo caso arriva tutta la luce

Questo strumento mi consente di misurare λ molto piccole, quindi è uno strumento molto preciso

Ipotesiamo di lavorare con potenze molto minori di 50 μW monocromatiche che è analogo a vedere l'exp di Young, ovvero l'interferenza a 2 fenditure.

Nonostante sia difficilissimo, mettiamoci nella condizione:

* Vd Video

Con la CCD posso contare i puntini, ma se conosco la λ della radiazione em posso andare a costruire la seguente grafica.



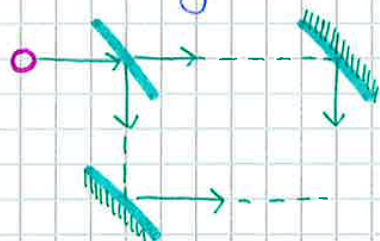
Scopriamo che l'andamento è lineare e che la tangente rimane costante ed è pari a:

$$tg \alpha = \underbrace{6.6 \cdot 10^{-34}}_h \text{ J}\cdot\text{s}$$

Cosa accade quando introduciamo un singolo pacchetto per volta?

I fotoni si comportano come particelle indivisibili e pulcunabili, come se leggono memoria del vettore \vec{E} .
Immettiamo nell'interferometro due pacchetti di fotoni uno alla volta.

Iniziamo ragionando con un interferometro del tipo, dove omettiamo il



secondo BS quando sparo un numero n di fotoni che

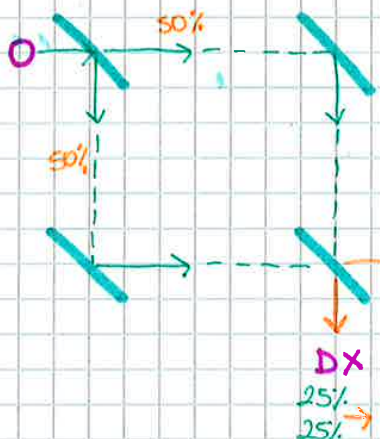
$\frac{n}{2}$ vanno su **DX**
 $\frac{n}{2}$ vanno su **SX**

DX 50%

DY 50%

Macroscopicamente il 50% dell'intensità è passata attraverso il BS1, mentre l'altro 50% si è riflesso

Consideriamo adesso un'altra configurazione



Se supera il BS il fotone non viene riflesso in quanto è indivisibile

In termini probabilistici avrai vari percorsi possibili per ottenere ai detector un numero di fotoni pari a quello immesso

I pacchetti di n dentro all'interferometro di MZ danno origine ad un fenomeno interferenziale tipico dell'onda, facendo sì che permangano solo quelli che devono andare ad y , quindi se ne registra il 100%.

Partiamo dal discorso dell'interferometro di MZ dal punto di vista macroscopico, ricordandoci che il fenomeno dell'interferenza è dovuto alla fase mentre, il contributo energetico è nascosto nella ampiezza e quindi nell'intensità.

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i\phi}$$

$$I = \vec{E}^* \cdot \vec{E}$$

Qui la fase sparisce

L'intensità nel caso discreto mi informa sulla presenza o meno del pacchetto, vale 1 o 0, e devo mantenere memoria della fase in modo da poter avere interferenza, quindi devo avere un vettore, ovvero la fase che dà origine alla interferenza

$$|f\rangle e^{i\phi}$$

$$1 = \vec{e}^{i\phi} \langle f|f\rangle e^{i\phi}$$

$$\langle f|f\rangle = 1$$

intensità misurata per interi

Adesso ragioniamo sulle storie dei fotoni

$$DX: \frac{|f\rangle_y}{\sqrt{2}} e^{i2\pi} + \frac{|f\rangle_x}{2} e^{i\pi}$$

$$DY: \frac{|f\rangle_y}{2} e^{i2\pi} + \frac{|f\rangle_x}{2} e^{i2\pi}$$

* I pedici sono stati inseriti per compatificare il pedice, ma non hanno significato fisico

→ $DX: \frac{|f\rangle}{2} (1) + \frac{|f\rangle}{2} (-1) = 0$

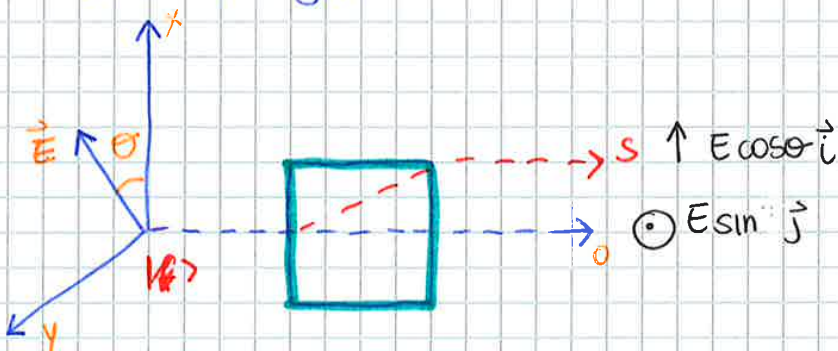
$$DY: \frac{|f\rangle}{2} (1) + \frac{|f\rangle}{2} (1) = |f\rangle$$

Risultati coerenti con l'evidenza sperimentale.

Quindi il fotone ha un comportamento sia particellare che corpuscolare, in particolare continua a valere il PDS e la polarizzazione

Noteremo che all'interno di questa algebra anche il riepilogò queste caratteristiche che, e da qui partiremo per la descrizione di fenomeni come il teletrasporto e l'entanglement quantistico

Adesso applichiamo la stessa algebra usando l'interferometro di MZ con un cristallo birifrangente



Udovolo sovrapporre il campo nella sua totalità abbiamo

$$\vec{E} = \cos\theta E_0 e^{i\phi} \hat{i} + \sin\theta E_0 e^{i\phi} \hat{j}$$

campo em medio scoperto

Al posto del campo mettiamo lo stato del campo del singolo fotone

$$|e\rangle = \cos\theta |s\rangle e^{i\phi} + \sin\theta |o\rangle e^{i\phi}$$

polarizzato // al piano della lavagna

In particolare abbiamo che

$$\langle e | e \rangle = 1$$

$$\langle o | o \rangle = 1$$

$$\langle s | s \rangle = 1$$

$$\langle o | s \rangle = 0$$

Gli stati sono fra loro ortogonali e da un pto di vista micro si conferma l'individualità

07/05/18

Per capire come si comporta la luce affronteremo la trattazione della propagazione di onde em in dielettrici anisotropi

MATERIALI ANISOTROPI

Vd Slides per i grafici

Quando siamo in presenza di materiali anisotropi

Oggi ci concentreremo sui materiali birifrangenti: il più famoso e usato è il carbonato di calcio.

OMOGENEO → le propr. fisiche sono invarianti per traslazioni

ISOTROPO → problema di direzionalità

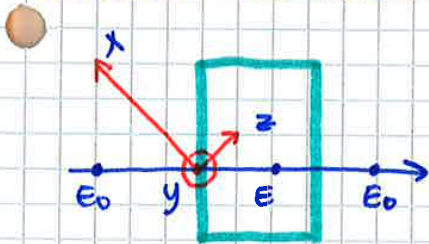
Noi in particolare tratteremo dei materiali omogenei anisotropi, la cui struttura cristallina ha un asse di sym (asse ottico) lungo la congiungente tra l'atomo di C e l'atomo di Ca

Quindi, le proprietà em hanno valori diversi lungo l'asse ottico o in direzione ⊥

Tratteremo materiali birifrangenti che hanno un solo asse ottico, e nello specifico affronteremo la calcite

⊥ all'asse ottico Ca-C

Dal pto di vista em prendiamo un parallelepipedo di un cristallo birifr. in modo che l'asse ottico sia obliquo. Facciamo incidere un'onda em // all'asse x. Quindi il campo em sarà // all'asse y.



Quando l'onda entra nel materiale mette in oscillazione parallelamente al piano che è ⊥ all'asse ottico

Nel materiale il campo elettrico dell'onda vale

$$E = E_0 - P/\epsilon_0 \quad P = \epsilon_0 \chi_{e\perp} \vec{E}$$

Ma poiché le proprietà variano solo un piano ⊥ o // all'asse ottico, allora devo etichettare

$$E = E_0 - \frac{\epsilon_0 \chi_{e\perp} E}{\epsilon_0} \rightarrow E(1 + \chi_{e\perp}) = E_0 \rightarrow E = \frac{E_0}{\epsilon_{e\perp}}$$

In termini di campo totale avremo

$$E_{\perp} / E_{\parallel} = \left(\frac{\epsilon_{0\perp}}{\epsilon_{0\parallel}} \right) \frac{\epsilon_{r\parallel}}{\epsilon_{r\perp}} = \tan^2 \alpha \frac{\epsilon_{r\parallel}}{\epsilon_{r\perp}}$$

Quindi noi sappiamo che nel CaCO_3 $\epsilon_{r\perp} > \epsilon_{r\parallel}$, e quindi che la direzione di propagazione nel vuoto in funzione del materiale si inclina rispetto a quella

$$\rightarrow \tan \alpha' = \tan \alpha \frac{\epsilon_{r\parallel}}{\epsilon_{r\perp}}$$

Quindi l'inclinazione è pari a $\alpha - \alpha' = \beta$

È interessante notare che il materiale ha uno spuntore, e da questo emergono 2 raggi:

Il raggio ordinario \rightarrow materiale om. isotropo

Il raggio straordinario \rightarrow derivante dal fatto che ho un materiale omogeneo isotropo

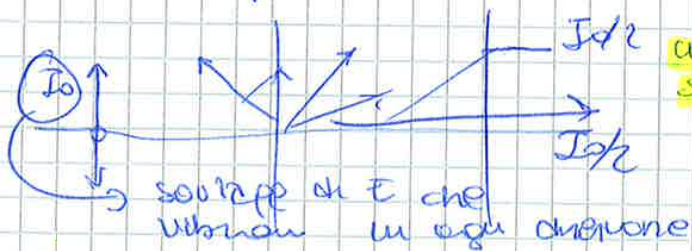
I materiali birifrangenti scoppiano i foci

È dell'onda nel raggio ordinario vibrava \perp al piano della lamina e procede indisturbato solo se la vibrazione avviene \perp

Se entra luce con le 2 componenti queste vengono sep. in 2 raggi \neq
 Se il materiale è trasparente un fascio e ne escono 2 distinti
 Il raggio ordinario segue la legge di Snell, a diff. di quello di straordinario ha prop. in un mezzo \neq in base all'incl. del raggio alla fase del cristallo.

In merito all'intensità

Ca Ca è un mat. trasparente, quindi non assorbe rad. em. (veloc.)
 se vi faccio incidere un raggio di intensità I_0 di luce non polarizzata



quora il contributo viene speso in 2 contributi =

In termini di E abbiamo $I = |\text{Poynting}| = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E \cdot E}{c \mu_0}$
 istantanea $= E^2 / \mu_0 c$

$$I_m = \frac{1}{2} I$$

In particolare con le CGS $I = E^2$

$$I = E^2 = \vec{E} \times \vec{E} = \left(\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix} \right) \times \left(\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix} \right)$$

13/05/2018

OLOGRAFIA

PROIEZIONE OLOGRAFICA

A livello intuitivo, una proiezione olografica, a differenza di una fotografia, rende il senso di 3D dell'oggetto rappresentato. L'osservatore può cambiare il suo punto di vista rispetto all'immagine olografica, percependo l'oggetto rappresentato nelle 3D, e la rappresentazione è quasi indistinguibile dall'oggetto reale.

VISIONE

Quando vediamo un oggetto reale, il nostro apparato visivo, ovvero la radiazione em (nel range del visibile in termini della frequenza) proveniente dallo oggetto in questione. Trascurando l'emissione termica propria dell'oggetto, in generale è indispensabile una sorgente di radiazione visibile che illumini l'oggetto. La radiazione che viene riflessa o diffusa dall'oggetto, viene rilevata dal nostro apparato visivo e porta alla percezione visiva dell'oggetto. La proiezione del colore si basa sul fatto che gli oggetti riflettono e diffondono solo alcune frequenze, quindi funziona come una sorgente secondaria di radiazione em, caratterizzata da alcune λ (colore) e in generale con una funzione d'onda più complessa rispetto ad una OP o OS.

Il principio su cui si basa l'olografia è che se noi riusciamo a ricreare la radiazione em prodotta dall'oggetto in determinate condizioni di illuminazione, possiamo percepire visivamente l'oggetto anche nel caso in cui non sia fisicamente presente.

FOTOGRAFIA

Il principio su cui si basa la fotografia è l'uso di un sys di lenti per raccogliere la radiazione riflessa o diffusa dall'oggetto e focalizzarla su un detector (pellicola o camera CCD). Il detector permette di registrare l'intensità della radiazione.

La modulazione dell'intensità a seconda della posizione porta ad avere il contrasto nell'immagine (per esempio immagini B/W).

Però una foto è una riproduzione dell'intensità della radiazione dell'oggetto nelle particolari condizioni (sorgente di luce primaria, punto di vista del fotografo) in cui era scattata. Quindi rappresenta una rappresentazione 2D dell'oggetto.

Sappiamo però che la radiazione em è caratterizzata da ampiezza e fase.

Intuitivamente, se riusciamo a registrare info sia sull'ampiezza che sulla fase, saremmo in grado di riprodurre la radiazione dell'oggetto nella sua interezza.

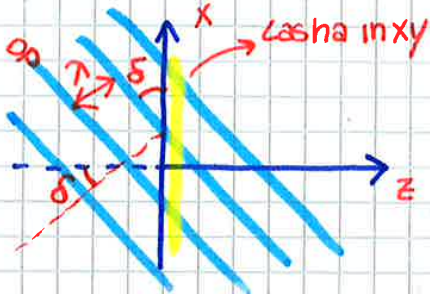
↳ In che modo potremmo farlo?

Immagine fotocamera

consideriamo la dipendenza temporale e sottointendiamo nel conto dell'interferenza la media temporale

$$\vec{R} = \vec{R}_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad \vec{O} = \vec{O}_0(\vec{r}) e^{i\phi(\vec{r})}$$

Desolviamo la lastra fotografica con coordinate (x, y) e la posizioniamo in $z=0$; la fase delle 2 onde sarà \neq in ogni pts della lastra, in questo hanno direzione di propagazione \neq e dipendenza spaziale della fase diversa. Inoltre, immaginiamo incidenza non \perp dell'onda di riferimento sulla lastra con angolo δ rispetto all'asse x , ma \perp a y



Quindi le 2 onde sulla lastra sono:

- $\vec{R} = \vec{R}_0 e^{i2\pi\sigma x}$
- $\vec{O} = \vec{O}_0 e^{i\phi(x, y)}$

dove $\sigma = \frac{\sin(\delta)}{\lambda}$

Quindi scriviamo l'espressione per l'intensità sulla lastra basando la media temporale:

$$I(x, y) = |\vec{R}|^2 + |\vec{O}|^2 + \vec{R} \cdot \vec{O}^* + \vec{R}^* \cdot \vec{O}$$

Sostituendo \vec{R} e \vec{O} otteniamo:

$$I(x, y) = |\vec{R}_0|^2 + |\vec{O}_0(x, y)|^2 + \vec{R}_0 \cdot \vec{O}_0^*(x, y) e^{i2\pi\sigma x} e^{-i\phi(x, y)} + \vec{O}_0(x, y) \cdot \vec{R}_0^* e^{i\phi(x, y)} e^{-i2\pi\sigma x} \quad (A)$$

Nel caso in cui supponiamo che sia \vec{R} che $\vec{O}(x, y)$ abbiano la stessa polarizzazione e siano entrambe polarizzate linearmente lungo la stessa direzione, abbiamo:

↳ uguale ad (A), ma senza i vettori

C'info contenuta nell'ologramma non è immediatamente interpretabile

disegno
di un
con puntini

→ onda di riferimento e onda oggetto in seguito al processo di sviluppo fotografico

Quindi dobbiamo avere un modo di ricostruire l'onda oggetto, ovvero tradurre l'ologramma in un'immagine dell'oggetto

RICOSTRUZIONE dell'OGGETTO

Dopo la fase di sviluppo, se illuminiamo la lastra fotografica con radiazione, la trasmissione attraverso la lastra dipende dalla distribuzione della intensità della radiazione totale che aveva generato il pattern di interferenza sulla lastra.

Maggiore è I , minore ($>$) è il coefficiente di trasmissione in quel punto

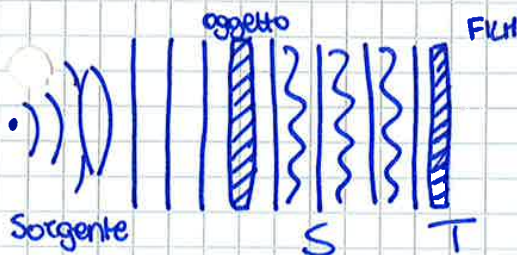
Un osservatore percepisce l'onda $\vec{U}^{(4)}(x, y)$ come una immagine virtuale degli oggetti, nella stessa posizione in cui erano al momento della registrazione dell'ologramma.

Si crea inoltre un'immagine reale degli oggetti (generata dall'onda coniugata) in posizione speculare rispetto all'ologramma.

PROBLEMA: oltre $\vec{U}^{(4)}(x, y)$, ci sono gli altri termini. Affinché l'osservatore possa percepire l'immagine 3D dell'oggetto ($\vec{U}^{(4)}$), bisogna separare questo termine dagli altri \Rightarrow bisogna lavorare sul set-up sperimentale (cioè sulla geometria).

NOTA: Il principale disturbo è dato dal fatto che l'onda coniugata genera una immagine reale dell'oggetto che è pseudoscopica, cioè con senso della profondità invertito.

OLOGRAFIA in ASSE



Primo Set up exp per olografia sviluppato da D. Gabor (Premio Nobel per la Fisica 1971). In questo caso, l'oggetto deve essere parzialmente trasparente perché si trova tra la sorgente e la lastra fotografica.

Si tratta di olografia in asse e l'angolo di incidenza θ è nullo.

RICOSTRUZIONE OLOGRAMMA

RICOSTRUZIONE OGGETTO

- L'immagine virtuale dell'oggetto si trova nella posizione in cui era l'oggetto.
- L'immagine reale (onda coniugata) si trova in posizione speculare.
- L'osservatore vede una sovrapposizione delle due immagini.

OLOGRAFIA fuori ASSE

Generalmente, per acquisire ologrammi di oggetti non trasparenti e per separare spazialmente l'immagine virtuale da quella reale, si lavora con set-up sperimentali simili a quello rappresentato in figura. In questo caso, l'oggetto non è semi-trasparente.

17/05/2014

Lezione 25-26

Onde coerenti: laser, olografia, teletrasporto

Dr. Marco Fontana

Politecnico di Torino

Dr. Marco Fontana

Lezione 25-26

Materiali e metodologie sperimentali
Applicazioni

Sorgente laser

Come abbiamo visto, l'olografia si basa sulla interferenza delle onde. Abbiamo visto nelle precedenti lezioni che la visibilità di un pattern di interferenza è legata al grado di coerenza delle sorgenti (è quindi delle onde) coinvolte.

Proprio per questo motivo le sorgenti di onde elettromagnetiche più adatte per applicazioni olografiche sono i dispositivi LASER, i quali combinano elevata coerenza a elevata intensità della radiazione.

In generale, il processo di registrazione dell'ologramma va effettuato entro i limiti di coerenza spaziale e temporale della sorgente laser. Vediamo quindi quali sono i parametri che influiscono sul grado di coerenza spaziale e temporale di un laser.

Dr. Marco Fontana

Lezione 25-26

Sommario

coerenza temporale → modi longitudinali
coerenza spaziale → modi trasversali

1 Materiali e metodologie sperimentali

2 Applicazioni

Dr. Marco Fontana

Lezione 25-26

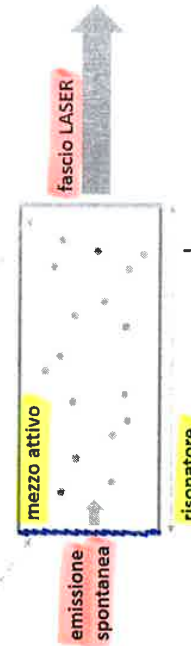
Materiali e metodologie sperimentali
Applicazioni

Modi del risonatore ottico

Consideriamo un dispositivo laser, schematizzato in figura.

specchio totalmente riflettente $R \approx 100\%$

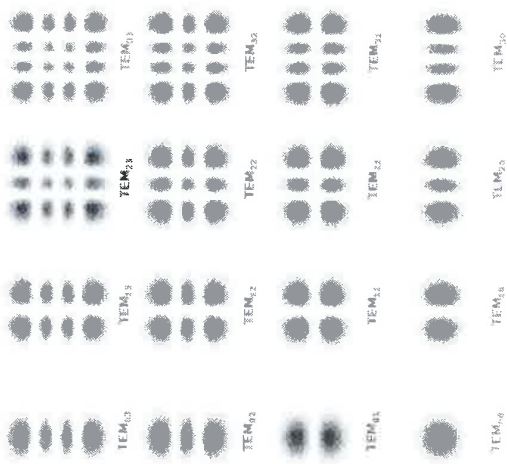
specchio di accoppiamento $R < 100\%$



Abbiamo visto nelle lezioni 19 - 20 che la cavità del laser costringe la radiazione elettromagnetica ad assumere la forma di onde stazionarie.

Dr. Marco Fontana

Lezione 25-26



Per quanto il grado di coerenza più alto possibile sia ovviamente la soluzione migliore per applicazioni di interferenza, bisogna tenere in considerazione altri fattori. In particolare, non sempre è possibile o conveniente dal punto di vista economico predisporre il laser per attività su singolo modo e quindi al maggior grado di coerenza possibile.

Nella pratica, è opportuno predisporre il set-up sperimentale in maniera tale da operare nelle condizioni in cui si riesce a ottenere un contrasto utile nel pattern di interferenza, anche se non il migliore possibile. Quindi, è importante conoscere le lunghezze di coerenza spaziale e temporale, per ottimizzare le condizioni sperimentali.

Come misurare il grado di coerenza spaziale e temporale della sorgente? Vedi lezione 11 - 12 ...

Considerando sia la direzione longitudinale che quella trasversa, un modo di risonanza in una cavità viene quindi identificato da tre numeri interi non negativi n , m e q (in analogia con quanto avevamo visto per una cavità cubica). Abbiamo visto che la coerenza temporale del fascio laser è influenzata dal numero di modi longitudinali ammessi (decresce quando il numero di modi longitudinali aumenta). Si può dimostrare che una relazione simile sussiste tra il grado di coerenza spaziale e il numero di modi trasversi.

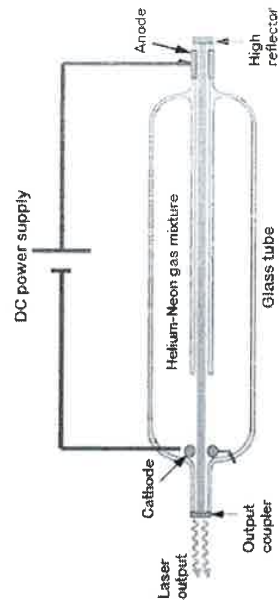
Caratteristiche di un laser per olografia

L'olografia si basa sul fenomeno dell'interferenza. La visibilità del pattern di interferenza dipende dal grado di coerenza spaziale e temporale. Quindi in linea generale per applicazioni olografiche è consigliabile lavorare in condizioni in cui il laser oscilla su un solo modo, in modo da massimizzare sia la coerenza spaziale che temporale. Inoltre è opportuno che il modo ammesso sia quello fondamentale ($TEM_{0,0}$), in modo da avere profilo di intensità gaussiano.



Laser a gas: He-Ne

Il laser He-Ne è tra i più diffusi, in quanto è relativamente economico ma ha lunghezza di coerenza che rende possibili applicazioni interferometriche, tra cui l'olografia. Il mezzo attivo è una miscela gassosa di He e Ne (normalmente in rapporto 8-1); il meccanismo di pompaggio è la scarica elettrica, ottenuto ionizzando il gas tramite applicazione di una differenza di potenziale ai due elettrodi.



Come esplicitato in precedenza, tipicamente il laser Nd:YAG produce radiazione con lunghezza d'onda $1.06 \mu m$ (INFRAROSSO). Per applicazioni olografiche nelle quali vogliamo generare una immagine visibile, è necessario lavorare con lunghezze d'onda nel range visibile.

Tramite l'utilizzo di cristalli non-lineari, è possibile effettuare il raddoppio della frequenza (e quindi il dimezzamento della lunghezza d'onda in vuoto), rendendo quindi visibile la radiazione emessa dal laser Nd:YAG.

Nei materiali dielettrici che abbiamo fino ad ora incontrato, la dipendenza della polarizzazione rispetto al campo elettrico è lineare:

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$$

dove la suscettività elettrica χ può essere un numero o un tensore a seconda che il materiale sia o non sia isotropo.

Nel caso tensoriale, l'espressione assume esplicitamente questa forma:

$$P_i = \epsilon_0 \sum_j \chi_{ij} E_j \quad i, j = 1, 2, 3$$

Non tutti i materiali rispettano questa espressione per la dipendenza della polarizzazione dal campo elettrico: in tal caso, vengono chiamati materiali otticamente non-lineari.

Una espressione più generale che tenga conto di effetti non-lineari si può ottenere tramite sviluppo in serie di Taylor troncato al secondo ordine:

$$P_i = P_i^{(0)} + \epsilon_0 \sum_j \chi_{ij}^{(1)} E_j + \epsilon_0 \sum_{j,k} \chi_{ij,k}^{(2)} E_j E_k$$

Si verifica immediatamente che se poniamo $\vec{P}^{(0)} = 0$ (escludiamo polarizzazione permanente del materiale) e $\chi_{ij,k}^{(2)} = 0$ otteniamo il caso lineare, il termine $\epsilon_0 \sum_{j,k} \chi_{ij,k}^{(2)} E_j E_k$ è un termine non-lineare quadratico.

Nel caso di mezzo isotropo e supponendo che il campo elettrico sia orientato lungo uno dei tre assi (ad esempio lungo x), l'espressione diventa:

$$P = \epsilon_0 \chi^{(1)} E + \epsilon_0 \chi^{(2)} E^2$$

Si può dimostrare che, dato un campo \vec{E} con dipendenza temporale $\exp(i\omega t)$, il termine non-lineare quadratico ha come conseguenza la generazione di un campo variabile nel tempo con dipendenza temporale $\exp(2i\omega t) \Rightarrow$ frequenza doppia. Questo fenomeno si chiama second-harmonic generation.

Per ottenere funzionalità in modalità impulsata, si usa la tecnica del Q-switching. Come suggerisce il nome, la tecnica si basa sul modificare repentinamente il fattore di merito (Q-factor) del laser in quanto sistema oscillante.

I principi base su cui si basa il Q-switching sono i seguenti:

- si effettua il pompaggio del mezzo laser (producendo inversione di popolazione), ma si fa in modo che non si crei amplificazione della radiazione (si impedisce il feedback)
- si continua il processo di inversione di popolazione fino a quando si raggiunge una condizione di saturazione
- a questo punto tramite il sistema di Q-switching si cambia velocemente da basso a alto Q-factor
- l'intero processo di amplificazione avviene molto velocemente provocando un impulso laser gigante, in grado di rilasciare moltissima energia in breve tempo (nanosecondi).

In pratica, quando radiazione elettromagnetica monocromatica (fascio laser) attraversa un cristallo non-lineare quadratico, il fenomeno della second-harmonic generation produce in uscita una onda con frequenza doppia e stessa direzione di propagazione. In totale, la radiazione uscente sarà costituita da due componenti, di cui una con frequenza doppia.



Il cristallo più utilizzato per effettuare il raddoppio della frequenza del laser Nd:YAG è il triborato di litio (LiB_3O_5), che permette di portare la lunghezza d'onda del fascio laser a 530 nm (VERDE).

Nota: il fenomeno del raddoppio della frequenza è conseguenza del termine non-lineare quadratico $\chi^{(2)}$. Per ragioni di simmetria, questo termine è 0 nei cristalli centrosimmetrici, i quali sono quindi esclusi a priori da applicazioni di raddoppio della frequenza.

IMPORTANTE

Emulsioni olografiche

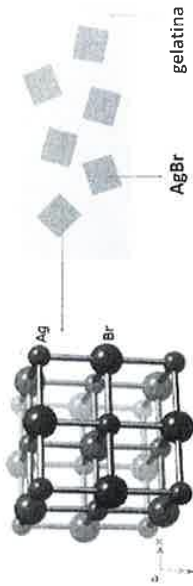
Registrazione ologramma

Abbiamo visto nelle sezioni precedenti che per registrare l'ologramma, abbiamo bisogno di utilizzare materiale fotosensibile. Durante l'esposizione, il materiale cambia le proprie proprietà in ogni punto, in funzione della intensità della radiazione totale ($R + O$). In questo modo, siamo in grado di registrare il pattern di interferenza e quindi l'informazione sulla ampiezza e sulla fase della radiazione dell'oggetto.

Sviluppo chimico

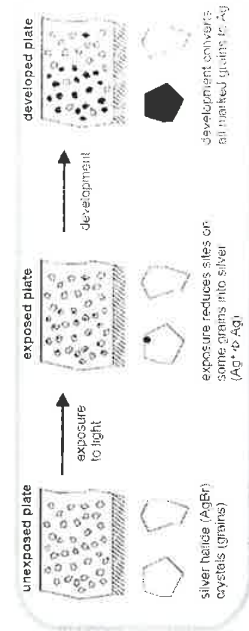
A seguito dell'esposizione del materiale fotosensibile, non si ottiene ancora un ologramma utilizzabile per applicazioni olografiche. Bisogna eseguire dei processi chimici per amplificare l'informazione ottenuta e per fissare l'ologramma, in modo che non possa venire sovrascritto una volta esposto alla radiazione di riferimento quando proiettiamo l'immagine olografica.

I materiali più adatti per questo tipo di applicazione sono gli alogenuri di argento ovvero dei sali che contengono l'argento e un alogeno (elementi del gruppo 17 della tavola periodica). In particolare, il più utilizzato è il bromuro di argento $AgBr$. Per applicazioni olografiche, si utilizzano cristalli di $AgBr$ sospesi in una gelatina. Andando a formare una emulsione fotografica.
L'emulsione può venire stesa su diversi tipi di substrato, come ad esempio vetro e pellicole.



Il processo di sviluppo chimico consiste nell'esporre la lastra fotografica a un bagno chimico, il cui scopo è la completa riduzione dei cristalli di bromuro di argento in argento metallico.

Il "seme" di argento (generato dalla radiazione incidente) agisce come catalizzatore della riduzione dei cristalli. I cristalli di argento metallico (se sono sufficientemente piccoli) appaiono di colore nero. In questo modo si genera il contrasto nell'immagine: maggior intensità della radiazione \Rightarrow maggior numero di cristalli che vengono ridotti \Rightarrow colore più scuro in quella regione della immagine.



Un altro approccio all'interferenza della radiazione dell'oggetto con se stessa a tempi diversi è il seguente: supponiamo di acquisire l'ologramma dell'oggetto al tempo t_1 e di svilupparlo chimicamente. Siamo quindi in grado di ricostruire $\tilde{O}(t_1)$. Successivamente prepariamo il set-up sperimentale in maniera tale da ricostruire l'onda oggetto in modo tale che per l'osservatore sia sovrapposta all'oggetto reale.

Interferometria olografica: metodo 2 (real-time interferometry)

Se illuminiamo al tempo t_2 l'oggetto nelle stesse condizioni che avevamo utilizzato al tempo t_1 otteniamo la radiazione oggetto $\tilde{O}(t_2)$. Se ricostruiamo l'onda $\tilde{O}(t_1)$ in modo tale che l'immagine dell'oggetto si sovrapponga all'oggetto reale, otteniamo nuovamente una immagine dell'oggetto con sovrapposte frange di interferenza. La differenza rispetto al metodo 1 è che in questo caso possiamo visualizzare in tempo reale informazioni sulle deformazioni che subisce l'oggetto rispetto alla condizione iniziale al tempo t_1 .

(2)



I due metodi che abbiamo appena visto hanno lo svantaggio che non possono essere utilizzati per studiare deformazioni degli oggetti che avvengono molto rapidamente, come ad esempio le vibrazioni. Nel caso di vibrazioni, il moto è periodico; siamo quindi in grado di ottenere informazioni tramite interferometria olografica anche se il periodo di vibrazione è molto rapido.

Interferometria olografica: metodo 3 (time average interferometry)

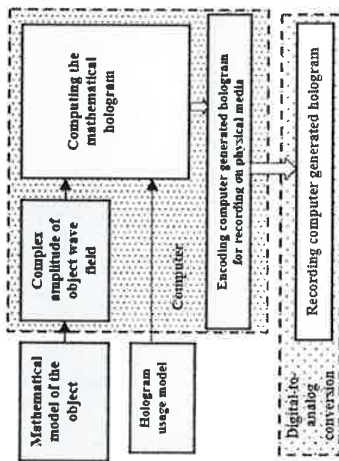
Illuminiamo con radiazione di riferimento un oggetto in vibrazione e registriamo l'ologramma con un tempo di esposizione τ molto maggiore del periodo di vibrazione T dell'oggetto. In seguito sviluppiamo l'ologramma e ricostruiamo l'onda oggetto. L'immagine ricostruita dell'oggetto presenta delle figure di interferenza che ci permettono di individuare le zone interessate dalla vibrazione e ricavare informazioni sul moto vibrazionale stesso.

(3)

- l'interferometria olografica è molto utilizzata nel campo dell'industria nei casi in cui si ha la necessità di valutare vibrazioni e deformazioni di lieve entità: il range di deformazioni che possono essere investigati con questa tecnica è $0.1 - 100 \mu\text{m}$.
- costituisce una tecnica di analisi **non-distruttiva** ed è ad esempio molto utilizzata nell'automotive per analisi di stress, deformazioni e vibrazioni con approcci qualitativi e quantitativi.
- permette l'analisi dei modi vibrazionali
- **in casi specifici**, è possibile effettuare una analisi quantitativa delle frange di interferenza
- **in ogni caso**, si ha una informazione qualitativa sulla localizzazione spaziale delle deformazioni

Computer-generated Holograms

Una alternativa all'acquisizione di un ologramma di un oggetto reale è la generazione dell'ologramma tramite simulazioni al computer. Questo approccio ha il vantaggio che si possono generare ologrammi sintetici di oggetti che non esistono.



Applicazioni della olografia digitale

Acquisizione tramite CCD

- misura delle deformazioni: la possibilità di eseguire processing delle immagini digitali aumenta le possibilità di analisi delle frange di interferenza
- digital holographic microscopy: si basa sulla acquisizione dell'ologramma del campione e successiva ricostruzione numerica dell'immagine
- analisi delle particelle: l'olografia digitale permette di studiare sistemi di microparticelle permettendo di identificarne la posizione, la taglia, la forma e la velocità

Olografia generata al computer

- comparazione con risultati sperimentali a partire da modelli teorici
- applicazioni artistiche e grafiche

24/05/18

Siamo arrivati a implementare la logica (algebra) che useremo per descrivere i sys fisici che attuano i fenomeni come:

- teletrasporto quantistico
- computazione quantistica
- Crittografia quantistica

La logica deriva dall'evidenza sperimentale, e noi l'abbiamo derivata analizzando il comportamento del campo em (descritto come fotoni) in polarizzatori, sys bifrangenti e interferometri.

Verremo alcuni exp relativi ai fotoni correlati (coppie di fotoni entangled) attraverso a sfruttare una opportuna algebra.

In particolare verremo che l'algebra che useremo vale non solo per i fotoni, ma anche per le subparticelle microscopiche come gli e⁻, i protoni, i singoli atomi

I fotoni correlati nascono da particolari materiali e hanno la seguente proprietà:



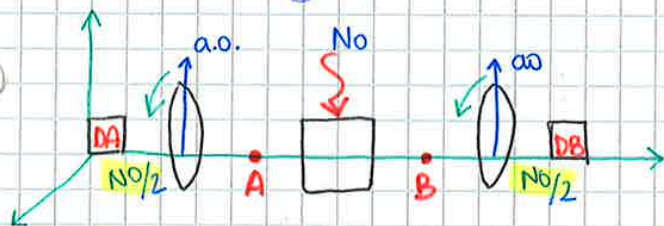
È importante evidenziare l'identità dei fotoni non solo in termini di energia, ma in tutte le azioni.

La prima volta in cui sono stati fatti exp con un singolo fotone risale al 1945. Quindi per noi non è difficile far incidere 2 solo fotone per volta e ottenerne 2 con proprietà energetica dimenata

Al caso semplice aggiungiamo 2 filtri polarizzatori in modo che l'AO sia diretto lungo l'asse x. E' la direzione su cui si muovono i 2 fotoni e y e' quella ⊥.

Dopo i 2 filtri poste sono 2 detector che mi consentono di seguire le sorti dei 2 segnali

Se spara N₀ fotoni dal crystal accade che escono N₀ coppie di fotoni. Se nel detector A raccolgo N₀/2 fotoni anche il detector B ne raccoglie N₀/2



Quindi il 50% delle volte la polarizzazione è // all'AO, e 50% delle volte è ⊥ all'AO.

A passa ↔ B passa } correlazione
 A non passa ↔ B non passa }

L'esperimento è sym intorno all'asse z.

Nel caso in cui l'AO di uno dei 2 fotoni è diverso, abbiamo sempre la stessa corrispondenza ma dovuta a motivi diversi



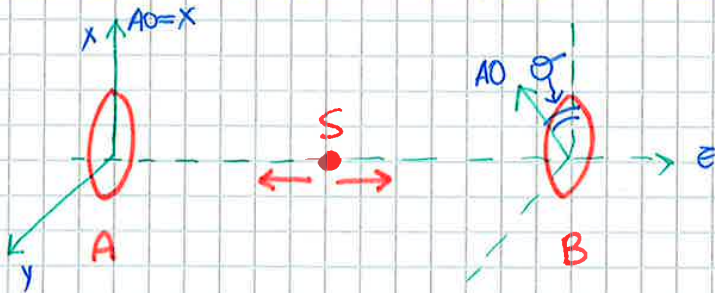
A passa ↔ B non passa
 A non passa ↔ B passa

Ma è come se qualcosa non tornasse. Infatti, secondo questa algebra \exists una grandezza fisica \vec{p} che non è definita fino all'atto della misura in modo istantaneo e indipendentemente dalla distanza di A da B, violando il principio di località della fisica.

» "Può, il batter d'ali di una farfalla, provocare un tornado in Texas?" «

→ Andremo a dimostrare exp che questa algebra è vera, e a giustificare da quando i 2 fotoni diventano identici. Come vedremo la risposta è dall'atto della misura, nonostante lo abbia provato ad imprimergli inizialmente altre due altre anche una \vec{p} identica.

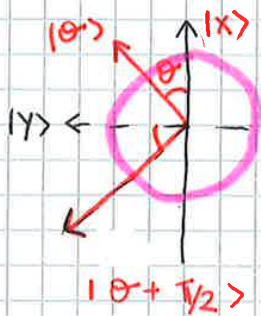
Modifichiamo l'exp al fine di provare il nostro risultato. Facciamo passare A attraverso un polarizzatore con assi x e il fotone B attraverso un polarizzatore con assi inclinati θ rispetto ad x sul piano xy.



Se siamo la relazione dei fotoni correlati nel seguente modo

$$|A, p\rangle |B, p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |A, x\rangle |B, x\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |A, y\rangle |B, y\rangle \quad (*)$$

devo tenere presente che non viene tenuto conto del # di fotoni che passano. Per questo devo modificarla. Intanto deduciamo la situazione da cui alita prospettiva, che mi consentirà di scivere il fotone secondo la nuova base:



$$|x\rangle = \cos\theta | \theta \rangle - \sin\theta | \theta + \pi/2 \rangle$$

$$|B, x\rangle = \cos\theta |B, \theta\rangle - \sin\theta |B, \theta + \pi/2\rangle$$

$$|y\rangle = \sin\theta | \theta \rangle + \cos\theta | \theta + \pi/2 \rangle$$

$$|B, y\rangle = \sin\theta |B, \theta\rangle + \cos\theta |B, \theta + \pi/2\rangle$$

Quindi cambiando a sostituire nella (*) otteniamo:

$$|A, p\rangle |B, p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |A, x\rangle \left[\cos\theta |B, \theta\rangle - \sin\theta |B, \theta + \pi/2\rangle \right] +$$

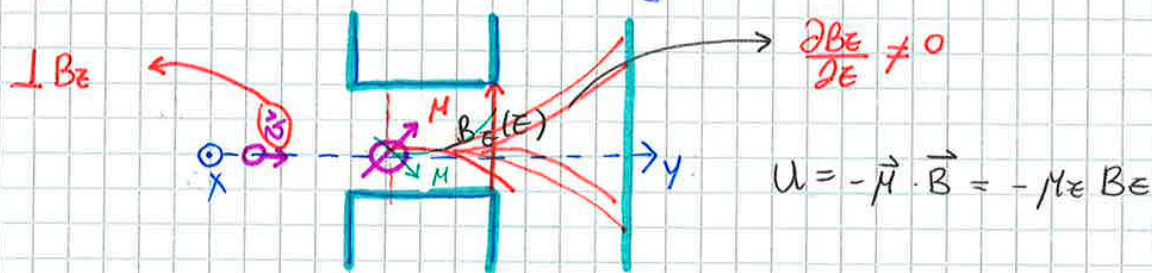
$$+ \frac{1}{\sqrt{2}} |A, y\rangle \left[\sin\theta |B, \theta\rangle + \cos\theta |B, \theta + \pi/2\rangle \right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\theta |A, x\rangle |B, \theta\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\theta |A, x\rangle |B, \theta + \pi/2\rangle +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\theta |A, y\rangle |B, \theta\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\theta |A, y\rangle |B, \theta + \pi/2\rangle$$

Per dimostrare il momento magnetico, sfruttando il funzionamento dei polarizzatori sfruttiamo l'ESPERIMENTO DI STERN - GERLECH

L'apparato che sfruttiamo è il seguente



Ogni particella soggetta a $B_z(z)$ subisce un forza, quindi vuol dire che è soggetta ad un gradiente:

$$-\nabla U = F_{e^-} = \mu_z \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

spinge l'e- verso l'alto o verso il basso a μ_z che è dipendente dallo stato di rotazione dell'e-

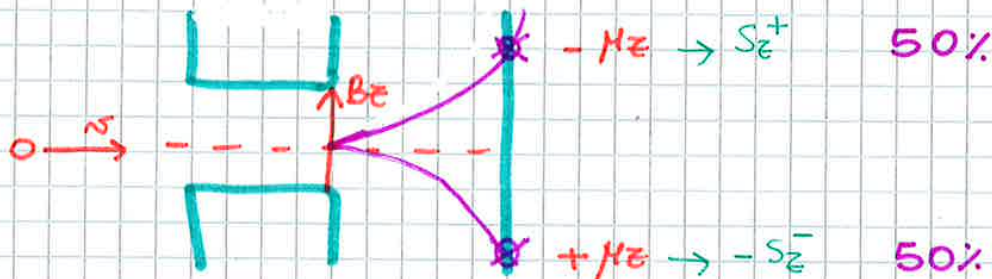
Può capitare che μ_z è rivolta verso il basso, ma l'e- va verso l'alto, e allora vuol dire che ho preso la deviazione < 0, vale anche il inversa

Non tengo conto della F di Lorentz in quanto incide \perp il piano e soprattutto perché sono ragionare con $v \ll c$ che non incidono sul campo.

ci immaginiamo che per gli e- che entrano si abbia una $\vec{\mu}$ diversa e che la deflessione dipenda soltanto da μ_z .

Se metto uno schermo fuori delle espansioni polarizzatori mi capetto una figura caratterizzata dai picchi a deflessione max e min con dei picchi intermedi

⚠ Purtroppo però sperimentalmente non si verifica nulla di tutto ciò, in quanto la deviazione può avvenire solo su 2 angoli ben precisi in modo da avere 2 valori del momento magnetico in 2 punti dello schermo con un picco in posizione sym lungo la direzione di v



Se gli oggetti spinti sono e- in alto auto $|S_z, \uparrow\rangle$, in basso $|S_z, \downarrow\rangle$ se invece ragiono con i fotoni lo scatorotto è un'oss binari frangente e verso l'alto ho $|S\rangle$, invece, verso il basso $|0\rangle$

fotoni polarizzati // all'asse ottico Asse straordinario

polarizzazione

in basso $|S_z, \downarrow\rangle$ -> un'oss binari frangente

fotoni polarizzati \perp all'asse ottico: Asse ordinario

Qualunque stato di ecl. lungo x è scomponibile nelle altre direzioni
attraverso dei pesi probabilistici, e sostituisce il vect di polarizzazione
tipico dei fotoni

↳ Questa algebra va bene anche per protoni, atomi...

Possiamo definire quanto vale il momento, ma non avremo a
definire.

In sostanza l'operatore di SG si comporta come un CB o un polarizzatore

correlati

Se considero due fotoni identici, ho una situazione del tipo:



Il mio sys dopo l'interazione con qualsiasi tipo di polarizzatore, poiché non conosco la pd di exit dalla sorgente, può essere descritto dalla seguente relazione, che

ci informa sulla χ delle coppie intrecciate.

$$|A\rangle|B\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |A,x\rangle|B,x\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |A,y\rangle|B,y\rangle \quad (1)$$

Exp analoghi esistono per gli I dei nuclei che hanno mom. angolare intrinseco nullo, ovvero con mom. magnetico zero, capaci di oltrepassare in linea retta l'apparato SG

I dei nuclei che decadono emettendo $2e^-$:



Così implica, per i principi di conservazione, che gli e^- si comportano come i fotoni identici.

A e B hanno momento angolare intrinseco opposto: spin up e spin down.

In matematica, il mix dei 2 stati è dato da:

$$|A\rangle|B\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |A, S_z^+\rangle|B, S_z^-\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |A, S_z^-\rangle|B, S_z^+\rangle \quad (2)$$

Questo è solo uno schema pittorico perché io non so come sia inclinato il momento rispetto all'asse z, che però può essere qualsiasi cosa \perp all'asse x

→ elettroni correlati

Il paradosso EPR è il rifiuto filosofico del fenomeno dell'entanglement, che può essere descritto da (1) e (2)

Quando scivo un sys composto come la somma di 2 sys che una volta uniti non possono più essere correlati

A e B sono un unico sistema che risponde all'unisono, con dei possibili stati

PARADOSSO EPR

Secondo Einstein una teoria fisica deve possedere per essere autoconsistente, almeno 4 caratteristiche

- realismo
- localismo
- completezza
- coerenza

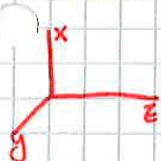
In elettrostatica e magnetostatica questo effetto non è consistente

Nessuno
Ti può essere in disaccordo

descritto intrinsecamente da ogni grand. fisica immaginabile

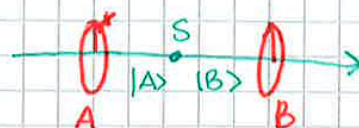
31/05/2018

Quello che vogliamo capire con la dimostrazione di Bell è se ad essere corretto è il formalismo (*) che abbiamo usato per descrivere i fotoni oppure se aveva ragione Einstein



$$|A\rangle|B\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|A,x\rangle|B,x\rangle) + \frac{1}{\sqrt{2}}(|A,y\rangle|B,y\rangle)$$

↙ valenza statistica



Einstein et al. dice che se i 2 fotoni sono descritti da (*) allora lo stato di polarizzazione di entrambi non è definito nell'intervallo sorgente-polarizzatore. Se A quando incontra il pol. passa allora è polarizzato lungo x altrimenti se non passa è pol. lungo y. Poiché B è come A allora valgono le stesse condizioni vincolate ad A

↳ Quando A si definisce B è vincolato in quanto si è ad esso trasferita l'informazione

In qsto caso l'info si è propagata transitando istantaneamente $\frac{1}{c} <$ al tempo che serve ad un fascio em. di velocità pari a c \rightarrow ciò viola i principi dei postulati di Einstein, che sostiene che la th sia incompleta

↳ lo stato è indeterminato poiché non lo conosco

In fatti, introduciamo la prob proprio per la nostra non conoscenza di tutte le info che però ci sono (TERMODINAMICA)

(*) Contiene sia l'oggetto statistico intrinseco alla natura del fotone ($1/\sqrt{2}$) e non è formato da un fotone che fa ciò che vuole rispetto all'altro, ma è costituito da 2 fotoni insieme che portano un unico sistema

$$(|A,x\rangle|B,x\rangle) \text{ sistema monolitico, ma a multicomponenti}$$

Entanglement

IL CONTRIBUTO di BELL

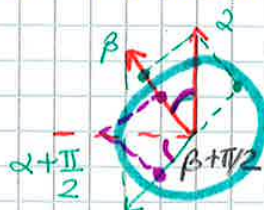
Bell si mise nelle condizioni dell'esp. mentale di Einstein impostando il sistema nel seguente modo.



Andiamo a studiare nel 2 caso es. locali e non locali, di fine di vedere quanti fotoni passano dai polarizzatore

Iniziamo supponendo una NON LOCALITÀ, cioè (*) descrive il nostro mondo fisico

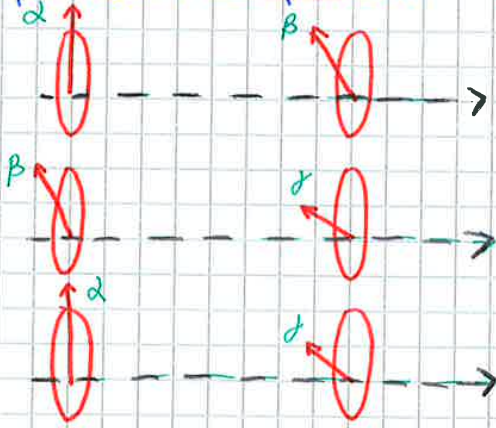
$$\frac{1}{\sqrt{2}} |A,x\rangle|B,x\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |A,y\rangle|B,y\rangle$$



Facciamo un cambio di nomenclatura:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} |A,\alpha\rangle|B,\alpha\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |A,\alpha + \frac{\pi}{2}\rangle|B,\alpha + \frac{\pi}{2}\rangle$$

In più Bell $\sqrt{3}$ esperimenti



$$\alpha = 0 \quad \beta = \frac{\pi}{6} = 30^\circ \quad \gamma = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$$

$$B = u(\alpha, \beta) + v(\beta, \gamma) - v(\alpha, \gamma)$$

$$B = \cos 2(\beta - \alpha) + \cos 2(\gamma - \beta) - \cos 2(\gamma - \alpha)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

COEFFICIENTE di BELL

In ambito **LOCALE** invece il fotone conosce la sua polarizzazione prima di passare per il polarizzatore, siamo noi a non saperlo! Il fotone per 3 differenti tipi di configurazioni (α, β, γ) ha 2 stati di polarizzazione: passa non passa.

In totale abbiamo $2^3 = 8$ combinazioni \rightarrow VEDI TABELLA

Abbiamo che $B = \sum_{i=1}^8 f_i B_{i,c} \leq 1$

La disuguaglianza di Bell afferma che affinché le interazioni fisiche siano locali il fattore B medio deve essere

$$B_{\text{realismo,loc}} = u(\alpha, \beta) + u(\beta, \gamma) - u(\alpha, \gamma) \leq 1$$

Quindi l'ex doveva produrre $0 \leq 1$ oppure $3/2$. Nel 1985 un fisico francese Aspect fece questo exp. e si scoprì che il + delle volte il risultato è pari a $3/2$ a favore di un mondo fisico **NON LOCALE**

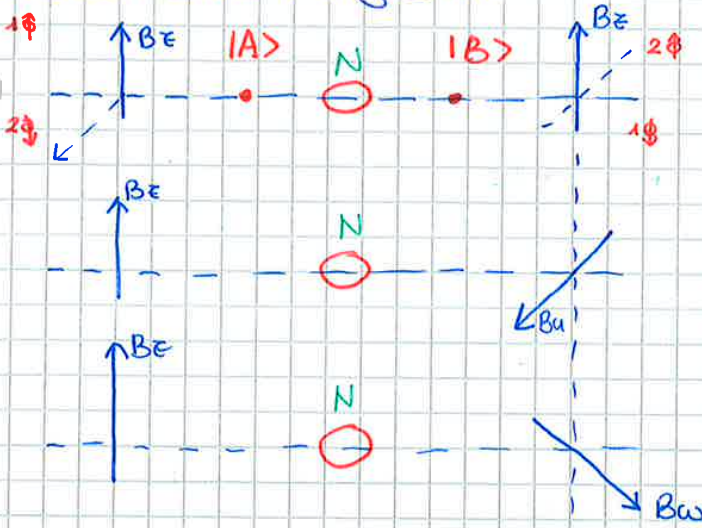
\rightarrow Si può supporre un conto simile, ma con fondamenti fisiche \neq , anche per gli e-
Bell ha scritto un libro in cui applica la sua eq. a tutti i sistemi

\rightarrow Bene con il potenziale quantistico si è inventato un'algebra secondo cui posso spiegare ψ , ma non posso verificarlo sperimentalmente. Posso inventare un'algebra locale che torna con l'exp di Bell

\rightarrow Molti sostengono che non posso usare questa struttura per inviare l'informazione

\rightarrow v di propagazione

3 casi sono i seguenti:



Nel corso dei 3 exp nascono 3N coppie di e⁻ evadono da misurazione quanti e⁻ escono da SGA e quocuti da SGB, correlati con la seguente correlazione

- $N(z_+, z_+)$
- $N(z_+, u_+)$
- $N(z_+, w_+)$

→ conto sperimentalmente le coppie

Procediamo inventandoci il seguente parametro (di Bell nuovo)

$$P(++)= \frac{N(z_+, z_+) + N(z_+, u_+) + N(z_+, w_+)}{3N}$$

Iniziamo ragionando con un modello realista deterministico alla Einstein

→ ogni sys fisico ha i parametri fisici ben definiti e con essi si evolve, quindi se il sys si scinde non avviene fra le 2 parti comunicazione

Questa algebra non è completa: A e B escono non avendo mai un valore definito che si definisce solo quando entrano nello apparato di SG

→ l'exp mi porterebbe a (1), ma di fatto qsto risultato è sbagliato

Per Einstein i 2 e⁻ devono avere spin definito e interagiscono con i SG

u	z	w
+	+	+
+	+	-
+	-	+
-	+	+
+	-	-
-	+	-
-	-	+
-	-	-

∀ lena sull'apparato A la lena su quello B deve permettermi di avere la cons del momento angolare totale

questi sono una ripetizione dei primi 4 eventi indipendenti

u	z	w
-	-	-
-	-	+
+	+	-
+	-	-

(\bar{u}, \bar{z}) (\bar{z}, \bar{u}) (\bar{z}, \bar{w})
 (\bar{w}, \bar{z})
 (\bar{u}, \bar{z}) (\bar{z}, \bar{u}) (\bar{z}, \bar{w})
 (\bar{w}, \bar{z})

Correlazione (+ +) o (- -)

(\bar{u}, \bar{z}) (\bar{u}, \bar{w}) (\bar{z}, \bar{u}) (\bar{w}, \bar{u})

ho 12 casi di correlazione

07/06/2018

Lezione 34-35
Onde coerenti: laser, olografia, teletrasporto

Dr. Marco Fontana
Politecnico di Torino

Introduzione

Nella meccanica quantistica, il sistema viene descritto da un vettore di stato a componenti complesse. Esempi già visti nelle lezioni precedenti: stato di polarizzazione del fotone, stato di spin dell'elettrone...

In generale, uno stato può essere scritto come combinazione lineare di stati di base, i quali sono caratterizzati da una certa proprietà quantistica ben definita e misurabile (direzione di polarizzazione, valore dello spin lungo una determinata direzione...):

$$|\psi\rangle = \sum_i \alpha_i |\psi_i\rangle \quad \alpha_i \in \mathbb{C} \quad / \quad \sum_i |\alpha_i|^2 = 1$$

Per ogni osservabile, esistono N valori possibili (che possono essere misurati) e di conseguenza N stati di base.

Data una osservabile quantistica, è quindi possibile esprimere un qualsiasi vettore di stato come un vettore che appartiene a uno spazio vettoriale N -dimensionale a valori complessi.

Sommario

- 1. Introduzione: entanglement
- 2. Cenni di computazione quantistica
- 3. Teletrasporto quantistico: teoria
- 4. Teletrasporto quantistico: realizzazione sperimentale

Dr. Marco Fontana
Lezione 34-35

PRINCIPIO DEL COLASSO DELLA FUNZIONE D'ONDA

Postulato della misura

Quando effettuiamo una misura di una proprietà (osservabile) quantistica dello stato $|\psi\rangle$, otterremo un valore λ_i con probabilità $|\alpha_i|^2$. Il valore λ_i è quello che si otterrebbe con probabilità 1 effettuando la misura sullo stato di base $|\psi_i\rangle$. Dopo che la misura ha dato risultato λ_i per lo stato $|\psi\rangle$, qualsiasi ripetizione della misura darà come risultato λ_i con probabilità 1. A tutti gli effetti, la misurazione ha modificato $|\psi\rangle$ facendolo collassare in $|\psi_i\rangle$.

$$|\psi\rangle = \sum_i \alpha_i |\psi_i\rangle \quad \xrightarrow{\lambda_i} \quad |\psi_i\rangle$$

Il postulato della misura ci dice quindi alcune cose molto importanti:

- 1. in generale il risultato di una misura quantistica porta a risultati che seguono una distribuzione di probabilità
- 2. il processo di misurazione altera lo stato che stiamo studiando
- 3. non possiamo ottenere tramite una singola misura informazione completa sullo stato che stiamo studiando

Indeterminazione

Dr. Marco Fontana
Lezione 34-35

Entanglement

Entanglement

La caratteristica interessante degli stati entangled è che se effettuiamo una misura su uno dei sottosistemi (in questo caso misuriamo la polarizzazione) e quindi lo facciamo collassare in uno degli stati di base (postulato della misurazione), automaticamente l'altro sottosistema collassa nello stato corrispondente. In altre parole, misure su un sottosistema hanno influenza sull'altro sottosistema, anche quando i due sottosistemi sono separati spazialmente a livello macroscopico.

Bisogna notare che non tutti gli stati possibili del sistema quantistico bipartito sono entangled.

Matematicamente, non sono correlati tutti gli stati che sono esprimibili come prodotto tensoriale di stati sul singolo sottosistema:

$$|\psi\rangle = |\phi\rangle_A \otimes |\chi\rangle_B$$

Possiamo generalizzare ulteriormente il discorso fatto fino a questo punto.

Ad esempio, i sistemi identici possono essere 3, o anche di più... Vediamo esplicitamente il caso a 3 sottosistemi, perché dovremo utilizzarlo per spiegare il meccanismo su cui si basa il teletrasporto quantistico. Consideriamo quindi, ad esempio, un sistema composto da 3 fotoni. Un generico stato potrà essere scritto nel modo seguente:

$$|\Psi\rangle = \sum_{i,j,k} \alpha_{i,j,k} |\psi_i\rangle \otimes |\psi_j\rangle \otimes |\psi_k\rangle \quad \alpha_{i,j,k} \in \mathbb{C} \quad / \quad \sum_{i,j,k} |\alpha_{i,j,k}|^2 = 1$$

Inoltre, in generale, i sottosistemi possono non essere identici, quindi ad esempio coinvolgere particelle diverse.

Vediamo un esempio pratico di quanto appena detto; consideriamo lo stato di 2 fotoni entangled:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |A, n\rangle \otimes |B, n\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |A, n_{\perp}\rangle \otimes |B, n_{\perp}\rangle$$

e proviamo a scriverlo come prodotto tensoriale di due stati a fotone singolo:

$$|\phi\rangle_A = \alpha |A, n\rangle + \beta |A, n_{\perp}\rangle \quad |\phi\rangle_B = \gamma |B, n\rangle + \delta |B, n_{\perp}\rangle$$

$$\begin{aligned} |\phi\rangle_A \otimes |\phi\rangle_B &= [\alpha |A, n\rangle + \beta |A, n_{\perp}\rangle] \otimes [\gamma |B, n\rangle + \delta |B, n_{\perp}\rangle] \\ &= \alpha\gamma |A, n\rangle \otimes |B, n\rangle + \alpha\delta |A, n\rangle \otimes |B, n_{\perp}\rangle \\ &\quad + \beta\gamma |A, n_{\perp}\rangle \otimes |B, n\rangle + \beta\delta |A, n_{\perp}\rangle \otimes |B, n_{\perp}\rangle \end{aligned}$$

Non esiste nessuna combinazione di $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ che permetta di annullare i termini misti e al contempo conservare gli altri, in accordo con il fatto che abbiamo uno stato entangled.

influiscono l'uno sull'altro vicinolevolmente

Bit

Computazione classica

L'unità fondamentale dell'informazione binaria è il bit, il quale può assumere due possibili valori: 0 e 1. Fisicamente, la realizzazione di un bit (CLASSICO) prevede l'esistenza di un sistema a due stati, con la possibilità di ottenere transizioni tra questi due stati in maniera controllata. Esempio: il transistor... Il bit, indipendentemente dalla sua realizzazione fisica, è alla base della computazione classica.

Esiste la possibilità di realizzare un bit QUANTISTICO (Quantum bit) e quindi sviluppare computazione quantistica?

→ va ultimo capitolo

Cambiamento di base

Si può passare dalla base di Bell alla base computazionale tramite le seguenti espressioni:

$$\begin{aligned}
 |0\rangle \otimes |0\rangle &= \frac{\sqrt{2}}{2} (|\phi^+\rangle + |\phi^-\rangle) \\
 |0\rangle \otimes |1\rangle &= \frac{\sqrt{2}}{2} (|\psi^+\rangle + |\psi^-\rangle) \\
 |1\rangle \otimes |0\rangle &= \frac{\sqrt{2}}{2} (|\psi^+\rangle - |\psi^-\rangle) \\
 |1\rangle \otimes |1\rangle &= \frac{\sqrt{2}}{2} (|\phi^+\rangle - |\phi^-\rangle)
 \end{aligned}$$

Dr. Marco Fontana **Lezione 34-35**

Introduzione all'informatica
 Centri di computazione quantistica
 Teletrasporto quantistico

Teletrasporto quantistico

Teletrasporto quantistico

Per teletrasporto quantistico si intende il meccanismo tramite il quale si trasferisce lo stato quantistico di una particella a una altra particella separata spazialmente. Il teletrasporto quantistico si basa su due importanti aspetti della meccanica quantistica:

- il collasso dello stato a seguito del processo di misura
- l'entanglement di stati quantistici

PHYSICAL REVIEW LETTERS

Volume 76 29 MARZO 1993 Numero 13

Teleporting an Unknown Quantum State via Dual Classical and Einstein-Podolsky-Rosen Channels

Charles H. Bennett, Gilles Brassard, Claude Crépeau, David A. J. Stein, John A. Smolin, Richard Jozsa, William K. Wootters, and Stephen J. Wiesner

PHYSICAL REVIEW LETTERS, Vol. 76, No. 13, 1993

PHYSICAL REVIEW LETTERS, Vol. 76, No. 13, 1993

PHYSICAL REVIEW LETTERS, Vol. 76, No. 13, 1993

PHYSICAL REVIEW LETTERS, Vol. 76, No. 13, 1993

PHYSICAL REVIEW LETTERS, Vol. 76, No. 13, 1993

Dr. Marco Fontana **Lezione 34-35**

Riprendiamo l'espressione per gli stati Bell e consideriamo cosa succede se scambiamo lo stato del sistema A e del sistema B.

$$\begin{aligned}
 |\phi^+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_A \otimes |0\rangle_B + |1\rangle_A \otimes |1\rangle_B) \\
 |\phi^-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_A \otimes |0\rangle_B - |1\rangle_A \otimes |1\rangle_B) \\
 |\psi^+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_A \otimes |1\rangle_B + |1\rangle_A \otimes |0\rangle_B) \\
 |\psi^-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_A \otimes |1\rangle_B - |1\rangle_A \otimes |0\rangle_B)
 \end{aligned}$$

Ci accorgiamo che $|\psi^-\rangle$ è diverso dagli altri: è l'unico a cambiare e seguito se scambiamo il sistema A con il sistema B. In altre parole, lo stato $|\psi^-\rangle$ è antisimmetrico, mentre tutti gli altri sono simmetrici. Questa proprietà ha notevole rilevanza sperimentale durante la misura di Bell, come vedremo nella seconda parte della lezione.

Dr. Marco Fontana **Lezione 34-35**

Introduzione all'informatica
 Centri di computazione quantistica
 Teletrasporto quantistico

Consideriamo i due soggetti tra cui avviene il teletrasporto quantistico, i quali sono tradizionalmente chiamati Alice e Bob in teoria dell'informazione.

L'obiettivo di Alice è trasferire un qubit $|\psi\rangle$ a Bob, utilizzando il teletrasporto quantistico.

Abbiamo anticipato in precedenza che il teletrasporto quantistico si basa sull'entanglement, per questo è essenziale che Alice e Bob condividano una coppia EPR (quindi uno stato di due particelle massimamente correlate). Come abbiamo già visto in precedenza, una coppia EPR può essere spazialmente separata, pertanto niente impedisce che Alice detenga un qubit della coppia EPR e Bob l'altro qubit.

In totale il sistema contiene quindi 3 qubit totali: la coppia EPR + il qubit $|\psi\rangle$ che Alice vuole trasferire a Bob.

Dr. Marco Fontana **Lezione 34-35**

Misura di Bell

Sappiamo che la meccanica quantistica impone che quando facciamo una misura di una osservabile quantistica, lo stato collassa in uno degli stati di base relativi a quella osservabile, con probabilità dettata dal modulo quadro delle componenti del vettore di stato espresso in quella specifica base.
 In questo caso, la parte del vettore di stato totale legata ai sistemi A e B è espressa nella base di Bell, quindi se facciamo una misura di Bell, lo stato collasserà in uno di quei 4 termini, con probabilità 1/4.

Ci sono 4 possibili conseguenze della misura di Bell:

1. $|\Psi\rangle_{ABC} \Rightarrow |\Phi^+\rangle \otimes |\alpha|0\rangle_C - \beta|1\rangle_C$
2. $|\Psi\rangle_{ABC} \Rightarrow |\Phi^-\rangle \otimes |\alpha|0\rangle_C + \beta|1\rangle_C$
3. $|\Psi\rangle_{ABC} \Rightarrow |\Psi^+\rangle \otimes [-\alpha|1\rangle_C + \beta|0\rangle_C]$
4. $|\Psi\rangle_{ABC} \Rightarrow |\Psi^-\rangle \otimes [-\alpha|1\rangle_C - \beta|0\rangle_C]$

Negli altri 3 casi, il qubit di Bob collassa in uno dei seguenti stati possibili:

$$\alpha|0\rangle_C - \beta|1\rangle_C \quad -\alpha|1\rangle_C + \beta|0\rangle_C \quad -\alpha|1\rangle_C - \beta|0\rangle_C$$

che sono simili a $|\Psi\rangle = \alpha|0\rangle_A + \beta|1\rangle_A$, ma non identici.

Per ottenere lo stato $|\Psi\rangle$, Bob ha bisogno di effettuare una trasformazione dello stato che ha ottenuto. Come fa a sapere quale trasformazione effettuare? Ha bisogno di sapere da Alice il risultato della sua misura di Bell.

Alice può comunicare il risultato della sua misura di Bell, ovvero comunica a Bob lo stato in cui è collassato il sistema a seguito della misura. In questo modo, Bob saprà l'espressione del suo qubit e sarà in grado di trasformarlo nel qubit $|\Psi\rangle$.

Consideriamo dapprima il caso in cui la misura di Bell effettuata da Alice sul sistema composta da A e B dia come esito un valore corrispondente allo stato $|\Phi^-\rangle$ (secondo caso nell'elenco). Lo stato totale collassa quindi nello stato:

$$|\Phi^-\rangle \otimes [\alpha|0\rangle_C + \beta|1\rangle_C]$$

ed è evidente che lo stato del sistema A è stato trasferito al sistema C, detenuto da Bob. Quindi, a tutti gli effetti, abbiamo ottenuto il teletrasporto quantistico del qubit $|\Psi\rangle = \alpha|0\rangle_A + \beta|1\rangle_A$ da Alice a Bob, il quale ora è in possesso del qubit $|\Psi\rangle = \alpha|0\rangle_C + \beta|1\rangle_C$.

Teletrasporto quantistico

Quindi nel momento in cui Alice esegue la misura di Bell sui sistemi A e B, immediatamente il sistema A - B collassa con probabilità 1/4 nello stato $|\Phi^-\rangle$ e il sistema C collassa nello stato $|\Psi\rangle$, indipendentemente dalla distanza tra Alice e Bob.

Cosa succede se la misura di Bell dà un esito diverso, ovvero se lo stato collassa in uno degli altri 3 termini possibili?

Nello specifico, a livello matematico quello che Bob deve fare è una trasformazione rappresentabile come matrice 2×2 :

Alice misura $|\Phi^-\rangle$; stato di Bob: $\alpha|0\rangle_C - \beta|1\rangle_C$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ -\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

Alice misura $|\Psi^+\rangle$; stato di Bob: $-\alpha|1\rangle_C + \beta|0\rangle_C$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\beta \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

Alice misura $|\Psi^-\rangle$; stato di Bob: $-\alpha|1\rangle_C - \beta|0\rangle_C$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\beta \\ -\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

Trasformazione da compiere

Sistema a 2 livelli

Esistono diverse vie che sono state percorse sperimentalmente per l'implementazione del qubit. Buon candidati devono essere sistemi quantistici a livelli discreti, i quali possano essere controllabili e possibilmente stabili. Alcuni esempi sono:

- **fotoni:** utilizzando lo stato di polarizzazione del fotone per definire il qubit
- **elettroni:** il qubit è definito dallo stato di spin degli elettroni
- **atomi:** in generale in questo schema il qubit è implementato tramite ioni, il cui stato quantistico è controllato tramite **trappole ioniche** (ion traps)

Storicamente, il primo esempio di sistemi a 2 livelli utilizzati per verificare il teletrasporto quantistico sono stati i fotoni, in quanto la polarizzazione è sperimentalmente più semplice da controllare rispetto ad altri gradi di libertà.

Produzione di coppie EPR di fotoni

Per la produzione di coppie entangled di fotoni, si utilizza il meccanismo della parametric down conversion.

Parametric down conversion

Fenomeno ottico non-lineare (del secondo ordine) per il quale un fotone incidente su un cristallo genera una coppia di fotoni che, in opportune condizioni, costituiscono uno stato entangled di polarizzazione. Durante il processo, si conservano energia e momento angolare, pertanto valgono le seguenti espressioni:

$$\omega_p = \omega_{out,1} + \omega_{out,2}$$

$$\vec{k}_p = \vec{k}_{out,1} + \vec{k}_{out,2}$$

Si utilizza un cristallo uni-assiale di β -borato di bario ($\beta - BaB_2O_4$), il quale garantisce una risposta ottica non-lineare.

Prima verifica sperimentale del teletrasporto quantistico

Experimental quantum teleportation

Dr. Bouwmeester, Jian-Wei Pan, Klaus Mattle, Manfred Eibl, Harald Weinfurter & Anton Zeilinger
nature, per experimentaldigital, Downloaded from www.nature.com at University of Toronto on 02/12/17

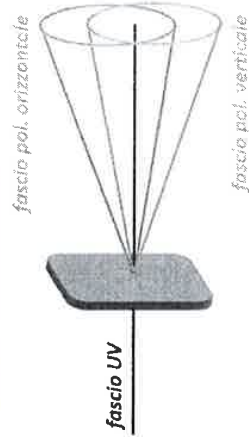
Quantum teleportation—the transmission and reconstruction over arbitrary distances of the state of a quantum system—is demonstrated experimentally. During teleportation, an initial photon which carries the polarization that is to be transferred and one of a pair of entangled photons are subjected to a measurement such that the second photon of the pair is destroyed. The state of the remaining photon is then instantaneously transferred to the other photon of the initial pair. Quantum teleportation will be a critical ingredient for quantum computation networks.

NOTRE VOUS - 11/06/2005 19:07

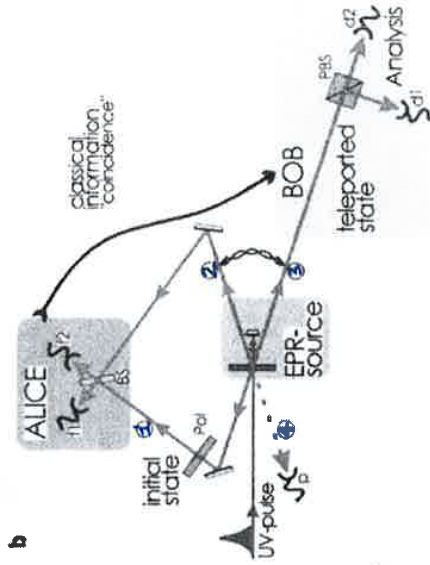
In questo lavoro, sia lo stato teletrasportato, sia la coppia EPR sono stati di polarizzazione dei fotoni. Vediamo nel seguito come in questo caso particolare sono stati affrontati sperimentalmente i due aspetti più importanti:

- la creazione della coppia EPR
- la misura di Bell

Nella maggior parte degli esperimenti, si illumina il cristallo con un laser impulsato nel range UV e si ottiene una coppia di fotoni nel range visibile. Esistono varie metodologie per ottenere la coppia di fotoni entangled; vediamo l'esempio più comune, ovvero la down conversion di tipo 2.



A questo punto siamo in grado di delineare l'apparato sperimentale utilizzato per la prima verifica del teletrasporto quantistico.



Come abbiamo citato nel conto teorico del teletrasporto quantistico, qualsiasi coppia EPR di sistemi B e C è funzionale al teletrasporto del sistema A . Abbiamo fatto il conto con il sistema $|\phi^-\rangle$, ma niente ci avrebbe impedito di usare $|\psi^-\rangle$, l'unico stato di Bell antisimmetrico. Facendo i conti nello stesso modo, si arriva a una conclusione analoga, in cui lo stato totale è dato dalla somma di 4 termini:

1. $\frac{1}{2} |\phi^+\rangle \otimes [-\beta |0\rangle_c + \alpha |1\rangle_c]$
 2. $\frac{1}{2} |\phi^-\rangle \otimes [\beta |0\rangle_c + \alpha |1\rangle_c]$
 3. $\frac{1}{2} |\psi^+\rangle \otimes [-\alpha |0\rangle_c + \beta |1\rangle_c]$
 4. $\frac{1}{2} |\psi^-\rangle \otimes [-\alpha |0\rangle_c - \beta |1\rangle_c]$
- invio da A
qbit
- sistema C , a meno di un **fattore di fase globale ininfluente.**

A e B decidono autonomamente di cooperare ai set di esperimenti
 → Vedi Slide → ci informiamo su come decidono di misurare il fotone con uno dei 2 polarizzatori

↳ A lo decide autonomamente

Dopo aver deciso come misurare i fotoni impostano la miscela

asse x fotone passa 1
 non passa 0 (y)

asse 45° " " passa 1
 non passa (135°) 0

→ Quindi A e B costruiscono autonomamente 2 tabelle.
 Abbiamo un doppio processo casuale che si cumula

↳ PASSA sono entrambe uguali } si ragiona in termini di correlazioni casuali
 NON PASSA 50% di probabilità

Allora Alice e Bob si scambiano la tabella e buttano via tutti i casi in cui i polarizzatori non erano paralleli e riducono così il numero di esperimenti a 20.

A questo punto la sequenza di 0 e 1 è una stringa casuale ovvero la chiave, che è nota solo ad Alice e Bob

→ CHIAVE SICURA e INVIOCARIBILE

La spia intercetta i fotoni con un polarizzatore rompendo l'entanglement: allora le 2 stringhe sono state distrutte, e il messaggio viene a non essere più letto né dalla spia né da B

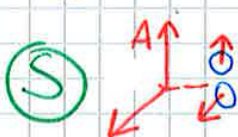
↳ La sorgente deve essere sincrona con un clock: procedimento sicuro, ma di difficile realizzazione in quanto oggi non è ancora sorgenti a clock definite

L'entanglement è rotto dalla interferazione del sys $|A\rangle|B\rangle$ con il resto del mondo, quindi ciò dovrebbe essere capace di annullarlo (solito) nel tempo di esperimento suff. lungo noto come tempo di coerenza

Il meccanismo di decoerenza accade nello stato solido in modo molto veloce

Vediamo un approccio più semplice, che noi ha dei problemi

Considero una sorgente di fotoni NP che è in grado di emettere singoli fotoni ed appartiene ad Alice:

 Polarizzatore: sys bit-flaungente che può emettere x, y oppure 45°-135° e che quindi da ad ogni dn il 50% di probabilità di accogliere

Scego casualmente quale polarizzatore usare tra i 2

PROCESSO per la creazione di 1 MESSAGGIO CRIPATO

1. Scrittura del messaggio in chiaro
2. Creazione di una chiave
3. Applicazione della chiave per ottenere il criptogramma
4. Invio e ricezione
5. Ri-applicazione della chiave per ottenere il messaggio in chiaro

↳ Soluzione basata su una chiave segreta

Chiave
A



Chiave
B

la conoscono solo
A e B

↳ canale di
comunicazione

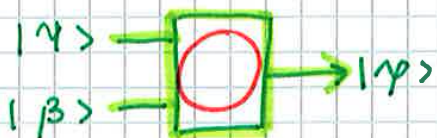
$$m \Rightarrow m \oplus k = c$$



$$c \Rightarrow c \oplus k = m$$

$|\psi\rangle$ non può essere letto nella sua completezza così come $|\beta\rangle$, ma possiamo manipolarli in termini di combinazione lineare

$$c_1|\psi\rangle + c_2|\beta\rangle$$



Mi invento degli oggetti sperimentali che mi producono un vettore formulato sempre da infinite informazioni, ma come faccio ad estrapolare queste info?

meccanismo di unione

Ragiono con il prodotto tensoriale che è la collezione di info dei 2 vettori

$$|f_A\rangle |f_B\rangle$$

→ in un unico sys con 2 fotoni correlati nascono 4 stati

↳ posso aumentare o diminuire l'info che ogni singolo qubit trasporta

Scegliamo in codice binario

30 → 11110 (5 interruttori accesi e spenti)

$$|\psi\rangle = |x\rangle \otimes |y\rangle$$

→ XOR

5 sys che soddisfano il principio di sovrapp.

$$|1\rangle |1\rangle |1\rangle |1\rangle |0\rangle$$

mi consentono di trattare 32 cifre: da 0 a 31

prodotto tensoriale di 5 fotoni correlati

$$|f_i\rangle = b_i |0\rangle + c_i |1\rangle$$

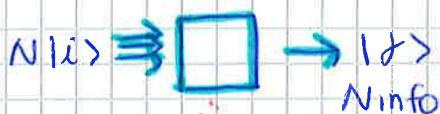
$$\rightarrow |f_1\rangle |f_2\rangle \dots |f_5\rangle \Rightarrow 32 = 2^5$$

$$|f_i\rangle = b_i |0\rangle + c_i |1\rangle$$

In questo modo posso trattare e leggere contemporaneamente le info

↳ algebra di fotoni/e- correlati ⇒ sys entangled

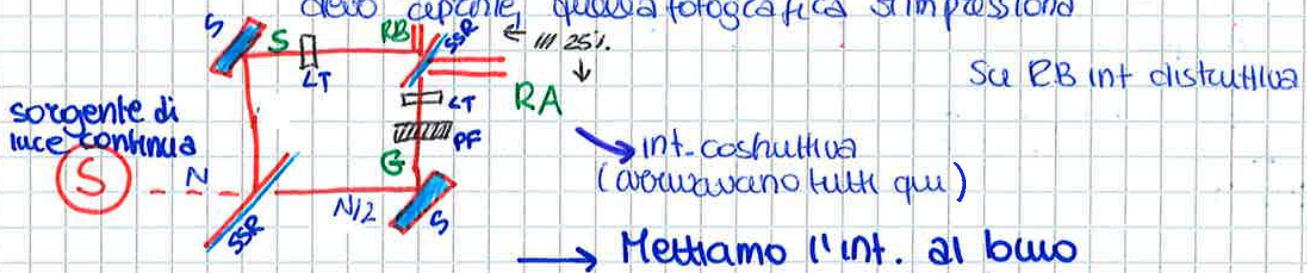
↳ dislungo il sys che intendo



Ma non estraggo ciò che voglio io

MISURE NON INVASIVE

La QM ci viene in soccorso attraverso le proprietà dei singoli atomi
 Proviamo a risolvere il problema usando un **int. di Mach-Zehnder**
 Ho $2N$ lastre: N lastre di vetro e N lastre fotografiche, ma non posso
 distinguere in quanto appaiono =. Per distinguere
 devo coprire quella fotografica e impressionarla



Se inserisco in G una lastra fotografica allora il fotone si accorda
 di essere una particella e vengono in punti definiti dall'ostacolo
 Mettiamo due lastre di vetro che mantengono inalterato
 il percorso

Se cioè il vetro in B non copre nulla
 Se cioè un LF avanza parallelamente in A e in B

→ salvo il 25% delle
 lastre fotografiche

Inseriamo un LV sul percorso S e facciamo in modo che le LT e
 le PF possano essere mosse una per volta sul percorso G

In assenza delle lastre in S e G o solo con LT su entrambi i
 percorsi abbiamo **int. costruttiva sul rivelatore A**, e **distruttiva**
sul RB

→ lo stesso risultato si ottiene con un campo em
 macroscopico e con singoli fotoni

Ogni segnale su RB assicura che su G c'è una lastra non
 impressionata dal fotone.

ELEMENTI del QUANTUM COMPUTER

Differenti porte logiche a 1 o 2 qubit