NUMERO: 2405A

ANNO: 2019

A P P U N T I

STUDENTE: Pellegrino Alice

MATERIA: Analisi 1
Prof. Cortese

ANALISI I

Proposizione ⇒ un qualsiasi enunciato al quale si possa attribuire un valore di verità (può essere vero o falso)

es: p: "oggi è mercoledì"
q: "il n° di cellule in questa aula è pari" teoricamente o è V o è F

× p: "in questa aula fa caldo" – non si può dire V o F

Connettivi logici consentono di operare su una o più proposizioni

① **Negazione** $\neg p$ opposto valore di verità

$\neg(\neg p) = p$

p	¬p
V	F
F	V

② **Disgiunzione logica** $\vee$ (vel)

p	q	p∨q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

$p \vee q$ è vera se almeno una tra le proposizioni p e q è vera

③ **Congiunzione logica** $\wedge$ (et)

p	q	p∧q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

$p \wedge q$ è vera solo quando entrambe le proposizioni p e q sono vere

④ **Implicazione logica**

p antecedente
q conseguente

si dice anche:
- se p allora q
- p condiz. suffic. per q
- q condiz. necess. per p

p	q	p→q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

es. $\underbrace{\text{se superi l'esame}}_{p}$, $\xrightarrow{}$ allora ti porto a cena fuori $\underbrace{}_{q}$

① V V V
② V non ti porto... → sto mentendo → F
③ F V
④ F F → non ho detto nulla riguardo il fatto che tu non passi l'esame, quindi non sto mentendo, è V

⑤ **Equivalenza logica** ⇔ ("se e solo se" "condiz. nec. e suff. per")

p	q	⇔
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Ulteriori considerazioni

p	q	p→q	¬q	¬p	¬q→¬p	¬p→¬q	¬p∨q	(p∧¬q)→¬p
V	V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V	V
		⊛			⊛	non è equivalente	⊛	⊛

(p∧¬q)→¬p: negazione × assurdo

⊛ stessa tavola di verità → caso di equivalenza

$p \to q \Leftrightarrow \neg q \to \neg p$

contronominale

$\forall$ per ogni
$\exists$ esiste almeno un
$\exists!$ esiste unico

Es.
$\forall x, p(x)\ (x \in \mathbb{N})$ F
$\exists x, p(x)\ (x \in \mathbb{N})$ V

$\forall x, \forall y : q(x,y) \Leftrightarrow \forall y, \forall x : q(x,y)$ F
$\forall x, \exists y : q(x,y)$ V
$\exists y, \forall x : q(x,y)$ V, ma con commutaz. $\neq$
$\exists x, \forall y : q(x,y)$ F
$\forall y, \exists x : q(x,y)$ F, ma con commutaz. $\neq$
$\exists x, \exists y : q(x,y) \Leftrightarrow \exists y, \exists x : q(x,y)$ V

Negazione di quantificatori

$\neg(\forall x, \exists y : q(x,y)) = \exists x, \forall y : \neg q(x,y)$ inverto $\forall$-$\exists$ + $\neg q$

es. $\neg(\forall x, \forall y, \exists z : q(x) \wedge p(z,y)) = (\exists x, \exists y, \forall z : \neg(q(x) \wedge p(z,y))) = \exists x, \exists y, \forall z : \neg q(x) \vee \neg p(z,y)$

es. 2 In ogni paese italiano c'è almeno un ragazzo che gioca a FIFA

$\neg(\forall p, \exists r : p(r) =$ "r gioca a FIFA"

$\exists p, \forall r : \neg p(r)$

INSIEMI

Insieme = concetto primitivo per indicare una collezione di oggetti (A, B, X ...)

posso rappresentarlo in 2 modi
- $A = \{a, b, c\}$ elenco gli elementi
- $B = \{x : x+5 \geq 20\}$ do una proprietà

Appartenenza $b \in A$, $d \notin A$

Relazioni tra insiemi (operano un confronto)

① INCLUSIONE

$x \subseteq y \overset{def}{\Leftrightarrow} (\forall x \in X \Rightarrow x \in y)$ x è incluso in y

proprietà:
- riflessiva $\forall x : x \subseteq X$
- antisimmetrica se $x \subseteq y \wedge y \subseteq x$ allora $x = y$
- transitiva se $x \subseteq y \wedge y \subseteq z$ allora $x \subseteq z$

Φ insieme vuoto $\{\} = \Phi$ $\forall A, \Phi \subseteq A$

② STRETTA INCLUSIONE

$x \subset y \overset{def}{\Leftrightarrow} (\forall a \in X \Rightarrow a \in y) \wedge (\exists b \in y \Rightarrow b \notin x)$

se $x \subset y \Rightarrow x \subseteq y$

$6 \leq 7$ V perché $6 < 7$ (V) $\vee$ $6 = 7$ (F)

③ UGUAGLIANZA (non è primitivo perché uso l'inclusione)

$x = y \overset{def}{\Leftrightarrow} (x \subseteq y) \wedge (y \subseteq x)$

Insiemi numerici

$\mathbb{N}$ numeri naturali $\{0,1,2,3\dots\}$

$\mathbb{Z}$ numeri interi $\{0,+1,-1,+2,-2\dots\}$

$\mathbb{Q}$ numeri razionali $\{\frac{m}{n} : m,n \in \mathbb{Z} \wedge n \neq 0 \wedge m$ e n sono primi tra loro$\}$

→ frazioni ridotte ai minimi termini es. $\frac{2}{3}$ ✓ $\cancel{\frac{4}{6}}$

$\mathbb{R}$ numeri reali

$\mathbb{C}$ numeri complessi

Proprietà di $\mathbb{Q}$

In $\mathbb{Q}$ sono definite due operazioni (somma e prodotto) che godono delle seguenti proprietà:

Somma

S_1 $\forall a,b: a+b = b+a$ commutativa

S_2 $\forall a,b,c: (a+b)+c = a+(b+c)$ associativa

S_3 esiste l'elemento neutro detto "0" tale che $\forall a: a+0 = a$

S_4 esiste l'elemento opposto $\forall a, \exists b: a+b = 0$ $\quad b = (-a)$

Prodotto

P_1 $\forall a,b: ab = ba$ commutativa

P_2 $\forall a,b,c: (ab)c = a(bc)$ associativa

P_3 esiste l'elemento neutro detto "1" $\forall a: a \cdot 1 = a$

P_3 esiste l'elemento detto reciproco $\forall a \neq 0, \exists b: ab = 1$ $\quad b = \left(\frac{1}{a}\right)$

Propr. distributiva

$\forall a,b,c: a(b+c) = ab+ac$

$\mathbb{Q}$ è ORDINATO ⇒ proprietà di RELAZIONE D'ORDINE ($\leq$)

O_1 $\forall a: a \leq a$

O_2 $\forall a,b: (a \leq b) \wedge (b \leq a) \Rightarrow a = b$

O_3 $\forall a,b: (a \leq b) \wedge (b \leq c) \Rightarrow a \leq c$

O_4 $\forall a,b: (a \leq b) \vee (b \leq a)$ – ordinamento totale → presi due razionali qualsiasi essi sono confrontabili tra loro

Dalla relazione d'ordine discendono 2 proprietà

A $\forall a,b,c: a \leq b \Rightarrow a+c \leq b+c$

B $\forall a,b$ $\forall c > 0: a \leq b \Rightarrow ac \leq bc$

Dalle $S_1 S_2 S_3 S_4$, $P_1 P_2 P_3 P_4$, A, B discendono tutte le proprietà algebriche note

La sottrazione e la divisione non sono operazioni primitive ma derivano dalla somma e dalla moltiplicazione

$a-b = a+\underbrace{(-b)}_{\text{opposto}}$

$\frac{a}{b} = a\underbrace{\left(\frac{1}{b}\right)}_{\text{reciproco}}$ $\quad b \neq 0$

[$\mathbb{Q}$ è un campo totalmente ordinato rispetto alle operazioni di somma e prodotto; ovvero soddisfa le 10 proprietà]

I numeri razionali sono rappresentabili da allineamenti periodici
I numeri irrazionali sono rappresentabili da allineamenti aperiodici

$\mathbb{R}$ si dice completo e realizza corrispondenza tra i punti della retta e i numeri

DENSITÀ $\forall x,y \in \mathbb{R}$, $\exists$ infiniti z razionali tali che: $x<z<y$
$\wedge\ x<y$ $\exists$ " irrazionali " "
↳ ovvero: presi due numeri reali esistono infiniti numeri razionali e irrazionali tra di loro

Massimo/minimo di un insieme

Sia $A \subseteq \mathbb{R} \wedge A \neq \emptyset$

x_M è massimo di $A \longleftrightarrow (x_M \in A) \wedge (\forall x \in A: x \leq x_M)$

x_m è min. di $A \longleftrightarrow (x_m \in A) \wedge (\forall x \in A: x \geq x_m)$

Intervallo = insieme che soddisfa la proprietà di connessione

$I \subseteq \mathbb{R} \longleftrightarrow \forall x,y \in I, \forall z: x<z<y \rightarrow z \in I$

$[a,b] = \{x \in \mathbb{R}: a \leq x \leq b\}$

$[a,b) = \{x \in \mathbb{R}: a \leq x < b\}$

$(-\infty,c) = \{x \in \mathbb{R}: x < c\}$

$(-\infty,+\infty) = \mathbb{R}$

es. $(-3,2) \cup (5,+\infty)$ NO, è solo l'unione di 2 intervalli

$A = [3,8] \cup [12]$

$B = [2,8)$

$C = \mathbb{N}$ (non è un intervallo su $\mathbb{R}$, infatti posso prendere $x=1$ $y=2$ $z=\frac{1}{2}$)

max A = 12
min A = 3

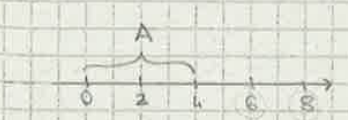
max B = non esiste perché $7,\bar{9} = 8$ e $7,\bar{9}8$ ci sono no
min B = 2

max C = non esiste
min C = 0

il concetto di max non è bastante perché tratta in modo = due sistemi totalmente ≠

Maggiorante

u è maggiorante di $A \subseteq \mathbb{R} \wedge A \neq \emptyset \longleftrightarrow \forall x \in A: x \leq u$



[Il maggiorante non è obbligato ad esistere, ma se ne esiste almeno 1 allora ne esistono ∞]

es. $\mathbb{N}$ non ha maggioranti
$I = [0,4]$ ha ∞ "

Indichiamo con A^+, B^+ e C^+ l'insieme dei maggioranti di A, B e C

$A^+ = [12,+\infty)$

$B^+ = [8,+\infty)$

$C^+ = \emptyset$

[L'insieme dei maggioranti è sempre chiuso a sinistra se non è vuoto; ha il minimo e si chiama estremo superiore.]

$X \subseteq \mathbb{R} \wedge X \neq \emptyset \rightarrow X^+ \neq \emptyset$ ammette in $\mathbb{R}$ il minimo

$\sup X = \min X^+ = \min\{u \in \mathbb{R}: u \text{ è maggiorante di } X\}$

Es. 2

$B = \{x \in \mathbb{R}^+ : x^2 < 5\}$

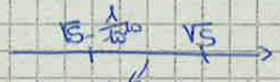
È un insieme limitato, ma ∞ (irrazionali)

$\max B = \nexists$ $\quad \sup B = \sqrt{5}$ $\quad B^+ = [\sqrt{5}, +\infty)$

$\min B = 0$ $\quad \inf B = 0$ $\quad B^- = (-\infty, 0]$

① $\sqrt{5}$ è maggiorante di B $\quad \forall x \in B,\ \sqrt{5} \geq x$

② $\sqrt{5} - \varepsilon = \sqrt{5} - \frac{1}{10^{10}} = \lambda$



esiste almeno un razionale x' qui?

$\sqrt{5} = 2{,}2360679\overline{7}7\ldots$

$\sqrt{5} - \frac{1}{10^{10}} = 2{,}236067977\ldots$

$x' = 2{,}2360679800\ldots \in B$

Nota ⇒ l'insieme B è sup. limitato in $\mathbb{Q}$, ma in $\mathbb{Q}$ non ammette sup B

Assioma di completezza ⇒ Sia $A \subseteq \mathbb{R} \wedge A \neq \emptyset$ un insieme sup. limitato, allora A ammette in $\mathbb{R}$ il sup A

⇕

$\mathbb{R}$ è completo

(ne' $\mathbb{N}$, ne' $\mathbb{Z}$, ne' $\mathbb{Q}$ lo erano)

$\mathbb{R}$ → isomorfismo tra < punti della retta ; $n \in \mathbb{R}$

Distanza

È sempre >0 ⇒ $|\ |$ valore assoluto con $x \in \mathbb{R}$

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Nota ⇒ $|x| = \sqrt{x^2} = \max\{x, -x\}$

proprietà

① $|x| \geq 0$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}$ (il modulo non è mai negativo)

② $|x| = 0 \iff x = 0$

③ $\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad \underset{x<0}{-|x| \leq} \ x \underset{x>0}{\leq |x|}$

④ $u \geq 0$ $\quad |x| \leq u \iff -u \leq x \leq u$

$|x| \geq u \iff x \leq -u \ \vee\ x \geq u$

$|x| \leq 5$

modulo associato alla distanza

⑤ $\forall u > 0$ $\quad |x - x_0| \leq u \iff x_0 - u \leq x \leq x_0 + u$

$|x - x_0| \geq u \iff x \leq x_0 - u \ \vee\ x \geq x_0 + u$

$d(x, x_0) = |x - x_0| \geq 0$ distanza euclidea di $x_0 \in \mathbb{R}$ da $x \in \mathbb{R}$

⑥ $\forall x, y \in \mathbb{R}$ $\quad |x+y| \leq |x| + |y|$ (disuguaglianza triangolare)

DIM dalla 3 segue:

③ $\forall x \in \mathbb{R}\ -|x| \leq x \leq |x|$

$\forall y \in \mathbb{R}\ -|y| \leq y \leq |y|$

$-|x| - |y| \leq x + y \leq |x| + |y|$ ⑥

Se pongo $u = |x| + |y| \geq 0$ la ⑥ diventa $-u \leq x+y \leq u$, $u \geq 0$

Per la ④ ⇒ $|x+y| \leq u$ $\quad |x+y| \leq |x| + |y|$ $\forall x, y$ c.v.d.

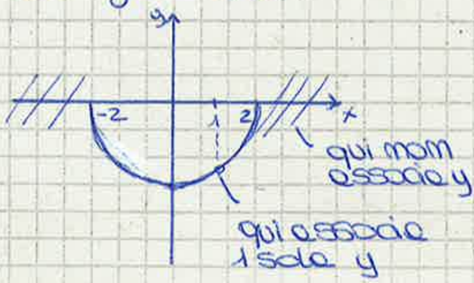
$\Leftrightarrow \left[\forall x \in \text{dom} f,\ \exists!\, y \in Y : y = f(x)\right]$

NOTA Y = codom f

Ogni f è associata al suo grafico $G_f \rightarrow$ La f è sempre tale per cui ad ogni x è associato solo 1 y

$$G_f = \{(x,y) : x \in \text{dom} f \wedge y = f(x) \in Y\}$$

Es. $y = -\sqrt{4-x^2}$



$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
$x \rightarrow y = -\sqrt{4-x^2}$

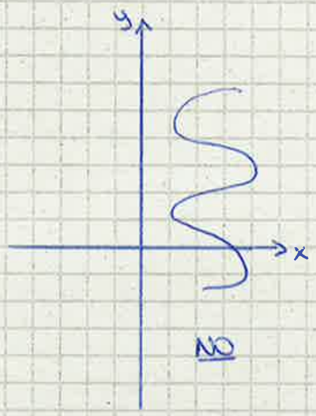
restringo int.

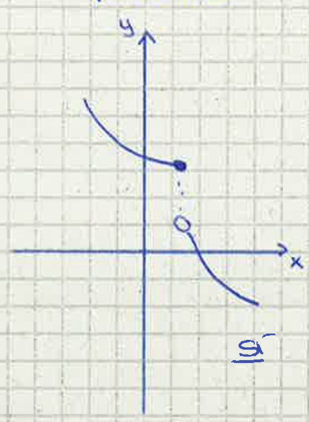
$f' : [-2,2] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
$x \rightarrow y = -\sqrt{4-x^2}$

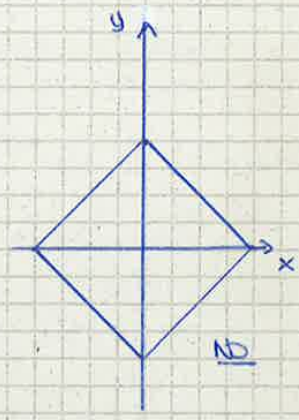
dom $f = [-2,2]$

CE $\neq$ dom f — della f presa da me

è il + grande possibile







Immagine

Sia $f : X = \text{dom} f \rightarrow Y \subset \mathbb{R}$
$x \rightarrow y = f(x)$

Imm $f \overset{def}{\Leftrightarrow} \{y \in Y : \exists x \in \text{dom} f$ tale che $y = f(x)\}$, ovvero: tutte le y che vengono raggiunte da una x

Es. $f : [-2,2] \Rightarrow Y = \mathbb{R}$
$x \mapsto y = -\sqrt{4-x^2}$

Imm $f = [-2, 0]$

OSS. Se $A \subseteq$ dom f allora per immagine di A si intende

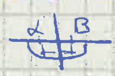
$$f(A) = \{y \in Y : \exists x \in A \text{ tale che } y = f(x)\}$$

Nel nostro esempio $A = [0,1] \subseteq$ dom f $\quad f(A) = f([0,1]) = [-2, -\sqrt{3}]$

Controimmagine di $B \subseteq Y$ = codom f

$f^{-1}(B) = \{x \in \text{dom} f : \exists y \in B \text{ tale che } y = f(x)\}$

Es. $B = [-1, 0]$



Trovo α e β dall'equazione $y = -\sqrt{4-x^2}$

$-1 = -\sqrt{4-x^2} \quad 4 - x^2 = 1 \quad x^2 = 3 \quad x = \pm\sqrt{3}$

$f^{-1}([-1,0]) = [-2, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, 2]$

$f^{-1}\{-1\} = f^{-1}(-1) = \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$

$\left[f^{-1}\{x_0\} = f^{-1}(x_0)\right]$

① $\cos^2 x + \text{sen}^2 x = 1$

② $\text{sen}(\alpha \pm \beta) = \text{sen}\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \,\text{sen}\beta$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \text{sen}\alpha \,\text{sen}\beta$

③ $\text{sen}\, 2x = 2 \,\text{sen} x \cos x$

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

④ prostaferesi $\quad \text{sen} x - \text{sen} y = 2\,\text{sen}\frac{x-y}{2} \cos\frac{x+y}{2}$

$\cos x - \cos y = -2\,\text{sen}\frac{x-y}{2} \cos\frac{x+y}{2}$

$tg\, x = \frac{\text{sen} x}{\cos x} \qquad cotg\, x = \frac{\cos x}{\text{sen} x}$

Funzioni inverse

$y = arcsen\, x$

$y = arccos\, x$

$y = arctg\, x$

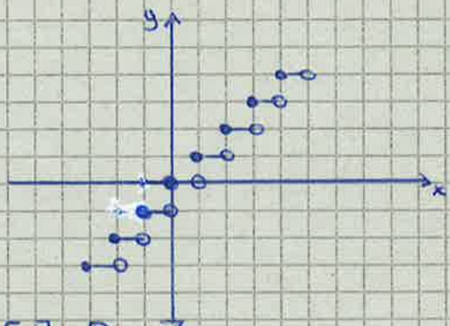
$y = arccotg\, x$

Parte intera $[x]$

$[x] = \max\{m \in \mathbb{Z} : m \leq x\} \quad x \in \mathbb{R}$

$[3{,}2] = \max\{m \in \mathbb{Z} : m \leq 3{,}2\} = 3$

$[-13{,}4] = \max\{m \in \mathbb{Z} : m \leq -13{,}4\} = -14$



$[x] \quad \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$

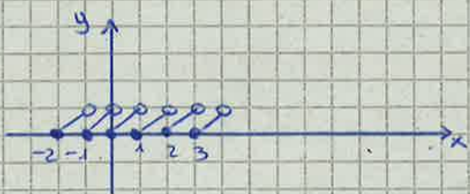
$x \mapsto [x]$

Mantissa $M(x)$

$M(x) = x - [x]$

$M(4{,}71) = 4{,}71 - 4 = 0{,}71$

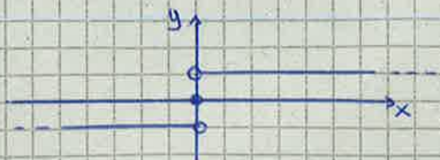
$M(-2{,}8) = -2{,}8 - (-3) = 0{,}2$



$M(x) : \mathbb{R} \to [0,1)$

Segno $sign(x)$

$$sign(x) = \begin{cases} -1 & se\ x < 0 \\ 0 & se\ x = 0 \\ 1 & se\ x > 0 \end{cases}$$



$sign(x) : \mathbb{R} \to \{-1, 0, 1\}$

TEOREMA: una f strettamente monotona su I è iniettiva. Non vale il viceversa.

DIM $\forall x_1, x_2 \in X \wedge x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

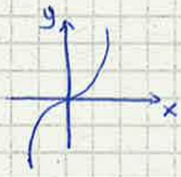
$\quad\quad x_1 \neq x_2 \quad\quad f(x_1) \neq f(x_2)$ c.v.d.

è iniettiva, ma non strettamente monotona

$f[0,2] \to \mathbb{R}$

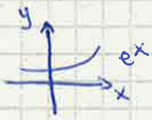
OSS.2 La somma di f monotone concordi è ancora monotona dello stesso tipo

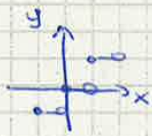
Es. $f(x) = x^3 + x + 5$ è strettamente crescente perché ne basta una strettam. x essere strettam. cresc. anche la somma delle f



$g(x) = [x] + e^x$

$[x]$ ↳ cresc. ; e^x ↳ strett. cresc. ; g ↳ strett. cresc.





Funzione inversa

Considero una $f: X \to f(x)$ (suriettiva) che sia iniettiva, allora è possibile definire una nuova funzione

$$f^{-1}: f(x) \to X$$

$$y \in f(x) \longmapsto x \text{ tale che } y = f(x)$$

Cioè se $(x,y) \in G_f$ allora $(y,x) \in G_{f^{-1}}$ → ovvero i due grafici sono simmetrici rispetto alla bisettrice $y = x$

Es. $f: X \to f(x)$
$x \mapsto y = x^2$

Esistono f che coincidono con la loro inversa
Es. $y = x$
iperb. equil.

$f: (-\infty, 0] \to [0, +\infty)$
$x \mapsto y = x^2$

$f^{-1}: [0, +\infty) \to (-\infty, 0] \quad x = \pm y$
$(y \mapsto -\sqrt{y} = x) \quad (x \longleftrightarrow y)$
$x \mapsto y = -\sqrt{x}$

Estremo superiore/inferiore

$$\sup_{x \in A} f(x) = \sup\{f(x) : x \in A\}$$

$$\inf_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \inf\{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$$

Es. $f(x) = \operatorname{sen} x$
$\sup f(x) = 1$
$x = [0, 2\pi]$

PROPR.

TEOREMA: siano f e g 2 funzioni tali che $\operatorname{im} f \cap \operatorname{dom} g \neq \emptyset$ e sia $A \in \operatorname{dom} g \cdot f$

i) se f è crescente / decrescente su A e g è crescente / decrescente su $f(A)$ allora $g \cdot f$ è crescente su A

ii) se f è decrescente su A e g è crescente su $f(A)$ o viceversa allora $g \cdot f$ è decrescente su A

~ regola dei segni $+ \cdot + = +$ $\quad - \cdot - = +$ $\quad + \cdot - = -$ $\quad - \cdot + = -$

NOTA: il teorema vale anche se alla monotonia si sostituisce la stretta monotonia

se ho un n° pari di f crescenti → crescente

Es. $y = \operatorname{arctg} x^5$ → strett. cresc.


x^5 strett. cresc.


arctg strett. cresc.

Es. 2 $y = \operatorname{arctg} x^6$ non è ovunque strettamente crescente → ci conviene suddividere il dom in sottointervalli di monotonia

es. se $(-\infty, 0]$ → è strett. cresc.

se $[0, +\infty)$ → ↗

PROPR. se f e g sono iniettive sui loro dom allora $g \circ f$, supposto esista, sono iniettivo sul suo dom.

OSS sia $f: X \to Y$ una funzione invertibile, cioè che ammette $f^{-1}: Y \to X$, allora $f \circ f^{-1} = i_Y$ (i identità sull'insieme Y)

$f^{-1} \circ f = i_X$

Es. $f(x) = x^2$

$f: (-\infty, 0] \to [0, +\infty)$
$x \mapsto y = x^2$

f^{-1}

$f: [0, +\infty) \to (-\infty, 0]$
$x \mapsto y = -\sqrt{x}$

$x = \pm\sqrt{y}$
$x = -\sqrt{y}$

$f \cdot f^{-1}: Y \to Y = [0, +\infty)$
$x \mapsto f(f^{-1}(x)) = (-\sqrt{x})^2 = x$ identità su Y

$f^{-1} \cdot f: X \to X = (-\infty, 0]$
$x \mapsto f^{-1}(f(x)) = y = -\sqrt{f} = -\sqrt{x^2} = -|x|$ su X $\quad -|x| = -(-x) = x$ identità su X

FUNZIONI PARI e DISPARI

$A \in \mathbb{R}$ è simmetrico $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\forall x \in A \Rightarrow (-x) \in A$

Es. $[-3, 1) = B$ $\quad -2 \in B$, ma $2 \notin B$ → B non è simmetrico

$(-5, -4] \cup [4, 5)$ è simmetrico

DEF sia f considerata su $A \in \mathbb{R}$ simmetrico

f è pari su A $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\forall x \in A$ $\quad f(x) = f(-x)$ (simmetria asse y)

f è dispari su A $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\forall x \in A$ $\quad f(-x) = -f(x)$ (simmetria origine)

NOTA $\exists$ su $A \in \mathbb{R}$ funzioni che siano sia pari che dispari

LIMITI DI SUCCESSIONE

$a_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

NOTA: a_n può anche essere definita su un sottoinsieme di $\mathbb{N}$ superiorm. illimitato

ES. $\{n \in \mathbb{N} : n \geq 152\}$

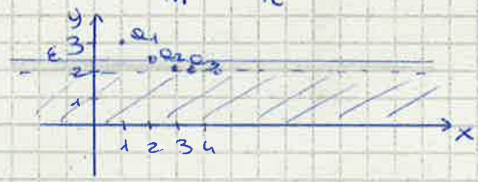
$a_n = n^2 \qquad b_n = \frac{1}{n+3} \qquad c_n = (-1)^n$

DEF Si dice che a_n converge ad $\ell \in \mathbb{R}$ e si scrive $\begin{cases} \lim_{n\to\infty} a_n = \ell \\ a_n \to \ell \end{cases}$

$\overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon : n > n_\varepsilon \to |a_n - \ell| < \varepsilon \to \ell - \varepsilon \leq a_n \leq \ell + \varepsilon$

$\overset{def'}{\Longleftrightarrow} \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon : n \in I_\varepsilon(+\infty) \to a_n \in I_r(\ell)$

$a_n = 2 + \frac{1}{n} = \frac{2n+1}{n} \qquad n > 0$



convergenza → con un certo ε i val di a_n sono nella fascia

Verifica che $\lim_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{n} = 2$

$\forall \varepsilon > 0 \quad |a_n - \ell| < \varepsilon \Longleftrightarrow \left|\frac{2n+1}{n} - 2\right| < \varepsilon$

$\left|\cancel{2} + \frac{1}{n} - \cancel{2}\right| < \varepsilon \qquad \frac{1}{n} < \varepsilon \qquad n > \frac{1}{\varepsilon}$

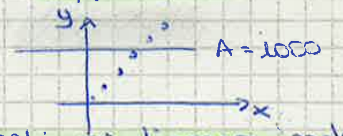
$n_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ - p. intera

$n > n_\varepsilon \Rightarrow |a_n - \ell| < \varepsilon$ c.v.d.

DEF si dice che a_n diverge a $+\infty$ e si scrive $\begin{cases} \lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \\ a_n \to +\infty \end{cases}$

$\overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall A > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : n > n_0 \Rightarrow a_n > A$

Es. $a_n > A \quad n^2 > A \quad n > \sqrt{A} \quad n_0 = [\sqrt{A}]$



NOTA Successioni né convergenti né divergenti, si dicono indeterminate

es. $c_n = (-1)^n \quad \lim_{n\to+\infty} c_n$ non esiste

NOTA La divergenza può essere anche a $-\infty$

$\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall A > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : n > n_0 \Rightarrow a_n < -A$

DEF Una successione convergente o divergente si dice regolare

Successioni monotone

Sia $a_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ una successione

2 termini consecutivi sono / 1> dell'altro

① a_n si dice crescente (o strett. cresc.) $\overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall n : a_{n+1} \geq (o >) a_n$

② // decrescente // decr. // // $\leq$ (o $<$) //

"DEFINITIVAMENTE" significa da un certo $n_0 \in \mathbb{N}$ in poi

è def. strett. cresc. (prendo $n_0 = 4$)

LIMITI DI SUCCESSIONE

$a_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

NOTA: a_n può anche essere definita su un sottoinsieme di $\mathbb{N}$ superiorm. illimitato

ES. $\{n \in \mathbb{N} : n \geq 152\}$

$a_n = n^2$ $\qquad b_n = \frac{1}{n+3}$ $\qquad c_n = (-1)^n$

DEF Si dice che a_n converge ad $\ell \in \mathbb{R}$ e si scrive $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$ oppure $a_n \to \ell$

$\overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon : n > n_\varepsilon \to |a_n - \ell| < \varepsilon$ $\quad (\ell - \varepsilon \leq a_n \leq \ell + \varepsilon)$

$\overset{def'}{\Longleftrightarrow} \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon : n \in I_\varepsilon(+\infty) \to a_n \in I_r(\ell)$

$a_n = 2 + \frac{1}{n} = \frac{2n+1}{n} \quad n > 0$

convergenza → con un certo i val di a_n sono nella fascia

Verifico che $\lim_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{n} = 2$

$\forall \varepsilon > 0 \quad |a_n - \ell| < \varepsilon \Longleftrightarrow \left|\frac{2n+1}{n} - 2\right| < \varepsilon$

$\left|\cancel{2} + \frac{1}{n} - \cancel{2}\right| < \varepsilon \qquad \frac{1}{n} < \varepsilon \qquad n > \frac{1}{\varepsilon}$

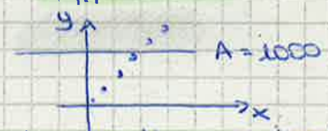
$n_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ – p. intera

$n > n_\varepsilon \Rightarrow |a_n - \ell| < \varepsilon \quad$ c.v.d.

DEF si dice che a_n diverge a $+\infty$ e si scrive $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ oppure $a_n \to +\infty$

$\overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall A > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : n > n_0 \Rightarrow a_n > A$

ES. $a_n > A \quad n^2 > A \quad n > \sqrt{A} \quad n_0 = [\sqrt{A}]$



NOTA Successioni né convergenti né divergenti, si dicono indeterminate

es. $c_n = (-1)^n \quad \lim_{n\to+\infty} c_n$ non esiste

NOTA La divergenza può essere anche a $-\infty$

$\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall A > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : n > n_0 \Rightarrow a_n < -A$

DEF Una successione convergente o divergente si dice regolare

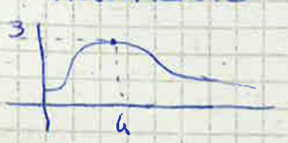
Successioni monotone

Sia $a_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ una successione

① a_n si dice crescente (o strett. cresc.) $\overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall n : a_{n+1} \geq (o >) a_n$ — 2 termini consecutivi sono 1 > dell'altro

② " decrescente " decr. " $\leq$ (o $<$) "

"DEFINITIVAMENTE" significa da un certo $n_0 \in \mathbb{N}$ in poi



è def. strett. cresc. (prendo $n_0 = 4$)

Tesi: allora il $\lim_{n\to+\infty} b_n$ esiste e vale $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$

Es. $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{1+H(\pi n)}$

$$\frac{n}{2} \le \frac{n}{1+H(\pi n)} \le \frac{n}{1}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$+\infty \qquad\qquad +\infty$$

$$\Downarrow$$

$$+\infty$$

ALGEBRA DEI LIMITI DI SUCCESSIONE

Siano $a_n \to \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ e $b_n \to m \in \overline{\mathbb{R}}$ successioni

allora $\lim_{n\to+\infty} (a_n \pm b_n) = \ell \pm m$ ⊛

$\lim_{n\to+\infty} (a_n \cdot b_n) = \ell \cdot m$ ⊛

se $b_n \neq 0$ definitivam. $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\ell}{m}$ ⊛

⊛ se le espressioni $\ell \pm m$, $\ell \cdot m$, $\frac{\ell}{m}$ hanno significato (sono forme di indeterminazione o p. 160 di comuto (?) lebesco)

Teorema: sia $a_n \to 0$ (infinitesimo) e b_n limitato, allora la successione $(a_n \cdot b_n) \to 0$

Es. $\lim_{n\to+\infty} \frac{\cos \pi n}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} (\cos \pi n)\left(\frac{1}{n+1}\right)$

$|\cos \pi n| \le 1$ è limitato $\qquad \to 0$

$\lim_{n\to+\infty} \operatorname{arctg}(n) = \frac{\pi}{2}$

CASO NOTEVOLE (GEOMETRICA):

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = \begin{cases} 0 & \text{se } |q|<1 \\ 1 & \text{se } q=1 \\ +\infty & \text{se } q>1 \\ \nexists & \text{se } q \le -1 \end{cases} \qquad q \in \mathbb{R}$$

Criterio del rapporto: Sia a_n una successione a termini (definitivam) positivi: $a_n > 0$, $\forall n$; se esiste $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ allora

$$\begin{cases} \text{se } q<1 \Rightarrow a_n \to 0 & \text{(infinitesimo)} \\ \text{se } q>1 \Rightarrow a_n \to +\infty & \text{(diverge positivam.)} \end{cases}$$

Dim

consideriamo il caso $q<1$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ (esiste finito)

$\overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 : n > n_0 \Rightarrow q-\varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < q+\varepsilon$

posso scegliere $\varepsilon > 0$ tale che $(q+\varepsilon) < 1$

$\Rightarrow n > n_0 : \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$

$\forall n > n_0 : a_{n+1} < a_n$ (stretta decrescenza)

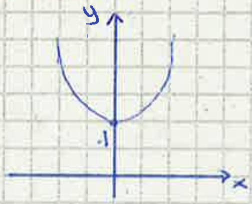
Allora sappiamo per ipotesi che $a_n > 0$, $\forall n$ $\xrightarrow{\;}$ cioè $\{a_n\}$ è inf. lim. da 0

③ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\forall B>0, \exists A \geq 0 : x \in dom f \wedge x > A \Rightarrow f(x) < -B$

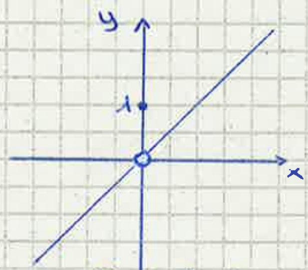
ovvero $\forall x \in dom f$, $x \in I_A(+\infty) \Rightarrow f(x) \in I_B(-\infty)$

continuità



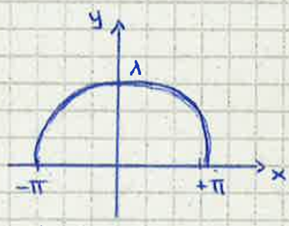
$f(x) = x^2+1$

continua



$g(x) = [\cos x]+1$

discontinua



$h(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ $\quad x \neq 0$

non esiste

continuità: Sia x_0 un punto del dom f

f è continua su x_0 $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$

$\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0 : x \in dom f \wedge |x-x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

ovvero $x \in dom f : x \in I_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in I_\varepsilon(f(x_0))$

limite finito = valore naturale del punto dove ci aspettiamo che la f vada avvicinandoci da dx
Sia f definita su un $\dot{I}(x_0)$ = intorno di x_0 meno x_0 (punto) $= I(x_0) - \{x_0\}$ da sn

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$

$\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0 : x \in dom f \wedge 0 < |x-x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$

il modulo è sempre $\geq 0 \rightarrow$ ovvero $|x-x_0| \neq 0$ (intorno bucato)

ovvero $x \in dom f : x \in \dot{I}_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in I_\varepsilon(\ell)$

Negli esempi rappresentati:

① $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} x^2+1 = 1$ $(= f(0))$ considerazione ulteriore

② $\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} [\cos x]+1 = 0$ $\neq f(0)$ intorno bucato

③ $\lim_{x \to 0} h(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ $\neq f(0)$ che non esiste $\rightarrow$ intorno bucato

oss f si dice continua su I $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ è continua su ogni punto $x \in I$

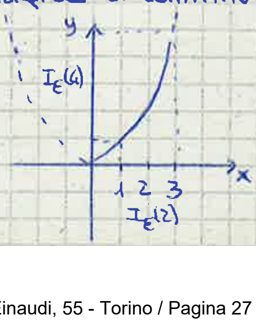
oss le f elementari (non a tratti) e le loro inverse sono continue sul loro dominio

Es. Mostrare che $\lim_{x \to 2} x^2 = 4 = f(2)$ (verifica di continuità)

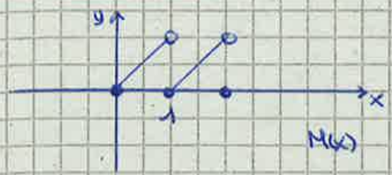
$\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0 : x \in dom f \wedge 0 < |x-2| < \delta \Rightarrow |x^2-4| < \varepsilon$

Scelgo $x \in (1,3) \Leftrightarrow 1 < x < 3$ $\quad 3 < x+2 < 5 \Rightarrow |x+2| < 5$

$|x^2-4| = |x+2| \cdot |x-2| < 5|x-2| < \varepsilon$ è vero se $|x-2| < \frac{\varepsilon}{5}$



Limite laterale



$\lim_{x\to 1^-} H(x) = 1$

$\lim_{x\to 1^+} H(x) = 0$

$\lim_{x\to 1} H(x) =$ non esiste

lim sinistro

Sia f definita almeno su $\dot{I}^-(x_0)$ (intorno sinistro bucato di x_0) $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \overset{def}{\iff}$

$\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0 : x \in dom f \wedge x_0-\delta < x < x_0 \Rightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon$

ovvero
$\forall x \in dom f, x \in \dot{I}^-(x_0) \Rightarrow f(x) \in I_\varepsilon(\ell)$

lim destro

Sia f definita almeno su $\dot{I}^+(x_0)$ $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \overset{def}{\iff}$

$\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0, x \in dom f \wedge x_0 < x < x_0+\delta \Rightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon$

ovvero
$\forall x \in dom f : x \in \dot{I}^+(x_0) \Rightarrow f(x) \in I_\varepsilon(\ell)$

OSS
Se f è definita su $I(x_0)$ allora

i) $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \iff \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

ii) $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \iff \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \ell$

Discontinuità di 1ª specie

Sia f definita almeno su $\dot{I}(x_0)$

i) esiste finito il $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \ell_1 \in \mathbb{R}$

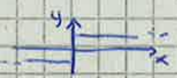
ii) esiste finito il $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \ell_2 \in \mathbb{R}$

iii) $\ell_1 \neq \ell_2$

$\overset{def}{\iff}$ x_0 è punto di discontinuità di 1ª specie di SALTO $\Delta = |\ell_1 - \ell_2|$

Nell'es. di $H(x)$ il $\Delta = |1-0| = 1$

es 2 $f(x) = sgn(x) = \begin{cases} -1 & x<0 \\ 0 & x=0 \\ 1 & x>0 \end{cases}$



$x_0 = 0$ è p. di disc. di 1ª specie

$\lim_{x\to x_0^+} sgn(x) = 1$

$\Delta = |1+1| = 2$

$\lim_{x\to x_0^-} sgn(x) = -1$

Discontinuità di 2ª specie

Se f è definita almeno su $\dot{I}(x_0)$ e x_0 è punto di non continuità (né eliminabile, né di I specie) allora x_0 si dice punto di discontinuità di 2ª specie.

Es 1
$f(x) = \begin{cases} sen\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

$\lim_{x\to 0} f(x) = \nexists$ discont. di 2ª specie

Es 2
$g(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & x \neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$

$\lim_{x\to 0^-} g(x) = +\infty$

$\lim_{x\to 0^+} g(x) = e^{-\infty} = 0$

Teorema di permanenza del segno rovesciato

Sia f definita su $\dot{I}(x_0)$

i) esiste $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$

ii) esiste $\dot{I}(x_0): f(x) \geq 0, \forall x \in \dot{I}(x_0)$

allora $\ell \geq 0$

Es. $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ $\quad \lim_{x\to 0} f(x) = 0 \quad$ esiste $\dot{I}(0): f(x) > 0, \forall x \in \dot{I}(0)$

I teorema del confronto

Siano f, g definite su $\dot{I}(c)$ (almeno) con $c \in \overline{\mathbb{R}}$

$\lim_{x\to c} f(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}} \qquad \lim_{x\to c} g(x) = m \in \overline{\mathbb{R}}$

i) esiste $\dot{I}(c): f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in \dot{I}(c)$

allora $\ell \leq m$

Dim se considero la funzione $h(x) = g(x) - f(x) \geq 0, \forall x \in \dot{I}(c)$

$\Downarrow$ t. del s. rov.

$m - \ell \geq 0$

II teorema del confronto

Siano f, g, h funzioni definite su $\dot{I}(x_0)$

i) $\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = \ell$

ii) $\exists\ \dot{I}(x_0)$ tale che $f(x) \leq g(x) \leq h(x), \forall x \in \dot{I}(x_0)$

allora esiste $\lim_{x\to x_0} g(x) = \ell$

Dim i) $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$ $\qquad$ $A = \mathrm{dom} f \cap \mathrm{dom} g \cap \mathrm{dom} h$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0: x \in A \wedge 0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow \ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$

$\lim_{x\to x_0} h(x) = \ell \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_2 > 0: x \in A \wedge 0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow \ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$

ii) $\forall x \in \dot{I}_{\delta_0}(x_0): f(x) \leq g(x) \leq h(x)$

sono tutti intorni dello stesso punto circolari $\to$ basta prende δ più piccolo

$\overline{\delta} = \min\{\delta_0, \delta_1, \delta_2\}$

$\forall x \in \dot{I}_{\overline{\delta}}(x_0): \underbrace{\ell - \varepsilon < f(x)}_{1} \leq \underbrace{g(x) \leq}_{3} \underbrace{h(x) < \ell + \varepsilon}_{2} \qquad \ell - \varepsilon < g(x) < \ell + \varepsilon \Rightarrow$

$\lim_{x\to x_0} g(x) = \ell$ c.v.d.

Es. notevole

$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \qquad f(x)$ è pari cioè $f(x) = f(-x) \ \forall x \in \dot{I}(x_0) \quad 0 \leq x < \frac{\pi}{2}$

$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$

$S\widehat{OCA} \leq S\widehat{OCA} < S\widehat{OAB} \longrightarrow \frac{1}{2}\overline{OA} \cdot \overline{AB}$

$\frac{1}{2}\overline{OA} \cdot \overline{CH} \qquad S_{\text{settore}} : S_{\text{cerch.}} = x : 2\pi \qquad \frac{1}{2} r \cdot r \operatorname{tg} x$

$\frac{1}{2} r \cdot r \operatorname{sen} x \qquad \frac{x \pi r^2}{2\pi} \qquad \frac{1}{2} r^2 \operatorname{tg} x$

$\frac{1}{2} r^2 \operatorname{sen} x$

$\cancel{\frac{1}{2}} \cancel{r^2} \operatorname{sen} x < \frac{x \cancel{r^2}}{\cancel{2}} < \cancel{\frac{1}{2}} \cancel{r^2} \operatorname{tg} x \qquad 1 < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{1}{\cos x} \qquad 1 > \frac{\operatorname{sen} x}{x} > \cos x$

$\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

Teorema di sostituzione (lim di f composte)

Sia f definita su $I(x_0)$ e continua in x_0
Sia g definita su $U(y_0)$ e continua in $y = f(x)$

Allora la $g \circ f$ è definita su $I(x_0)$ ed è continua in x_0; cioè

$$\lim_{x \to x_0} g[f(x)] = g[\lim_{x \to x_0} f(x)] = g[f(x)]$$

Es. $\lim_{x \to 1} \operatorname{arctg}(e^{(x^2+1)}) = \operatorname{arctg} e^2$

Limiti notevoli

① $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

② $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

②' $\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = 1^{\infty} = e$

③ $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln\left[\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}\right] = \ln e = 1$

④ $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$t = e^x - 1$ con $x \to 0$
$e^x = t + 1 \Rightarrow x = \ln(1+t)$ con $t \to 0$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{t \to 0} \frac{t}{\ln(1+t)} =$

$\lim_{t \to 0} \frac{1}{\frac{\ln(1+t)}{t}} = \frac{1}{1} = 1$

⑤ $\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha \in \mathbb{R}$

$1 + x = e^t$ con $x \to 0 \Rightarrow t \to 0$

$t = \ln(1+x)$

$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \lim_{t \to 0} \frac{e^{\alpha t} - 1}{e^t - 1} \cdot \frac{\alpha t}{\alpha t} =$

$\lim_{t \to 0} \frac{\frac{e^{\alpha t} - 1}{\alpha t}}{\frac{e^t - 1}{t}} = \frac{1}{1} = 1$

- ricondursi sempre a 0 con sostituzione
- ricondursi ai lim notevoli

[NOTA $f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$ per $f(x) > 0$]

Criterio x dim. la ∄ di un limite

Sia $g(x)$ una f continua e a_n, b_n 2 successioni tali che $a_n \to \ell$ e $b_n \to \ell$

Se accade che $\lim_{x \to +\infty} g(a_n) \neq \lim_{x \to +\infty} g(b_n)$ allora $\lim_{x \to \ell} g(x)$ non esiste

Es. sia da valutare $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ $\quad a_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} \xrightarrow{n \to +\infty} 0 \quad b_n = \frac{1}{2n\pi} \xrightarrow{n \to +\infty} 0$

$\lim_{n \to +\infty} g(a_n) = \lim_{n \to +\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1$

$\lim_{n \to +\infty} g(b_n) = \lim_{n \to +\infty} \operatorname{sen}(2n\pi) = 0$

$1 \neq 0 \Rightarrow$ il lim non esiste

Teoremi globali per f continue

Teorema di esistenza degli zeri

Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$
i) f continua su $[a,b]$
ii) $f(a) \cdot f(b) < 0$

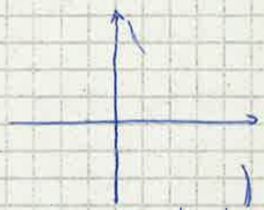
allora esiste $c \in (a,b)$: $f(c) = 0$ (se f è strett. monot. su $[a,b]$, lo zero è unico)

Es. $f(x) = \frac{1}{2} - e^x$ su $(0, +\infty)$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty > 0$

$f(x)$ è continua su $(0, +\infty)$

$\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty < 0$

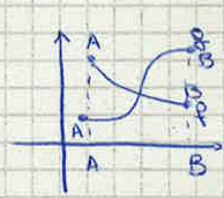


$\exists$ almeno un $c \in (0, +\infty) : f(c) = 0$

In corrispondenza dello 0 c'è sempre un'inversione di segno e di derivata

Corollario (al teorema di esistenza degli zeri)

Siano f e g due funzioni definite e continue su $[a,b]$ e $f(a) > g(a)$, $f(b) < g(b)$



Allora $\exists$ almeno un punto $c \in (a,b) : f(c) = g(c)$

Dim considero la f continua su $[a,b]$

$h(x) = f(x) - g(x)$ (x diff. di f continue)

$h(a) = f(a) - g(a) > 0$ perché $f(a) > g(a)$
$h(b) = f(b) - g(b) < 0$ perché $f(b) < g(b)$

$h(a) \, h(b) < 0$ x il teorema di esistenza degli zeri esiste un $c \in [a,b]$ tale che $h(c) = 0 \Rightarrow f(c) = g(c)$

Oss se f è strettam. decresc. su $[a,b]$ e g strett. cresc. su $[a,b]$, allora c'è unico

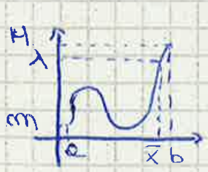
Es. $e^x + x - 2 = 0$ in $[0,1]$

$\begin{cases} y = e^x & f(x) \\ y = 2 - x & g(x) \end{cases}$ $\quad f(0) = 1$, $g(0) = 2 \Downarrow f(0) < g(0)$ $\quad f(1) = e$, $g(1) = 1 \Downarrow f(1) > g(1)$ $\Rightarrow$ esiste almeno uno zero dell'equazione data → uno ed è unico per stretta monotonia

Teorema dei valori intermedi

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una f continua su $[a,b]$, allora

$\forall \lambda \in [m, M]$ essendo $m = \min_{x \in [a,b]} f(x)$ e $M = \max_{x \in [a,b]} f(x)$ esiste $\bar{x} \in [a,b] : f(\bar{x}) = \lambda$



Dim Se $m = M$ esiste un solo valore di $\lambda = m = M$ caso banale $f = \text{cost}$

Se $m < M$ allora x il teor. di Weier. esistono $c_1, c_2 \in [a,b]$ tale che $f(c_1) = m$, $f(c_2) = M$ $(c_1 < c_2)$

Se nell'intervallo $[c_1, c_2]$ considero la f $g(x) = f(x) - \lambda$; essendo λ scelto in (m, M)

$g(c_1) = f(c_1) - \lambda = m - \lambda < 0$
$g(c_2) = f(c_2) - \lambda = M - \lambda > 0$

Allora essendo g continua su $[c_1, c_2]$ e tale che $g(c_1) \cdot g(c_2) < 0$, per il teorema di esistenza degli zeri $\exists$ $\bar{x} \in (c_1, c_2)$ tale che $g(\bar{x}) = 0 \Rightarrow f(\bar{x}) = \lambda$ c.v.d.

Oss Se $\lambda = \min \longrightarrow \bar{x} = c_1$
Se $\lambda = \max \longrightarrow \bar{x} = c_2$

CONSEGUENZE

Indico con I un intervallo $\subseteq$ dom f

Se f è continua su I allora $f(I)$ è ancora un intervallo di estremi $\inf_{x \in I} f(x)$; $\sup_{x \in I} f(x)$

NOTA Gli estremi di $f(I)$ possono appartenere o no all'intervallo possono es sere finiti o infiniti

OSS 5 Se $f(x)$ è continua in x_0

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \qquad \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{1} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$f(x)-f(x_0) = o(1) \text{ per } x\to x_0$$

$$\left[f(x) = f(x_0) + o(1) \text{ per } x \to x_0\right]$$

OSS 6 Se $\lim_{x\to c} f(x) = +\infty$ (*), allora $\lim_{x\to c} \frac{1}{f(x)} = 0 \Rightarrow \left[1 = o(f(x)) \text{ per } x \to c\right]$

(*) equival.

ES. NOTEVOLI

① $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1-x}{x} = 0$

$e^x - 1 \sim x$ per $x \to 0$

$e^x = 1 + x + o(x)$ per $x\to 0$

② $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

$\ln(1+x) \sim x$ per $x \to 0$

$\ln(1+x) = x + o(x)$ per $x\to 0$

③ $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

$1-\cos x \overset{O}{\sim} x^2$ per $x\to 0$

$1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$ per $x \to 0$

$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$ per $x \to 0$

qualcosa di trascurabile

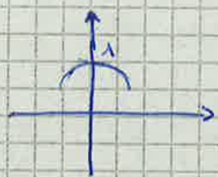
④ $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$ per $x \to 0$

$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$

⑤ $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = 0 \qquad x^\alpha = o(e^x)$

⑥ $\lim_{x\to 0} x^\alpha \ln x = 0 \qquad \ln x = o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$

⑦ $\sqrt[m]{1+x} = 1 + \frac{1}{m}x + o(x)$



Algebra degli o piccolo $\boxed{o(x)}$

① $x^n = o(x^m)$ per $x\to 0$

$\lim_{x\to 0} \frac{x^n}{x^m} = 0 \Leftrightarrow n > m$

② $o(x^n)\, o(x^m) = o(x^{n+m})$ $x\to 0$

③ $x^n\, o(x^m) = o(x^{n+m})$ $x \to 0$

④ $x^n = o(x^m)$ $x \to +\infty \Leftrightarrow n < m$

⑤ $k\, o(x^n) = o(x^n)$, $k \neq 0$ per $x \to 0$

⑥ $g(x)\, o(x^n) = o(x^n)$ se $g(x)$ è limitata per $x\to 0$

⑦ $[o(x^n)]^m = o(x^{n\cdot m})$ $x\to 0$

⑧ $o(o(x)) = o(x)$ $x\to 0$

⑨ $o(x^n + o(x^n)) = o(x^n)$ $x\to 0$

⑩ $o(x^n) + o(x^m) = o(x^p)$ dove $p = \min\{n, m\}$ $x\to 0$

OSS $\operatorname{sen} x = x + o(x)$ per $x\to 0$ intendo $\operatorname{sen} x = x + f(x)$ e $f(x) = o(x)$ per $x \to 0$

$\frac{\operatorname{tg} x}{x} \to 1$ $x \to 0$ $\operatorname{tg} x = x + o(x)$ per $x\to 0$ intendo $\operatorname{tg} x = x + g(x)$ e $g(x) = o(x)$ $x \to 0$

ERRATO $\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x = \cancel{x} + o(x) - \cancel{x} - o(x) = 0$ no perché assume che $g(x) = f(x)$!

Es. 1 $f(x) = \operatorname{sen} x \qquad g(x) = \operatorname{tg} x$

$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = 0 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x} = 1 \to$ f e g inf dello stesso ordine

Es. 2 $f(x) = \operatorname{sen} x \qquad g(x) = \log(1+x^2)$

$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = 0 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\log(1+x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{x+o(x)}{x^2+o(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x^2} = \infty$ f inf ord < g

Es. 3 $f(x) = x^2 \qquad g(x) = x^2(1+\operatorname{sen}\frac{1}{x})$

$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = 0 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2(1+\operatorname{sen}\frac{1}{x})} \Rightarrow \nexists$ f e g sono inf non confrontabili

Es. 4 $f(x) = e^x \qquad g(x) = e^{x+2\operatorname{sen} x}$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} g(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{e^{x+2\operatorname{sen} x}} = \lim_{x\to +\infty} e^{\cancel{x}-\cancel{x}-2\operatorname{sen} x} = \nexists$ INF non confr.

o piccolo nei calcoli

Es. 1 $$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arcsen}(\sqrt[4]{\cos x}-1)(\log\sqrt{x^2+9}-\log 3)}{(e^{e^x}-e^{\cos x})^2\left(e^{\frac{2x^2}{3x^3+5}}-1\right)}$$

$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arcsen} x}{x} = 1 \qquad \operatorname{arcsen} x = x + o(x) \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

$\ln(x^2+9)^{\frac{1}{2}} = \ln\left[3\left(1+\frac{x^2}{9}\right)^{\frac{1}{2}}\right] = \ln_3 + \ln\left(1+\frac{x^4}{9}\right)^{\frac{1}{2}}$

$[(1+t)^\alpha = 1+\alpha t+o(t) \text{ se } t\to 0]$

$\left(1+\frac{x^2}{9}\right)^{\frac{1}{2}} = 1+\frac{x^2}{18}+o(x^2)$ se $x\to 0$

$[\ln(1+t) = t+o(t) \text{ se } t\to 0]$

$\ln\left(1+\frac{x^2}{18}+o(x^2)\right) = \frac{x^2}{18}+o(x^2)+o\left(\frac{x^2}{18}+o(x^2)\right) = \frac{x^2}{18}+o(x^2)+o(x^2) = \frac{x^2}{18}+o(x^2)$

allora

$(\ln\sqrt{x^2+9}-\ln_3) = \frac{x^2}{18}+o(x^2) \sim \frac{x^2}{18}$

$\cos x = 1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$ per $x\to 0 \qquad \left(\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}\right)$

$\sqrt[4]{\cos x} = \sqrt[4]{1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)} = (1\underbrace{-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}_{t})^{\frac{1}{4}} = 1+\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)+o\left(-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right) =$
$1-\frac{1}{8}x^2+o(x^2)$

$\sqrt[4]{\cos x}-1 = -\frac{1}{8}x^2+o(x^2) \sim -\frac{1}{8}x^2$

$e^t = 1+t+o(t)$ per $x\to 0 \quad t\to 0$

$e^{e^x} = e^{1+x+o(x)} = e^1\cdot e^{x+o(x)} = e^1(1+x+o(x)) = e+ex+o(x)$

$e^{\cos x} = e^{1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)} = e^1\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)} = e^1\left(1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right) = e-\frac{e}{2}x^2+o(x^2)$

$e^{e^x}-e^{\cos x} = \cancel{e}+ex+o(x)-\cancel{e}+\underbrace{\frac{e}{2}x^2+o(x^2)}_{o(x)} = ex+o(x) \sim ex$

$e^{\frac{2x^2}{3x^3+5}}-1 \qquad \frac{2x^2}{3x^3+5} = \frac{2x^2}{5}\,\frac{1}{1+\frac{3}{5}x^3} = \frac{2x^2}{5}\left(1+\frac{3x^3}{5}\right)^{-1} = \frac{2x^2}{5}\left(1-\frac{3}{5}x^3+o(x^3)\right) =$

$\frac{2x^2}{5}+o(x^2) \qquad e^{\frac{2x^2}{5}+o(x^2)} = 1+\frac{2x^2}{5}+o(x^2)$

$x^2+2x = x^2+o(x^2)$, $x\to+\infty$ (se $x\to 0$ $x^2+2x = 2x+o(x)$)

domina la pot. + alta — domina la pot. + bassa

$$f(x) = \frac{3^{\frac13} x^{\frac73}+o(x^{\frac73})}{x^2+o(x^2)} = \frac{3^{\frac13}\cancel{x^{\frac73}}\,x^{\frac13}}{\cancel{x^2}} = \underbrace{3^{\frac13}x^{\frac13}}_{PP}$$

ordine di INF $\alpha=\frac13$

<u>Es.3</u> $f(x)=\ln^2(x-1)$ $x\to 2$ ord. di inf.?

$y=x-2 \Rightarrow x=y+2$ $y\to 0$

$\ln^2(x-1)=\ln^2(y+2-1)=\ln^2(y+1)$ $y\to 0$

$\ln(1+t)=t+o(t)$ $t\to 0$

$$[y+o(y)]^2 = y^2+\underbrace{2y\,o(y)}_{o(y^2)}+\underbrace{o^2(y)}_{o(y^2)} = y^2+o(y^2)$$

$\ln^2(x-1)\sim y^2 = \underbrace{(x-2)^2}_{PP}$ inf $\alpha=2$

<u>Es.4</u> $f(x)=\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}$ $x\to+\infty$ inf?

$$\sqrt[3]{x+1} = x^{\frac13}\sqrt[3]{1+\underbrace{\tfrac1x}_{t\to 0}} = x^{\frac13}\left(1+\frac13\frac1x+o\left(\frac1x\right)\right)$$

$$\sqrt[3]{x-1} = x^{\frac13}\sqrt[3]{1-\frac1x} = x^{\frac13}\left(1-\frac13\frac1x+o\left(\frac1x\right)\right)$$

$$f(x)=x^{\frac13}\left[\cancel{1}+\frac{1}{3x}+o\left(\frac1x\right)-\cancel{1}+\frac{1}{3x}+o\left(\frac1x\right)\right)$$

$$x^{\frac13}\left[\frac{2}{3x}+o\left(\frac1x\right)\right] = \frac23\cdot\frac{1}{x^{\frac23}}+o\left(\frac{1}{x^{\frac23}}\right)$$

se $y=\frac1x$ (inf campione per $x\to+\infty$)

$f(x)=\frac23 y^{\frac23}+o(y^{\frac23})\sim\frac23 y^{\frac23}$ PP $=\frac23\cdot\frac{1}{x^{\frac23}}$ $\alpha=\frac23$

ASINTOTICITÀ

Siano f e g due funzioni definite su $(0,+\infty)$ e infinite per $x\to+\infty$

f è asintotica a g $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $f(x)=g(x)+o(1)$ per $x\to+\infty$

<u>Es.</u> $f(x)=\sinh(x)$ $g(x)=\frac{e^x}{2}$ per $x\to+\infty$ $f\to+\infty$, $g\to+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-g(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{2}-\frac{e^{-x}}{2}\right)-\frac{e^x}{2}=0$$

$f(x)=\frac{e^x}{2}+o(1)$ $x\to\infty$ $\Rightarrow$ sono asintotiche.

La loro distanza tende a 0 quando mi avvicino ad ∞

<u>NOTA</u> Analogo discorso si può fare a $-\infty$

<u>PROP.</u> Se f e g sono asintotiche per $x\to+\infty$ allora $f\sim g$ per $x\to+\infty$, ma non vale il viceversa

<u>Dim</u> f asint. a g $\Longleftrightarrow$ $f(x)-g(x)=o(1)$, $x\to+\infty$

qualcosa che tende a 0 se lo divido per 1

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)+o(1)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty}\left[1+\frac{o(1)}{g(x)}\right]=1$$

cioè $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=1 \Rightarrow f\sim g$, $x\to+\infty$

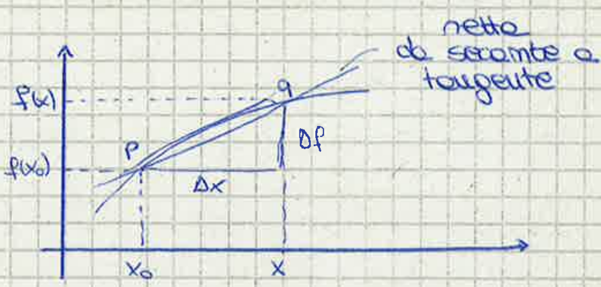
ma non il viceversa $\to$ controes. $f(x)=e^x+x$ $g(x)=e^x+2$

DERIVATE

Sia f definita su $I(x_0)$

Si definisce rapporto incrementale:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = tg\alpha$$



se esiste finito $\overset{①}{\lim_{x\to x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$ si definisce derivata di $f(x)$

Sia $f(x)$ definita su $I(x_0)$, $f(x)$ è derivabile in x_0 se esiste finito il limite ①

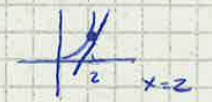
In questo caso la retta limite (retta tg in P a $f(x)$) sarà $t(x): y - f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0)$ ②

Al variare di x_0 si definisce una nuova funzione che indico con $f'(x)$ (derivata)

$f': x \to f'(x)$ dom $f' = \{x \in I(x_0) : \text{esiste finito limite ①}\}$

NOTA: una $f(x)$ derivabile, $\forall x \in I$ si dirà derivabile su I

es. $f(x) = x^2$



$$\left(\frac{\Delta f}{\Delta x}\right) = \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \frac{x^2-4}{x-2} = x+2$$

$$\lim_{x\to 2} x+2 = 4 = f'(2)$$

$$t(x): y - f(2) = f'(2)(x-2)$$

$$y-4 = 4(x-2) \qquad y = 4+4(x-2)$$

Teorema Una f definita su $I(x_0)$ e derivabile in x_0 è ivi continua

Dim f der. in $x_0 \iff \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) \in \mathbb{R}$ $\exists$ finito

f continua in x e def. su $I(x_0)$ $\iff \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) - f(x_0) = 0$$

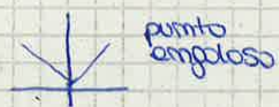
$$\lim_{x\to x_0} [f(x)-f(x_0)] \cdot \frac{x-x_0}{x-x_0} = f'(x_0)\cdot 0 = 0 \quad \text{c.v.d.}$$

$f'(x_0)$

Non vale il viceversa

es. 1 $f(x) = |x|$ $x_0 = 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{|x|-0}{x-0} = \text{non esiste} \begin{cases} +1 & x\to 0^+ \\ -1 & x \to 0^- \end{cases}$$



Es. 2 $f(x) = \sqrt[3]{x}$ $x_0 = 0$ (cont. su $\mathbb{R}$)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x}-0}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = +\infty$$

f non è derivabile in se perché il limite ① non è finito, anche se f ammette la tg verticale $x=0$

non confondere tg e derivabilità

1° formula dell'incremento finito

Sia f definita su $I(x_0)$ e derivabile in x_0 cioè $\overset{①}{\lim_{x\to x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) \in \mathbb{R}$

$$\overset{①'}{\lim_{x\to x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) = 0 \qquad \overset{①''}{\lim_{x\to x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{x-x_0} = 0$$

DISEQUAZIONI

$f(x) \gtrless 0$

① metodo grafico

- portarsi alla f standard con i 3 principi di equivalenza

$1°: (-4x+8>0) \; -8$

$2°: (-4x>-8) \; /4$

$3° \; (-x>-2) \; (-1)$

$x<2$

- disegnare il grafico
- trovare gli zeri
- studiare il segno

1° grado

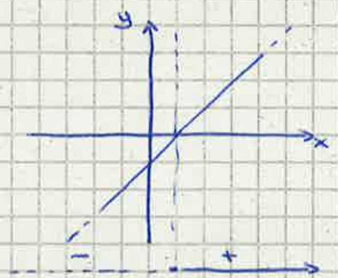
Es. 7.3 ① $-\frac{5}{2}x+3<x-\frac{1}{2}$

$-\frac{7}{2}x<-\frac{7}{2}$

$-x<-1$

$x>1$

$x-1>0$



$x \in (1,+\infty)$

Es. 7.5 $ax-2>3x-7, \; a \in \mathbb{R}$

$(a-3)x>-5$

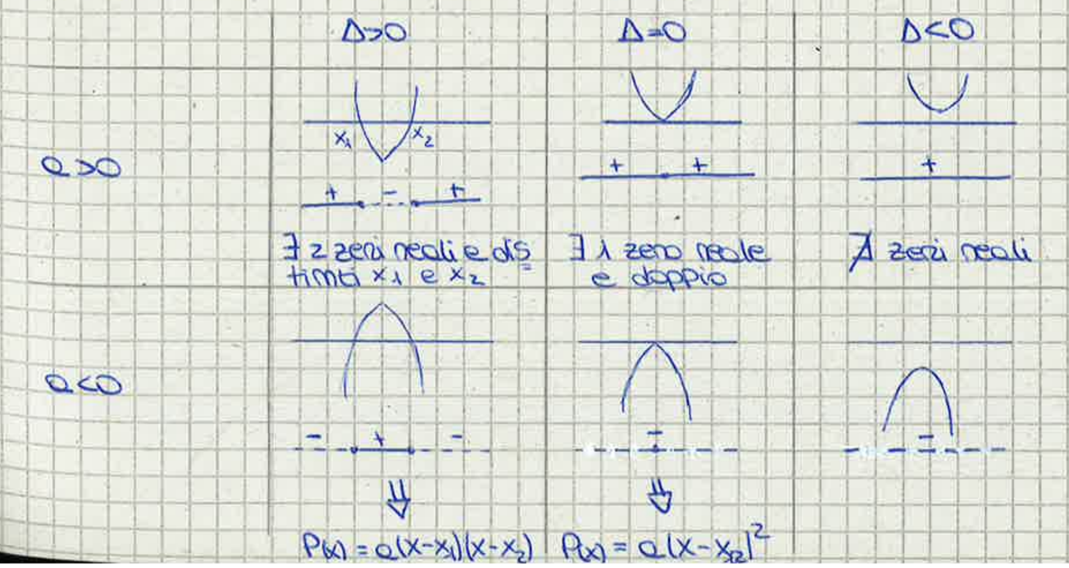
① $a-3>0 \quad a>3 \quad x>-\frac{5}{a-3}$

② $a-3<0 \quad a<3 \quad x<-\frac{5}{a-3}$

③ $a-3=0 \quad a=3 \quad 0x>-5 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

2° grado

$P(x)=ax^2+bx+c$ (parabola) $\quad P(x) \gtrless 0$



Disequazioni esempi

① $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$ $\quad Q(x) \neq 0$ fratte/intere

$\frac{(x-1)(x+4)}{(x+1)(x-3)} \leq 0$

N ≥ 0 $\quad$ D > 0

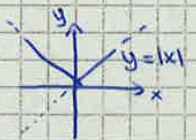
-4 $\quad$ 1 $\qquad$ -1 $\quad$ 3 $\qquad$ -4 -1 1 3

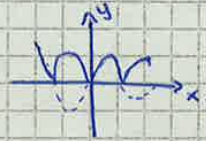


$[-4 \leq x < -1 \quad \vee \quad 1 \leq x < 3]$

② valore assoluto

$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$





$|x| < 5 \qquad -5 < x < 5$

$|x+2| < 3 \qquad -3 < x+2 < 3 \qquad -5 < x < 1$

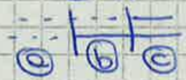
$|x| < -4 \qquad \nexists x$

$|x| > -7 \qquad \forall x$

$|x+7| \geq 7 \qquad x+7 \leq -7 \quad \vee \quad x+7 \geq 7 \qquad x \leq -14 \vee x \geq 0$

Es. 12.5 ② $4 - 5|x-1| < 1 - 2|x+2|$

-2 $\quad$ 1



ⓐ $\begin{cases} x-1 < 0 \\ x+2 < 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x < 1 \\ x < -2 \end{cases}$

$4 + 5(x-1) < 1 + 2(x+2)$

$5x - 1 < 5 + 2x$

$3x < 6$

$x < 2$

-2 $\quad$ 1 $\quad$ 2

$[x < -2]$

ⓑ $\begin{cases} x-1 < 0 \\ x+2 \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x < 1 \\ x \geq -2 \end{cases}$

$5x - 1 < 1 - 2x - 4$

$7x < -2$

$x < -\frac{2}{7}$

-2 $\quad -\frac{2}{7}$ $\quad$ 1

$[-2 \leq x < -\frac{2}{7}]$

ⓒ $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x+2 \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 1 \\ x \geq -2 \end{cases}$

$4 - 5x + 5 < 1 - 2x - 4$

$-3x < -12$

$x > 4$

-2 $\quad$ 1 $\quad$ 4

$[x > 4]$

-2 $\quad -\frac{2}{7}$ $\quad$ 4

$[x < -\frac{2}{7} \quad \vee \quad x > 4]$

③ irrazionali

radicali (p. 58) $\sqrt[n]{a} = b \iff a = b^n$

① n pari $\quad$ CE $a \geq 0$
segno $b \geq 0$

② n dispari $\quad$ b ha lo stesso segno di a

$\frac{x\sqrt{|x^2-4|}}{x^2-4} - 1 > 0$ $\quad \frac{x\sqrt{|x^2-4|}}{x^2-4} > 1$ $\quad x\sqrt{|x^2-4|} > x^2-4$ $\quad$ CE $x^2 \neq 4$ $\quad x \neq \pm 2$

ⓐ $\begin{cases} x^2-4>0 \\ x \geq 0 \end{cases}$ $\quad x<-2 \vee x>2$

$x^2(x^2-4) > (x^2-4)^2$

$x^2(x^2-4) - (x^2-4)^2 > 0$

$(x^2-4)(\cancel{x^2}+4\cancel{+x^2}) > 0$

$4(x^2-4) > 0$

$x^2-4 > 0$

$x < -2 \vee x > 2$

$\boxed{x>2}$

$\begin{cases} x^2-4>0 \\ x<0 \end{cases}$ $\quad x<-2 \vee x>2$

$x\sqrt{x^2-4} > x^2-4$ $\quad$ [$\nexists x$ con $x<0$]

ⓑ $\begin{cases} x^2-4<0 \\ x \geq 0 \end{cases}$ $\quad -2<x<2$

$x\sqrt{4-x^2} < x^2-4$

[$\nexists x \in \mathbb{R}$]

$\begin{cases} x^2-4<0 \\ x<0 \end{cases}$ $\quad -2<x<2$

$-x\sqrt{4-x^2} > x^2-4$

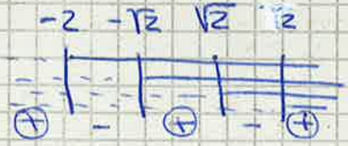
$x^2(4-x^2) > (x^2-4)^2$

$x^2(4-x^2) - (x^2-4)^2 > 0$

$(x^2+4)(x^2+x^2-4) > 0$

$(x^2+4)(2x^2-4) > 0$

$(x+2)(x-2)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}) > 0$



$-\sqrt{2} < x < 0$

① $h(x)$ strettamente crescente

$f(x) > g(x) \iff h(f(x)) > h(g(x))$

② $h(x)$ strettamente decrescente

$f(x) > g(x) \iff h(f(x)) < h(g(x))$

Disequazioni con esponenziali

$a^{f(x)} > a^{g(x)} \qquad a>0, a \neq 1$

- $a>1$

  $f(x) > g(x)$

- $0<a<1$

  $f(x) < g(x)$

Es. 14.4 .9 $\quad 3^{\sqrt{x}} - 3^{1-\sqrt{x}} - 1 \leq 0$

$3^{\sqrt{x}} - \frac{3}{3^{\sqrt{x}}} - 1 \leq 0 \qquad t = 3^{\sqrt{x}}$

$t - \frac{3}{t} - 1 \leq 0$

$\frac{t^2-3-t}{t} \leq 0$

N $\quad t^2-3-t \geq 0 \qquad\qquad$ D $\; t>0$

$\forall x$ con $x \geq 0$

$t = \frac{1 \pm \sqrt{1+12}}{2}$

$t = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$

" $\frac{1+\sqrt{13}}{2}$

$t \leq \frac{1-\sqrt{13}}{2} \quad \vee \quad 0 < t \leq \frac{1+\sqrt{13}}{2}$

$3^{\sqrt{x}} \leq \frac{1-\sqrt{13}}{2} \quad \vee \quad 0 < 3^{\sqrt{x}} \leq \frac{1+\sqrt{13}}{2}$

$\forall x \qquad \log_3 3^{\sqrt{x}} \leq \log_3 \frac{1+\sqrt{13}}{2}$

$\frac{1-\sqrt{13}}{2} \leq 3^{\sqrt{x}} \leq \frac{1+\sqrt{13}}{2}$

$\nexists x \qquad \underset{CE}{0} \leq \sqrt{x} \leq \log_3 \frac{1+\sqrt{13}}{2}$

sol. $\left\{ 0 \leq x \leq \left(\log_3 \frac{1+\sqrt{13}}{2} \right)^2 \right]$

Disequazioni con logaritmi

$\log_a f(x) > \log_a g(x) \qquad a>0 \; a \neq 1 \qquad CE \begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)>0 \end{cases}$

- $a>1 \quad f(x) > g(x)$
- $0<a<1 \quad f(x) < g(x)$

Es. 14.6 1 $\quad \log_3 (x-1) - \log_{\frac{1}{3}} (2-x) < -1$

$\begin{cases} x-1>0 \\ 2-x>0 \end{cases} \quad 1<x<2$

$\log_3 (x-1) - \frac{\log_3 (2-x)}{\log_3 \frac{1}{3}_{\,-1}} < \log_3 3^{-1}$

$\log_3 (x-1) + \log_3 (2-x) < \log_3 3^{-1}$

$\log_3 [(x-1)(2-x)] < \log_3 \frac{1}{3}$

$-x^2+2x-2+x < \frac{1}{3}$

$x^2 - 3x + \frac{7}{3} < 0$

f periodica di periodo minimo T
g non periodica

$g \circ f$ periodica di periodo min $\leq T$

$f \circ g$ in generale non è periodica

$f(x) = \operatorname{sen}(3x) + (\cos 5x)$

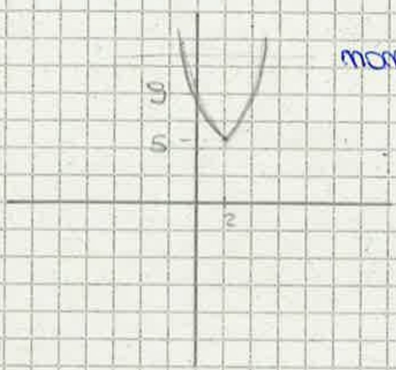
$T = \text{m.c.m.}\left(\frac{2}{3}\pi, \frac{2}{5}\pi\right) = \frac{(5+3)2\pi}{15} = \frac{16}{15}\pi$

$p(x) = 3(\cos x)^2$

applico prima la periodica
$\cos x \rightarrow T = 2\pi$
$\cos^2 x \rightarrow T \leq 2\pi \quad \rightarrow T = \pi$

(15) verifica che $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4x + 8$ non è invertibile e trova le restriz. in cui lo è

$\begin{cases} x_v = 2 \\ y_v = 5 \end{cases}$ $\qquad P(0,8)$



non è iniettiva $\rightarrow$ non è invertibile

$f_1: [2, +\infty) \longrightarrow [5, +\infty)$

$f_2: (-\infty, 2] \rightarrow [5, +\infty)$

$x_{1,2} = \frac{16 \pm \sqrt{4y - 20}}{2} \quad y \geq 5$

$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{y-5}$

$f_1^{-1}(y)\ x = 2 + \sqrt{y-5} \qquad f_1^{-1} = 2 + \sqrt{x-5}$

$f_2^{-1}(x)\ x = 2 - \sqrt{y-5} \qquad f_2^{-1} = 2 - \sqrt{x-5}$

Esercizi sui limiti

Verifica def di $\lim_{n \to \infty} a_n = \ell$

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon : \forall n > n_\varepsilon \Rightarrow |a_n - \ell| < \varepsilon$

$\lim_{n \to +\infty} \frac{3n}{2 + 5n^2} = 0$

Voglio dim che $\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon : n_\varepsilon < \forall n \Rightarrow \left|\frac{3n}{2+5n^2}\right| < \varepsilon$

Scelgo $\varepsilon > 0$

$\frac{3n}{2+5n^2} < \frac{3\cancel{n}}{5 n^{\cancel{2}}} = \frac{3}{5n} < \varepsilon$

se $\frac{3}{5n} < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{3n}{2+5n^2}\right| < \varepsilon \qquad n_\varepsilon = \left[\frac{3}{5\varepsilon}\right] \quad \forall n > n_\varepsilon \Rightarrow \frac{3}{5n} < \varepsilon$

$n > \frac{3}{5\varepsilon} \Leftrightarrow n > \left[\frac{3}{5\varepsilon}\right]$

$\varepsilon > 0,\ n > n_\varepsilon = \left[\frac{3}{5\varepsilon}\right] \Rightarrow \frac{3}{5n} < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{3n}{2+5n^2}\right| < \varepsilon$

(2) $h(x) = \cos(f(x)) + \operatorname{sen}(f(x) \cdot g(x))$ $\qquad f, g$ dispari

$h(-x) = \cos(f(-x)) + \operatorname{sen}(f(-x) \cdot g(-x)) = \cos(-f(x)) + \operatorname{sen}(-f(x) \cdot (-g(x))) =$

$\cos f(x) + \operatorname{sen}(f(x) \cdot g(x)) = h(x) \Rightarrow$ pari

(3) $\lim_{n \to +\infty} \frac{5n + 4 - n^n}{\log_4 n + n! - 5} = -\infty$

$\lim_{n \to +\infty} \frac{n^n \left(\frac{5n}{n^n} + \frac{4}{n^n} - 1\right)}{n! \left(\frac{\log_4 n}{n!} + 1 - \frac{5}{n!}\right)} = -\lim_{n \to +\infty} \frac{n^n}{n!} = -\infty$

Algebra delle derivate

Siano f e g derivabili in x_0 (dunque definite su $I(x_0)$), allora sono derivabili in x_0 le funzioni $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\frac{1}{f(x)}$ se $f(x_0) \neq 0$;
$\frac{f(x)}{g(x)}$ se $g(x_0) \neq 0$

e risulta

$$D(f(x) \pm g(x))_{x_0} = f'(x_0) \pm g'(x_0) \quad ①$$

$$D[f(x) \cdot g(x)]_{x_0} = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) g'(x_0) \quad ②$$

$$D\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)_{x_0} = \frac{f'(x_0) g(x_0) - f(x_0) g'(x_0)}{g^2(x_0)} \quad \text{con } g(x_0) \neq 0 \quad ③$$

$$D\left(\frac{1}{f(x)}\right)_{x_0} = -\frac{f'(x_0)}{f^2(x_0)} \quad \text{con } f(x_0) \neq 0 \quad ④$$

Dim ②

$y = f(x) g(x)$ $\qquad x_0 \in \mathrm{dom} f \cap \mathrm{dom} g$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) \cdot g(x) - f(x_0) g(x_0)}{x - x_0} \qquad \frac{\Delta g}{\Delta x} \to g'(x_0) \qquad \frac{\Delta f}{\Delta x} \to f'(x_0)$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) g(x) - f(x_0) g(x_0) + f(x) g(x_0) - f(x) \cdot g(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} f(x) \frac{[g(x) - g(x_0)]}{x - x_0} + g(x_0) \frac{[f(x) - f(x_0)]}{x - x_0}$$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ perché essendo f derivabile in x_0 sarà anche continua in x_0

$= f(x_0) g'(x_0) + f'(x_0) g(x_0)$ c.v.d.

Dim ④

$y = \frac{1}{f(x)}$ è def. su $I(x_0)$? La $f(x)$ è continua in x_0 (perché è ivi derivabile)

$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \neq 0$ (per ipotesi)

Per il teorema di permanenza del segno $\exists I(x_0)$ sul quale $f(x)$ conserva il segno di $f(x_0) \neq 0$, dunque $f(x)$ non è nulla su $I(x_0) \Rightarrow \frac{1}{f}$ è def. su $I(x_0)$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x_0)}}{x - x_0} \qquad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0) - f(x)}{(x - x_0)(f(x) f(x_0))} = \frac{-f'(x_0)}{f^2(x_0)} \quad \text{c.v.d.}$$

$\left(\frac{\Delta f}{\Delta x}\right)_{x_0} \to -f'(x_0)$

$f(x)$ è continua $\to f(x_0)$

Dim ③

$D\left(\frac{f}{g}\right)_{x_0}$ $\qquad g(x_0) \neq 0$

$$= D\left(f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}\right) \text{ per la ② } = \left[f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x) D\left(\frac{1}{g(x)}\right)\right]_{x_0} = \left[\frac{f'(x)}{g(x)} - f(x) \frac{g'(x)}{g^2(x)}\right] = \dots \quad \text{c.v.d.}$$

Es. $f(x) = tg\,x$ su $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ $f'(x) = 1 + tg^2 x$

$f^{-1}(y) = arctg\,y$ $\quad D\,arctg\,y = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{1+tg^2 x} = \frac{1}{1+y^2}$

$D\,arctg\,y = \frac{1}{1+y^2}$

$D\,arccos\,y = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$ $\quad y = sen\,x$ $\quad sen^2 + cos^2 = 1$

Derivate laterali

Sia f def su $I^{+}(x_0)$ / $I^{-}(x_0)$. Se esiste finito il $\lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_+(x_0) \in \mathbb{R}$

$x \to x_0^-$ $\quad = f'_-(x_0) \in \mathbb{R}$

OSS se f è der in x_0 allora si ha $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = f'(x_0)$

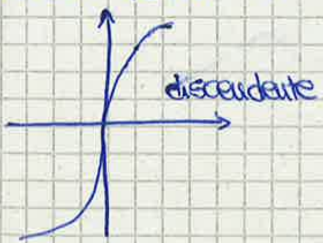
Punto angoloso

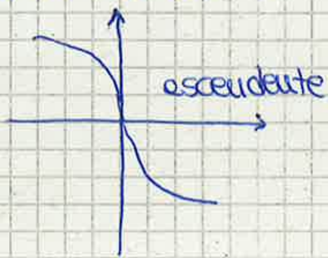
Quando $f'_+(x_0) \in \mathbb{R}$ e $f'_-(x_0) \in \mathbb{R}$ e $f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0) \Leftrightarrow x_0$ è un punto angoloso

OSS se $f'_+(x_0) \in \mathbb{R}$ e $f'_-(x_0) = +\infty$ si parla ancora di punto angoloso

Flesso a tg verticale

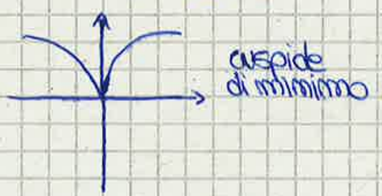
$f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = +\infty$ $\qquad f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = -\infty$





Cuspide

$f'_+(x_0) = +\infty \wedge f'_-(x_0) = -\infty$ $\qquad f'_+(x_0) = -\infty \wedge f'_-(x_0) = +\infty$



Es. individuare e classificare i p. di non der.

$f(x) = \sqrt[5]{x^2(x-1)}$

$x_0 = 0$
$x_1 = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt[5]{x^2(x-1)} - 0}{x - 0} = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{(x-1)^{\frac{1}{5}}}{x^{\frac{3}{5}}} = \frac{-1}{0^+} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{(x-1)^{\frac{1}{5}}}{x^{3/5}} = \frac{-1}{0^-} = +\infty \end{cases}$ $x = 0$ cuspide

$\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt[5]{x^2(x-1)} - 0}{x - 1} = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{x^{\frac{2}{5}}}{(x-1)^{\frac{4}{5}}} = \frac{1}{0^+} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^-} \quad = \frac{1}{0^+} = +\infty \end{cases}$ $x = 1$ fl. a tg. vert.

NOTA La funzione $f'(x)$ è tale che $\lim_{x\to 0} f'(x) = \nexists$ e $f'(0)=0$

la funzione $f'(x)$ ammette su $x_0=0$ una discontinuità di 2° specie

Si dimostra che la $f'(x)$ non può ammettere discontinuità eliminabile o di 1° specie, ma può ammetterla di 2° specie

Es. $f(x) = \begin{cases} ux + e^{-x} + 1 & x \le 0 \\ \ln(1+x) + hx^2 + h & x > 0 \end{cases}$ $h, u \in \mathbb{R}$

Esistono $h, u \in \mathbb{R}$ tali che f è derivabile su $\mathbb{R}$?

1) studio la continuità in $x_0=0$

$f(0) = 2$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 2$ la $f(x)$ è continua se $h=2$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = h$

2) Teorema (TB) su $f(x) = \begin{cases} ux + e^{-x} + 1 & x \le 0 \\ \ln(1+x) + 2x^2 + 2 & x > 0 \end{cases}$

calcolo $f'(x)$ su $\mathring{I}(x_0) - \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$f'(x) = \begin{cases} u - e^{-x} & x < 0 \\ \frac{1}{1+x} + 4x & x > 0 \end{cases}$

$\lim_{x\to 0} f'(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 0^-} u - e^{-x} = u-1 \\ \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1+x} + 4x = 1 \end{cases}$ $\Rightarrow$ affinché il $\lim_{x\to 0}$ esista finito $u-1=1$

$u=2$

condiz. suff.

$f(x)$ è continua e derivabile con $h=2 \wedge u=2$

Attenzione! verificare sempre prima la continuità

Es.

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$
$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$ $\rightarrow$ è derivabile? $\rightarrow$ non è continua!

MASSIMI e MINIMI di $f(x)$

Sia f una funzione definita su $I = [a,b]$

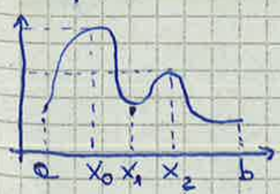
$x_0 \in I$ è punto di MASSIMO ASSOLUTO per $f \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall x \in [a,b] : f(x) \le f(x_0) = M$

M è il massimo assoluto di $f(x)$

punto di massimo $\rightarrow x$
massimo $\rightarrow y$

$f(x) \ge f(x_0) = m$ minimo assoluto

$x_0 \in I$ è punto di MASSIMO RELATIVO per $f \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists I_N(x_0) : f(x) \le f(x_0)$



x_0 = massimo assoluto e relativo

x_2 = massimo relativo

Teorema di Rolle

Sia $f: [a,b] \Rightarrow \mathbb{R}$

i) f sia continua su $[a,b]$
ii) f sia derivabile su (a,b)
iii) $f(a) = f(b)$

Allora esiste almeno $c \in (a,b)$: $f'(c) = 0$

Dim. Per Weierstrass (i) esistono x_m, x_M :

$f(x_m) = m$ e $f(x_M) = M$

CASO 1 $m \leq f(a) = f(b) \leq M$

$m = M \Rightarrow f(x)$ cost $\Rightarrow f'(x) = 0, \forall x \in (a,b)$

CASO 2 $m \neq M$, nella 2 almeno un $\leq$ è un $<$

$m \leq f(a) = f(b) < M$

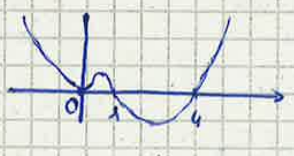
Allora m è interno ad $(a,b) \Rightarrow f'(x_M) = 0$ $c = x_M$

Corollario

Sia f derivabile su I, allora tra 2 zeri di f cade almeno 1 zero di f'

Es. $y = x^2(x-1)(x-4)$

def. e der. su $\mathbb{R}$



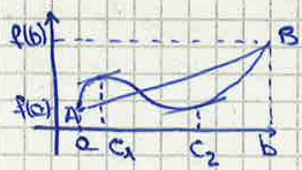
su $[1,4]$ f cont. su $[1,4]$
f der. su $(1,4)$
$f(1) = f(4) = 0$

Teorema di Lagrange

Sia $f: [a,b] \Rightarrow \mathbb{R}$

i) f sia continua su $[a,b]$
ii) f sia derivabile su (a,b)

Allora esiste $c \in (a,b)$: $f'(c) = \overbrace{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}^{m \text{ retta } AB}$



signif. fisico $\Rightarrow$ V_{media} e $V_{istant.}$

Dim. La retta $\overline{AB}$ ha equazione $R(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$

Introduco la funzione $g(x) = R(x) - f(x)$ $g(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) - f(x)$

La $g(x)$ soddisfa su $[a,b]$ le ipotesi del teorema di Rolle

i) g è cont. su $[a,b]$ (differ. di f cont.)
ii) g è der. su (a,b) (〃 deriv.)
iii) $g(a) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(0) - f(a) = 0$

$g(b) = f(b) + \frac{f(b)-f(a)}{\cancel{b-a}}(\cancel{b-a}) - f(b) = 0$ $g(a) = g(b) = 0$

$\overset{TR}{\Rightarrow}$ esiste un $c \in (a,b)$ $g'(c) = 0$

$g'(x) = 0 + \frac{f(b)-f(a)}{b-a} - f'(x)$

$g'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} - f'(c) = 0$ Tesi Teorema del valor medio

Per l'ipotesi $f'(x)=0, \forall x \in I \Rightarrow f'(c)=0$ essendo $c \in I \Rightarrow f(x_2)=f(x_1), \forall x_1, x_2 \in I$

Es. $f(x) = \arctg x + \arctg\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \neq 0$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0 \quad \forall x \neq 0$$

$x_0 = 1 \quad f(1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

$x_1 = -1 \quad f(-1) = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}$

non è una f cost.

2° formula dell'incremento finito

Data $f: I$ (intervallo) $\to \mathbb{R}$, derivabile su I:

$\forall x_1, x_2 \in I : f(x_2) = f(x_1) + f'(c)(x_2 - x_1)$ quando $c \in (x_1, x_2)$

classificazione dei punti critici

Sia $f: I$ (intervallo) $\to \mathbb{R}$, derivabile su I:

i) $x_0 \in I \wedge f'(x_0) = 0$ punto critico

se esiste $I_r(x_0) \subseteq I$ tale che

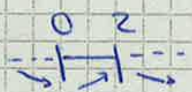
$\begin{cases} f'(x) \geq 0, \forall x \in (x_0 - r, x_0) \\ f'(x) \leq 0, \forall x \in (x_0, x_0 + r) \end{cases} \Rightarrow$ x_0 punto di max relativo

$\begin{cases} f'(x) \leq 0, \forall x \in (x_0 - r, x_0) \\ f'(x) \geq 0, \forall x \in (x_0, x_0 + r) \end{cases} \Rightarrow$ x_0 punto di min relativo

Es. $f(x) = x^2 e^{-x}$ $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} = I$

$f'(x) = 2x e^{-x} - x^2 e^{-x} = (x^2 - 2x)(-e^{-x})$

$f' \geq 0 \quad (2x - x^2) \geq 0 \Rightarrow f' \geq 0$

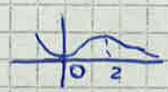


punto critico $x_0 = 0, \; x_1 = 2$

min relativo — max relativo

OSS $(x \to 0)$ $e^{-x} = 1 - x + o(x)$

$f(x) = x^2 - x^3 + o(x^3) = x^2 + o(x^2) \sim x^2$



Es.2 $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 0 \\ 5 & x = 0 \end{cases}$ discontinuità eliminabile in $x=0$

$f'(x)$

ma 0 è punto di massimo relativo

Derivate di ordine superiore

Se f derivabile su I e $x_0 \in I$ e non estremo di I (cioè f è derivabile in un intorno di x_0)

$f'(x)$ è una funzione ben definita su I

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} \text{ (se } \exists \text{ finito)} = f''(x_0)$$

generalizzando il procedimento si può costruire f^n in x_0 $\quad f^{(n)}(x_0) = (f(x))'$

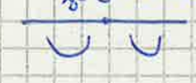
DEF Se f è derivabile n volte su I (intervallo) e la sua derivata è continua su I si dice che $f \in C^{(n)}(I)$

Allora ① se x_0 è punto di flesso $\Rightarrow f''(x_0)=0$

② se $f''(x_0)=0$ e $f''(x)$ cambia segno "passando" da sinistra a destra di $x_0 \Rightarrow x_0$ è punto di flesso (se $f''(x)$ non cambia segno, x_0 non è punto di flesso)

Es. $f(x)=x^4$ $\quad f''(x)=12x^2$ $\quad x_0=0$ non è un flesso, ma un minimo

$f''(x)=0$ $\quad f''(x)\geq 0$



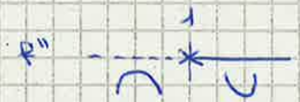
Es. $f(x)=(x-1)^{\frac{5}{3}}=\sqrt[3]{(x-1)^5}$

$f'(x)=\frac{5}{3}(x-1)^{\frac{2}{3}}$ $\quad$ dom f' = dom $f=\mathbb{R}$

$f''(x)=\frac{10}{9}(x-1)^{-\frac{1}{3}}=\frac{10/9}{\sqrt[3]{x-1}}$ $\quad$ dom $f''=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

f non ammette derivata seconda in $x_0=1$

se studio il segno di $f''(x)\geq 0$



$f''(x)$ non esiste, ma $x_0=1$ è punto di flesso (f ammette la tg in x_0 e cambia concavità in un suo intorno)

Teorema (lo uso quando non ho info sulla f'')

sia $f: I\to\mathbb{R}$, I intervallo aperto (perché negli estremi dovremmo specificare derivata destra)

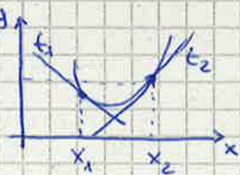
i) f derivabile su I

Allora

① f' crescente su $I \Leftrightarrow f$ convessa su I
(decrescente) (concava)

② f' strettam. crescente su $I \Rightarrow f$ strettamente convessa su I
(decrescente) (concava)

Dim f convessa su $I \Rightarrow f'$ crescente su I



$x_1<x_2$, $x_1,x_2\in I$

Essendo f derivabile su I, lo è in x_1 e x_2
se traccio $t_1(x)$ per l'ipotesi di convessità su I
$\Rightarrow f(x)\geq t_1(x)$, $\forall x\in I$ cioè $f(x)\geq f(x_1)+f'(x_1)(x-x_1)$
In particolare $f(x_2)\geq t(x_2)$ (perché $x_2\in I$)
$f(x_2)\geq f(x_1)+f'(x_1)(x_2-x_1)$

cioè $f'(x_1)\leq \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ ②

Se traccio la tg $t_2(x)$ per l'ipotesi di convessità su I
$f(x)\geq t_2(x)$, $\forall x\in I$, cioè $f(x)\geq f(x_2)+f'(x_2)(x-x_2)$, $\forall x\in I$
In particolare dato che $x_1\in I$ $\quad f(x_1)\geq t(x_1)$

$f(x_1)\geq f(x_2)+f'(x_2)(x_1-x_2)$ cioè $f'(x_2)\geq \dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$

cambio segno perché $x_1-x_2<0$

cambio segno sopra e sotto

$\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\leq f'(x_2)$ ③

Dalla ② e dalla ③ posso scrivere, considerando che per ipotesi ($\forall x_1,x_2\in I \wedge x_1<x_2$)

$\underset{②}{f'(x_1)\leq} \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \underset{③}{\leq f'(x_2)}$ $\quad\Rightarrow f'(x_1)\leq f'(x_2)$, $\forall x\in I \Rightarrow f'$ è crescente su I c.v.d.

Es. $f(x)=x^2e^{x}$ $\quad$ dom $f=\mathbb{R}$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ $\quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=0 \to y=0$ asintoto orizzontale dx

$f'(x)=$

③ se f è derivabile 2 volte in x_0

$$T_2 x_0 = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + a(x-x_0)^2$$

$$f(x) = T_2 x_0 + o(x-x_0)^2 \qquad x \to x_0$$

$$f(x) - T_2 x_0 = o(x-x_0)^2$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - T_2 x_0}{(x-x_0)^2} = 0$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0) - a(x-x_0)^2}{(x-x_0)^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = (H) = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0) - 2a(x-x_0)}{2(x-x_0)} =$$

$$\lim_{x\to x_0} \left[\frac{f'(x) - f'(x_0)}{2(x-x_0)}\right] - a = \text{per l'ipotesi} = \frac{1}{2} f''(x_0) - a = 0 \qquad \left[a = \frac{1}{2} f''(x_0)\right]$$

$$T_2 x_0 = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2$$

strada senza fine → si può andare avanti $T_3 x_0 = T_2 x_0 + b(x-x_0)^3$ se f è derivabile 3 volte

$$f(x) = T_3 x_0 + o(x-x_0)^3$$

$$b = \frac{f'''(x_0)}{3!}$$

Teorema ⇒ Formula di Taylor con resto di Peano ⇒ se f è derivabile n volte in x_0, allora $f(x) = T_n x_0 + o(x-x_0)^n \quad x \to x_0$

$$T_n x_0 = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

polinomio di Taylor

oss. $s(t) = y$

$$s(t) = s(t_0) + \frac{s'(t_0)}{1!}(t-t_0) + \frac{s''(t_0)}{2!}(t-t_0)^2 + \frac{s'''(t_0)}{3!}(t-t_0)^3 + o(t-t_0)^3$$

$t_0 = 0$

$$s(t) = s(0) + s(0)\,t + \underbrace{\frac{s''(0)}{2}}_{\substack{\text{accelerazione} \\ m/s^2}} t^2 + \underbrace{\frac{s'''(0)}{6}}_{\substack{\text{strappo} \\ m/s^3}} t^3 + \underbrace{\frac{s''''(0)}{24}}_{\substack{\text{balzo} \\ m/s^4}} t^4 + o(t^4)$$

eq. oraria di un moto vario

Es. $f(x) = e^x \in C(\mathbb{R}) \quad f'(x) = e^x = f''(x) = f'''(x) \ldots$

$$f'(0) = f''(0) = f^{(n)}(0) = e^0 = 1$$

$$e^x = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2} f''(0)x^2 + \frac{1}{6} f'''(0)x^3 + o(x^3)$$

$$e^x = \underbrace{\underbrace{\underbrace{1+x}_{tg}+\frac{1}{2}x^2}_{\text{parabola}}+\frac{1}{6}x^3}_{\text{cubica}} + o(x^3)$$

Formula di Taylor con il resto di Lagrange $f \in C^n(I(x_0))$
$f \in D^{n+1}(I(x_0))$ cioè esiste $f^{n+1}(x)$, $\forall x \in \dot{I}(x_0)$

$$f(x) = T_n x_0 + \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \qquad \text{dove } c \in (x_0, x) \text{ o } c \in (x, x_0)$$

NOTA: se $x_0 = 0$ il polinomio di Taylor prende il nome di polinomio di MacLaurin

$\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} \quad \alpha = \frac{1}{2}$

$= 1 + \frac{1}{2}x$

$\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} \quad \alpha = -1$

$= 1 - x + x^2 + o(x^4)$

retta tg a $y = f(x)$ in $x_0 = 0$ $\quad R(x) = 1 - x$

Teorema (unicità del P.T.)

Sia $f: I \Rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$

i) f sia derivabile n volte in x_0

ii) $\exists P_n(x)$: grado $P_n \leq n \wedge f(x) = P_n(x) + o(x-x_0)^n \quad (x \to x_0)$ (2)

Allora $P_n(x) = T_n\, x$ (pol. di Taylor)

Es. $f(x) = [\ln(1+\operatorname{sen} x)]^2 \qquad x_0 = 0$

$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + o(t^4)$

ma se $t = \operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$

prendo solo quelli sotto il 4° grado

$\ln(1+\operatorname{sen} x) = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 + \frac{1}{3}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^3 - \frac{1}{4}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^4 + o(x^4)$

$= x - \frac{x^3}{6} - \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{1}{3}x^4\right) + \frac{1}{3}\left(x^3 - \frac{1}{4}x^4 + o(x^4)\right) =$

$x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{12}x^4 + o(x^4) \qquad \frac{1}{6} - \frac{1}{4} = \frac{2-3}{12}$

per il sen fino al 3° perché il 5° era fuori dal mio campo di interesse

$\ln(1+\operatorname{sen} x) = P_4(x) + o(x^4)$ dove $P_4(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12}$

$\ln(1+\operatorname{sen} x)^{(iv)}(0) = -\frac{4!}{12} = -\frac{4\cdot3\cdot2\cdot1}{12} = -2 \qquad \frac{f^{iv}(0)}{4!} = -\frac{1}{12}$

$\ln^2(1+\operatorname{sen} x) = \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{12}x^4 + o(x^4)\right)^2 = x^2 + \frac{1}{4}x^4 - x^3 + \frac{2}{6}x^4 + o(x^4)$

$= \underbrace{x^2 - x^3 + \frac{7}{12}x^4}_{P_4(x)} + o(x^4)$

Teorema

Sia $f: I$ (int. aperto) $\Rightarrow \mathbb{R}$

i) sia f derivabile 2 volte in x_0 essendo x_0 un punto $\in I$

ii) x_0 è punto di flesso

Allora $f''(x_0) = 0$

Dim $f(x)$ ammette polinomio di Taylor (almeno 2)

$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + o(x-x_0)^2$

$f(x) - t(x) = \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + o(x-x_0)^2$

$f(x) - t(x) = (x-x_0)^2\left\{\frac{f''(x_0)}{2!} + o(1)\right\}_{x \to x_0}$

$(x-x_0)^2$ sempre >0; $\{\ \}$ segno di $f''(x)$ $\to$ non cambia segno

se calcolo $\lim_{x\to x_0}\left\{\frac{f''(x_0)}{2!} + o(1)\right\} = \frac{f''(x)}{2} \to$ se >0 ($<$) la grafica in un $I(x_0)$ è pos. (neg.)

La $f(x) - t(x)$ assume segno costante in $\dot{I}(x_0)$ pari al segno di $f''(x_0)$ in quanto $(x-x_0)^2$ è sempre >0 e la $\{\ \}$ tendendo a $\frac{f''(x_0)}{2}$ per il teor. di per. del segno assumerà in $\dot{I}(x_0)$ sempre il segno di $f''(x_0)$. Ciò è in contraddiz. con l'ip.

se m è pari $f(x)-t(x)$ non cambia segno su $\dot{I}(x_0)$

NOTA: $\lim_{x\to x_0^{\pm}} \left\{ \frac{f^m(x_0)}{m!} + o(1) \right\} = \frac{f^m(x_0)}{m!}$

la $\{\}$ conserva su $I(x_0)$ il segno del limite $\frac{f^m(x_0)}{m!}$

se m è dispari, segue la tesi

LEMMA $\Rightarrow$ se $f(x) = T_{m,x_0} + o(x-x_0)^m \quad x\to x_0$

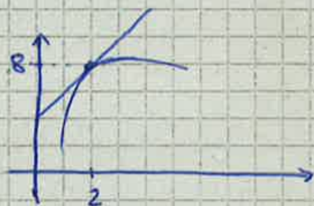
allora $f'(x) = T'_{m,x_0} + o(x-x_0)^{m-1} \quad x\to x_0$

Es. $f(x) = \operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$

$\cos x = 1 - \frac{3x^2}{6} + \frac{5x^4}{5!} + o(x^4) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$

Es. $\underbrace{8 + (x-2)}_{T_{m,2}} - 4(x-2)^6 + o(x-2)^6 \quad x\to 2$

$f(x) - t(x) = -4(x-2)^6 + o(x-2)^6$ va come una parabola concava verso il basso



positiva su $I(2)$ x il teo. permanenza del segno (+)

crescente su $I(2)$ (+)

concava in $I(2)$ (−)

$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + o(x-x_0)^2$

$a_0 = f(x)$, $a_1 = \frac{f'(x)}{1}$, $a_2 = \frac{f''(x)}{2}$

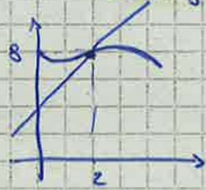
se >0 f è pos. (< neg) — se >0 f è cresc. (< decr.) — se >0 f è convessa (< concava)

Es. 2 $f(x) = 8 + (x-2) - 4(x-2)^5 + o(x-2)^5 \quad x\to 2$

la $f(x)$ è continua in 8

$f(x) - t(x) = -4(x-2)^5$ "va come"

cambia segno per $x<2$



positiva, crescente, con flesso discendente

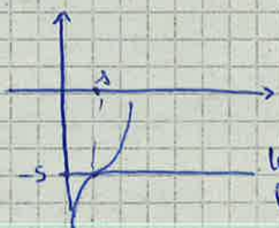
Es. 3 $f(x) = 3 - 2(x-1) + 5(x-1)^4 + o(x-1)^4 \quad x\to 1$

In I_1 è positiva, decrescente, convessa (sempre pos. $\to (x-1)^{④}$)

Es. 4 $f(x) = -5 + (x-1)^{15} + o(x-1)^{15} \quad x\to 1$

$f(x) - t(x) = (x-1)^{15}$ cambia segno

In I_1 è negativa, stazionaria, con un flesso a tg orizzontale ascendente

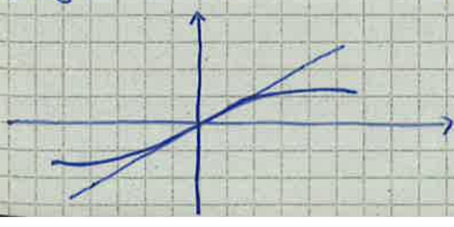


la tg è orizz. perché è nulla

OSS $f(x) = x - x^3 + \operatorname{arctg}(x^7 + x^{12})$ influenza il pol. di Maclaurin dal 7° grado in su

$\operatorname{arctg} t = t + o(t)$

si riesce a dedurre l'andamento della $f(x)$ tralasciando questo termine



$f(x) - x \sim x^3$

opposto di $z=(x,y) \overset{def}{\Longleftrightarrow} -z=(-x,-y)$

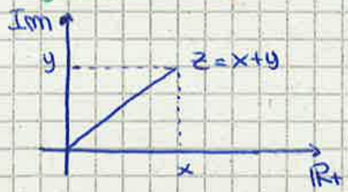
reciproco di $z \neq 0 \overset{def}{\Longleftrightarrow} \frac{1}{z} = \frac{x}{x^2+y^2} - i \frac{y}{x^2+y^2}$

verifica

$z \cdot \frac{1}{z} = (1,0)$

$(x+iy)\left(\frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{x^2}{x^2+y^2} - i\cancel{\frac{xy}{x^2+y^2}} + i\frac{xy}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2} = \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = 1+i0 = (1,0)$

oss **Uguaglianza** $z_1 = z_2 \Longleftrightarrow (x_1,y_1)=(x_2,y_2) \Rightarrow \begin{cases} x_1=x_2 \\ y_1=y_2 \end{cases}$



Dato $z=x+iy \in \mathbb{C}$ si definisce

i) $|z| = \sqrt{x^2+y^2} \geq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$

ii) $\mathbb{R}z \leq |\mathbb{R}z| \leq |z|$

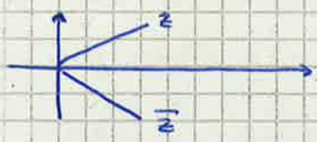
$\mathrm{Im}\,z \leq |\mathrm{Im}\,z| \leq |z|$

$x \leq |x| \leq \sqrt{x^2+y^2}$

iii) $|z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2|, \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

coniugato di $z=(x,y) \overset{def}{\Longleftrightarrow} \bar{z}=(x,-y)$

$z = x+iy \qquad \bar{z} = x-iy$



proprietà

① $|\bar{z}|=|z| \quad \forall z \qquad z\bar{z}=|z|^2$

② $\overline{(z_1+z_2)} = \bar{z}_1+\bar{z}_2$

③ $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

④ $z+\bar{z} = 2\cancel{z} \in \mathbb{R}$

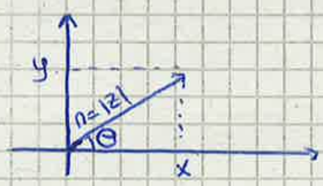
$z\cdot\bar{z} = (x+iy)(x-iy) = (x^2+y^2) \in \mathbb{R}$

Notazione polare

$z = x+iy \in \mathbb{C}$

$x = r\cos\theta \qquad \begin{cases} \theta = \arg(z) \\ r = |z| \end{cases}$

$y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$



Allora $z = x+iy = r\cos\theta + i r\,\mathrm{sen}\,\theta$

$\boxed{z = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)}$ forma polare di z

Vale il viceversa

$r = \sqrt{x^2+y^2}$

$\mathrm{tg}\,\theta = \left(\frac{y}{x}\right)$

$\theta = \begin{cases} \mathrm{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) & \text{se } x>0 \\ \pi + \mathrm{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) & \text{se } x<0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } x=0 \wedge y>0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{se } x=0 \wedge y<0 \end{cases}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 73 di 106

Esponenziale

$z = |z|\, e^{i\theta} = |z| \{ \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta \}$

$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2\, e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

Se $z_2 \neq 0$ $\quad \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{|z_1|\, e^{i\theta_1}}{|z_2|\, e^{i\theta_2}} = \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| e^{i(\theta_1-\theta_2)}$ ①

$\dfrac{1}{z_2} = \dfrac{1}{|z_2|} e^{-i\theta_2}$ ②

$\dfrac{1}{z} = \dfrac{x}{x^2+y^2} - \dfrac{iy}{x^2+y^2} \quad z = x+iy \neq 0+i0$

Nella forma trigonometrica

$z = \underbrace{|z|\cos\theta}_{x} + i \underbrace{|z| \operatorname{sen}\theta}_{y}$

$\dfrac{1}{z} = \dfrac{|z|\cos\theta}{|z|^2\cos^2\theta + |z|^2 \operatorname{sen}^2\theta} - i \dfrac{|z| \operatorname{sen}\theta}{|z|^2\cos^2\theta + |z|^2 \operatorname{sen}^2\theta}$

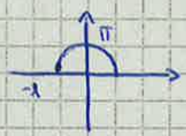
$= \dfrac{\cos\theta}{|z|} - i \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{|z|} = \dfrac{1}{|z|} \{ \cos(-\theta) + i \operatorname{sen}(-\theta) \} = \dfrac{1}{|z|} e^{-i\theta}$

$\cos\theta = \cos(-\theta) \quad \operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta$

CASO PARTICOLARE $|z| = 1 \quad \theta = \pi$

$z = |z|\, e^{i\theta}$

$-1 + i0 = 1 e^{i\pi} \Rightarrow \boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$



Formule di De Moivre $(z \in \mathbb{C})$

POTENZA $\quad z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot z \cdot z}_{n \text{ volte}}$

se scrivo

$z^n = |z| \cdot e^{i\theta} \cdot |z| e^{i\theta} \cdot |z| e^{i\theta} \ldots = |z|^n\, e^{i(\theta+\theta+\theta_n)}$

$\boxed{z^n = |z|^n \cdot e^{i(n\theta)}}$

Es. $z = 1 - i$

$z^3 = (1-i)^3 = 1 + i - 3i - 3 = -2 - 2i$

$i^3 = i^2 \cdot i = -i$

oppure de Moivre

$|z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \qquad z = \sqrt{2} \cdot e^{-i\frac{\pi}{4}} = 1 - i$

$\arg z = \operatorname{arctg}(-1) = -\dfrac{\pi}{4}$

$z^3 = 2\sqrt{2} \cdot e^{i(-\frac{3}{4}\pi)} = 2\sqrt{2} \cdot \left(\cos\left(-\tfrac{3}{4}\pi\right) + i \operatorname{sen}\left(-\tfrac{3}{4}\pi\right) \right) = 2\sqrt{2} \left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}} + i \left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}} \right) \right) =$

$2(-1-i) = -2-2i$

Es. $z = e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$

$z^2 = e^{i2\theta} = (\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^2$

Eulero

$(\cos 2\theta + i \operatorname{sen} 2\theta) = (\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta + 2i \operatorname{sen}\theta\cos\theta)$

$\begin{cases} \cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta \\ \operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta \end{cases}$ formule di duplicazione

NOTA se $a_j \in \mathbb{R}$ allora se $z_0 \in \mathbb{C}$ è soluzione di $P(z)=0$, cioè se $P(z_0)=0$ allora anche $\overline{z_0}$ è soluzione di $P(z)=0$

se $z_0 \in \mathbb{C}$ è soluzione $\Rightarrow \overline{P(z_0)} = \overline{0} = 0$

$$\overline{a_m z_0^m + a_{m-1} x_0^{m-1} + \dots + a_1 z_0 + a_0} = \overline{0} = 0$$

$$\overline{a_m z_0^m} + \overline{a_{m-1} z_0^{m-1}} + \dots + \overline{a_1 z_0} + \overline{a_0} = 0$$

$$\overline{a_m}\, \overline{z_0}^m + \overline{a_{m-1}} + \overline{z_0}^{m-1} + \dots + \overline{a_1}\, \overline{z_0} + \overline{a_0} = 0$$

$$a_m \overline{z_0}^m + a_{m-1} + \overline{z_0}^{m-1} + \dots + a_1 \overline{z_0} + a_0 = 0 \quad \text{(perché } a_j \in \mathbb{R})$$

$$P(\overline{z_0}) = 0 \Rightarrow \overline{z_0} \text{ è soluz. di } P(z)=0$$

se ho polinomio di grado 6 potrei avere 3 coppie di soluzioni complesse e coniugate; se di grado dispari almeno 1 soluzione sono reale

$4iz^7 + 5z^5 - 3z = 0$

$P(z)$ 5° grado — coeff. reale

$P(z)$ 4° grado reale

i	$-i$	5
$1-i$	$1+i$	4
4		$1+i$

RICERCA DI PRIMITIVE

Sia I un intervallo e sia $F: I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile su I

$F(x)$ è primitiva di $f(x)$ su $I \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall x \in I,\ F'(x) = f(x)$

$f(x) = x^2 \quad F'(x) = x^2 \quad F(x) = ? = \frac{x^3}{3}$ su $\mathbb{R}$

OSS. Non tutte le funzioni $f(x)$ su I ammettono (in forma esplicita) una primitiva

es. $y = e^{x^2} \quad y = \frac{\cos x}{x} \quad y = \frac{\operatorname{sen} x}{x} \quad y = \operatorname{sen}(x^2) \quad y = \frac{1}{\ln x} \quad y = x \operatorname{tg} x$

Proprietà delle primitive

Sia I un intervallo e $f\ I \to \mathbb{R}$ una funzione allora

i) se $F: I \to \mathbb{R}$ è primitiva di f su I allora anche $G(x) = F(x) + c$, $\forall c \in \mathbb{R}$ è primitiva di $f(x)$ su I (la derivata di una costante, infatti, è zero)

ii) se $F, G: I \to \mathbb{R}$ sono entrambe primitive di $f(x)$ su I allora si ha che esiste $c \in \mathbb{R} : F(x) = G(x) + c$

Dim

i)
se $F(x)$ è primitiva allora è derivabile su I anche $G(x) = F(x) + c$ è derivabile su I e si ha $G'(x) = F'(x) + 0 = f(x),\ \forall x \in I$
$\Rightarrow G(x)$ è primitiva di f su I

ii) se F e G sono primitive di f su I allora sono derivabili su I

considero la funzione (deriv. su I) $H(x) = F(x) - G(x)$ $\quad H'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$, $\forall x \in I \underset{CTL}{\Longrightarrow} H'(x) = 0, \forall x \in I \Rightarrow H(x) = c\ \forall x \in I$

NOTA: se $F(x)$ è primitiva di $f(x)$ sia I, allora la totalità delle primitive di $f(x)$ sono

$$F(x) + c = \int f(x)\,dx,\ \forall c \in \mathbb{R}$$

OSS $f(x) = \frac{1}{x} \quad x \neq 0 \to$ non è intervallo $\quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c \quad (x \neq 0) \to$ scrittura impropria

su $I_1\ (-\infty, 0) \quad F(x) = \ln(-x) + c_1 \quad F'(x) = \frac{1}{-x} \cdot -1 = \frac{1}{x}$

su $I_2\ (0, +\infty) \quad F(x) = \ln x + c_2$

$$\int \frac{1}{x} dx = \begin{cases} \ln(x) + c_1, & x > 0 \\ \ln(-x) + c_2, & x < 0 \end{cases}$$

se prendo un punto a dx identifico anche il suo simmetrico se a sx solo anche $\to$ simmetrie

regola di sostituzione

sia I un intervallo e f(t) una funzione da $I \to \mathbb{R}$ che ammette primitiva F(t) su I
sia $\varphi(x)$ una funzione da $J \to \mathbb{R}$ ($J \in t$) una funz. der. su J
Allora la funzione $f(\varphi(x))\,\varphi'(x)$ è integrabile su J e vale

ⓐ $\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = F(\varphi(x)) + c$ su J

ⓐ' $\int f(t)\,dt = F(t)+c = F(\varphi(x)) + c$

$$J \xrightarrow{\varphi} I \xrightarrow{F} \mathbb{R}$$

Dim se derivo F (essendo primitiva è deriv.)

$$\frac{d}{Dx} = \{F(\varphi(x))+c\} = F'(\varphi(x))\,\varphi'(x) + 0 = f(\varphi(x))\,\varphi'(x)$$

Es. $\int \frac{1+e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx =$ $\quad t = \varphi(x) = \sqrt{x} \quad dt = \varphi'(x)\,dx = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$

$$2\int \frac{1+e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\,dx =$$

$$2\int (1+e^t)\,dt = 2t + 2e^t + c = 2\sqrt{x} + 2e^{\sqrt{x}} + c \quad I\ (0,+\infty)$$

Es. 2 $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x-1}}\,dt$ $\quad t = \varphi(x) = \sqrt{2x-1}$ $\quad$ se ho la radice a denomin. conviene metterla $= a\,t$

$dt = \frac{\cancel{2}\,dx}{\cancel{2}\sqrt{2x-1}}$

$I = (\frac{1}{2}, +\infty)$

$2x-1 = t^2 \quad x = \frac{1+t^2}{2}$

$$\int \frac{2dt}{1+t^2} = 2\int \frac{1}{1+t^2}\,dt = 2\,\mathrm{arctg}(t) = 2\,\mathrm{arctg}(\sqrt{2x-1}) + c$$

sostituzioni notevoli

$R(x,y) = \frac{x^2+xy+5}{y^2+xy+x^2}$ $\quad$ (f razionale in x e y)

ⓐ $R(e^x) \to t = e^x \quad dt = e^x dx \quad \left[\frac{dt}{t} = dx\right]$

$R(\mathrm{senh}x, \cosh x)$

Es. $\int \frac{dx}{\cosh x} = \int \frac{dx}{\frac{e^x+e^{-x}}{2}} = \int \frac{2\,dx}{e^x+e^{-x}} = \int \frac{2e^x\,dx}{e^{2x}+1}$ $\quad t = e^x \quad \frac{dt}{t} = dx$

$$\int \frac{2\cancel{t}}{t^2+1}\cdot\frac{dt}{\cancel{t}} = 2\,\mathrm{arctg}(t) + c = 2\,\mathrm{arctg}(e^x) + c$$

ⓑ $R(\mathrm{sen}x, \cos x)$

$t = \mathrm{tg}\frac{x}{2}$

$\mathrm{sen}x = \frac{2t}{1+t^2}$

$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

$\frac{x}{2} = \mathrm{arctg}(t)$

$\frac{dx}{2} = \frac{dt}{1+t^2}$

ⓑ Es. $\int \frac{\mathrm{sen}x}{\cos x + 3\,\mathrm{sen}x}\,dx =$ $\quad t = \mathrm{tg}\frac{x}{2}$

$$\int \frac{\frac{2t}{1+t^2}\,\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2} + 3\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{\frac{4t}{1+t^2}\,dt}{(1-t^4+6t+6t^3)}$$ — razionale fratta

ⓐ Es. dell'ⓐ $\int \frac{dx}{\cosh x}$

CASO B — derivata del D(x)

$$\int \frac{2x+\alpha}{x^2+\alpha x+\beta}\,dx = \ln|x^2+\alpha x+\beta|+c$$

CASI C

$$\int \frac{k}{x^2+\alpha x+\beta}\,dx = \begin{cases} C_1 & \Delta>0 \\ C_2 & \Delta=0 \\ C_3 & \Delta<0 \end{cases}$$

Es. C1 $\int \frac{dx}{x^2-4}$

$$\frac{1}{x^2-4} = \frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+2}$$

$$\frac{1}{x^2-4} = \frac{Ax+2A+Bx-2B}{(x-2)(x+2)} = \frac{(A+B)x+2A-2B}{x^2-4}$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 2A-2B=1 \end{cases} \quad \begin{cases} A=-B \\ 4A=1 \end{cases} \quad \begin{cases} B=-\frac{1}{4} \\ A=\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\int\frac{dx}{x^2-4} = \frac{1}{4}\int\frac{dx}{x-2}-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x+2} = \frac{1}{4}\ln|x-2|-\frac{1}{4}\ln|x+2|+c$$

Es. C2 $\int \frac{dx}{x^2-6x+9} = \int\frac{dx}{(x-3)^2} = \int\frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{x-3}+c$

$t=(x-3)$
$dt=dx$

Es. C3 $\int\frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x+c$

$$\int\frac{dx}{x^2+x+1}$$

$$x^2+x+1+\frac{1}{4}-\frac{1}{4} = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4} = \frac{3}{4}\left[\left(\frac{2}{\sqrt3}x+\frac{1}{\sqrt3}\right)^2+1\right] \to t \quad dt=\frac{2}{\sqrt3}dx$$

$$\frac{4}{3}\int\frac{dx}{\left(\frac{2x}{\sqrt3}+\frac{1}{\sqrt3}\right)^2+1} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{\sqrt3}}\int\frac{\frac{\sqrt3}{2}dt}{t^2+1} = \frac{2}{\sqrt3}\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt3}x+\frac{1}{\sqrt3}\right)+c$$

CASI PIU' COMPLESSI

Es. 1 $\int\frac{4x+5}{(x-1)^3(x^2+x+2)}\,dx$

$$\frac{4x+5}{(x-1)^3(x^2+x+2)} = \frac{A}{(x-1)^3}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{(x-1)}+\frac{Dx+E}{x^2+x+2}$$

genera 3 fratti decrescenti (solo x-1)

$\Delta<0$

Es. 2 $\int\frac{x^2+4}{(x^2-4)(x+1)^2(x^2+1)}\,dx$

$$\frac{x^2+4}{(x+2)(x-2)(x+1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{(x+2)}+\frac{B}{(x-2)}+\frac{C}{(x+1)^2}+\frac{D}{(x+1)}+\frac{Ex+F}{x^2-1}$$

$\Delta<0$

$\int\frac{dx}{(x^2+1)^4} \rightarrow$ NO! non li facciamo

$s(P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$ essendo $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

somma inferiore legata alla partizione P

$S(P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$

somma superiore legata alla partizione P

OSS 1

Qualunque sia P è vero che la $s \leq S$ essendo $m_i \leq M_i, \forall i$

OSS 2

aggiungo punti

Se infittisco la partizione $P \to P'$ cosa succede a $s(P')$ e a $S(P')$? La $S(P')$ ha perso un pezzo, $s(P')$ ne acquista un pezzo

$s(P') \geq s(P)$ essendo P' più fitta di P

$S(P') \leq S(P)$

OSS 3

$\forall P_1, P_2 \quad s(P_1) \leq S(P_2)$

Definisco $P_1 \cup P_2$ la partizione unione

$\underbrace{s(P_1) \leq}_{\text{oss.2}} \underbrace{s(P_1 \cup P_2) \leq}_{\text{oss.1}} \underbrace{S(P_1 \cup P_2) \leq}_{\text{oss.2}} S(P_2) \Rightarrow s(P_1) \leq S(P_2), \forall P_1, P_2$

L'insieme delle somme inferiori è sup. limitato da una somma superiore

L'insieme costituito da $\{s(P)\}_{P \text{ partizione generica}}$ è sup. limitato da una qualsiasi $S(P_1)$ è un maggiorante

L'insieme $\{S(P)\}_{P \text{ partiz. gen.}}$ è inf. limitato da una qualsiasi $s(P_1)$

Per la completezza di $\mathbb{R}$ esistono $\begin{cases} \sup\{s(P)\}_P = s \in \mathbb{R} = \underline{I} & \text{(int. inf)} \\ \inf\{S(P)\}_P = S \in \mathbb{R} = \overline{I} & \text{(integ. sup)} \end{cases}$

f è Rintegrabile su $[a,b] \overset{def}{\Longleftrightarrow} s = S$ cioè

$\underline{I} = \overline{I} = \int_a^b f(x)\,dx \Leftrightarrow f \in R[a,b]$

NOTA 1

Se $f(x) \geq 0, \forall x \in I = [a,b]$ e f è Rintegrabile su $[a,b]$ allora

$\int_a^b f(x)\,dx =$ Area trapezoide

NOTA 2

Se f è Rintegrabile su $[a,b]$ allora

$\int_a^b f(x)\,dx = A_1 - A_2 + A_3$

OSS

$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 1 & \text{se } x \in \mathbb{R} \end{cases}$

il sup è 1

infiniti punti sopra e sotto

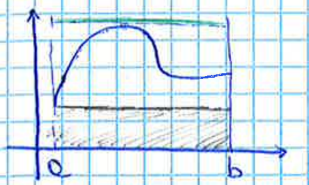
l'inf è 0

$s(P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = 0$

$S(P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = 1$

$\Rightarrow$ non è Rintegrabile

Dim.



i) $m \le f(x) \le M, \ \forall x \in [a,b]$

$\Downarrow$

proprietà di monotonia

$\Downarrow$

$g(x) = m \qquad y = f(x)$

$$m \le f(x) \Rightarrow \int_a^b m \, dx \le \int_a^b f(x)\, dx \le \int_a^b M \, dx$$

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\, dx \le M(b-a) \quad \boxed{2}$$

ii) Dalla $\boxed{2} \Rightarrow m \le \underbrace{\dfrac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}}_{\text{media integrale}} \le M$

La media integrale è un numero reale compreso tra m e M. Se f è continua vale il teorema dei valori intermedi e quindi esiste un punto $c \in [a,b]$ tale che $f(c)$ vale

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$$

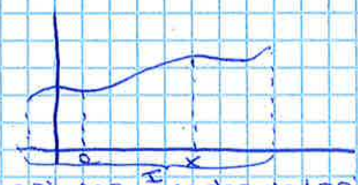
c.v.d.

Funzione integrale

Sia $f: I \Rightarrow \mathbb{R}$, I intervallo, $f \in R(I)$

$$F_a(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

$x \to F_a(x)$



La f integrale potrà prendere in considerazione anche valori di x che precedono a

se $x = a \quad F_a(a) = 0 = \int_a^a f(x)\, dx$

Teorema fondamentale del calcolo integrale

Sia $f: I \Rightarrow \mathbb{R}$, I intervallo, $a \in I$

i) $f(x)$ continua su I

Allora la funzione integrale $F_a(x) = \int_a^x f(t)dt$ è derivabile su I e risulta $F_a'(x) = f(x)$

Dim

Costruisco il rapporto incrementale in $x_0 \in I$

$$\frac{F_a(x) - F_a(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x-x_0} \cdot \left\{ \int_a^x f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt \right\} = \frac{1}{x-x_0} \cdot \left\{ \int_a^x f(t)\,dt + \int_{x_0}^a f(t)\,dt \right\} \Rightarrow \text{x prop. additiv.}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x-x_0} \left\{ \int_a^x f(t)dt + \int_{x_0}^a f(t)\,dt \right\} = \frac{1}{x-x_0} \cdot \int_{x_0}^x f(t)\,dt$$

essendo f continua su I vale il teorema della media integrale su (x_0, x)

$\exists \ c \in (x_0, x)$ tale che

$$f(c) \cdot (x - x_0) = \int_{x_0}^x f(t)\,dt$$

dunque $\dfrac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \dfrac{1}{\cancel{(x-x_0)}} \cancel{(x-x_0)} \cdot f(c)$ con $c \in (x_0, x)$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ c \to x_0}} f(c) = f(x_0)$$

essendo f continua

$$\begin{array}{ccccc} x_0 & \le & c & \le & x \\ \downarrow & & \Downarrow & & \downarrow \\ x_0 & & x_0 & & x_0 \end{array}$$

c.v.d.

Esiste finito il limite del rapporto incrementale e vale $f(x_0)$, $F'(x_0) = f(x_0)$, $\forall x_0 \in I$

Integrali impropri

Riprendendo $\int_a^b f(x)\,dx$ di Reimann

le ipotesi di lavoro erano:
i) $[a,b]$ chiuso e limitato
ii) $f(x)$ limitata in $[a,b]$
} con gli int. imp. saltano

considero una f limitata su $I\,[a,+\infty)$ illimitato

(NOTA analogo discorso si può fare su $(-\infty,b]$)

DEF $f(x)$ definita su $[a,+\infty)$ si dice $R_{loc}([a,+\infty)) \overset{def}{\Longleftrightarrow}$ (Reimann localmente integrabile)

i) $f(x)$ def. su $[a,+\infty)$
ii) f è R-integrabile su $[a,k]$ $\forall k>a$

Si definisce $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \overset{def}{\Longrightarrow} \lim_{k\to+\infty} \int_a^k f(x)\,dx$ se $f \in R_{loc}([a,+\infty))$

① se $\exists$ finito il lim si dice che l'integrale improprio converge ed esiste
② se $\exists$ infinito // // diverge
③ se $\nexists$ // // è oscillante o indeterminato

Es. 1 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{k\to\infty} \int_1^k \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{k\to\infty} \operatorname{arctg} x \Big|_1^k = \lim_{k\to\infty} \operatorname{arctg} k - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$ converge

$f(x) \in R_{loc}([1,+\infty))$

Es. 2 $\int_{-\infty}^{2} \frac{x}{1+x^2}\,dx = \lim_{k\to-\infty} \frac{1}{2}\int_k^2 \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \lim_{k\to-\infty} \left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]\Big|_k^2 = -\infty$ diverge

$f(x) \in R_{loc}((-\infty,k])$

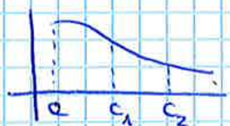
Es. 3 $\int_0^{+\infty} \operatorname{sen} x\,dx = \lim_{k\to+\infty} \int_0^k \operatorname{sen} x\,dx = \lim_{k\to+\infty} (-\cos x)\Big|_0^k = \lim_{k\to+\infty} (-\cos k + 1) = \nexists$ oscillante

OSS Sia $f \in R_{loc}([a,+\infty))$ e $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a,+\infty)$

Allora $F_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ è una funzione monotona crescente

Dim.

Scelgo c_1, c_2 tali che $a \leq c_1 < c_2$



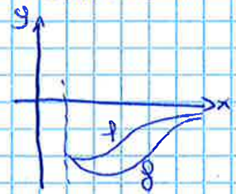
$F_a(c_2) = \int_a^{c_2} f(t)\,dt = a\int^{c_1} f(t)\,dt + \int_{c_1}^{c_2} f(t)\,dt$
$= F_a(c_1) + \int_{c_1}^{c_2} f(t)\,dt$

$F_a(c_2) - F_a(c_1) = \int_{c_1}^{c_2} f(t)\,dt \geq 0$ perché $c_1 < c_2$ e $f(t) \geq 0$ x ipot.

cioè $\forall c_1, c_2 \in [a,+\infty)$
$c_1 < c_2 \Rightarrow F_a(c_2) > F_a(c_1)$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 87 di 106

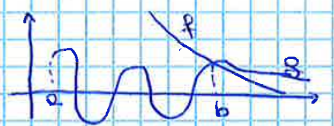
OSS 1 Criteri e casi notevoli valgono anche se $f(x) \le 0$, $\forall x \in [a, +\infty)$ opportunam. adattate



+ grande in val. ass. perché neg.

$g(x) \le f(x) \le 0$
$\forall x \in [a, +\infty)$

OSS 2 Se f è definitivamente su $[a, +\infty)$ positiva valgono le considerazioni fino ad ora svolte

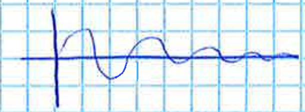


$\int_b^{+\infty} g(x)\,dx = ?$

Oltre b f sta sotto g, se prima no e anzi g è anche neg. non importa. Uso la proprietà di additività rispetto agli estremi di integrazione

$$\int_a^{+\infty} g(x)\,dx = \underbrace{\int_a^b g(x)\,dx}_{\text{valore finito}} + \underbrace{\int_b^{+\infty} g(x)\,dx}_{\text{integr. improprio (crit. confr.)}}$$

NOTA $f(x) = \frac{\cos x}{1+x^2}$ su $[0, +\infty)$ → oscillaz. che via via si smorza, ma continua a passare sopra e sotto



Se una f non ha segno costante definitivamente su $[a, +\infty)$ si usa il

criterio dell'assoluta convergenza

Sia $f \in R_{loc}([a, +\infty))$

i) $|f| \in R([a, +\infty))$ cioè converge $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$

allora $f \in R([a, +\infty))$

Dim $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$ $\forall x \in [a, +\infty)$

se sommo $|f(x)|$ ottengo

$0 \le f(x) + |f(x)| \le 2|f(x)|$, $\forall x \in [a, +\infty)$

Osservo che

$$\underbrace{\int_a^{+\infty} f(x)\,dx}_{\text{converge perché somma di 2 convergenze}} = \int_a^{+\infty} [f(x) + |f(x)| - |f(x)|]\,dx = \underbrace{\int_a^{+\infty} f(x) + |f(x)|\,dx}_{\text{converge per il criterio del confronto}} - \underbrace{\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx}_{\text{converge per ipotesi}}$$

OSS Se $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ diverge nulla si può dire sul carattere $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$

OSS 2 $\left|\int_a^{+\infty} f(x)\,dx\right| \le \int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ infatti essendo vero che $\left|\int_a^c f(x)\,dx\right| \le \int_a^c |f(x)|\,dx$

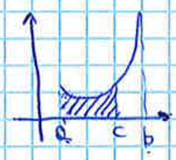
f illimitata su I limitato

consideriamo una f che non si mantenga limitata su un intervallo $[a,b)$ limit.

$f: [a,b) \to \mathbb{R}$ si dice $R_{loc}([a,b))$

$\overset{def}{\iff}$ i) f è definita su $[a,b)$

ii) f è R-integrabile (in senso proprio) su $[a,c]$, $a \le c < b$



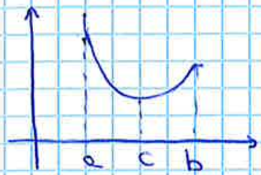
Se $f \in R_{loc}([a,b))$ è ben definita la funz. integrale

$F_a(c) = \int_a^c f(x)\,dx \quad (a \le c < b)$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)\,dx = \begin{cases} \text{i) } \ell \in \mathbb{R} & \text{esiste finito (l'integ. converge)} \\ \text{ii) } \infty & \text{esiste infinito (l'integ. diverge)} \\ \text{iii) } \nexists & \text{integr. improprio oscillante} \end{cases}$$

Es. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{c \to 1^-} \int_0^c \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{c \to 1^-} [\arcsin c - \arcsin 0] = \frac{\pi}{2}$ converge

criteri di convergenza (II tipo)



$$\int_a^b f\,dx = \lim_{k \to a^+} \int_k^b f\,dx$$

criterio del confronto

Siano f e $g \in R_{loc}([a,b))$

i) $0 \le f(x) \le g(x)$ su $[a,b)$

Allora se $\int_a^b f$ diverge $\Rightarrow \int_a^b g$ diverge

se $\int_a^b g$ converge $\Rightarrow \int_a^b f$ converge

CASO NOTEVOLE

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$$

$\boxed{\alpha = 1}$ diverge $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{b-x} = \lim_{u \to b^-} \int_a^u \frac{-dx}{-b+x} = \lim_{u \to b^-} [-\ln|x-b|]_a^u = \lim_{u \to b^-} -\ln|u-b| + \ln|a-b| = +\infty$

$\boxed{\alpha \ne 1}$ $\displaystyle\int \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = \int -\frac{dt}{t^\alpha} = -\frac{t^{-\alpha+1}}{1-\alpha} = \frac{t^{1-\alpha}}{\alpha-1} = \frac{(b-x)^{1-\alpha}}{\alpha-1}$

$t = b-x$

$dt = -dx$

Allora $\displaystyle\lim_{u \to b^-} \left[\frac{(b-x)^{1-\alpha}}{\alpha-1}\right]_a^u = \lim_{u \to b^-} \left[\frac{(b-u)^{1-\alpha}}{\alpha-1} - \frac{(b-a)^{1-\alpha}}{\alpha-1}\right] = \begin{cases} \dfrac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} & , 1-\alpha > 0 \\ \infty & , 1-\alpha \le 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} \text{se } \alpha < 1 & \text{converge} \\ \text{se } \alpha \ge 1 & \text{diverge} \end{cases}$$

CASO NOTEVOLE

Se la funzione integranda è $f(x)=\frac{1}{x^p \ln^q x}$ $\quad x\to 0$

In un intorno Δx di $x_0=0$, l'integrale improprio $\begin{cases} \text{se } p<1,\ \forall q \text{ converge} \\ \text{se } p=1, \text{ converge quindi } q>1 \end{cases}$

In un intorno di $x_0=1$, l'integrale improprio $\{ \text{se } q>1,\ \forall p \text{ converge}$

In un intorno di $+\infty$, l'integrale improprio $\begin{cases} \text{se } p>1,\ \forall q \text{ converge} \\ \text{se } p=1, \text{ converge per } q>1 \end{cases}$

Es $\int_0^1 \frac{(e^x-e)\sqrt{1-x^2}}{x\ln^3 x}\,dx$

$x\to 0^+ \quad f(x)\sim \frac{(1-e)1}{x\ln^3 x}$ converge $(p=1,\ q=3>1)$

$x\to 1 \quad f(x)\sim \frac{e(x-1)\sqrt{2}\,(1-x)^{\frac12}}{x\ln^3 x}$

$x\to 1^-$, $t=1-x$

$[\ln(1-t)]^3\sim -t^3 = (x-1)^3$

$e^x-e=e^{1-t}-e=e[e^{-t}-1]=e[1-t-1+o(t)]\quad t\to 0^+$

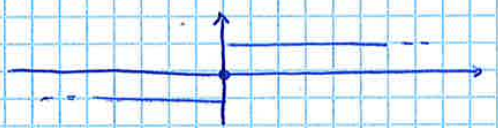
$= -te = e(x-1)\quad x\to 1^-$

$\sqrt{(1+x)(1-x)}\sim\sqrt{2}\,(1-x)^{\frac12}\quad x\to 1^-$

$f(x)\sim\frac{e(1-x)^1\cdot\sqrt{2}(1-x)^{\frac12}}{1(-x+1)^3}=\frac{e\sqrt{2}}{(1-x)^{3/2}}\qquad \alpha=\frac32>1$ diverge

Considerazione

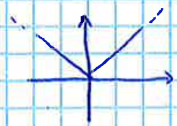
$f(x)=\mathrm{sgn}(x)$



essendo la $F(x)$:

$F_0(x)=\int_0^x f(t)\,dt=\begin{cases}\int_0^x 1\,dt & x>0\\ \int_0^x -1\,dt & x<0\\ 0 & x=0\end{cases}$

$F_0(x)=\begin{cases} x & \text{se } x>0\\ -x & \text{se } x<0\end{cases} = |x|$



La f è discontinua in $x_0=0$. La $F_0(x)$ è invece continua, ma non derivabile (primitiva generalizzata).

La $F_0(x)$ ha un "grado di regolarità" in più rispetto a $f(x)$

① si risolve l'equazione $g(y)=0$

$y(x)=y_1 \quad y(x)=y_2 \quad \dots \quad y(x)=y_m$ sono soluzioni della EDO ⓑ e si chiamano integrali singolari o soluz. costanti

② supposto $g(y)\neq 0$

$\frac{y'}{g(y)}=h(x)$ se indico con $G(y(x))$ una funzione primitiva di $\frac{1}{g(y(x))}$

si ha che $\frac{d}{dx}G(y(x))=\frac{1}{g(y(x))}\cdot y'(x)$

$\frac{d}{dx}G(y(x))=h(x)$

$G(y(x))=H(x)+c$ essendo $H(x)$ una primitiva di $h(x)$ su I

$\left[y'(x)=G^{-1}(H(x)+c),\ x\in I\right]$

oss: G è invertibile perché $G'=\frac{1}{g(y)}\neq 0 \Rightarrow G$ è strettam. monotona su $J(y)$

Teorema di esistenza e unicità della soluz. del P. di C.

Sia dato il seguente P. di C.

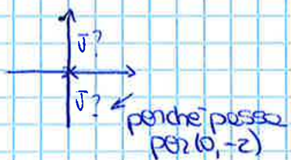
$$\begin{cases} y'=h(x)\,g(y) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$$

① se $g(y)$ è continua su $J(y)$ e $h(x)$ è continua su $I(x)$, esiste almeno una soluz. al P. di C.

② se $h(x)\in \mathcal{C}(I)$ e $g(y)\in \mathcal{C}^{(1)}(J)$ cont. e derivab. con deriv. 1° continua e $x_0\in I$, $y_0\in J$ allora esiste ed è unica la soluz. al P. di C. su $I'(x_0)\subseteq I(x_0)$

intervallo massimale

Es. $\begin{cases} y'=\frac{x^2}{y} \\ y(0)=-2 \end{cases}$ $\quad h(x)=x^2\in\mathcal{C}(\mathbb{R})$, $I=\mathbb{R}$ $\quad g(y)=\frac{1}{y}\in\mathcal{C}^1(J)$, $J=(-\infty,0)$



① $g(y)=0$

$\frac{1}{y}=0 \quad \nexists y$

② $y'=\frac{x^2}{y} \Rightarrow \quad y\frac{dy}{dx}=x^2 \quad y\,dy=x^2dx \quad \frac{y^2}{2}=\frac{x^3}{3}+c \quad y^2=\frac{2}{3}x^3+c$

$y=-\sqrt{\frac{2}{3}x^3+c}$ perché su J

$y(0)=-2 \quad -2=-\sqrt{c} \quad \sqrt{c}=2 \quad c=4 \quad y=-\sqrt{\frac{2}{3}x^3+4}$ su $I'\left[-\sqrt[3]{6},+\infty\right)\subseteq I=\mathbb{R}$

$\frac{2}{3}x^3+4\geq 0 \quad x^3\geq -4\cdot\frac{3}{2} \quad x^3\geq -6 \quad x\geq -\sqrt[3]{6}$

Es. 2 $\begin{cases} y'=3\sqrt[3]{y^2} \\ y(2)=0 \end{cases}$ $\quad h(x)=3\in\mathcal{C}(\mathbb{R})$ $\quad I=\mathbb{R}$

$g(y)=\sqrt[3]{y^2}\in\mathcal{C}(\mathbb{R})$

$g'(y)=\frac{2}{3\sqrt[3]{y}} \quad y\neq 0 \qquad g(y)\in\mathcal{C}^1(J')$? non posso trovare un $J'(0)$

continua e derivabile e non contenga $y=0$

↳ tesi ① → esiste almeno una soluzione

CONSIDERAZIONI SU APPLICABILITÀ del teorema di $\exists$ e unicità:

① $\begin{cases} y' = e^y \frac{\cos x}{x} \\ y(0) = 1 \end{cases}$ $h(x) = \frac{\cos x}{x}$ $g(y) = e^y \in C^1(\mathbb{R})$ $h(x)$ deve $\in C(I)$ $x_0 \in I$
$\nexists I$ intervallo ($x_0 = 0 \notin I$)
non è garantita la c. di esis.

② $\begin{cases} y' = |y| \ln x \\ y(2) = 0 \end{cases}$ $h(x) = \ln x \in C(I)$ $I = (0, +\infty)$ $x_0 = 2 \in I$ $g(y) = |y| \in C^1(I)$
ovunque continua, ma non deriv. in $y_0 = 0 \in J$
$g(y) \in C(J)$ $J = \mathbb{R}$ $y_0 \in J$
$\exists$, ma non è unica la soluz.

③ $\begin{cases} y' = |y| \ln x \\ y(1) = 1 \end{cases}$ $h(x) = \ln x$ $x_0 = 1 \in I$ $g(y) = |y|$
$g(y) \in C^1(J)$ $J = (0, +\infty)$ $y_0 = 1 \in J$ $\exists!$ soluz. su $I' \subseteq I$

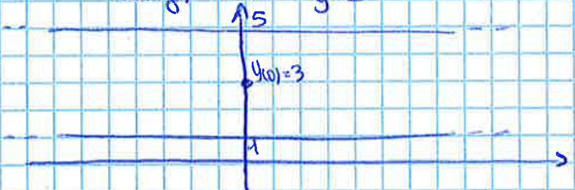
④ $\begin{cases} y' = \frac{2y^2}{1-x^2} \\ y(0) = 0 \end{cases}$ $h(x) = \frac{1}{1-x^2}$ $\in C^0(I)$ $I = (-1, 1)$ $x_0 = 0 \in I$ $g(y) = 2y^2 \in C^1(J)$ $J = \mathbb{R}$ e $y_0 \in J$ $\exists!$ soluz. su $I' \subseteq I$

$g(y) = 0$ integr. sing.
$\Downarrow$
$y(x) = 0$ soluz. del P. di C.
è $y(x) = 0$ su $I(-1,1)$

⑤ $\begin{cases} y' = (y-1)(y-5)(x-3) \\ y(0) = 3 \end{cases}$ $h(x) = x - 3$ $\in C^0(\mathbb{R})$ $I = \mathbb{R}$ $x_0 \in I$ $g(y) = (y-1)(y-5)$ $\in C^1(\mathbb{R})$ con $J = \mathbb{R}$ e $y_0 = 3 \in J$

$\exists!$ soluz. su $I' \subseteq \mathbb{R}$

integr. sing. $g(y) = 0$ $y = 1$, $y = 5$ non soddisfano P. di C.



la f è limitata tra 1 e 5 perché non può intersecare i 2 integrali singol.

EQUAZIONI LINEARI del 1° ORDINE ($\neq$ lineari di ordine n)

Si presenta nella forma

$$y' + a(x)y = b(x) \quad ①$$ con $a(x)$ e $b(x) \in C(I)$ con I intervallo

① si considera la "omogenea" $y' + a(x)y = 0$
è una eq. a variabili separabili

$y' = -a(x)y$ ②

$y = 0$ è integrale singolare della ②

supposto $y \neq 0$ la ② si può scrivere:

$$\int \frac{dy}{y} = \int -a(x)\, dx$$

$\ln|y| = -\underbrace{A(x)}_{\text{primitiva su } I \text{ di } a(x)} + c_1$ $|y| = e^{-Ax + c_1}$, $c_1 \in \mathbb{R}$ $y = \pm e^{c_1} \cdot e^{-A(x)} = k e^{-A(x)}$, $k \neq 0$

La ② ammette integrale generale $y = k e^{-A(x)}$ ③, $k \in \mathbb{R}$ (contempla anche l'integr. singolare)

② Risolvo la ① con il metodo variazionale delle costanti arbitrarie (in questo caso 1 perché del 1° ordine)

Cerco una soluzione nella forma $y = k(x) e^{-A(x)}$ ④

non è più cost., dobbiamo trovarlo (basta sostituire nella ①)

determino quale espressione debba avere $k(x)$ affinché la ④ sia soluzione della ①

$$\underbrace{k'(x) e^{-A(x)} - \cancel{k(x) e^{-A(x)} \cdot a(x)}}_{y'} + \underbrace{\cancel{a(x) k(x) e^{-A(x)}}}_{a(x)y} = b(x)$$

$k'(x) e^{-A(x)} = b(x)$
$k'(x) = b(x) \cdot e^{A(x)}$
$k(x) = \int b(x) e^{A(x)} dx + c$, $c \in \mathbb{R}$