NUMERO: 2403A

ANNO: 2019

A P P U N T I

STUDENTE: Ferrera Alessandra

MATERIA: Geometria e Algebra Lineare con Calcolo Numerico - Prof. Di Scala, Scuderi

ALGEBRA LINEARE E GEOMETRIA

VETTORI

Possono essere visti con occhio fisico o informatico.
Caratterizzati da modulo, verso, direzione. Vengono indicati da $\vec{p}$.
Per l'informatico → è una sequenza. ↳ COLINEARI = sulla stessa direzione
Le operazioni tra vettori agiscono su modulo, direzione e verso (specialmente la moltiplicazione). Moltiplicando per zero ottengo un vettore ANTICOLARE.
Un vettore unitario di modulo viene chiamato VERSORE, un oggetto fisico adoperato per costruire sistemi di riferimento cartesiani.

↓

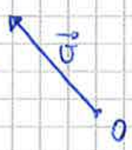
partendo dai versori si costruiscono dei vettori con combinazioni lineari tra le COMPONENTI. Con le componenti posso esprimere

(v_x, v_y) coppia $\qquad \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}$ colonna $\qquad [v_x \ v_y]$ riga

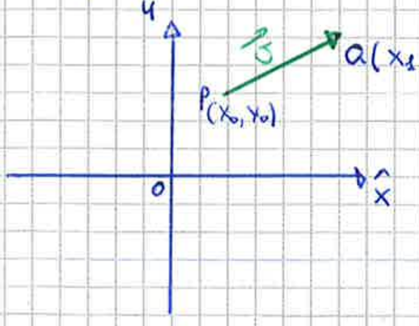
Con queste forme compatte posso esprimere, per esempio

$P(x,y)$

$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad Q = P + \vec{v} = (x,y) + \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}$

$\vec{v} = \hat{u}_x$  $\vec{v} \sim \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, perché $\vec{v} = 1 \cdot \hat{u}_x + 0 \cdot \hat{u}_y$

- Per semplificare i calcoli per un pc viene adoperato il sistema di riferimento: si adopera la somma tra le componenti, non parallelogramma.



$\vec{v} = \vec{OP} \qquad \vec{v} \doteq \begin{bmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{bmatrix} = Q - P$

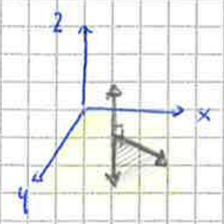
$\vec{v}$ ~ applicando $\vec{v}$ mi sposto da P a Q.
Il vettore quindi, espresso in componenti verticali, è quindi una sottrazione.

NB un punto non può essere considerato un vettore, manca l'origine
→ se considero origine sì!

PRODOTTO VETTORIALE

Da due vettori ottengo il terzo vettore. Non è commutativa, tanto meno associativa.

$$\|\vec{v}\times\vec{u}\| = \|\vec{v}\|\cdot\|\vec{u}\|\ \overbrace{\sin\theta}^{\text{modulo della proiezione}} \quad \text{con } \theta = \text{angolo compreso}$$



regola della MANO DESTRA → verso del vettore risultante.
Il risultante sarà perpendicolare al piano costituito dai due vettori costituenti il prodotto.
Se il vettore risultante è uscente → ⊙
entrante → ⊗

DETERMINANTE 3x3

tre vettori insieme

$$\det\begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix} = a\begin{vmatrix} e & h \\ f & i \end{vmatrix} + d\begin{vmatrix} h & b \\ i & c \end{vmatrix} + g\begin{vmatrix} b & e \\ c & f \end{vmatrix}.$$

$$\begin{matrix} \vec{v} & \vec{w} & \vec{n} \end{matrix}$$

$$= a(e\cdot i - hf) + d(hc - bi) + g(b\cdot f - ec)$$

Oppure uso Sarrus, ricopio le prime due righe e ottengo uno 5x3.

$$\begin{matrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \\ a & d & g \\ b & e & h \end{matrix}$$

$$a\cdot e\cdot i + b\cdot f\cdot g + c\cdot d\cdot h - c\cdot e\cdot g - h\cdot g\cdot a - b\cdot d\cdot i$$

↓

è come usare la regola delle 2x2

- $\hat{u}_x \times \hat{u}_y$
- $\hat{u}_z \times \hat{u}_y$

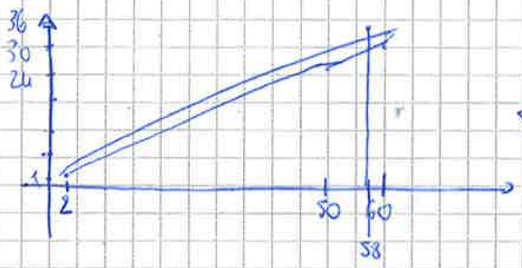
PDF 1

ESERCIZIO 1.7.1

$T \to (2,1), (50,26), (60,30)$

$\overline{pq}$ $\quad p(58,0),\ q=(58,33)$

~~lato ...~~

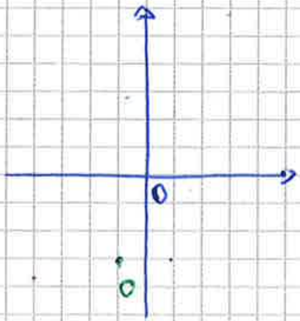


sì

ESERCIZIO 1.8.1

$O = (1; -3)$

$$\begin{cases} \hat{u}_x = \hat{u}_x - \hat{u}_y \\ \hat{u}_y = \hat{u}_x + \hat{u}_y \end{cases}$$



trovare (x,y) di $P(3,7)$

se $\hat{u}_x = \hat{u}_x - \hat{u}_y \to \hat{u}_x = [1,0] - [0,1] = [1,-1]$

se $\hat{u}_y = \hat{u}_x + \hat{u}_y \to \hat{u}_y = [1,0] + [0,1] = [1,1]$

~~$P = x = 1 + \hat{u}_x x + \hat{u}_x y$, $y = -3 + \hat{u}_x$~~

$$P = \begin{cases} x = 1 + \hat{u}_x x + \hat{u}_x y \\ y = -3 - \hat{u}_y x + \hat{u}_y y \end{cases}$$

$$P = \begin{cases} x = 1 + 1x + 1y \\ y = -3 - 1x + 1y \end{cases} = \begin{cases} x = 1+3+7 \\ y = -3-3+7 \end{cases}$$

$$P = \begin{cases} x = 11 \\ y = +1 \end{cases} \to P(11,1)$$

ESERCIZIO 1.11.1

$(2,-1,0) \times (0,0,0)$

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hat{u}_x & \hat{u}_y & \hat{u}_z \end{vmatrix} = \hat{u}_x \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \hat{u}_y \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \hat{u}_z \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{0} \to \text{vettore} \times \vec{0} = \vec{0}$$

ESERCIZIO 1.11.2

$$\|\vec{v} \times \vec{w}\|^2 + (\vec{v} \cdot \vec{w})^2 = \|\vec{v}\|^2 \|\vec{w}\|^2$$

$$(\|\vec{w}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin\theta)^2 + \|\vec{w}\|^2 \cdot \|\vec{v}\|^2 \cdot \cos^2\theta = \|\vec{v}\|^2 \|\vec{w}\|^2$$

$$(\cancel{\|\vec{v}\|^2 \|\vec{w}\|^2})(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = \cancel{\|\vec{w}\|^2 \|\vec{v}\|^2}$$

$$1 = 1$$

$$0 = 0$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 7 di 156

PDF 2

LUNEDÌ 12 MARZO 2018

CALCOLO NUMERICO

Propone e analizza metodi che consentono di ottenere una soluzione numerica di problemi matematici, per i quali metodi analitici risultano troppo lunghi. Per ottenere la soluzione uso degli algoritmi

RAPPRESENTAZIONE IN FLOATING POINT

$s\in\{0,1\}$ 0: pos, 1: neg

$a=(-1)^s\, p\, N^q$ (q intero, p reale ≥ 0) N = base numerica del calcolo (2 = binario), s = segno

$a=0{,}015\times10^{-1}=0{,}15\times10^{-2}$ → principio del floating point, spostamento virgola.

Se impongo delle condizioni → $N^{-1}\le p<1$ → $0{,}1\le p<1$ → posso usare 0,1 e bou

Una rappresentazione che segue le condizioni iniziali e ho una sola rappresentazione si chiama NORMALE. In particolare p = MANTISSA e q = ESPONENTE o CARATTERISTICA

$a=12{,}4$ per sapere mantissa → $0{,}124\times10^{2}$, $p=0{,}124$, $q=2$

$a=-0{,}0013\times10^{4}$ → $a=-0{,}13\times10^{2}$ → $p=0{,}13$, $q=2$ SENZA SEGNO!

s, q e p identificano univocamente un numero a. Un numero REALE è un NUMERO DI MACCHINA se ho un esponente massimo fisso. Ha mantissa ed esponente esattamente rappresentabili nel calcolatore. Se $q<L$ con L = lower value siamo in UNDERFLOW = non sono rappresentabili quindi vengono approssimati a zero

$$\text{numero più piccolo} = m = (\underbrace{0{,}10\ldots000}_{t\text{ cifre}})_N\times10^{L}$$

Se $q\ge U$ abbiamo OVERFLOW. M = numero più grosso. Sistema → errore! INF

$$M=\underbrace{0{,}999\ldots}_{t\text{ cifre}}\times10^{U}$$

[le limitazioni U e L sono per esponente q]

es: $\dfrac{M+\frac{M}{2}}{2}$ → anche se il numero vale $\frac{3}{4}M$ e quindi è rappresentabile, il calcolatore si ferma perché il numeratore è $>M$. Overflow

Devo quindi calcolarlo con $\frac{M}{2}+\frac{M}{4}$ o $\frac{M}{2}+\dfrac{M-\frac{M}{2}}{2}$

Se ho più di t cifre devo approssimare il numero perché altrimenti non rientro nel caso di numero di macchina. Si usa il ROUNDING TO EVEN (il numero di macchina si indica con $\bar{p}$)

se $t=3$

$\bar{p}_1=0{,}158$ $\bar{p}_2=0{,}159$

si fa la media, se la $t=4$ è un numero minore stretto di 5, si usa $\bar{p}_1$. Altrimenti si usa $\bar{p}_2$. ~~Se la quarta cifra è pari approssimo al pari~~

Se siamo in mezzo, uso il pari

(se ultima cifra pari → sx altrimenti → dx)

Se prima dell'ultima cifra ho dispari → il pari x eccesso $p=0{,}1595$ → $0{,}160$

lavoro su ℓ_1: $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+3z \\ 1-z \\ z \end{bmatrix} = z\underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\vec{v}} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Sostituisco $\vec{v}$ in ℓ_2 omogenea $\to \vec{N}_2$

$$\vec{N}_2 \begin{cases} 2x+y-2z=0 \\ -x+y+z=0 \end{cases} \to \begin{cases} 3\cdot 2-1-2=0 \\ -3-\cancel{1}+\cancel{1}=0 \end{cases}$$

non sono parallele perché i due vettori normali non sono paralleli

ESERCIZIO 2.9.4

a) $\vec{u} = \begin{bmatrix} -10 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\vec{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) = \vec{u}\cdot \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = u_x \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + u_y \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + u_z \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= u_x(-2) + u_y$$

$$\to \vec{a} = -10(-2)+5 = 20+5 = 25$$

b) $\vec{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ -10 \end{bmatrix}$ $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\vec{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) = \vec{u}\cdot \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = u_x \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + u_y \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + u_z \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -u_y + 2u_z \to \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\to \vec{b} = -5 - 10\cdot 2 = -5-20 = -25$$

c) $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) =$

$$\vec{v}\times\vec{w} = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = u_x \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + u_y \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + u_z \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= u_x(-4-1) + u_y + u_z$$

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = -5+2+3 = 0$$

- vettore riga → a=[1 4 0]=[1,4,0]   colonna → b=[1;4;0] = [2 (invio) 3 ...]
- trasporre vettore riga in colonna → apostrofo
- w=[a; passo h: b] → cose sommate = passo → w=[1:2:5] = 1,3,5
- intervallo → w=[1:5] = 1,2,3,4,5,~~6~~
- se scrivo w=[1:-1:10] → vuoto!
- linspace (a,b,N) N=quanti tra a e b → $\frac{b-a}{N-1}$
  x= linspace (1,10,5) → calcola da solo il passo
  N di default = 100
- x(3) = 3ª componente di x
- x([1 5 3]) = 1ª, 5ª e 3ª componente
- x(end) = ultimo elemento se non so quanto è lungo. x(end-1) = penultimo
- l'indice parte da 1!
- size(x) = n° righe e n° colonne
- length(x) = lunghezza
- sort(x) = riordina vettore a=[3 2 8 -1]. sort(a) = -1 2 3 8 non modifica però il vettore, riordina solo output
- sum(v) o prod(v) → somma e prodotto componenti
- max(v) e min(v) → valore max e min vettore

PRODOTTO SCALARE → tra vettori con stesse dimensioni
v*w = dot(v,w)

- concatenazione z=[v w] → z= valori v poi w. Entrambi righe o entrambi colonne
- togliere elementi → z(2)=[ ] → cancello la 2ª componente
  z([2 4])=[ ] → toglie 2ª e 4ª
- cambio componenti → v([end-1 end])=w → le ultime due sono di w
- scambio componenti v([2 4]) = v([4 2])
- matrice 2x3 → v[1 2 3; 4 5 6] = $\begin{matrix}1&2&3\\4&5&6\end{matrix}$
- matrice nulla N=zeros(R,C) → zeros(3) = $\begin{matrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{matrix}$ → quadrata
- O= ~~ones~~ ones(R C) → di 1
- I=eye(3) → identità $\begin{matrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix}$ - rand(R C) → casuali (pseudo)
- 5*ones(4) → matrice 4x4 di 5
- A=B+C = somma tra matrici
- A(:,[1 3]) = A(:,[3 1]) → cambio 1ª e 3ª colonna
  : → tutte le righe

MERCOLEDÌ 14 MARZO 2018

APPROSSIMAZIONI

A volte si fa $p + \frac{1}{2} N^{-t}$ con t = n° cifre

$p = 0,158634 +$
$\ 0,0005$
$0,159|134$ | Poi tronco $\to p \approx \bar{p}_2$

$\bar{p}_1 = 0,158$
$\bar{p}_2 = 0,159$ → alla base del rounding to even

ERRORE ASSOLUTO E RELATIVO

Sia x un numero approssimato a $\tilde{x} \to x \approx \tilde{x}$ → numero di macchina

$e = |x - \tilde{x}|$ → errore assoluto

$\varepsilon = \varepsilon_r = \frac{|x - \tilde{x}|}{|x|}$ = relativo. Con q.tà molto grandi ha più importanza l'err. relativo che l'assoluto

(NB) → per i vettori si usa la norma (= modulo) invece che la divisione per ε per $|x|$ ✓

$|a - \bar{a}| = |(-1)^s p N^q - (-1)^s \bar{p} N^q| = |p - \bar{p}| N^q \leq \frac{1}{2} N^{q-t}$

$\frac{|a - \bar{a}|}{|a|} = \frac{|p - \bar{p}| N^q}{|p| N^q} \leq \frac{1}{2} \frac{N^{-t}}{p} \leq \frac{1}{2} N^{1-t}$ = errore massimo → $2,2 \times 10^{-16}$

ERR. DI ARROTONDAM. = ε_m

N^{1-t} → eps di macchina

$N^{-1} \leq p < 1 \to p \geq N^{-1} \to \frac{1}{p} \leq \frac{1}{N}$

$\varepsilon = \frac{\bar{a} - a}{a} \to a\varepsilon = \bar{a} - a \to \bar{a} = a(1 + \varepsilon) \to \boxed{|\varepsilon| \leq \varepsilon_m}$

($\bar{a}$ →) n° macchina di a

MATLAB

Si usano 64 per i numeri → 1 bit per il segno, 52 per la mantissa (53 solo che il primo non si tiene), 11 bit per l'esponente

realmin → $2,2 \times 10^{-308} = -m$ → più piccolo numero rappresentabile (sist. binario)

$-m \quad m' \quad 0 \quad m' \quad m$

numeri approx. a zero

realmax → $1,8 \times 10^{308} = M$ → il più grosso. Compare la scritta "inf"

$\varepsilon_m = 2,2 \times 10^{-16} = eps$

$\varepsilon_m = 1,1 \times 10^{-16}$ = precisione di macchina

$\varepsilon a = a - \bar{a}$

$\bar{a} = a - \varepsilon a$

OPERAZIONI DI MACCHINA

Sia $N=10$, $t=4$ $\quad \bar{a}_1 = 0{,}5823 \quad \bar{a}_2 = 0{,}6214$

$\bar{a}_1 + \bar{a}_2 = 1{,}2037 = 0{,}12037 \times 10$

dalla somma tra due numeri di macchina non ottengo un n° di macchina

$\cdot \quad \odot \quad \rightarrow \bar{a} \odot \bar{b} = \overline{\bar{a} \cdot \bar{b}} \rightarrow$ arrotondo l'esatto

operazione $\quad$ oper. di macchina $\quad \bar{a} \oplus \bar{b} = \overline{0{,}12037} \rightarrow 0{,}1204 \times 10$

→ Si associa un terzo numero di macchina ottenuto arrotondando il risultato dell'operazione normale

$\overline{\bar{a}_1 + \bar{a}_2} = a$ $\quad$ ricordo che $\bar{a} = a(1+\varepsilon) \rightarrow \bar{a}_r = (\bar{a}_1 + \bar{a}_2)(1+\varepsilon_{\oplus})$

e che $|\varepsilon_{\oplus}| \leq \varepsilon_m$

PROPRIETÀ

La commutativa persiste. In generale non sono valide l'associativa e la distributiva.

NB $\quad \bar{a}_1 \oplus \bar{a}_2 = \bar{a}_1$ potrebbe capitare se $|\bar{a}_2| \ll |\bar{a}_1|$, in particolare quando $|\bar{a}_2| < |\bar{a}_1| eps$. In particolare $|\bar{a}_2|$ e' "troppo piccolo"

EQUIVALENTI DI MACCHINA

Se l'errore relativo $\dfrac{|e_1 - e_2|}{|e_1|}$ o $\dfrac{|e_1 - e_2|}{|e_2|}$ ed e' dell'ordine di precisione ε_m, si parla di equivalenti di macchina

- $0{,}99999$ e 1 $\rightarrow |1 - 0{,}99999| = 0{,}1 \times 10^{-4} \leq \varepsilon_m = 0{,}5 \times 10^{-4}$

  ↓

  i due numeri sono uguali

- $y_1 = (1+x) - 1$
  $y_2 = (1 \times 1 - 1) + x$ → equivalenti in aritmetica ESATTA

se $x = 0{,}1 \rightarrow y_1$ e y_2 sono equivalenti di macchina (ottengo $y_1 \neq y_2$)

se $x = 10 \times e - 11 = 10^{-11} \rightarrow y_1$ e y_2 non sono equivalenti

Con l'aritmetica finita può capitare che vi sia CANCELLAZIONE NUMERICA

→ perdita cifre con numeri quasi uguali → gli errori di arrotondamento causano tutto ciò. Se manipolando non riesco a evitarlo → INSITA NEL PROBLEMA

↳ cancellazione: perdita cifre della mantissa che si verifica quando si esegue la sottrazione tra $\bar{a}_1$ e $\bar{a}_2$ di macchina dello stesso segno, circa uguali e con almeno uno dei due affetto dall'errore di arrotondamento $(p_1 \neq p_2 \text{ o } p_1 \neq p$

ESERCIZI ABATE - DE FABRITIIS

VETTORI GEOMETRICI P. 3

2.1) $\vec{OA} = 3\hat{x} - 2\hat{y}$

$\vec{OB} = \hat{x} + 2\hat{z}$ calcola $\vec{OD_1} = \vec{OA} + \vec{OB} + 3\vec{OC}$ e $\vec{OD_2} = 3\vec{OA} - 2\vec{OC}$

$\vec{OC} = -\hat{x} + \hat{y} - \hat{z}$

$3\vec{OC} = -3\hat{x} + 3\hat{y} - 3\hat{z}$

$3\vec{OA} = 9\hat{x} - 6\hat{y}$

$-2\vec{OC} = 2\hat{x} - 2\hat{y} + 2\hat{z}$

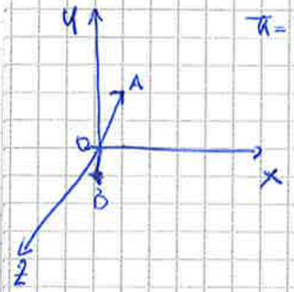
$$\vec{OD_1} = \begin{bmatrix} 3+1-3 \\ -2+3 \\ +2-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \hat{x} + \hat{y} - \hat{z}$$

$$\vec{OD_2} = \begin{bmatrix} 9+2 \\ -6-2 \\ 2 \end{bmatrix} = 11\hat{x} - 8\hat{y} + 2\vec{z}$$

2.2) siano $\vec{OA} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\vec{OB} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\vec{OC} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ dimostra che non sono complanari

→ corrispondono a $\hat{u}_z, \hat{u}_x$ e $\hat{u}_y$ rispettivamente, che coincidono con le basi per hp e non è quindi possibile la complanarità

2.3) Sia $\vec{OA} = \hat{x} + 2\hat{y}$ e $\vec{OB} = \hat{x} - \hat{y} + 2\hat{z}$



π = Span(= piano formato da due vettori) = Span$(\vec{OA}, \vec{OB})$

Per quali valori di a $r \in \pi$?

$$r: \begin{cases} x = 2 + (a-1)t \\ y = 1 + 3t \\ z = 2a - 2t \end{cases}$$

$r = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = P + vt$ $\quad P = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2a \end{bmatrix}$ $\quad \vec{v} = t \cdot \begin{bmatrix} a-1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$

Affinché $r \in \pi$, P = punto passaggio r deve appartenere a π.

Inoltre il vettore $\vec{v}$, traslatore di P secondo t, deve essere // a π.

Il punto P appartiene a π se $\vec{OP}$ = vettore che deve appartenere a π.

Per verificarlo, $\begin{bmatrix} x_P \\ y_P \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Qui $\vec{OP} = s\,\vec{OA} + t\,\vec{OB}$

$$\vec{OP} = s\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{con } P\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2a \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2 = s + t \rightarrow s = 2 - t \\ 1 = 2s - t \rightarrow 1 = 4 - 2t - t \\ \cancel{2}a = \cancel{2}t \end{cases} \qquad \begin{cases} s = 2 - t = 1 \\ 3 = 3t \rightarrow t = 1 \\ a = 1 \end{cases}$$

Per vedere se $\vec{v} \,//\, \pi$

$$\begin{cases} a - 1 = s + t \rightarrow a = 1 \\ 3 = 2s - t \rightarrow 3 = 2s + 1 \\ -2 = 2t \rightarrow t = -1 \end{cases}$$

Per $a = 1$, la retta $\in \pi$

CON I VETTORI

$A(0,4)$ $B(4,2)$

$\vec{AC} = t\vec{AB}$ $\rightarrow$ $C-A = t(B-A)$

$\vec{AC} = 4t$ $d(A,C) = d(C,B)$

$\vec{AB} = 4-2t$ $d(A,C)^2 = d(C,B)^2$

LUNEDÌ 19 MARZO 2018

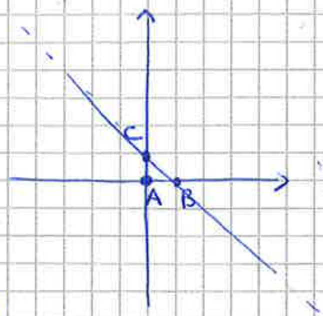
ESERCIZIO 3.3.2

$\ell: x+y=1$

$A(0,0)$ calcolo i simmetrici rispetto ad ℓ

$B(1,0)$

$C(0,1)$



$$f(x,y) = \left(x_P - 2\frac{mx_P + ny_P - c}{m^2+n^2} m,\ y_P - 2\frac{mx_P + ny_P - c}{m^2+n^2} n \right)$$

con $P(x_P, y_P)$ generico

- $x_{A'} = 0 - 2\frac{-1}{2}\cdot 1,\ \left(0-2\left(-\frac{1}{2}\right)1\right) = y_{A'}$

$A'(1,1)$

- $x_{B'} = x_B - 2\frac{x_B m + n y_B - c}{m^2+n^2}\cdot 1 = 1 - 2\frac{1-1}{2}\cdot 1 = 1$

$y'_B = y_B - 2\cdot\frac{x_B m + y_B n - c}{m^2+n^2}\cdot 1 = 0 - 0 = 0$

$B'(0,0)$

- $x_{C'} = x_C - 2\frac{x_C m + y_C n - c}{m^2+n^2}\cdot 1 = 0 - 2\frac{1-1}{2}\cdot m = 0$

$y'_C = y_C - 2\cdot\frac{x_C m + y_C n - c}{m^2+n^2}\cdot n = 1 - 2\cdot 0\cdot 1 = 1$

$\rightarrow C'(0,1)$

~~APPM~~ APPROSSIMAZIONE DI FUNZIONI E DI DATI

Un algoritmo viene definito NUMERICAMENTE STABILE se l'errore relativo associato a $\tilde{y}$ ha lo stesso ordine di grandezza della precisione di macchina o minore; altrimenti si dice INSTABILE → algoritmo stabile = non amplifica troppo gli errori di arrotondamento. [$\tilde{y}$ = risultati ottenuti da dati $\bar{x}_n$ in precisione finita di calcolo]

APPROSSIMARE = sostituire una funzione f con una $\tilde{f}$ che è simile ma più semplice

INTERPOLAZIONE = scelta di una $\tilde{f}(x_i) = y_i$ con $i = 1, \dots, n+1$ cioè, quindi una $\tilde{f}$ che passa per i punti (x_i, y_i). I punti x_i = NODI DI INTERPOLAZIONE

1) POLINOMIALI = sviluppo di algoritmi nella differenziazione/integr.

2) POLINOMIALI A TRATTI = nella grafica

→ Esiste uno ed uno solo polinomio di grado $\leq n$ interpolante i dati assegnati e che segue la regola $p_n(x_i) = y_i$, con $i = 1, \dots, n+1$.

DIM

Se esistessero due polinomi di grado n, p_n e q_n, $p_n - q_n$ non sarebbe nullo e si annullerebbe in $n+1$ nodi → impossibile! Se un polinomio di grado n si annulla $n+1$ volte allora deve essere nullo! → l'interpolante è unico

* RAPPRESENTAZIONE MONOMIALE → $p_n(x) = c_1 x^n + c_2 x^{n+1} + \dots + c_n x + c_{n+1}$

MATLAB COMANDI

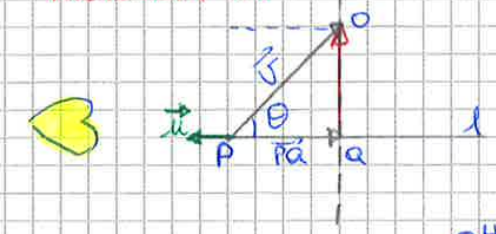
- c = polyfit(x,y,n) → memorizza in c i coefficienti di * di un P di grado n
- p = polyval(c,z) → mette in p i valori che un QUALSIASI polinomio con coeff in "c" assume nelle componenti del vettore z.

nasce basandosi sui minimi quadrati. Con gradi elevati non è affidabile

PDF 3!

MARTEDÌ 20 MARZO 2018

PROIEZIONI 3.1



proiezione $\to$ $\vec{v} - \vec{PQ} = \vec{QO}$

$\hookrightarrow$ proiezione sulla retta l

$\|\vec{PQ}\| = \cos\theta \cdot \|\vec{v}\|$

$\vec{v} = \vec{PQ} + \vec{QO}$

attenzione! $\vec{PQ} = m \cdot \vec{u}$ con retta $l = P + t\vec{u}$ parametrica

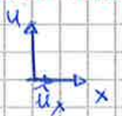
ma $\|\vec{PQ}\| = \cos\theta \|\vec{v}\|$

$\to |m| = \dfrac{\cos\theta \|\vec{v}\|}{\|\vec{u}\|}$ $\qquad$ $\text{sign}(m) = \text{sign}(\vec{u} \cdot \vec{PQ})$

PROIEZIONE E PRODOTTO SCALARE 3.2

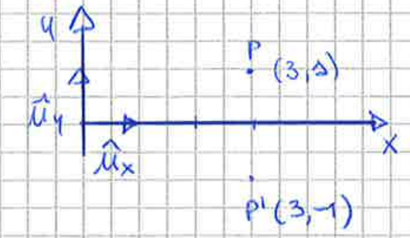
fare riferimento a PDF pag. 2 $\to$ seno coseno

SIMMETRIA RISPETTO AD UNA RETTA 3.3

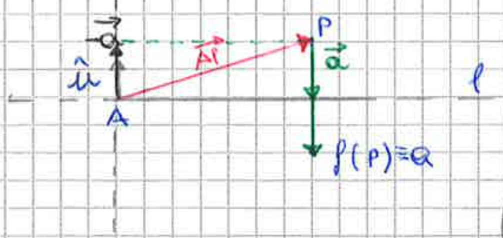


$\rightsquigarrow$ $f(x,y) = (x, -y)$ per la retta $y = 0$

es:



e se voglio sapere la simmetria di P rispetto ad l? (Senza SR)



$Q = 2\vec{a} + P$

$-\vec{a} = (\vec{AP} \cdot \hat{u}) \cdot \hat{u}$

$Q = P - 2(\vec{AP} \cdot \hat{u}) \cdot \hat{u}$

ho un meno perché è con verso opposto rispetto ad $\vec{a}$

MATRICI 3.6

$A(a_{ij}) = (a_{RC})$ RC = riga-colonna = entrate

- matrici 1xn → sono le righe di n colonne
- matrice identica = identità = quadrata con gli 1 nella diagonale

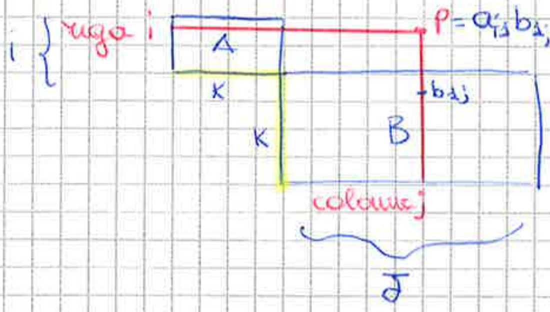
$$7\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = 7a + 7b,\ 7c + 7d = \begin{bmatrix} 7a & 7b \\ 7c & 7d \end{bmatrix}$$

PRODOTTO MATRICIALE 3.9

$$A \cdot B = \sum_{s=1}^{k} a_{is} b_{sj}$$

→ il numero di colonne di A deve essere uguale al n° di righe di B

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$



$p = a_{1j} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{ik} \cdot b_{kj}$

b_{1j}

→ $A \times B = R^{i \times j}$

es: 3.9.1

$A = [1, 0, -3]$ $B = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix}$ → $A \cdot B =$

$\boxed{1\ 0\ -3} \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix} = 2 + 0(-5) + 4(-3) = 2 - 12 = -10$

$A \cdot B = [-10] \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix} [1\ 0\ -3] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -6 \\ -5 & 0 & +15 \\ 4 & 0 & -12 \end{bmatrix}$$

$B \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$, $A \in \mathbb{R}^{1 \times 3}$ → $B \cdot A = \mathbb{R}^{3 \times 3}$

MERCOLEDÌ 21 MARZO 2018

ESERCIZIO 1

$\vec{u} = 3\hat{u}_x - 2\hat{u}_y - 2\hat{u}_z$

$$\ell \begin{cases} 2x+y-z+3=0 & \alpha \longrightarrow \vec{N}(2,1,-1) \\ x-y+1=0 & \alpha' \longrightarrow \vec{N}'(1,-1,0) \end{cases}$$

$$\vec{v} = \vec{N}\times\vec{N}' = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = u_x\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + u_y\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + u_z\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -\hat{u}_x - \hat{u}_y - 3\hat{u}_z$$

$\hookrightarrow \vec{v}(-1,-1,-3)$

$$\vec{u}_{\parallel} = (\vec{u}\cdot\vec{v})\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} = (3,-2,-2)\cdot(-1,-1,-3)\cdot\frac{1}{11}(-1,-1,-3) =$$

$$= \left(-\frac{5}{11}; -\frac{5}{11}; -\frac{15}{11}\right)$$

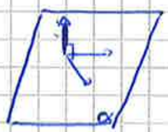
$$\vec{u}_{\perp} = u - u_{\parallel} = (3,-2,-2)+\left(+\frac{5}{11}; \frac{5}{11}, \frac{15}{11}\right)$$

ESERCIZIO 2

$\vec{u} = u_x + u_y + u_z$

$\vec{u}_{\parallel\alpha}$ e $u_{\perp\alpha}$ PROIEZIONI

$$\alpha: \begin{cases} x = 1+t+s \\ y = 1+s \\ z = 3+t \end{cases} \qquad \begin{aligned} \vec{v} &= (1,0,1) \\ \vec{w} &= (1,1,0) \end{aligned}$$



$$\vec{N} = \vec{v}\times\vec{w} = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\hat{u}_x + \hat{u}_y + \hat{u}_z \longrightarrow \vec{N}(-1,1,1)$$

calcolo proiezione su $\vec{N} = \vec{u}_{\perp} = (\vec{u}\cdot\vec{N})\cdot\frac{\vec{N}}{\|\vec{N}\|^2} = (1,1,1)\cdot(-1,1,1)\cdot(-1,1,1)\cdot\frac{1}{\|\vec{N}\|^2}$

$$\|\vec{N}\| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$

$$= \frac{(-1+1+1)(-1,1,1)}{(\sqrt{3})^2} = \left(\frac{-1}{\sqrt{3}^2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$u_{\parallel} = u - u_{\perp}$$

GIOVEDÌ 22 MARZO 2018

MATRICE INVERSA 3.11

$$A \cdot B = C$$

$$B = A^{-1} \cdot C$$

A^{-1} → matrice inversa

Se una matrice non è invertibile si dice SINGOLARE. Per guardare se una matrice è invertibile,
$$\boxed{B \cdot B^{-1} = 1}$$

Se tale condizione non si verifica non posso invertire B.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}}{ad - bc}$$

quindi per poter invertire, il $\det \neq 0 \rightarrow ad - bc \neq 0$

$$\begin{array}{cc|cc} & & d & -b \\ & & -c & a \\ \hline a & b & ad-bc & 0 \\ c & d & 0 & -bc+da \end{array} \rightarrow \det \begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & -bc+ad \end{bmatrix} = (da)^2 - (bc)^2$$

ESERCIZIO 3.4.1

dimostra che $\|\pi(\vec{v})\| = \|\hat{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{v} \times \hat{u}\|$

$\pi(\vec{v})$ → proiez. sul piano

risulta chiaro dal disegno

$$\|\pi(\vec{v})\| = \|\vec{v}\| \, \|\hat{u}\| \sin\theta$$

però $\|\pi(\vec{v})\| = \vec{v} \cdot \cos\theta = \hat{u} \cdot \vec{v}$

$$\|\vec{v} \cos\theta\| = \|\vec{v}\| \, \|\hat{u}\| \sin\theta$$

ESERCIZIO 3.5.1

Sia dato un piano $\pi: x+y+z=1 \to x+y+z-1=0$.

La funzione simmetria rispetto a π:

$$f_x(x,y,z) = x_p - 2\,\frac{mx+ny+qz+c}{m^2+n^2+q^2}\cdot m$$

Variando x con y e z si ottengono le coordinate del punto simmetrico.

Es: $\circ$ $P(1,0,0)$

$$\to f_x(1,1,0) = 1-2\,\frac{\cancel{1}-1}{3}\cdot 1 = 1$$

$$f_y = 0-2\cdot 0 = 0 \quad \to P'(1,0,0)$$

$$f_z = 0$$

$\circ$ $P(0,1,0) \to f(0,1,0) = 0-2\,\frac{0}{3}\cdot 1 = 0$

$\to P'(0,1,0)$

ESERCIZIO 3.8.1

$A = [1,0;0,2]$ a) $A+B+D = [4,0;0,12]$

$B = [5,0;0,7]$ b) $3A+7B-3D = [3,0;0,6]+[35,0;0,49]+[6,0;0,-12]$

$D = [-2,0;0,4]$ c) $x\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}5&0\\0&7\end{bmatrix}+z\begin{bmatrix}-2&0\\0&4\end{bmatrix}$

ESERCIZIO 3.8.2

Sia M_{D_K} una famiglia di matrici diagonali. Se c_s = numero, $\sum_{1=s}^{k} c_s$, dimostra che

$$F = c_1D_1 + c_2D_2 + c_3D_3 + \ldots + c_KD_K = \text{matrice diag.}$$

Considero una generica D_K con $m\times n$ dimensioni

$$D_K = \begin{bmatrix} v_1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & v_2 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & v_3 & \ldots \\ \vdots & & & \ddots \\ & & & v_K \end{bmatrix}$$

So che $c_1\cdot D_{ij}$ = numero che mantiene la sua posizione i,j nella risultante. Inoltre $\forall c$, $c\cdot 0=0$. Quindi le nuove $c_K\cdot D_K = D_{cK}$ saranno matrici diagonali.

Poiché per sommare due matrici,

$D_{1,ij} + D_{2,ij}$ cioè si sommano i numeri che sono nelle stesse posizioni i, j, e poiché tutte le $D_K \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e quindi si possono sommare, la matrice F sarà diagonale

ESERCIZIO 3.9.8

Se $M \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$

$F = D \cdot M$

$F = diag(m_{1,1} \cdot \lambda_1, m_{2,2} \lambda_2, \dots m_{k,k} \cdot \lambda_k)$

MANCA UN PO' CALCOLO

MARTEDÌ 27 MARZO 2018

SISTEMI 4.1

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$A = \text{matrice di coefficienti} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$B = \text{matrice nota} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Quindi, scrivere un sistema di equazioni nella forma $a_1 x_1 + \dots a_n x_n = b$ è uguale a scrivere $A \cdot X = B$

Quindi il prodotto vettoriale tra matrici A, X vale

$$\sum_k a_{1k} \cdot x_k = b_1 \quad \text{con } i = n° \text{ righe}$$

$$\forall_i \sum_k a_{ik} \cdot x_k = b_i$$

ESERCIZIO 4.1.1

$$\begin{cases} 3x+y=0 \\ 3y+x=2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x+y=0 \\ x+3y=2 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$\rightarrow$ il sistema $AX = B \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{array}\right] = [A | B]$

ESERCIZI

$\{ x+2y+3z=0 \quad \rightarrow \quad [\boxed{1}\ 2\ 3]$

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} -2y-3z \\ y \\ z \end{bmatrix} \right\}$$

è come la parametrizzazione di un piano → $y \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2y-3z \\ y \\ z \end{bmatrix}$

↳ = risolvere

ESERCITAZIONE 2 MATLAB — MERCOLEDÌ 28 MARZO 2018

- PRODOTTO PUNTUALE → servono vettori dello stesso tipo e dim. Si inserisce un puntino prima del segno → x.*y fa il prodotto componente × compon.

  u[1 2 3] a[4 5 6]

  u.*a = [4 10 18]

- PRODOTTO MATRICIALE → a*b

ES FPLOT('f', [xmin xmax])

↳ FPLOT('sin(x)', [-pi pi]) = FPLOT(@(x)sin(x), [-pi pi])

PLOT x = -pi; 0,01; pi

y = sin(x)

PLOT (x, y) → se voglio personalizzare → plot (x,y,'--r', 'linewidth', 2)

tratteggio rosso — ↳ più spesso

title('sin(x)')

xlabel ('Asse x')

ylabel ('Asse y')

legend ('sin(x)')

& = AND

| = OR

~ = NOT

xor = OR ESCLUSIVO

```
% passo ad un nuovo script
x=1
tol= 1.0e-10;
[v,i]=extaylor(x,tol)
```

• Quanto vale l'errore relativo associato alla funzione?

$$err\_rel = \frac{|x-\tilde{x}|}{|x|}$$

```
err_rel=abs(exp(x)-v)/abs(exp(x))
```

esercizio cancellazione numerica 1.2

$$y=\frac{e^x-1}{x} \quad con\ x=10^{-n} \quad con\ n=1:16$$

```
% apri editor con control
% clear così pulisco
format long e
n= 1:16;
x= 10.^(-n);
f=(exp(x)-1)./x
[x', f']
```

% risulta cancellazione numerica! Quindi riformuliamo!

```
f_taylor=0
for i= 1:16
    ftaylor= f_taylor+x.^(i-1)/factorial(i);
end
[x', f_taylor']

err_rel= abs(f_Taylor-f)./abs(f_taylor);
[x', f_taylor', err_rel]
plot(x,...)
loglog(x, err_rel)

% l'errore incrementa se ho canc.
```

ESERCIZIO 4.10.1

$$S = \left[\begin{array}{cccc|c} 4 & 4 & 1 & 0 & 16 \\ 8 & 8 & 0 & 1 & 32 \end{array}\right]$$

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 16-4x_1-4x_2 \\ 32-8x_1-8x_2 \end{bmatrix} = \underbrace{x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \\ -8 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \\ -8 \end{bmatrix}}_{V} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 16 \\ 32 \end{bmatrix}}_{P} \right\}$$

LUNEDÌ 9 APRILE 2018

RAPPRESENTAZIONE MONOMIALE

Come si determinano i coefficienti dei monomi?

x_i = nodi di interpolazione

$$P_n(x_i) = y_i$$

$$c_1 x_j^n + c_2 x_j^{n-1} + \dots c_{n+1} 1 = y_i \qquad j = 1, \dots, n+1$$

Matrice Vandermonde = matrice malcondizionata

$$\begin{pmatrix} x_1^n & x_1^{n-1} & \dots & 1 \\ x_2^n & x_2^{n-1} & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n+1}^n & x_{n+1}^{n-1} & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n+1} \end{pmatrix}$$

LAGRANGE

Considero dei nodi distinti x_i con $i = 1, n+1$. Quindi sono $n+1$ nodi

$$\ell_j(x) = \frac{(x-x_1)\dots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\dots(x-x_{n+1})}{(x_j-x_1)\dots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\dots(x_j-x_{n+1})}$$

con $j = 1, \dots, n+1$. Poiché

$$\ell_j(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

$\ell_j(x)$ interpola i dati $(x_1, 0), \dots (x_{j-1}, 0) \dots (x_{j+1}, 0) \dots (x_{n+1}, 0)$

Ho il polinomio $P(n)x = \sum_{j=1}^{n+1} y_j \ell_j(x)$

↓

polinomio di lagrange

→ I polinomi $\ell_j(x)$ di grado n sono detti polinomi fondamentali di lagrange associati ai nodi x_i.

lagrange dimostra l'esistenza del polinomio interpolante. Inoltre è la base delle formule di integrazione e di approssimazioni di problemi differenziali

MERCOLEDÌ 11 APRILE 2018

ESERCITAZIONE

ESERCIZIO 1

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$ trasformo in Echelon e calcolo det(A)

$R_1 \to R_1 - 3R_2$
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -7 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$R_3 \to \frac{1}{2} R_3$
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -7 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$R_1 \to R_1 - R_3$
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -7 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$R_1 \to R_1 \frac{1}{7}(-1)$
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$R_2 \to R_2 - 3R_1$
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

riordino
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\det(A) = \frac{1}{m} \det(mR_i)$

$\det(A) = \det(R_i + R_j)$

$\det(A) = -\det(R_i \leftrightarrow R_j)$

$\det(I) = 1$

$$\det(A) = 2 \cdot (-7)(-1)(-1) \det(I) = -14$$

ESERCIZIO 2

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = 3 \det \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} - 1 \det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

ESERCIZIO 3

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

A^{-1}? se e solo se $\det \neq 0$

$$\det(A) = -1 \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} - 0 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = -3 + 9 = 6 \neq 0 \text{ invertibil}$$

A^{-1}? $\to$
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 3R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right]$$

$R_1 \to 6R_1 + R_3$
$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 6 & 0 & 6 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right]$$

$R_2 \to 2R_2 + R_3$
$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 6 & 0 & 6 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right]$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 43 di 156

RECUPERO LUNEDÌ 26 MARZO 20

APPROSSIMAZIONE DI FUNZIONI

- Trovare delle possibili approssimazioni e valutare la bontà di approssimaz.

Si può scegliere tra: POLINOMI ALGEBRICI → per funzioni continue
TRIGONOMETRICI → per continue e periodiche, SOMME ESPONENZIALI, FUNZIONI DI TIPO SPLINE di ordine n

Le funzioni polinomiali a tratti con derivata continua fino all'ordine n-1 per l'approssimazione di funzioni che avrebbero bisogno di polinomi di grado troppo elevato o che risultano eccessivamente oscillanti.

Si approssima adoperando c.l. di funzioni.

COME SCEGLIERE L'APPROSSIMAZIONE?

- Criterio dell'interpolazione (per funzioni)
- Criterio dei minimi quadrati (per dati).

BONTÀ: guardo la norma!

$$\|f-\tilde{f}\|_\infty := \max_{a\le x\le b} (f(x)-\tilde{f}(x))$$ → la norma è la max differenza/distanza tra f e $\tilde{f}$

voglio quindi che $\lim_{n\to+\infty} \|f-f_n\|_\infty = 0$

ESEMPIO

Siano i dati: $(0,1)$, $(1,-1)$, $(2,1)$, $(\frac{1}{2},2)$. Interpola

```
x = [0 1 2 1/2];
y = [1 -1 1 2];
c = polyfit(x,y, length(x)-1);     % coeff f
z = linspace(min(x), max(x));
p = polyval(c, z);   → MI FA INTERPOLANTE
plot(x,y, z,p);
```

→ mette in p valori che un pol con coeff in c assume in z

LE SPLINE

Costituite da polinomi contigui ciascuno di uno stesso grado d che nei punti di congiunzione hanno la particolarità di essere comunque derivabili. Se ↓ ampiezza intervalli di partizione = ↑ nodi, la funzione converge meglio a quella approssimata. Per ben definire una spline servono delle condizioni: tipo le not-a-knot

per spline: s = spline(x,y,z) → memorizza in s i valori che la spline cubica interpolante i dati definiti in x,y assume in z

Per i minimi quadrati: c = polyfit(x,y,n) → c = coefficienti del polinomio (interpolante i dati x,y) di grado n

ESERCIZIO 5

$$\begin{cases} Kx + y - z = 2 \\ -Kx + y + (2K-1)z = 2K \\ (K-1)y + z = K^2 - K + 1 \end{cases} \qquad S = \left[\begin{array}{ccc|c} K & +1 & -1 & 2 \\ -K & 1 & (2K-1) & 2K \\ 0 & (K-1) & 1 & K^2-K+1 \end{array}\right]$$

$$R_2 \to R_2 + R_1 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} K & +1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2K-2 & 2K+2 \\ 0 & K-1 & 1 & K^2-K+1 \end{array}\right]$$

$$R_2 \to \tfrac{1}{2} R_2 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} K & +1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & K-1 & K+1 \\ 0 & K-1 & 1 & K^2-K+1 \end{array}\right]$$

$$R_3 \to R_3 - (K-1)R_2 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} K & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & K-1 & K+1 \\ 0 & 0 & 1-(K-1)^2 & -K+2 \end{array}\right] \qquad K(2-K) \neq 0,\ K \neq 0 \quad K \neq 2$$

TEOREMA R-CAPELLI DEI RANGHI

- se $K=0 \to \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right] \to \rho(A) = 1$ ma $\rho(\text{completa}) = 3$
  $\to \nexists$ soluzioni per $K=0$

- se $K=2 \to \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \rho(A) = 2$ ma $\rho(\text{completa}) = 2$
  $\to$ sist compatibile, $\exists$ soluzioni con K:
  $\infty^{n-\rho(A)} = \infty^{3-2} = \infty^1$

$$\begin{cases} 2x + y - 1z = 2 \\ y + z = 3 \to y = 3 - z \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 3 - z - z = 2 \\ y = 3 - z \end{cases} \to \begin{cases} x = z - \tfrac{1}{2} \\ y = 3 - z \end{cases} \to S_{(K=2)} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} z - \tfrac{1}{2} \\ 3 - z \\ z \end{bmatrix} \right\}$$

- se $K \neq 0$ e $K \neq 2 \to \begin{cases} Kx + y - z = 2 \to x = \frac{2-K}{K} \\ y + (K-1)z = K+1 \to y = K+1 - \frac{K-1}{K} = \frac{K^2+1}{K} \\ K(2-K)z = -K+2 \to z = \frac{1}{K} \end{cases}$

$$S_{(K \neq 0 \wedge K \neq 2)} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} (2-K)/K \\ (K^2+1)/K \\ 1/K \end{bmatrix} \right\}$$

Quiz 3

$(1,1,-1)$ soluzione di

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+2y+2z=0 \\ x+y=1 \end{cases}$$

é falso che:

1. $\rho(A)=\rho(A|B)$ VERA
2. unica soluzione VERA
3. 3 soluzioni FALSA 0 1 o ∞ o nessuno
4. $\cap$ di 3 piani VERA

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad A|B=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

$$R_1 \to R_1-R_3 \to \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

Esercizio 5.4.1

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \to \frac{R_2}{-4}} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \to \frac{R_1}{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esercizio 5.4.3

Matrici Echelon in $\mathbb{R}^{3\times 1}$

$$A_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad A_2=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ \log 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{R_2}{2}\ \frac{R_3}{\log 2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{⑤}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

In ogni modo, in $\mathbb{R}^{4\times 1}$ ho sempre solo 2 Echelon

ESERCIZIO 5.9.1

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \text{voglio } A^{-1} \longrightarrow A = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

no $\left\{ \xrightarrow{R_1 \to R_1 - R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 5R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ -10 & 2 & 0 & -5 & 1 & +5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \right\}$ no

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 : 2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/3 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 5R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & -5/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2/2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & -5/6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/3 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \to R_1 - 3R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & -5/6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1/2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & -5/6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/3 \end{array}\right] \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & -5/6 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

ESERCIZIO 5.9.2

Se una matrice $A = \text{diag}(a_1, a_2, \dots a_n)$, per ridurla ad Echelon dovrò dividere ciascuna riga $R_1, R_2, R_3, \dots, R_n$ per il corrispondente valore $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ unico valore non nullo della riga. Poiché

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} a_1 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots a_n \end{bmatrix} \quad \text{se } R_i \to nR_1 \text{ allora } \det(A) \Rightarrow \frac{1}{n} \det(A)$$

cioè se divido per un numero la riga i-esima della matrice il det (A) si moltiplica per quel numero (5),

$$R_1 \to \frac{R_1}{a_1}, \quad R_2 \to \frac{R_2}{a_2}, \quad \dots \quad R_n \to \frac{R_n}{a_n}, \quad \det(A) = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n$$

cioè il det(diag) = prodotto tra valori della diagonale

ESERCIZIO 5.10.1

Dimostrare che se B non è invertibile allora X·B non è invertibile.
Considero det(X·B) con B supposto fisso.

$$\det(X\cdot B) = m \det(X\cdot B)$$

$$X=1, \quad \det(X\cdot B) = \det(B)\det(X)$$

quindi se $\det(B)=0$ quindi B non invertibile,

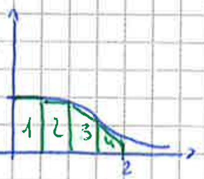
$$\det(X\cdot B) = 0\cdot\det(X) = 0 \rightarrow X\cdot B \text{ non invertibile}$$

LUNEDÌ 16 APRILE 2018

CALCOLO NUMERICO: FUNZIONE DEGLI ERRORI → erf

Si usa quando non posso procedere analiticamente

$$\int_0^2 e^{-t^2}dt \rightarrow erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt$$



Posso interpolarla con una spline lineare S_1 a tratti.
Adesso posso usare la poligonale interpolante

$$\int_0^2 f\,dx = \int_0^2 S_1 = \sum_1^4 A_{trapezi}$$

Di per sé, è una somma dei trapezi che si delineano. → METODO DEI TRAPEZI

$$t = trapz(x,y) \quad \rightarrow x = x_i, \quad y = f(x_i) = y_i$$

mi fornisce in output l'approssimazione dell'integrale. Se poi calcolo
erf(2) = errore calcolato da matlab
Aumentando il numero di nodi mi diminuisce l'errore (dei ↓ ampiezza partiz
È un esempio di FORMULA DI INTEGRAZIONE → formula numerica per approssimare gli integr

TABELLA PAG 55 SLIDE APPROSSIMAZIONE

con polyfit ottengo un polinomio di 3 grado (se ho 4 valori)

$$(C_1)t^3 + (C_2)t^2 + (C_3)t + C_4 = 39°C$$

Voglio capire in che istante otterrò una temperatura di 39°C. Calcolo
t con il comando r = roots(C) dove C = vettore dei coefficienti. Ottengo
r = radici del polinomio. Il vettore coeff. non deve saltare posizioni!

$$C = [C_1, C_2, C_3, C_4^*] \quad \text{con } C_4^* = C_4 - 39°C$$

Se il polinomio $P = t^3 + 2t + 1 = 0 \rightarrow C = [1, 0, 2, 1]$

Una matrice si dice A^{-1} = INVERSA se

$$A^{-1}A = AA^{-1} = 1$$

la trasposta di una matrice ortogonale è uguale a quella diagonale

MATRICE DOMINANTE PER RIGHE

$$|a_{ii}| > \sum |a_{ij}|$$

esempio

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & -7 & 1 \\ 3 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

$|4| > (|1| + |-1|) \longrightarrow 4 > 2$

$|-7| > (|2| + |1|) \longrightarrow 7 > 3$

$|9| > |3| + |2| \longrightarrow 9 > 5$

devi guardare che l'elemento sulla diagonale in valore assoluto sia più grande della somma del resto della riga

Idem se: DOMINANTE PER COLONNE

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 1 & -1 \\ 2 & -7 & 1 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$9 > 5 \quad 7 > 3 \quad 4 > 2$

CONDIZIONAMENTO DI UN SISTEMA LINEARE

Perturbo i dati A e B → $\bar{a}$ e $\bar{b}$. Cambia il risultato

$$Ax = B \rightarrow x = \frac{B}{A}$$

$$\rightarrow x \neq \bar{x}$$

$$\bar{a}\bar{x} = \bar{b} \rightarrow \bar{x} = \frac{\bar{b}}{\bar{a}}$$

Ma se $A \approx \bar{A}$ e $B \approx \bar{B}$, $x \approx \bar{x}$ se il problema è ben condizionato:

$$\boxed{\frac{\|x-\bar{x}\|}{\|\bar{x}\|} \leq 2K(A)\left(\frac{\|b-\bar{b}\|}{\|b\|} + \frac{\|A-\bar{A}\|}{\|A\|}\right)}$$

con $K(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ → NUMERO DI CONDIZIONAMENTO

se $K(A) \approx 1$ → pbc e $x \approx \bar{x}$

se $K(A) \gg 1$ → pmc e $x \not\approx \bar{x}$

↳ a piccole perturbazioni dei dati possono corrispondere grandi perturbazioni

errore su $x \leq 2K \cdot$ (somma errori su A e B)

ESERCIZIO 6.4.3

$A, B \in \mathbb{R}^{4\times 4}$, A e B sono equivalenti per righe se e solo se $ri(A) = ri(B)$. dimostra

Per essere equivalenti per righe, ciascuna riga deve essere combinazione lineare di altre $R_2 = R_2 + cR_3$ per esempio.
Ma la definizione di $ri(A) = L(A_1, A_2, \dots, A_n)$ dove A_1, A_2, A_n sono combinazioni lineari l'una dell'altra. Quindi se $ri(A) = ri(B)$, A e B sono equivalenti per righe

ESERCIZIO 6.4.2

Verificare che $L(\cos(x), \cos(3x), \cos(7x))$ e' sottospazio di $C^0(\mathbb{R})$ ($\to$ insieme delle funzioni continue da $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$)
Affinché L sia sottospazio, cos x, cos 3x e cos 7x devono $\in$ a $C^0(\mathbb{R})$.
Però cos 3x e cos 7x sono combinazioni lineari? Basta tuttavia notare che

$$\left.\begin{array}{l}\cos x\\ \cos 3x\\ \cos 7x\end{array}\right\} \text{ sono funzioni continue quindi } \in C^0(\mathbb{R})$$

$f = u\cdot\cos x + w\cos 3x + w\cos 7x$ e' continua quindi $\in C^0(\mathbb{R})$
$\to$ $L(f)$ e' un sottospazio di $C^0(\mathbb{R})$

ESERCIZIO 6.4.17

$$\ell: \begin{cases} x - 3z + 2 = 0 \\ 7y + 5z - 1 = 0 \end{cases} \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 7 & 5 & -1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 7 & 5 & 1 \end{array}\right]$$

trovare B affinché $im(B) = ker(L) \to L\cdot B = 0$

ℓ sarà poi nella forma $\ell: t\begin{bmatrix} b_{11}\\ b_{21}\\ b_{31}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{12}\\ b_{22}\\ b_{32}\end{bmatrix}$

$$\ell: \begin{bmatrix} -2+3z \\ \frac{1-2z}{7} \\ z \end{bmatrix} = z\cdot\begin{bmatrix} 3 \\ -5/7 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 1/7 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\to$ devo trovare $L\cdot B = 0$

$$\ell: \begin{bmatrix} 3z - 2t \\ -\frac{5z - 3t}{7} \\ z \\ t \end{bmatrix} = z\cdot\begin{bmatrix} 3 \\ -5/7 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -2 \\ -3/7 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -5/7 & -3/7 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
for i=n-1:-1:1        -> da n-1 a 1 con passo -1
    s=0;
    for j=1+i:n                oppure
    s=s+A(i,j)*x(j);           s=A(i,i+1:n)*x(1+i:n)
    end
  x(i)=(b(i)-s)/A(i,i);
end
```

Se la matrice è triangolare inferiore → SOSTITUZIONE IN AVANTI

SISTEMI GENERICI

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = b_3 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = b_4 \end{cases}$$

Posso risolverlo con il metodo di riduzione di Gauss → costo $\frac{n^3}{3}$

O con Cramer → costo $(n+1)!$

Quindi con Gauss ci metto molto di meno → Cramer non si usa

Come si usa Gauss con il calcolo numerico su matlab?

Si parte da $Ax=b$ con $n-1$ trasformazioni (qui 3) ottengo

$Ux=\tilde{b}$ un sistema equivalente. U = triangolare superiore

$x=?$ Con risoluzione di sostituzione all'indietro

1° passaggio → elimino x_1 dalla 2ª, 3ª, 4ª eq.

2° passaggio → elimino x_2 dalla 3ª, 4ª eq

3° passaggio → elimino x_3 dalla 4ª eq

Come si fa il primo passaggio? Considero la i-esima e la prima riga

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + a_{i4}x_4 = b_i$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1$$

Moltiplico la 1ª riga per $\frac{a_{i1}}{a_{11}} = m_{i1}$

$$\rightarrow \frac{a_{i1}}{a_{11}}\left(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1\right)\frac{a_{i1}}{a_{11}}$$

sottraggo poi la 1ª riga con la i-esima

$$\rightarrow \cancel{0x_1} + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + a_{i4}x_4 = b_i \rightarrow \text{nuova i-esima riga}$$

ESERCIZIO 3

$\mathcal{U} = \mathcal{L}[(1,1,K),(K,1,2-K),(K+1,2,K+1)]$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & K \\ K & 1 & 2-K \\ K+1 & 2 & K+1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 = R_3-(K+1)R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & K \\ K & 1 & 2-K \\ 0 & 1-K & 1-K^2 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \to R_2 - KR_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 & K \\ 0 & 1-K & 2-K-K^2 \\ 0 & 1-K & 1-K^2 \end{bmatrix} \quad R_3 \to R_3 - R_2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & K \\ 0 & 1-K & 2-K-K^2 \\ 0 & 0 & -1+K \end{bmatrix}$$

$\rho(A) = 3$ se $-1+K \neq 0$ $\to$ quindi i tre vettori sono LI

$\rho(A) = 1$ se $K = 1$ $\to$ quindi sono LD

ESERCIZIO 4

$\mathcal{U} = \mathcal{L}[(1,1,K),(K+1,2,2),(2-K^2,1,K)]$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & K \\ K+1 & 2 & 2 \\ 2-K^2 & 1 & K \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 = R_2 - (K+1)R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & K \\ 0 & -K+1 & 2-K^2-K \\ 2-K^2 & 1 & K \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 = R_3 - R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & K \\ 0 & -K+1 & 2-K^2-K \\ 1-K^2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

se $K = 1 \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \rho(A) = 1$ e sono LD

se $K \neq 1 \to \rho(A) = 3$ e sono LI

oppure $\begin{cases} R_3 \to R_3 - R_1 \\ R_2 \to KR_2 - 2R_1 \end{cases} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & K \\ K^2-K-2 & 2K-2 & 0 \\ 1-K^2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

3) oppure $\mathcal{L}(v_1, v_2) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\}$

$$a\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a\\a\\b\end{bmatrix} \quad x = y$$

quindi affinché $w \in \mathcal{L}$ devo avere $x = y$, ma $1 \neq -1$ quindi non può essere! $w \notin \mathcal{L}$

ESERCIZIO 6

Dato lo spazio $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ y = 2x\}$
$W = \mathcal{L}[(1,1,0), (-1,0,1)]$

a) $V \cap W \to \{v \in \mathbb{R}^3 : u \in V \text{ e } u \in W\}$

b) $V + W \to \{u \in \mathbb{R}^3 : u = av + bw, \ v \in V \wedge w \in W\}$

la somma è diretta? Cioè $V \cap W = 0$?

a) voglio scrivere $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : a\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}\}$

$$\begin{cases} x = a - b \\ y = a \\ z = b \end{cases} \to \begin{cases} x = y - z \\ y = a \\ z = b \end{cases}$$

$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R} : \ x = y - z\}$

Adesso che sono in forma implicita faccio $W \cap V$

$$\begin{cases} y = 2x \\ x - y + z = 0 \end{cases} \to \begin{cases} y = 2x \\ x - 2x + z = 0 \end{cases} \to \begin{cases} y = 2x \\ x = z \end{cases}$$

lo spazio è del tipo $\begin{bmatrix}x\\2x\\x\end{bmatrix} = x\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$

$\to V \cap W : \{(x,y,z) \in \mathbb{R} : y = 2x, \ z = x = \mathcal{L}(1,2,1)\}$

b) cerco di riscrivere V

$$y = 2x \to \begin{bmatrix}x\\2x\\z\end{bmatrix} = x\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix} + z\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$V = \mathcal{L}[(1,2,0), (0,0,1)]$

siccome so che $V + W \in \mathbb{R}^3$ avrò almeno un vettore di troppo

$$\begin{bmatrix}1&1&0\\-1&0&1\\1&2&0\\0&0&1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&2&0\\0&0&1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\1&2&0\\0&0&1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

ATTENZIONE! TEOREMA 4.3.1

Due basi di uno stesso spazio vettoriale V hanno lo stesso numero di vettori

$$A(v_1, v_2) \qquad B(w_1, w_2, w_3)$$

Consideriamo $\mathcal{B}$, la base ha sicuramente almeno un vettore k = comb. lineare. Quindi $w_1, w_2, w_3 = LD$. Però per hp i generatori sono LI. Se $V \in \mathbb{R}^2$, ho quindi dimostrato che $\dim(A) = \dim(B)$

ESERCIZIO 1.6.4

$\vec{w}(1,1,1)$ trovare le proiezioni su $\vec{v_1}(1,0,1)$, $\vec{v_2}(0,1,1)$, $\vec{v_3}(2,0,-2)$

$$\vec{p_1} = (\vec{w} \circ \vec{v_1}) \cdot \frac{\vec{v_1}}{\|\vec{v_1}\|} = (1+1) \cdot \frac{\vec{v_1}}{\sqrt{3}} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, 0, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\vec{p_2} = (\vec{w} \cdot \vec{v_2}) \cdot \frac{\vec{v_2}}{\|\vec{v_2}\|} = (1+1) \cdot \frac{\vec{v_2}}{\sqrt{2}} = \left(0, \frac{2}{\sqrt{2}}, \frac{2}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\vec{p_3} = (\vec{w} \cdot \vec{v_3}) \cdot \frac{\vec{v_3}}{\|\vec{v_3}\|} = (2+0-2) \cdot \frac{\vec{v_3}}{\|\vec{v_3}\|} = (0,0,0)$$

ESERCIZIO 6.4.9

$W = \mathrm{im}(B) = \mathrm{Ker}(A)$

Verifico che A^T soluzione di $B^T \cdot A^T = 0$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} \to W = \mathrm{im}(B) = \left\{ \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ b_{32} \end{bmatrix} \right\}$$

$$B^T = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} \end{bmatrix} \cdot A^T = 0 \qquad \text{quindi } B^T \cdot X = 0$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} b_{11} & b_{21} & b_{31} & 0 \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & b_{21}/b_{11} & b_{31}/b_{11} & 0 \\ \frac{b_{12}}{b_{22}} & 1 & b_{32}/b_{22} & 0 \end{array}\right]$$

$$\frac{b_{21}}{b_{11}} = c_1$$

$$\frac{b_{31}}{b_{11}} = c_2$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{b_{21}}{b_{11}}y - \frac{b_{31}}{b_{11}}z \\ -\frac{b_{12}}{b_{22}}x - \frac{b_{32}}{b_{22}}t \\ z \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 0 \\ c_1 = -\frac{b_{12}}{b_{22}} \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -\frac{b_{21}}{b_{11}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^{c_2} + z \begin{bmatrix} -\frac{b_{31}}{b_{11}} \\ -\frac{b_{32}}{b_{22}} \\ 1 \end{bmatrix}^{c_3} c_4$$

ESERCIZIO 7.2.1

$C(e_1, e_2, e_3)$ base canonica di $\mathbb{R}^3$ $\quad C = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$

$B(v_1, v_2, v_3)$ base dove $v_1(1,1,1)$

$v_2(0,1,1)$

$v_3(0,0,1)$

$B[v_1] = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ $\qquad C[v_1] = 1 \cdot e_1 + e_2 \cdot 1 + 1 \cdot e_3 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$

$B[v_2] = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ $\qquad C[v_2] = \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$

$B[v_3] = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ $\qquad C[v_3] = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$

$B[e_1] = (v_1 - v_2 = e_1) \to \begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$

$B[e_2] \to e_2 = v_2 - v_3 \to \begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$

$B[e_3] \to e_3 = v_3 \to \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$

Se, in generale, $B[e_1] = \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$ so che $e_1 = x \cdot v_1 + y \cdot v_2 + z \cdot v_3$

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = x\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} + z\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

risolvo poi $\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 1\\1 & 1 & 0 & 0\\1 & 1 & 1 & 0\end{array}\right]$

Se $w = e_1 + v_1 - v_3$, quanto vale $B[w]$=?

devo riscrivere $e_1 = v_1 - v_2$

quindi $w = v_1 - v_2 + v_1 - v_3 = 2v_1 - v_2 - v_3 \to B[w] = \begin{bmatrix}2\\-1\\-1\end{bmatrix}$

MERCOLEDÌ 2 MAGGIO 2018

ESERCITAZIONE CALCOLO

$K(A)$ = n° di condizionamento = $\|A\| \cdot \|\bar{A}\| = \|A\bar{A}\| = \|I\| = 1 \to K(A) \geq 1$

ESERCIZIO 3.1 n

```
clc
clear all
closeall
format long e                    i=1;
# definisci una matrice Hilbert con n=5,10,15 e chiamala A
n=5,  ->  for n=5:5:15,
A=hilb(n);
# imponi, se Ax=b, una colonna dei termini noti affinché x=unitario
# Quindi b1= a11+a12+a13...  , b2= a21+a22+a23 ...  , somma per righe
b=sum(A,2);  -> il 2 serve per farlo per righe - sum(A) = per colonne
# oppure  b=sum(A')  o  b=A*ones(n,1).
x=A\b;
# adesso calcolo numero di cond. inf=norma infinito
Kinf=cond(A,inf)         Kinf(i);
# calcola errore relativo. Prima faccio vettore unitario nx1
xc=ones(n,1);
err=norm(v-x,inf)/norm(xc,inf)   -> err(i)
i=i+1;
end
```

questo perché l'errore relativo $= \frac{\|x-\bar{x}\|}{\|x\|} \leq 2K(A)\cdot\left(\frac{\|A-\bar{A}\|}{\|A\|} - \frac{\|b-\bar{b}\|}{\|b\|}\right)$

```
# Per evitare di rifarlo ogni volta faccio un for *
# aggiungo un indice i;
# faccio i trasposti così viene in riga
[Kinf' err']
```

ESERCIZIO 3

Creare una matrice A di n=100 con $a_{ij} = i * \max(i, j)$. Con fatt. LU calcolo A^{-1}

$PA = LU$ calcolo inversa $(PA)^{-1} = (LU)^{-1}$

$A^{-1} P^{-1} = U^{-1} L^{-1}$

$A^{-1} = U^{-1} L^{-1} P$ costo n^3 #

```
clc
clear all
close all
n=100;
for i=1:n
    for j=1:n
        A(i,j)= i*max(i,j);
    end
end
#calcolo determinante
determinante=det(A)

#per fattoriz, per inversa di A=inversa_c
[L,U,P]=lu(A);
inversa_c = inv(U)*inv(L)*P;

#confrontola con il comando inv(A);
inversa=inv(A);
#guardo gli errori

err = norm(inversa-inversa_c, inf)/norm(inversa, inf)
```

Poiché errore < $\frac{eps}{2}$ cioè precisione di macchina, inversa_c è affidabile

ESERCIZIO 5.1.6 PAG 72

Ho un sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato da $v_1(2,-1,0,0)$
$v_2(2,-1,2,1)$
$v_3(0,2,1,-1)$
$v_4(0,2,3,0)$
$v_5(1,0,1,2)$

$$A = \begin{array}{c} v_1 = \\ v_2 = \\ v_3 = \\ v_4 = \\ v_5 = \end{array} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & \cancel{0} & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$\rightarrow B(v_1, v_2, v_3, v_5) \rightarrow \rho(A) = 4 = \dim(\text{sottospazio}) = \dim(W)$

ESERCIZIO 5.2.1 PAG 72

trovare una base di $W = \mathcal{L}(v_1, v_2, v_3) \subseteq V$ con V = sottospazio di $C^\infty(\mathbb{R})$ avente per base $B = (\log(1+t^2), t, t^3)$ se

$v_1 = 3\log(1+t^2) - t$

$v_2 = t^3 - 4t$

$v_3 = t^3 + 2\log(1+t^2)$

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ -14 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

M ha rango $3 \rightarrow$ ~~B(~~ $B(v_1, v_2, v_3) = B((2,0,1), (3,-1,0), (14,0,0))$

ESERCIZIO 5.2.2

V = spazio vettoriale dei polinomi di grado $\leq 3 \rightarrow$ ~~R~~ $P_4[x]$

W = sottospazio $V = \mathcal{L}(p_1, p_2, p_3)$

$p_1 = 1 + x^2$

$p_2 = 2 + tx + 2x^2 + tx^3$

$p_3 = 1 + (1+t)x + x^2 + 2tx^3$

calcola $\dim(W)$ se varia t

- Inizio osservando che $\dim V = 3+1 = 4$. Posiziono coeff dei p_i in una M

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & t & 2 & t \\ 1 & 1+t & 1 & 2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & t & 0 & t \\ 0 & 1+t & 0 & 2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & t & 0 & t \\ 0 & 1-t & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

se $t = 0$, $\dim(W) = 2$

se $t = 1$, $\dim(W) = 2$

se $t \neq 0 \wedge t \neq 1$, $\dim(W) = 3$

ESERCIZIO 8.1.1 PAG 57

$v_1 = (1,2,0)$
$v_2 = (1,0,1)$
$v_3 = (2,1,1)$
$v_4 = (0,1,0)$

$\in \mathbb{R}^3$ sono L.I.?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{1} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

i vettori sono L.D. però, considerando solo v_1, v_2, v_4, sono L.I.
Quindi v_1, v_2, v_3, v_4 non sono basi di $\mathbb{R}^3$. Però
$B(\mathbb{R}^3) = (v_1, v_2, v_4) \rightarrow$ sono generatori di $\mathbb{R}^3$ perché L.I.

ESERCIZIO 8.1.2 PAG 57

$v_1(1,0)$
$v_2(0,1)$ $\in \mathbb{R}^2$
$v_3(1,1)$

possono essere $B(\mathbb{R}^2)$?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{vedo che } v_3 = \lambda(v_1, v_2) = v_1 + v_2$$

Quindi sono L.D. e non possono $\in B(\mathbb{R}^2)$. Inoltre sono $3 > \dim(\mathbb{R}^2) = 2$

ESERCIZIO 8.1.4 PAG 57

$v_1(1,2,0)$ $v_2(1,1,1)$ $v_3(1,3,-1)$ sono una $B(\mathbb{R}^3)$?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Di sicuro v_1 e v_2 sono L.I. Ma v_3?

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + y = 3 \\ y = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 \\ 4 - 1 = 3 \\ y = -1 \end{cases}$$

$\rightarrow$ i sistemi sono compatibili quindi v_3 è c.l. v_1 e v_2
$v_3 = 2v_1 - 1v_2$

$\rightarrow v_1, v_2, v_3$ <u>non</u> sono una base di $\mathbb{R}^3$ poiché L.D. Però v_1 e v_2 sono generatori di un sottospazio W di $\mathbb{R}^3$ con $\dim(W) = 2$

ESERCIZIO 8.2.3 PAG 59

$v_1 = (1,0,0,1)$
$v_2 = (2,0,0,1)$
$v_3 = (4,0,0,3)$ $\in \mathbb{R}^3$ Ho due sottospazi $\begin{cases} V = \mathcal{L}(v_1, v_2, v_3) \\ W = \mathcal{L}(w_1, w_2) \end{cases}$
$w_1 = (1,2,0,0)$
$w_2 = (1,1,0,0)$

Trova una base di $V+W \rightarrow$ metodo scarti

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{pmatrix}$$

$B(W+V) = (v_1, v_2, w_1) \in \mathbb{R}^3 \rightarrow \dim(V+W) = 3$

Per sapere se $V+W$ è una somma diretta, faccio $W \cap V$ o
$\dim(V+W) \neq \dim V + \dim W$
Se la disuguaglianza → non è somma diretta.

Ho $V \oplus W$ o $V+W$?

$\dim(V) = 2$ $\quad \dim(W) = 2$

$\dim(V+W) = 3 \neq \dim(V) + \dim(W) = 4$

la somma non è diretta

ALESSANDRA FERRERA
ANNO ACCADEMICO 2017/2018
GEOM. E ALGEBRA LINEARE
QUADERNO N° 2

FATTORIZZAZIONE CHOLESKI

Supponiamo che A = simmetrica definita positiva

$$A = R^T R \qquad \text{costo: } \frac{n^3}{6}$$

senza pivoting parziale! R = matrice triangolare superiore con elementi positivi sulla diag principale

Con L = triangolare inferiore con diag > 0:

$$A = L \cdot L^T$$

$$L \cdot L^T = R^T \cdot R$$

E' utile usare R perché matlab me lo restituisce con un comando chol(A)

APPLICAZIONI DI CHOLESKI

1) $Ax = b$ A = simm pos., R = noto

$\underbrace{R^T R x}_{y} = b$

$R^T y = b \rightarrow$ ottengo $y = Rx \rightarrow$ ricavo x con "\"

costo: n^2

Se non conosco R → chol(A) → costo: $\frac{n^3}{6} + \cancel{n^2}$ trascuro

2) voglio calcolare $A^{-1} = ?$ A = simm definita pos

$A = R^T R$, faccio

$A^{-1} = (R^T R)^{-1} = R^{-1} (R^T)^{-1}$ ricordati di scambiarle

ma $R^{-1} (R^T)^{-1} = R^{-1} (R^{-1})^T$

su matlab $R_1 = inv(R)$;

inversa A = $R_1 * R_1'$ → // $R_1 \cdot R_1^T$

3) calcolo di det(A) ? A = simm. def. pos.

$A = R^T R$ → $\det(A) = \det(R^T) \det(R) = \prod r^T_{ii} \cdot \prod r_{ii} = \prod r_{ii}^2$

prodotto elem diag

Quindi $\det(A) = (\text{prodotto elementi diagonale di } R)^2$

ESERCITAZIONE

ESERCIZIO 1

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \qquad (x,y,z) \to (x+2y+z, y+z)$

Base canonica $\quad C_3 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$
$\quad C_2 = \{(1,0),(0,1)\}$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Qual è la matrice della base rispetto a C_3 e C_2?

$f(e_1) = (1,0) \qquad {}_{C_2}[f(e_1)]$
$f(e_2) = (2,1)$
$f(e_3) = (1,1)$

voglio $\quad {}_{C_2}[f(e)]_{C_3} \to {}_{C_2}[f(e_1)] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

${}_{C_2}[f(e_2)] = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = M$

${}_{C_2}[f(e_3)] = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Iniettività: $\quad Ker(f) = \{0\}$
Sur: $\quad dim(im(f)) = dim\ W$

TEOREMA RANGO

$dim(im(f)) = \rho(M) = 2$
$dim(Ker(f)) = dim\ \mathbb{R}^3 - dim\ \rho(M) = 3 - \rho(M) = 1$

la funzione è suriettiva ($dim(Im\ f) = dim\ \mathbb{R}^2$) ma non iniettiva

Calcola l'immagine di $f(w)$ dove $(2,1,3)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}$$

l'immagine posso anche trovarla sostituendo w in f

Calcola la controimmagine $f^{-1}(w) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x,y,z) \to (7,4)\}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix} \to \begin{cases} x+2y+z = 7 \\ y+z = 4 \end{cases}$$

$\to$ È come calcolare $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right]$

$R_2 \to R_2 + R_1$

$R_3 \to R_3 + 2R_4$

$R_3 \to R_3 + 4R_1$ $\quad \to$ ottengo coeff. $\quad a_1 = 1 \quad a_2 = -1 \quad a_3 = 1 \quad a_4 = 0$

$R_3 \to R_3 - 4R_2$

$e_1 = v_1 - v_2 + v_3 \qquad f(e_1) = f(v_1) - f(v_2) + f(v_3) = v_1 - v_3 - v_1 + v_3 + v_1 = v_1$

$e_2 = v_3 - 2v_4 \qquad f(e_2) = f(v_3) - 2f(v_4) = v_1 + 2\cdot 0 = v_1$

$e_3 = \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_4 \qquad f(e_3) = f(\frac{1}{2}v_1) + \frac{1}{2}f(v_4) = \frac{1}{2}(v_1 - v_3) + 0 = \frac{1}{2}v_1 - \frac{1}{2}v_3$

$e_4 = v_4 \qquad f(e_4) = f(v_4) = 0$

$$_{C_4}[f(\;)]_{C_4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -\frac{3}{2} & 0 \end{bmatrix} = R \to \rho(R) = 2$$

$\frac{1}{2}v_1 - \frac{1}{2}v_3$

$$_B[f]_{C_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Base $Ker(f)$ e di $im(f)$?

$\dim(im(f)) = 2$ non e' suriettiva

$\dim(Ker(f)) = 4 - 2 = 2$ non e' iniettiva

$im(f) = \mathcal{L}\{(0,0,2,-1), (0,-\frac{1}{2},1,-\frac{3}{2})\}$

$Ker(f) \to f(x,y,z,t) = 0$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -\frac{3}{2} & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \to R_3 + 2R_4} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{-\frac{1}{2}} & \cancel{0} \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & -\frac{3}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -2z = 0 \\ -x - y - \frac{3}{2}z = 0 \end{cases} \to \begin{cases} z = 0 \\ -x - y = 0 \end{cases} \to \begin{cases} z = 0 \\ x = -y \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} -y \\ y \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad Ker(f) = \mathcal{L}\{(-1,1,0,0), (0,0,0,1)\}$$

ESERCIZIO 4

Spazio dei polinomi $\mathbb{R}_3[x] = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3\}$ dim = 4
sulla base $B = \{1, x, x^2, x^3\}$

$\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$

Calcolare matrice derivata seconda

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2}$$

$${}_B[f]_B = {}_B[f(1)] + {}_B[f(x)] + {}_B[f(x^2)] + {}_B[f(x^3)]$$

$f(1) = 0 \to (0,0,0,0)$
$f(x) = 0 \to (0,0,0,0)$
$f(x^2) = 2 \to (2,0,0,0)$
$f(x^3) = 6x \to (0,6,0,0)$

$\downarrow$
derivate seconde

$${}_B[f]_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La funzione non è né iniettiva né sur.

$\dim(\mathrm{im}(f)) = 2 \neq 4$
$\dim(\mathrm{Ker}(f)) \neq 0$

QUIZ

$f: \mathbb{R}_4[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ vero che

1) sempre iniettiva
2) sempre sur
3) ~~3)~~ mai iniet.
4) biettiva sempre

dim 5 $\to$ dim 3
viene una matrice 3×5
quindi $\rho(M) \leq 3$

$\dim(\mathrm{im}(f)) \leq 3 \to$ può essere sur
$\dim(\mathrm{Ker}(f)) \geq 2 \to$ mai iniettiva

QUIZ

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \dashrightarrow f(1,1) = f(1,-1)$, falso che

1) no iniett
2) ~~2)~~ sur
3) $(0,1) \in \mathrm{Ker}(f) \to (0,0) = f(1,1) - f(1,-1) = f(0,2) = 2f(0,1)$
4) ∞ applicazioni che le soddisfano

$x = 1 \Rightarrow x = 1$
$y = 1 = y = -1$

ESERCIZIO 8.4.2

$f_A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \qquad f_A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_3,\ 3x_2 + 3x_2)$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

ESERCIZIO 8.4.3

$f_A(x, y, z) = (5x, 3y, 7z) \qquad f_A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ MATRICE 3x3

$$A = ? = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

ESERCIZIO 8.4.4

$f_A(u, v, w) = (u + w, 0) \qquad f_A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ MATRICE 2x3

$$A = ? = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ESERCIZIO 8.4.5

$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ trovare $f_A(x_1, x_2) \Rightarrow$ so che $f_A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ perché matrice $A = 3 \times 2$

$$f_A(x_1, x_2) = (0, x_1, x_2)$$

mentre $f_A(2,3) = (0, 2, 3)$

ESERCIZIO 8.6.1

$W = \mathrm{im}(B) \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \qquad W\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$

sia $y = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$, la proiezione di y su W vale $= y_1$

$$y_1 = a \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$y \cdot w_1 = 1 + 4 - 4 + 10 = 11 = y_1 w_1$

$y \cdot w_2 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 = y_1 w_2$

PDF 9 ESERCIZIO 9.2.2

$$f(x,y) = (x+2y,\ 3x+4y,\ 5x+6y)$$

calcolare ${}_C[f]_B$ dove $B = ((1,-1),(1,1)) = v_1, v_2$

$${}_C[f]_B = {}_C[f(B)] = {}_C[f(v_1)] + {}_C[f(v_2)] =$$

$$f(v_1) = (-1,-1,-1)$$

$$f(v_2) = (3,7,11) \to \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 7 \\ -1 & 11 \end{bmatrix}$$

$${}_C[f]_B = ((-1,3),(-1,7),(-1,11))$$

PDF 9 ESERCIZIO 9.2.3

$$f(x,y,z) \to (-x+z,\ 3x+3y+7z)$$

$${}_C[f] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

PDF 9 ESERCIZIO 9.2.4

$$g,f \to \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$f(x,y) = (x+y,\ y) \qquad g(x,y) = (-y,\ x)$$

$${}_C[f] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}_C[g] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$${}_C[f \circ g] = {}_C[f] \cdot {}_C[g] = \begin{array}{cc|cc} & & 0 & -1 \\ & & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

$${}_C[g \circ f] = {}_C[g] \cdot {}_C[f] = \begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline & & 1 & 1 \\ & & 0 & 1 \end{array}$$

$\|Ay-b\|_2^2$ (ne prendo il quadrato) $\quad$ $Q^TQ = Q\cdot Q^T = I$

Determino $A = QR$, dove Q = ortogonale e R = trapezoidale

per def, $\|Q^Tz\|_2 = \sqrt{(Q^Tz)^T\cdot(Q^Tz)} = \sqrt{z^T\cdot Q\cdot Q^T\cdot z} = \sqrt{z^T\cdot z\cdot I} = \sqrt{z^Tz} = \|z\|_2$

$\|Q^Tz\|_2 = \|z\|_2$ la norma$_2$ = invariante per ortogonali

$$\|\underbrace{Ay-b}_{z}\|_2^2 = \|Q^T(Ay-b)\|_2^2 = \|Q^TAy - Q^Tb\|_2^2$$

so che $A = QR$

moltiplico per Q^T $\quad Q^T\cdot A = Q\cdot Q^T\cdot R \to R = Q^T\cdot A$

$$\|Ry - Q^Tb\|_2^2 =$$

$R = \begin{pmatrix}\tilde{R}\\ 0\end{pmatrix}$ dove $\tilde{R}$ = non singolare $\in \mathbb{R}^{n,n}$

$$\|Ry - \underbrace{Q^Tb}_{c}\|_2^2 = \left\|\begin{pmatrix}\tilde{R}\\0\end{pmatrix}y - c\right\|_2^2 = \left\|\begin{pmatrix}\tilde{R}y\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}\right\|_2^2 =$$

$c_1 \to$ n componenti; $c_2 \to$ m-n componenti

$$= \left\|\begin{pmatrix}\tilde{R}y - c_1\\ -c_2\end{pmatrix}\right\|_2^2$$ come lo calcolo?

- $\left\|\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix}\right\|_2^2 = \begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix}^T\cdot\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix} = (z_1^T\ z_2^T)\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix} = z_1^T\cdot z_1 + z_2^Tz_2 = \|z_1\|_2^2 + \|z_2\|_2^2$

$$\Rightarrow \left\|\begin{pmatrix}\tilde{R}y-c_1\\ -c_2\end{pmatrix}\right\|_2^2 = \|\tilde{R}y - c_1\|_2^2 + \|+c_2\|_2^2$$

$$\min_{y\in\mathbb{R}^n}\|\tilde{R}y - c_1\|_2^2 = \min_{y\in\mathbb{R}^n}\|Ay-b\|_2^2$$

$\|\tilde{R}y - c_1\|_2^2$ minimo se $\tilde{R}y - c_1 = 0 \to \tilde{R}y = c_1$

$$\min\|Ay-b\|_2 = \|Ax^* - b\|_2 = \cancel{\|\tilde{R}y - c_1\|_2^2} + \|c_2\|_2^2$$

soluzione, quindi = 0

Con matlab

se $Ax = b$, $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $m>n$, rank$(A) = n$

$A = QR \to$ [q,r] = qr(A);

calcolo c $\to$ c = Q' * b;

c_1 = primi n el. di c $\to$ c1 = c(1:n);

x_star = R(1:n, 1:n) \ c1;

$A = QR$
$Ax = b$
$Q\underbrace{Rx}_{y} = b$
$Q1 = b$
$Rx = y$

Se un sist. è sovradet e $\rho(A)$ = max basta il backslash!

$\downarrow$

x = A\b

ESERCIZIO 9.1.10

$\varphi: \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}[x]$

$\varphi(a_0, a_1 \dots a_n) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$

A) devo dimostrare che è lineare. Chiamo $g(a_0', a_1', \dots, a_n') = a_0' + a_1'x' + \dots + a_n'x^{n'}$

↳ devo dimostrare che $\varphi(a_0, a_1, \dots, a_n) + g(a_0', a_1', \dots, a_n') = \varphi(a_0, \dots a_n + a_0' \dots a_n)$

$\varphi((a_0 + a_0') + (a_1x + a_1'x) + (a_2x^2 + a_2'x^2) + \dots + (a_nx^n + a_n'x^n)) =$

$= \underbrace{(a_0 + a_1x + \dots + a_nx_n)}_{\varphi} + \underbrace{(a_0' + a_1'x + \dots + a_n'x^n)}_{g}$ per la proprietà commutativa. Ho $\to \varphi((a_0, a_1, \dots, a_n) + (a_0', a_1', \dots, a_n')) = \varphi + g$

↳ il prodotto è subito dimostrabile

↳ $\varphi(\underbrace{0, 0, 0, \dots, 0}_{n+1}) = 0$

Quindi φ è lineare.

B) voglio che sia iniettiva: $\operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$

Risulta evidente che se $a_0, a_1, \dots, a_n$ sono nulli (e sono coefficienti), $\varphi = \{0\}$

c) $\operatorname{Im}(\varphi)$ è un insieme costituito dai polinomi di grado $\leq n$ e da quello nullo?
Poiché $\varphi: \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}[x]$, so che $\dim(\text{polinomio}) = \text{grado} + 1$, dove $1 =$ termine noto. Quindi il grado max possibile dell'imm è n.

ESERCIZIO 9.1.12 PAG 127

- $f(x,y,z) = (0,0,z)$ — $\operatorname{Ker} f? = \{(x,y,0) \text{ con } x,y \text{ libere}\}$
  $\operatorname{Im} f = \{(0,0,z) \text{ con } z \text{ libero}\}$

- $g(x,y,z) = (x,y,0)$ — $\operatorname{Ker} g = \{(0,0,z) \text{ con } z \text{ libero}\} = \operatorname{Im} f$
  $\operatorname{Im} g = \{(x,y,0) \text{ con } x,y \text{ libere}\}$

- $h(x,y,z) = (-y, x, 0)$ — $\operatorname{Ker} h = \{(0,0,z)\}$
  $\operatorname{Im} h = \{(x,y,0)\}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 97 di 156