



**Appunti universitari**

**Tesi di laurea**

**Cartoleria e cancelleria**

**Stampa file e fotocopie**

**Print on demand**

**Rilegature**

**NUMERO: 2397A**

**ANNO: 2019**

# **A P P U N T I**

**STUDENTE: Bianca Pierfrancesco**

**MATERIA: Aerodinamica - Teoria - Esercizi - Temi di Esame - Database - Prof. Arina**

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.  
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

1 ottobre 2018 AERODINAMICA

①

FLUIDI : Non mantengono la loro forma

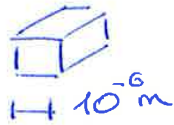
Meccanica del continuo, non particelle ma continuo

↳ Infinitesime particelle (che 0 dim) che ad ogni punto assegna un det valore

Ci deve essere un volume : Piccolo ma che contenga abbastanza molecole  
LIBERO CARICO MEDIO (ecm)

•  $Kn = \frac{ecm}{L} \ll 1$   
↓  
Knudsen

→ cresce più veloci in altitudine (gas rarefatto)  
allora non il modello del continuo.



$\rho_p = 10^{-18} \text{ m}^3 = 10^{-9} \text{ mm}^3$

$N_A = 6,023 \cdot 10^{26}$  (Avogadro)

$\rho_{CM} = 22,4 \text{ m}^3$  (Condizioni Normali)

$\frac{N_A}{\rho_{CM}} = \frac{N}{\rho_p}$

$N = N_A \frac{\rho_p}{\rho_{CM}} = 2,7 \cdot 10^7$

• fluidi in quiete :  $V_m$  delle particelle = 0

le molecole si muovono ma non per spostamento della massa di molecole

• T : Pressione delle  $E_k$ , più un fluido è caldo  $> E_k$ ,  $> T$ .

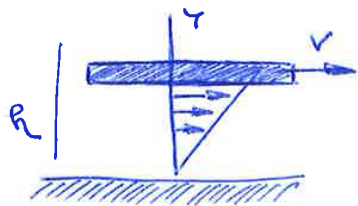
•  $\epsilon = \frac{E_{im}}{\rho} \rightarrow 0 \frac{Jm}{Jm} \left[ \frac{kg}{m^3} \right]$

↳  $\epsilon$  ha senso per volumi non a 0.

Ci deve essere un V abbastanza grande da contenere molecole.

3

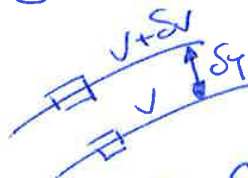
Dati sperimentali per  $\tau$  e  $F$  viscosi.



parete che scorre con velocità  $v$ .

→ La parte alla parete fissa rimane ferma.

$\tau \sim \frac{v}{R}$  Legge fenomenologica



cost. proporzionale che dipende dal fluido.

$\tau = \frac{dv}{dy} \mu$   
 ↳ cost. di viscosità

• fluidi Newtoniani.

La viscosità aumenta se diminuisce  $T \rightarrow$  Liquidi  
 = diminuisce se  $T$  aumenta  $\rightarrow$  Gas

Usi  $\mu = \text{COSTANTE}$

$q_r = -k \frac{\delta T}{\delta y}$  Legge Fourier (legge fenomenologica)

Non solo  $v$  ma anche scambi di calore.

• Numero di Prandtl

$\left[ Pr = \frac{\rho C_p}{k} \right]$  Numero Adimensionale.

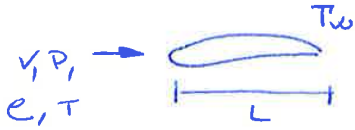
↳ Costante sui fluidi.

La conducibilità termica e viscosità sono su quasi stessi livelli.

2 ottobre

• Coefficienti NON DIMENSIONALI

- ↳ permettendoci di definire quali sono le F più importanti
- ↳ e fare confronti al vero (scala)



Campi di forze attorno al corpo

$$\Delta t(qdm) = F_g + F_p + F_v$$

gravità, pressione, forze viscose

variazioni nel tempo di quantità di moto.

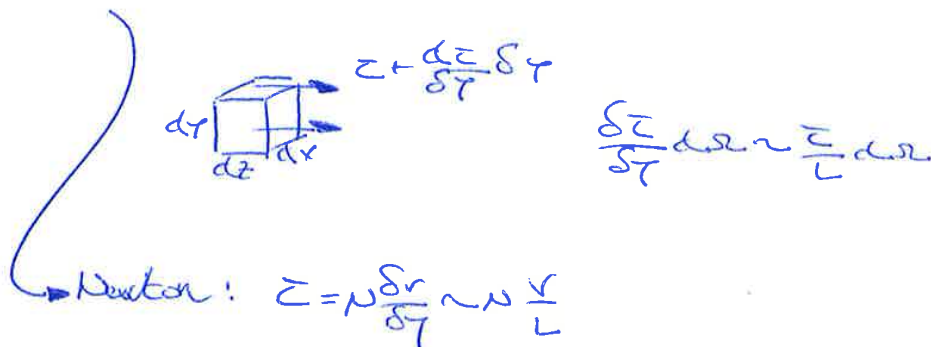
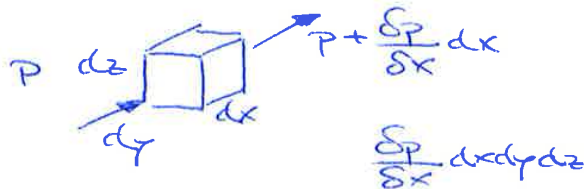
$$\text{cube } dm = \rho d\Omega$$

$$\Delta t(qdm) = \frac{\Delta(qdm)}{\Delta t} \sim \frac{\rho v \Delta \Omega}{L/v}$$

$\Delta t \sim \frac{L}{v}$  tempo che una particella impiega per passare  $L$  con velocità  $v$ .

$$= \frac{\rho v^2}{L} d\Omega \text{ simile a } F_c.$$

$$\left. \begin{aligned} F_g &= \rho g d\Omega \\ F_p &= \frac{\delta p}{L} d\Omega \\ F_v &= \frac{\tau}{L} d\Omega \sim \mu \frac{v}{L} d\Omega \end{aligned} \right\}$$



Newton:  $\tau = \mu \frac{\delta v}{\delta y} \sim \mu \frac{v}{L}$

$$F_I = \Delta t(qdm) \text{ forze inerzia.}$$

$$\frac{F_I}{F_g} \sim \frac{\rho v^2}{L} \cdot \frac{1}{\rho g} = \frac{v^2}{gL} \text{ Adimensionale}$$

•  $= \frac{v}{\sqrt{gL}}$  Numero di FROUDE rapporto fra le F di inerzia e la gravità.

•  $\frac{\delta p}{\rho}$

$$\frac{\delta p}{\rho} = \frac{\delta e}{\rho} + \frac{\delta v}{T} \rightarrow P = \rho RT$$

Legge termodinamica.

$$\frac{\delta p}{L} \sim \frac{e v^2}{L} \rightarrow \frac{\delta p}{\rho} \sim \frac{v^2}{\rho L e} = \pi^2$$

$$\frac{\delta p}{L} \sim e \varphi \rightarrow \frac{\delta p}{\rho} \sim \frac{g L}{\rho e} = \frac{g L}{v^2} \cdot \frac{v^2}{e} = \frac{\pi^2}{\rho e^2}$$

$$\frac{\delta p}{L} \sim \frac{N v}{L^2} \rightarrow \frac{\delta p}{\rho} \sim \frac{N v}{\rho L} = \frac{N}{\rho v L} \cdot \frac{v^2}{e} \sim \frac{\pi^2}{\rho e}$$

Con  $\pi$  basso: Numeratori a 0,  $\rho$ ,  $T$ ,  $v$ ,  $F_g$  danno  $\delta p$  piccoli.

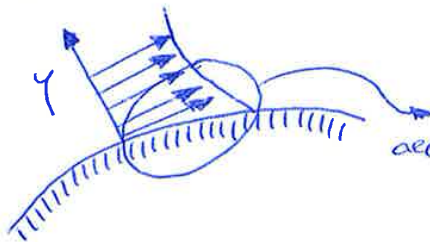
$\frac{\delta p}{\rho}$  piccolo con  $\pi$  basso  $\rightarrow \frac{\delta e}{\rho} = 0$  incompressibile  
(il  $\pi$  è sempre basso) LIQUIDI

Non è uguale per l'aria, incompressibile solo quando  $\pi$  è basso, ma varia da 0 a 10. ARIA

$\rightarrow$  la considero pure sempre incompressibile

• PARADOSSO DI ALAMBERT

Teorema in viscosità che non funziona perché non si prevedeva le perdite d'attrito.



Ma a parete  $e_a <$  deve essere  $= 0$ ,  
condizione di Aderenza

all'aumentare di  $Re$  la transizione è sempre meno netta

Se  $Re \rightarrow \infty \rightarrow$  transizione  $= 0$

se alti avviene in un spessore molto sottile

( $P_0$  è sottile,  $P_{10}$  è veloce)

S: fa il calcolo in viscosità

$Re$  alti:  $\rightarrow \delta = \mu \frac{\delta v}{\delta y}$

piccolo  $\rightarrow$  grande

può diventare alto ma solo in quella regione.



5

$$F \sim \underbrace{c^2}_{\rho} c^2 \left(\frac{P}{c^2}\right)^2 \left(\frac{\epsilon}{v^2}\right)^3 \left(\frac{\rho}{\rho c}\right)^3 \left(\frac{KT}{\rho c^2 v^3}\right)^2 \left(\frac{T_w}{T}\right)^i \left(\frac{eP}{r^2}\right)^c$$

$$\begin{cases} \frac{eP}{r^2} = \frac{1}{Fr} \\ \frac{\rho}{\rho c} = \frac{1}{Re} \\ \frac{T_w}{T} \end{cases} \left| \begin{array}{l} \frac{P}{\rho c^2} = \frac{P/c}{c^2} \cdot \frac{1}{\rho} \\ \frac{\epsilon}{v^2} = \frac{\epsilon}{c^2} \cdot \frac{1}{v^2} \\ \frac{KT}{\rho c^2 v^3} = \frac{N C_p T \epsilon c^2}{R \epsilon c^2 v^2} = \frac{C_p T}{R \epsilon} \cdot \frac{\epsilon}{c^2} \cdot \frac{1}{v^2} \cdot \frac{1}{Re} \end{array} \right.$$

possibile scrivere  $n^4$  coeff non dimensionali

$$\frac{F}{\rho v^2 c^2} = f(\text{geometria}, Re, \pi, \frac{P/c}{c^2}, \frac{c^2}{\epsilon}, Re, \frac{C_p T}{\epsilon}, Fr, \frac{T_w}{T})$$

$$P = \rho R T$$

$$\epsilon = C_v T = \frac{C_p}{\gamma} T \quad \text{con } \gamma = \frac{C_p}{C_v}, \quad Re = C_p - C_v$$

$$\frac{P/c}{c^2} = \frac{1}{\gamma} \text{ per un gas}$$

$$c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s = \frac{d}{d\rho}(p \cdot c^{\gamma}) = \gamma p c^{\gamma-1} = \gamma \frac{p}{\rho} = \gamma R T$$

$$\frac{c^2}{\epsilon} = \gamma \frac{C_p - C_v}{C_p} = \gamma(\gamma - 1)$$

$$\frac{C_p T}{\epsilon} = \gamma$$

$$\frac{F}{\rho v^2 c^2} = f(\text{geom}, Re, \pi, Fr, Re, \gamma, \frac{T_w}{T}) \quad \left( \text{se non escludo } Fr \text{ } c \frac{T_w}{T} \sim 1 \right)$$

$$\frac{F}{\rho v^2 c^2} = f(\text{geom}, Re, \pi)$$

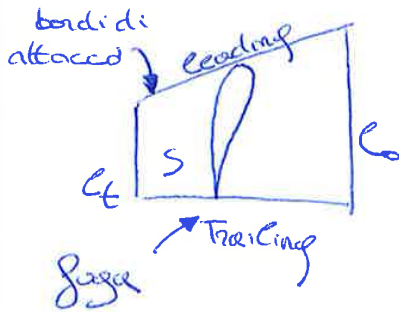
$$= f(\alpha, \beta, Re, \pi) \rightarrow \text{PORTANZA}$$

5 ottobre AERODINAMICA

(1)

• Caratteristiche profilo ALARE

→ oggetto che dà portanza: zona L al vento.



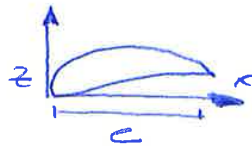
$$t = \frac{c_t}{c_o} = \text{Rapporto di RASTREZZAZIONE}$$

$t=1$ : ala rettangolare

$t=0$ : ala triangolare

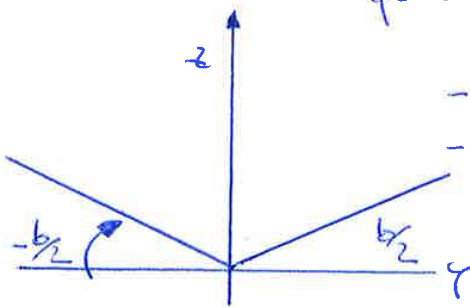


Trapezoid per i valori intermedi.



S: superficie dell'ALA.

freccia di ALA: angolo fra la mediana e la linea di punti al quarto anteriore. (freccia relativamente moderata)



- b: apertura alare completa

- l'angolo dietro è generalmente positivo, possiamo considerarlo = 0.

$$\lambda = \frac{b}{c} = \frac{b^2}{S} \text{ allungamento sulla corda.}$$

• PROFILO: Ala rettangolare con allungamento  $\infty$ .

al ogni y si ripete una x

→ ala da  $-\infty$  a  $\infty$

V prende di y costante non si hanno altri dati trasversali.

→ ipotesi di flusso bidimensionale e profondità unitaria

- Esistono famiglie di profili

NACA (NASA): studio dei profili in galleria del vento

$x \times y$  e q che governa la linea media  $\gamma_m(x)$  e l'andamento degli spessori

$$\gamma_m(x) = \frac{\gamma^+ + \gamma^-}{2}$$

$$\gamma_s(x) = \frac{\gamma^+ - \gamma^-}{2} \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma^2 = \gamma_m^2 + \gamma_s^2 \end{array} \right.$$

o.o.r. profilo simmetrico con spessore 121.



3

$$\beta^I \ll 1 \rightarrow \sin \beta^I \approx \beta^I$$

$$\cos \beta^I \approx 1$$

$$ds^I = dx \cos \beta^I = dx$$

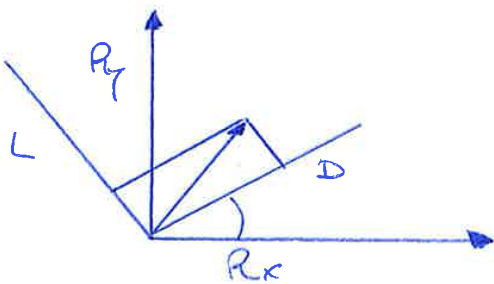
ed è una grossa semplificazione

$$|dF_x^I| \ll |dF_y^I|$$

$$R_x = \int_0^e dF_x^+ + \int_0^e dF_x^- \rightarrow \text{integrale di piccoli termini}$$

$$R_x \ll R_y$$

$$R_y = \int_0^e dF_y^+ + \int_0^e dF_y^- \approx \int_0^e [(P^- - P_{00}) - (P^+ - P_{00})] dx$$



$$\alpha \ll 1 \begin{cases} \sin \alpha \approx \alpha \\ \cos \alpha \approx 1 \end{cases}$$

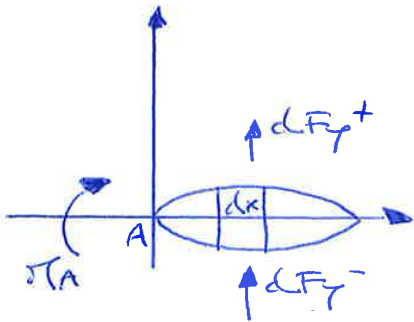
$$L = R_y \cos \alpha - R_x \sin \alpha = R_y - R_x \alpha$$

$$D = R_y \sin \alpha + R_x \cos \alpha = R_y \alpha + R_x$$

piccolo

$L \approx R_y$  Non calcolata la resistenza (pendenza del filo in visuale)

$$L = R_y = \int_0^e [(P^- - P_{00}) - (P^+ - P_{00})] dx$$

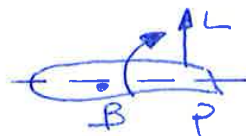
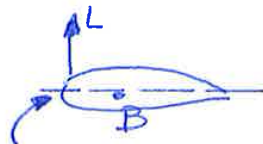


$$dTA = -(dF_y^+ + dF_y^-) x$$

$$\approx -[(P^+ - P_{00}) - (P^- - P_{00})] x dx$$

$$dTA = \int_0^e [(P^+ - P_{00}) - (P^- - P_{00})] x dx$$

Momento rispetto al bordo di attacco



$$T_B = T_A + L \times B =$$

$$= T_P - L(x_P - x_B) \rightarrow T_B = T_A + L x_P$$

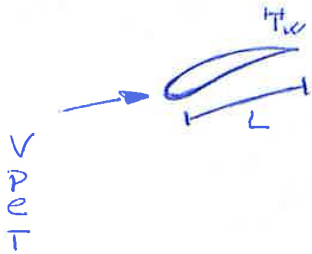
2 ottobre 2018

AERODINAMICA

(1)

Coefficienti VAS Dimensionali

- ↳ permettendoci di definire quali sono le F più importanti
- ↳ e fare modelli al vento (scale)



Campo di Velocità attorno al corpo

$$\Delta(qdm) = F_g + F_p + F_v$$

variazioni nel  $t$   
di quantità  
di moto

gravità, Pressione, Viscosità.

  $dm = \rho d\Omega$

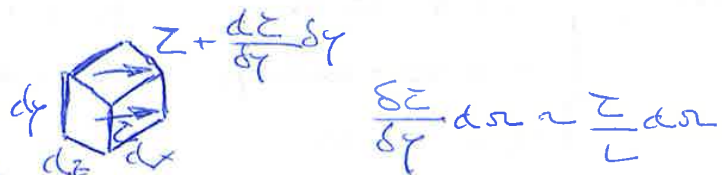
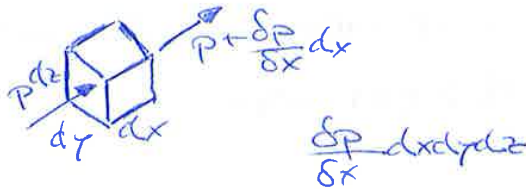
$$\Delta t(qdm) = \frac{\Delta(qdm)}{\Delta t} \sim \frac{\rho v d\Omega}{L v}$$

$\Delta t \sim \frac{L}{v}$  tempo che una particella impiega per passare  $L$  con velocità  $v$ .

$$= \frac{\rho v^2}{L} d\Omega$$

simile EK.

$$\left\{ \begin{aligned} F_g &= \rho g d\Omega \\ F_p &= \frac{\delta p}{L} d\Omega \\ F_v &= \frac{\tau}{L} d\Omega \sim \mu \frac{v}{L^2} d\Omega \end{aligned} \right.$$



Newton:  $\tau = \mu \frac{\delta v}{\delta y} \sim \mu \frac{v}{L}$

Considero H<sub>2</sub>O sempre incompressibile. (sempre)

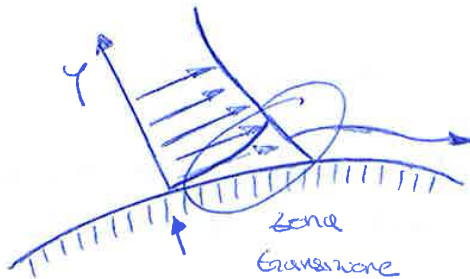
④

Aria pure incompressibile

• Paradosso D'Alembert

il fluido in viscosità non funziona

Perché non si prevedevano le perdite d'altitudine.



Ma a parete la  $V_{deve} = 0$ , condizione di Aderenza.

all'aumentare di  $Re$  la transizione è sempre meno netta.

se  $Re \rightarrow \infty \rightarrow$  transizione = 0

se altri avviene in una spessore molto sottile.

Si fa un calcolo in viscosità:

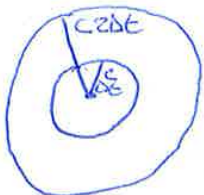
più è sottile più è veloce

al alti  $Re$ :

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$$

grande ↑  
piccolo ↓

più diventa alto ma solo in quella regione



Se la sorgente è fissa cerchi concentrici

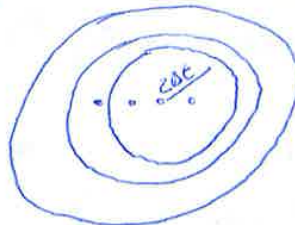
$V_{de}$  vel fronte d'onda

$V_{de}$  vel con cui si muove la sorgente



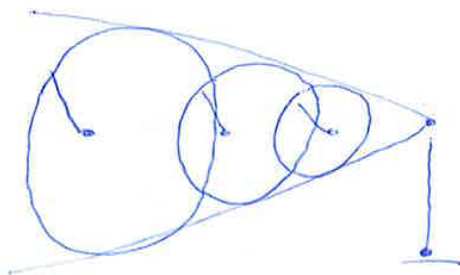
effetto doppler se sorgente si muove

zononi ellittici



i cerchi non sono più concentrici

si ammassa il fronte d'onda



SUPERSONICO: La sorgente sta fuori

cond di M

zononi d'onda

velo è più lento

il suono: zona d'ombra

$$\frac{F}{c^2 e^2} = f(\text{geometria}, Re, \pi, \frac{P/c}{c^2}, \frac{c^2}{E} (P_2, \frac{C_p T}{E}, F_2, \frac{C_w}{T})) \quad (6)$$

$$P = cRT$$

$$E = c_w T = \frac{C_p T}{\gamma} \quad \text{con } \gamma = \frac{C_p}{C_v}, \quad R = C_p - c_w$$

$$\frac{P/c}{c^2} = \frac{1}{\gamma} \quad \text{per un gas}$$

$$c^2 = \left(\frac{dp}{ds}\right)_s = \frac{\delta}{\delta c} (G - c^2) = \gamma G c^{\gamma-1} = \gamma \frac{P}{c} = \gamma RT$$

$$\frac{c^2}{E} = \gamma \frac{C_p - c_w}{C_p} = \gamma(\gamma - 1)$$

$$\frac{C_p T}{E} = \gamma$$

$$\frac{F}{c^2 e^2} = f(\text{geom}, Re, \pi, F_2, P_2, \gamma, \frac{T_w}{T})$$

ovvero  $\gamma, P_2, F_2, T_w/T = 1$

$$\frac{F}{c^2 e^2} = f(\text{geom}, Re, \pi)$$

coeff di PORTANZA

$$= f(\alpha, B, Re, \pi)$$

→ Coefficiente di Portanza

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho c^2 S} = f_L(\alpha, B, Re, \pi)$$

$$C_D = \frac{D}{\frac{1}{2} \rho c^2 S} = f_D(\alpha, B, Re, \pi)$$

$$C_M = \frac{M}{\frac{1}{2} \rho c^2 S e} = f_M(\alpha, B, Re, \pi)$$

in CD → B non c'è.

e  $\pi$  sempre per numeri piccoli

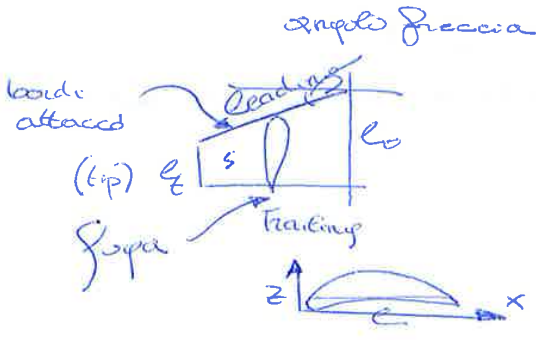
Rimangono funzione di  $(\alpha, Re)$

AERODINAMICA

5 ottobre

Caratteristiche proprie ALARE.

↳ angolo che dà pendenza: Sorec  $\perp$  al vento



$t = \frac{c_t}{c_b} = \text{Rapporto di Restrengimento}$

$t = 1$  : Ala Rett

$t = 0$  : Ala Evaporata

Campana nei valori intermedi

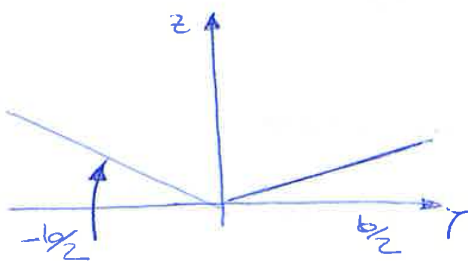
S: superficie dell'ALA.

Freccia di un'ala: angolo fra la meridia e la linea di panti al quarto anteriore

(freccia relativamente moderata)

$b$ : apertura alare completa

angolo dietro generalmente positivo, possiamo considerarlo  $= 0$



$\lambda = \frac{b}{c} = \frac{b^2}{S}$  allungamento sulla corda.  
 ↳ corda MEDIA =  $\bar{c} = \frac{S}{b}$

PROFILO: Ala retta con allungamento  $\infty$

ad ogni  $y$  si ripete una  $x$

→ ala da  $-\infty$  a  $\infty$ .

$\forall$  punti  $x$  e  $y$  cost non si hanno altre moti trasversali.

ipotesi di flusso bidimensionale e profondità unitaria.



$$dF^+ = -(p^+ - p_{\infty}) n ds^+$$

$$dF_x^+ = -dF^+ \sin \beta^+ = (p^+ - p_{\infty}) \sin \beta^+ ds^+ \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Dorsal} \\ \text{Dorsal} \end{array} \right.$$

$$dF_y^+ = dF^+ \cos \beta^+ = -(p^+ - p_{\infty}) \cos \beta^+ ds^+ \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Dorsal} \\ \text{Dorsal} \end{array} \right.$$

$$dF_x^- = dF^- \sin \beta^- = -(p^- - p_{\infty}) \sin \beta^- ds^- \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Ventre} \\ \text{Ventre} \end{array} \right.$$

$$dF_y^- = -dF^- \cos \beta^- = (p^- - p_{\infty}) \cos \beta^- ds^- \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Ventre} \\ \text{Ventre} \end{array} \right.$$

~ Vale per qualunque corpo e forma.

$$p^+ \ll 1 \rightarrow \sin \beta^+ \approx \beta^+ \\ \cos \beta^+ \approx 1$$

$$ds^+ = dx \cos \beta^+ \approx dx$$

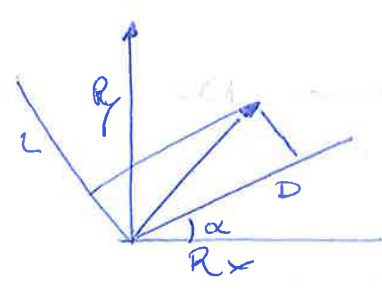
ed è una grossa semplificazione

$$|dF_x^+| \ll |dF_y^+|$$

→ integrale di termini piccoli  
 $R_x \ll R_y$

$$R_x = \int_0^L dF_x^+ + \int_0^L dF_x^-$$

$$R_y = \int_0^L dF_y^+ + \int_0^L dF_y^- \approx \int_0^L [(p^- - p_{\infty}) - (p^+ - p_{\infty})] dx$$



$$\alpha \ll 1 \left\{ \begin{array}{l} \sin \alpha \approx \alpha \\ \cos \alpha \approx 1 \end{array} \right.$$

$$L = R_y \cos \alpha - R_x \sin \alpha \approx R_y - R_x \alpha$$

$$D = R_y \sin \alpha + R_x \cos \alpha \approx R_y \alpha + R_x$$

piccolo

$$L \approx R_y$$

Non calcolati  
 e Resistenza

(pendenza del fluido in viscosità)



5

$$\frac{\delta \Pi_0}{\delta x} = \frac{\delta}{\delta \alpha} (\Pi_A + L x_0) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\delta C_{M_0}}{\delta \alpha} = \frac{\delta}{\delta \alpha} \left( C_{M_1} + C_e \frac{x_0}{e} \right) = 0$$

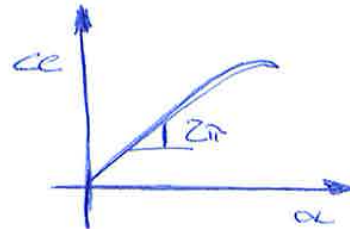
procedi col 4° antecedente  $\rightarrow$  25/1.

Linee dei profitti che unisce tutte i profitti.

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2} c v_{\infty}^2 \cdot s} \quad \text{potenza } \Delta L A \text{ e dividilo per la superficie}$$

$$C_e = \frac{L}{\frac{1}{2} c v_{\infty}^2 e} = f(\alpha, Re)$$

$$C_d = \frac{P}{\frac{1}{2} c v_{\infty}^2 e}$$



$$C_{M_0} = \frac{\Pi_0}{\frac{1}{2} c v_{\infty}^2 e^2}$$

$$C_e = \frac{1}{\frac{1}{2} c v_{\infty}^2 e} \int_0^e \left[ (P^- - P_{\infty}) - (P^+ - P_{\infty}) \right] dx =$$

$$= \int_0^1 \left[ \left( \frac{P^- - P_{\infty}}{\frac{1}{2} c v_{\infty}^2} \right) - \left( \frac{P^+ - P_{\infty}}{\frac{1}{2} c v_{\infty}^2} \right) \right] d \left( \frac{x}{e} \right) = \int_0^1 \Delta C_p d \left( \frac{x}{e} \right)$$

$$\Delta C_p = C_p^- - C_p^+$$

$$C_p = \frac{P - P_{\infty}}{\frac{1}{2} c v_{\infty}^2}$$

$$C_{M_1} = \frac{\Pi_A}{\frac{1}{2} c v_{\infty}^2 e^2} = - \int_0^1 \Delta C_p \frac{x}{e} d \left( \frac{x}{e} \right)$$

8 ottobre 2018 AERODINAMICA

• Esercizio sul Caid



$w_p = 10 \text{ Kg p}$

$C_D = 1,31$

$w = 80 \text{ Kg p}$

$d = 10 \text{ m}$

$c = 1,225 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

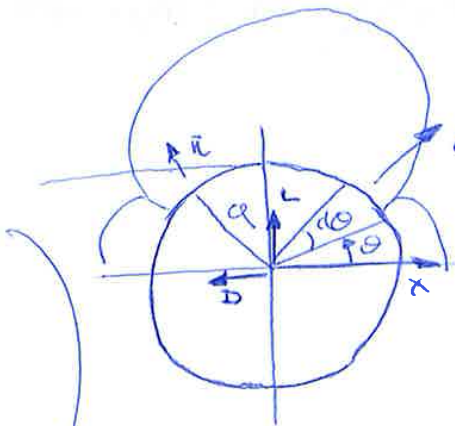
$S = \pi \frac{d^2}{4} = 78,54 \text{ m}^2$

$w + w_p = D = \frac{1}{2} c v^2 S C_D$

$v = \sqrt{\frac{2(w+w_p)}{c S C_D}} = 3,74 \text{ m/s}$   
 $13,05 \text{ Km/h}$

$F = \frac{1}{2} c v^2 f(\alpha, Re, \tau)$

Analisi della gamba aerodinamica.



$d\vec{F} = -(p - p_{\infty}) d a d\vec{n} =$  Resistenza con  $C_p$ .

$\frac{v_{\infty}}{(\sim p_{\infty})} = -\frac{1}{2} c v_{\infty}^2 (C_p(\theta)) d a d\vec{n} = \frac{1}{2} c v_{\infty}^2$

$dD = dF_x = dF \cos \theta$   
 $= \frac{1}{2} c v_{\infty}^2 C_p(\theta) \cos \theta d a$

$dL = -dF_y = -dF \sin \theta$   
 $= -\frac{1}{2} c v_{\infty}^2 \alpha C_p(\theta) \sin \theta d a$

Per un corpo posto in posizione costante (tra dritto).

$C_p(\theta) = 1 - 4 \sin^2 \theta$

Paradosso d'Ambert La Resistenza è sempre = 0

$D = \frac{1}{2} c v_{\infty}^2 \alpha \left[ \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta - 4 \int_0^{2\pi} \cos \theta \sin^2 \theta d\theta \right] = 0$

$L = -\frac{1}{2} c v_{\infty}^2 \alpha \left[ \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta - 4 \int_0^{2\pi} \sin^3 \theta d\theta \right] = 0$

• Campi di  $\nabla\phi$

$$\phi \rightarrow \nabla\phi = \frac{\delta\phi}{\delta x}\bar{i} + \frac{\delta\phi}{\delta y}\bar{j} + \frac{\delta\phi}{\delta z}\bar{k}$$

$$\frac{\delta\phi}{\delta s}$$



$$= \nabla\phi \cdot \underline{c}$$

$\nabla\phi$  da immediatamente  
e se sua derivata parziale.

$$\underline{v} \quad \nabla \cdot \underline{v} = \frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta v}{\delta y} + \frac{\delta w}{\delta z}$$

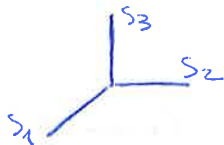
$$\nabla = \bar{i} \frac{\delta}{\delta x} + \bar{j} \frac{\delta}{\delta y} + \bar{k} \frac{\delta}{\delta z}$$

$$\underline{v} = u\bar{i} + v\bar{j} + w\bar{k}$$

$$\nabla \times \underline{v} = \text{Rotore: Curl}$$

$$= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\delta}{\delta x} & \frac{\delta}{\delta y} & \frac{\delta}{\delta z} \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

$$= \left( \frac{\delta w}{\delta y} - \frac{\delta v}{\delta z} \right) \bar{i} + \left( \frac{\delta u}{\delta z} - \frac{\delta w}{\delta x} \right) \bar{j} + \left( \frac{\delta v}{\delta x} - \frac{\delta u}{\delta y} \right) \bar{k}$$



$$\phi \rightarrow \nabla\phi = \sum_i \frac{\delta\phi}{\delta x_i} \underline{e}_i$$

$$C_i = A_{ij} b_j$$

$$\underline{v} = v_i \underline{e}_i$$

$$\underline{c} = \underline{A} \underline{b}$$

$$\nabla \cdot \underline{v} = \frac{\delta v_i}{\delta x_i} = \frac{\delta v_x}{\delta x}$$

$\delta_{ij}$  Kronecker

$$\underline{I} = \delta_{ij} \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Matrice Identità.

$$\text{rot } \underline{v} = \nabla \times \underline{v} = \epsilon_{ijk} \frac{\delta v_i}{\delta x_j} \underline{e}_k$$

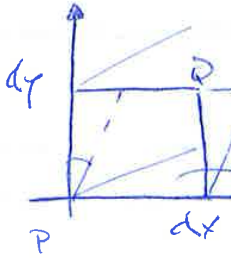
$$\epsilon_{ijk} \begin{cases} 0 & i=j \\ \pm 1 & \text{ciclo } i \rightarrow j \rightarrow k \end{cases}$$

Una quantità è relazionale se non cambia nel sistema di riferimento.

Tensori: Matrici cui mutano le componenti.

$$\left( \frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta v}{\delta y} + \frac{\delta w}{\delta z} \right) d\Omega + o(d\Omega + dt)$$

$$\nabla \cdot v = \text{Tr}(D)$$



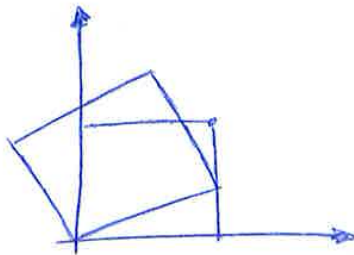
deformazione a esplode

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{dy} \left( \frac{\delta u}{\delta y} \right) dy dx dt$$

$$\frac{1}{dx} \left( \frac{\delta v}{\delta x} \right) dx dx dt$$

Volume iniziale che si è rimpicciato

$$\frac{\delta v}{\delta x} = -\frac{\delta u}{\delta y}$$



perché si annullano

• termine non disponibile.



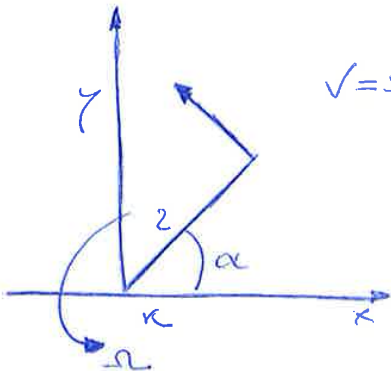
Ha una rotazione, rotata

senza cambiare di forma.

$$B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & u_y - v_x & u_z - w_x \\ - & 0 & v_z - w_y \\ - & - & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{b} = \frac{1}{2} (\nabla \times v)$$

Velocità.



$$v = r z^2$$

$$v = -v \sin \alpha$$

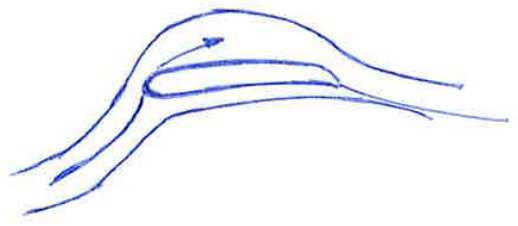
$$v = v \cos \alpha$$

$$\begin{aligned} \nabla \times v &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\delta}{\delta z} (2v) - \frac{\delta v}{\delta x} \right] k \\ &= \frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta z} (2z^2) k \\ &= 2z k \end{aligned}$$

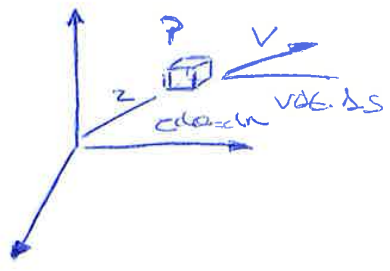
(14)



Incremento come punto di arrivo.  
 Modello zero nell'incremento.



$$\nabla Q = \left( \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial E} \right)$$



$$\left( \frac{\partial Q}{\partial E} \right)_P + V \cdot \nabla Q \quad \text{Variazione di GDP con variaz. ind.}$$

$$= \frac{DQ}{DE}$$

②

•  $\underline{\underline{\tau}} = \underline{\underline{T}}(\underline{\underline{D}})$  -  $\underline{\underline{\tau}}$  per sforzi di deformazione.

$$\tau_{ij} = A_{ij} k_e \frac{\delta u_k}{\delta x_k}$$

$$\underline{\underline{\tau}} = 2N\underline{\underline{D}} + \lambda(\nabla \cdot \underline{\underline{v}}) \underline{\underline{I}}$$

→  $\tau_{ij} = 2N D_{ij} + \lambda D_{kk} \delta_{ij}$  → esiste solo sulla diagonale

$$D_{11} + D_{22} + D_{33} = \text{traccia} = \nabla \cdot \underline{\underline{v}}$$

$$= N(\nabla \cdot \underline{\underline{v}} + \nabla \cdot \underline{\underline{v}}^T) + \lambda(\nabla \cdot \underline{\underline{v}}) \underline{\underline{I}} \quad \text{in coordinate cartesiane}$$

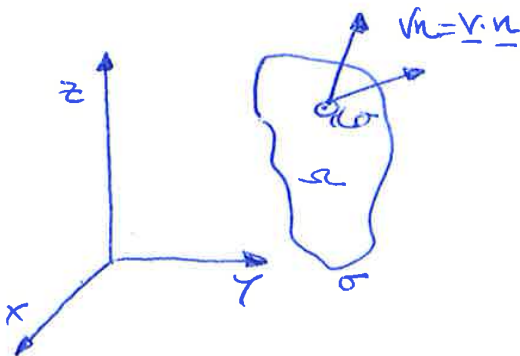
$$\tau_{ij} = N \left( \frac{\delta u_i}{\delta x_j} + \frac{\delta u_j}{\delta x_i} \right) + \lambda \frac{\delta u_k}{\delta x_k} \delta_{ij}$$

il tensore degli sforzi è la traccia nulla.

$$\sum_i \tau_{ii} = N \left( \frac{\delta u_i}{\delta x_i} + \frac{\delta u_i}{\delta x_i} \right) + 3\lambda \frac{\delta u_k}{\delta x_k} = (2N + 3\lambda) \frac{\delta u_k}{\delta x_k} = 0$$

$$\lambda = -\frac{2}{3}N \quad \text{ipotesi di Stokes}$$

• EQUAZIONE del ROTTO



$$q = -k \nabla T \quad \text{Legge di Fourier}$$

$$Q = \int_{\sigma} q \, d\sigma \quad \text{variazioni nel tempo di } Q.$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\sigma} q \, d\sigma = \int_{\sigma} \frac{\delta q}{\delta t} \, d\sigma$$

↳ fissi nello spazio, indipendente dal tempo.

$$-\oint_{\sigma} (q, \underline{\underline{v}}) \cdot d\sigma \underline{\underline{n}} + \int_{\sigma} q \, v \, d\sigma + \int_{\sigma} q (\underline{\underline{q}} \cdot \underline{\underline{n}}) \, d\sigma$$

corrente che porta fuori e dentro la materia.

↳ sorgenti: energia per superficie



• Conservazione QUANTITA' di MOTO

$e \underline{v}$

$$\frac{\partial}{\partial t}(e \underline{v}, \underline{v}) = e \underline{v} \cdot \underline{v} \rightarrow \frac{d}{dt} \int_{\Omega} e \underline{v} d\Omega = - \oint_{\partial \Omega} e \underline{v} (\underline{v} \cdot \underline{n}) d\sigma + \int_{\Omega} \underline{\dot{m}} \cdot \underline{n} d\sigma + \int_{\Omega} e \underline{f} d\Omega$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t}(e \underline{v}) = - \int_{\Omega} \nabla (e \underline{v} \cdot \underline{v}) d\Omega + \int_{\partial \Omega} \nabla \cdot \underline{\dot{m}} d\sigma + \int_{\Omega} e \underline{f} d\Omega \quad \text{telega il volume}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(e \underline{v}) + \nabla (e \underline{v} \cdot \underline{v}) = \underbrace{\nabla \cdot \underline{\dot{m}} + e \underline{f}}_{- \nabla p + \nabla \underline{\zeta}}$$

$+ e \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + e \underline{v} \cdot \nabla \cdot \underline{v}$

$$\underline{v} \left( \frac{\partial e}{\partial t} + \nabla (e \underline{v}) \right) = 0 \quad \text{per la continuità.}$$

$$\rightarrow e \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + e \underline{v} \cdot \nabla \cdot \underline{v} = - \nabla p + \nabla \underline{\zeta} + e \underline{f} \quad \text{Legge Newton.}$$

$$e \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} = - \nabla p + \nabla \underline{\zeta} + e \underline{f}$$

$$\underline{v} \cdot \nabla \cdot \underline{v} = \nabla \cdot \left( \frac{\underline{v}^2}{2} \right) - \underline{v} \times \underline{\omega} \quad \text{VORTICITÀ!}$$

$$\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \nabla \cdot \left( \frac{\underline{v}^2}{2} \right) - \underline{v} \times \underline{\omega} = - \frac{\nabla p}{e} + \frac{\underline{v} \cdot \underline{\zeta}}{e} \underline{f}$$

• Conservazione ENERGIA.

$$e \underline{E} = e \left( \underline{E} + \frac{\underline{v}^2}{2} \right)$$

$$\underline{f}(e, \underline{E}, \underline{v}) = e \underline{E} \underline{v}$$

Considero e' En totale, faccio un bilancio termico-meccanico ↓  
Termico e cinetico

- aspetto Meccanico:  $e \underline{f} \underline{v} \rightarrow \underline{\dot{m}} \cdot \underline{v}$  (Lavoro)

- Termico:  $q \underline{v} \rightarrow -q \cdot \underline{n}$

qs: sorgenti superficiali.

12 ottobre

(1)

$$1) \frac{\delta e}{\delta E} + \nabla \cdot \nabla e = -e \nabla \cdot \underline{v} \quad \nabla \cdot \underline{v} = -\frac{1}{e} \frac{D e}{D t} = -e \frac{D}{D t} \left( \frac{1}{e} \right)$$

$$2) \frac{\delta \underline{v}}{\delta E} + \nabla \cdot \nabla \underline{v} = -\frac{1}{e} \nabla p + \frac{\nabla \underline{\xi}}{e} + \underline{f}$$

$$3) e \left( \frac{\delta E}{\delta t} + \underline{v} \cdot \nabla E \right) = -\nabla (c \underline{v}) + \nabla (\underline{\xi} \cdot \underline{v}) + e \underline{f} \cdot \underline{v} - \nabla \varphi + \underline{q} \cdot \underline{v}$$

eq En cinetica  $e \left[ \frac{\delta}{\delta E} \left( \frac{v^2}{2} \right) + \underline{v} \cdot \nabla \left( \frac{v^2}{2} \right) \right] = -\nabla p \cdot \underline{v} + \nabla (\underline{v} \cdot \underline{\xi}) + e \underline{f} \cdot \underline{v}$

$$e \left[ \frac{\delta E}{\delta E} + \underline{v} \cdot \nabla E \right] = -\nabla \cdot \underline{v} + (\underline{\xi} \cdot \nabla) \cdot \underline{v} - \nabla \varphi + \underline{q} \cdot \underline{v}$$

eq ausiliarie

$$p = e R T \quad R = \frac{R}{M} = \varphi \cdot C_v$$

$$E = C_v T \quad \underline{v} = \frac{\underline{q}}{e}$$

$$p = (\gamma^{-1}) e E$$

$$e \frac{D E}{D t} = -p \nabla \cdot \underline{v} + e \Phi - \nabla \cdot \underline{q} + \underline{q} \cdot \underline{v}$$

$$e \left[ \frac{D E}{D t} + p \frac{D}{D t} \left( \frac{1}{e} \right) \right] = e \Phi - \nabla \cdot \underline{q} + \underline{q} \cdot \underline{v}$$

$$T dS = C_v dT + p d \left( \frac{1}{e} \right)$$

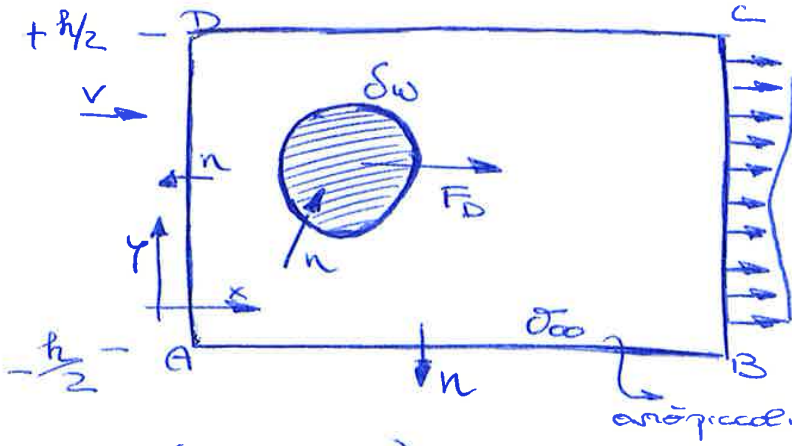
$$e \frac{D S}{D t} = e \Phi - \nabla \cdot \underline{q} + \underline{q} \cdot \underline{v}$$

equazione evoluzione VORTICITÀ

$$\frac{\delta \underline{v}}{\delta E} + \nabla \left( \frac{v^2}{2} \right) - (\underline{v} \times \underline{\omega}) = -\frac{1}{e} \nabla p + \dots$$

$$\nabla \times \frac{\delta \underline{v}}{\delta E} (\nabla \times \underline{v}) = \frac{\delta \underline{\omega}}{\delta E}$$

• ESERCIZIO



prendo un dominio grande 3  
 in modo che  $p_{\infty}$  non  
 abbia più effetto  
 $\omega(y)$

$\underline{u} = 0$  gradienti velocità  
 con gradienti piccole

$(\sigma = \sigma_{\infty} + \sigma_{\omega})$

anòpicci: effetti di uscita

$$\oint_{\partial \omega} \underline{v} \cdot (\underline{v} \cdot \underline{n}) d\sigma = - \oint_{\partial \omega} p \underline{n} d\sigma + \oint_{\partial \omega} (\underline{\xi} \cdot \underline{n}) d\sigma$$

Le n sono sempre uscenti dal fluido

$$\oint_{\partial \omega} \underline{v} \cdot (\underline{v} \cdot \underline{n}) d\sigma = - \oint_{\partial \omega} (p \underline{n}) d\sigma - \overline{T_D}$$

Forza come  $\nabla$  di quantità di moto  
 fra entrata e uscita.

(Senso di percorrenza antiorario)

$$-\overline{T_D} = \rho v L \left[ \int_A^B (\underline{v} \cdot \underline{n}) dx + \int_D^C (\underline{v} \cdot \underline{n}) dx \right] + \rho \int_{-h/2}^{h/2} v^2 \omega(y) dy - \rho v^2 R$$

$$\oint_{\partial \omega} (\underline{v} \cdot \underline{n}) d\sigma + \oint_{\partial \omega} (\underline{v} \cdot \underline{n}) d\sigma = 0$$

Conto entra quanto esce dai 4 lati.

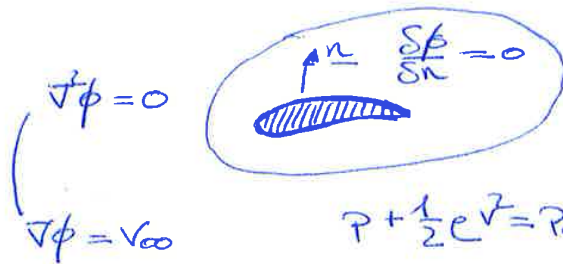
$$\int_A^B (\underline{v} \cdot \underline{n}) dx + \int_B^C (\underline{v} \cdot \underline{n}) dy + \int_D^C (\underline{v} \cdot \underline{n}) dx + \int_A^D (\underline{v} \cdot \underline{n}) dy = 0$$

$$\int_A^B (\underline{v} \cdot \underline{n}) dx + \int_D^C (\underline{v} \cdot \underline{n}) dx = - \int_{-h/2}^{h/2} v^2 \omega(y) dy + v^2 R$$

22 ottobre 2018

AERODINAMICA

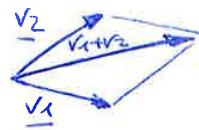
1



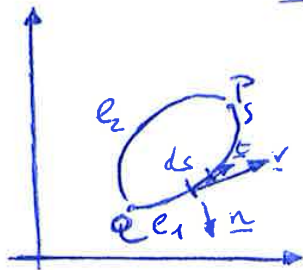
Si riconduce al calcolo del potenziale e al teo Bernoulli.

$$P + \frac{1}{2} \rho V^2 = P_{\infty} + \frac{1}{2} \rho V_{\infty}^2 = P_0$$

$\nabla^2 \phi_x = 0$   
 $\nabla^2 \phi_y = 0$       camp velocità come funz armonica.



→ Non è detto che sia col stesso per le P.  
 Relazione non lineare fra V e P.



$$Q = \int_Q^P (\underline{v} \cdot \underline{n}) ds \quad \text{PORTATA}$$

$$= \int_Q^P v_n \rightarrow \int_Q^P (u dy - v dx) = \text{differenziale}$$

$$\delta \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy$$

$$= \int_Q^P d\phi = \phi(P) - \phi(Q)$$

$$d\phi = u dx + v dy \quad \left\{ \begin{array}{l} u = \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ v = \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{array} \right.$$

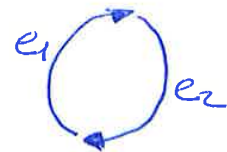
$$\rightarrow d\psi = v dy - u dx$$

$$\left. \begin{array}{l} u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{array} \right\}$$

Non rimpiazza di  $\phi$ , è meglio parlare con le portate.

$$\psi(P) = \int_{e_1}^P (\underline{v} \cdot \underline{n}) ds = \int_{e_2}^P (\underline{v} \cdot \underline{n}) ds$$

$$\int_{e_1}^P (\underline{v} \cdot \underline{n}) ds - \int_{e_2}^P (\underline{v} \cdot \underline{n}) ds = 0$$

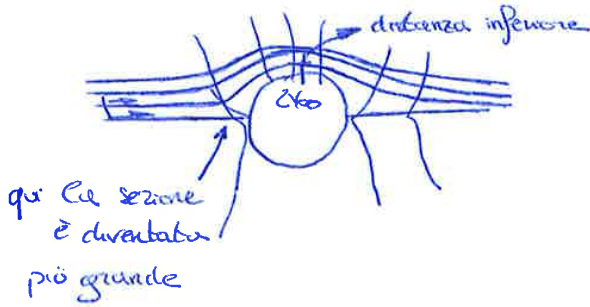


$$\int_{e_1}^P (\underline{v} \cdot \underline{n}) ds + \int_{e_2}^P (\underline{v} \cdot \underline{n}) ds = 0$$

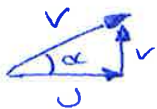
3

$$\nabla^2 \psi = 0$$

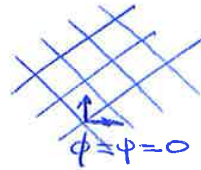
$$\psi = c \cos t$$



• CORRENTE UNIFORME

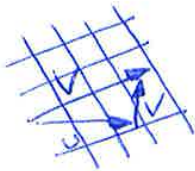


$$\underline{v} = u \underline{i} + v \underline{j}$$



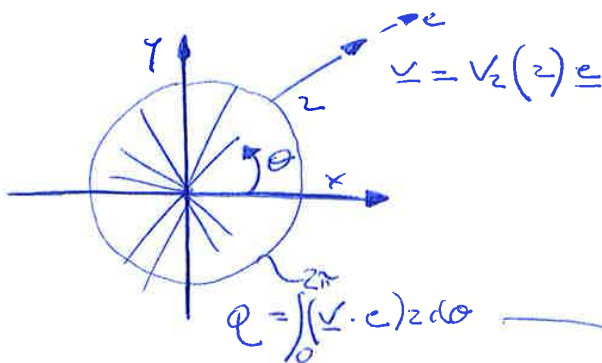
$$\phi = \frac{\delta \phi}{\delta x} x + \frac{\delta \phi}{\delta y} y = ux + vy$$

$$\psi = \frac{\delta \psi}{\delta x} x + \frac{\delta \psi}{\delta y} y = -vx + uy$$



$$\phi = ux + vy$$

$$\psi = -vx + uy$$



$$u = \frac{\delta \phi}{\delta x}$$

$$v_2 = \frac{\delta \phi}{\delta z}$$

$$v = \frac{\delta \phi}{\delta y}$$

$$v_\theta = \frac{1}{2} \frac{\delta \phi}{\delta \theta}$$

$$Q = \int_0^{2\pi} (v \cdot c) z d\theta$$

$$\frac{\delta^2 \phi}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 \phi}{\delta y^2} = 0 \quad \frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta r} \left( r \frac{\delta \phi}{\delta r} \right) + \frac{1}{2r^2} \frac{\delta^2 \phi}{\delta \theta^2} = 0$$

$$u = \frac{\delta \psi}{\delta y} \quad v_0 = \frac{\delta \psi}{\delta x}$$

$$v_2 = \frac{1}{2} \frac{\delta \psi}{\delta \theta} \quad v_\theta = -\frac{\delta \psi}{\delta r}$$

$$\frac{\delta^2 \psi}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 \psi}{\delta y^2} = 0$$

$$\frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta r} \left( r \frac{\delta \psi}{\delta r} \right) + \frac{1}{2r^2} \frac{\delta^2 \psi}{\delta \theta^2} = 0 \quad \int_0^{2\pi} \frac{\kappa}{2} z d\theta = 2\pi \kappa$$

$$\nabla \cdot \underline{v} = \frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta r} (2v_2) + \frac{1}{2} \frac{\delta v_\theta}{\delta \theta}$$

$$\kappa = \frac{Q}{2\pi}$$

$$v_2 = \frac{\kappa}{2}$$

il modulus della velocità decade come  $\frac{1}{2}$ .

$$v_2 = \frac{Q}{2\pi z}$$

per  $z=0 \rightarrow v = \infty$

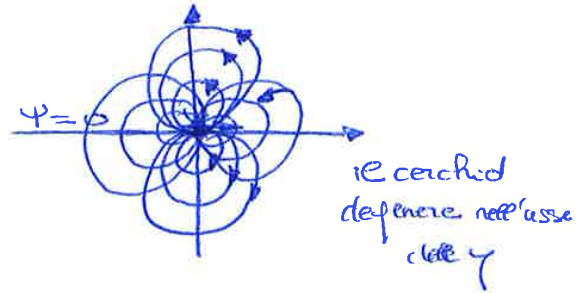


5

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{q}{2\pi} \frac{e^{i\theta}}{z - \epsilon e^{i\theta}} = \frac{\mu}{2\pi z} \sin \theta$$

$$\Psi(x, y) = \frac{\mu}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} = C$$

$$x^2 + y^2 - \frac{\mu}{2\pi C} y = 0$$



$$\frac{\delta \phi}{\delta z} = \frac{1}{z} \frac{\delta \psi}{\delta \theta} = \frac{\mu}{2\pi z^2} \cos \theta$$

$$\frac{1}{z} \frac{\delta \phi}{\delta \theta} = -\frac{\delta \psi}{\delta z} = -\frac{\mu}{2\pi z^2} \sin \theta$$

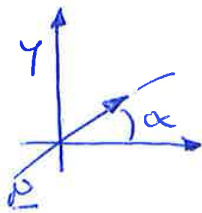
$$d\phi = \int \frac{\mu}{2\pi z} \sin \theta d\theta = -\frac{\mu}{2\pi z} \cos \theta + C$$

$\frac{d}{d\theta} \cos \theta = -\sin \theta$

$$\frac{\delta \phi}{\delta z} = +\frac{\mu}{2\pi z^2} \cos \theta + \frac{d\phi}{dz} = \frac{\mu}{2\pi z^2} \cos \theta$$

$$\frac{d\phi}{dz} = 0 \quad \theta = \text{cost}$$

$$\phi = -\frac{\mu}{2\pi z} \cos \theta$$



$$\psi = + \frac{\mu}{2\pi z} \sin(\theta - \alpha)$$

$$\phi = -\frac{\mu}{2\pi z} \cos(\theta - \alpha)$$

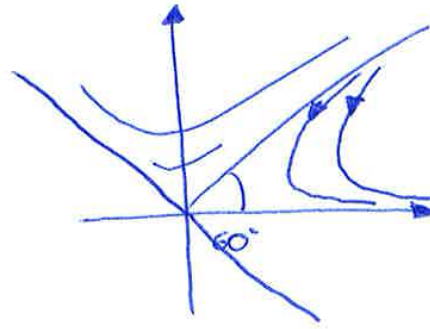
$$\nabla^2 \phi = 0$$

$$\nabla^2 \frac{\delta \phi}{\delta z} = 0$$



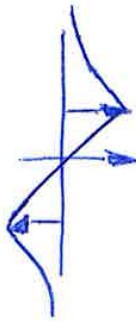
$$C = 0$$

$$3x^2y - y^3 = \frac{3F}{A}$$



17

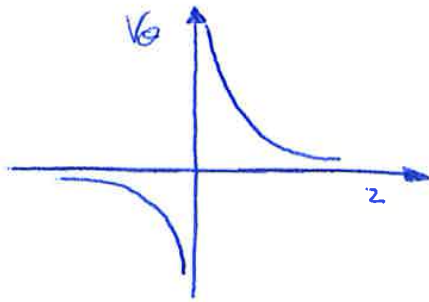
2



La vorticità è trasportata con la corrente

riscepiendo lungo le linee di corrente con la velocità  $v_{\theta}$  locale

• Vortice rotazionale PONTIFORTE



$\alpha \rightarrow 0$

$\Gamma = \omega \alpha^2 \pi$

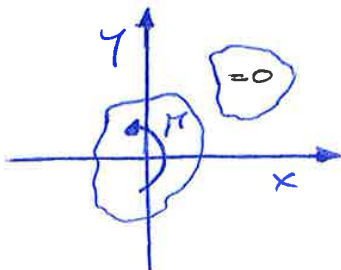
$v_{\theta} = \frac{\Gamma}{2\pi z}$

Non Rd la parte rotazionale

per  $\omega \rightarrow \infty$ , Rd una singolarità.

$\nabla \cdot v = \frac{1}{z} \frac{\delta v_{\theta}}{\delta \theta} = 0$  Divergenza rispettata in tutti i punti.

$\omega = (\nabla \times v) = \frac{\delta}{\delta z} (z v_{\theta}) = 0$



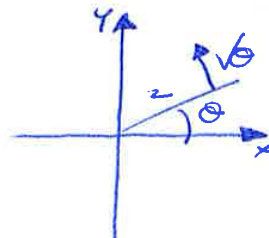
→ tutti i circuiti che concatenano un vortice è  $\mu$

$\mu > 0$  anticlockwise

$\mu < 0$  clockwise

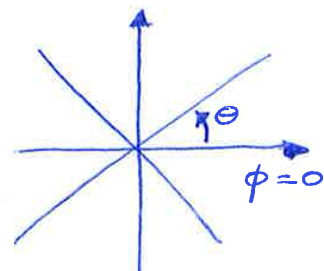
altrimenti  $= 0$  ma non nulla perché ci sono vortici che si riducono a vicenda

$v_z = 0, v_{\theta} = \frac{\Gamma}{2\pi z}$



$\frac{\delta \phi}{\delta z} = 0 \rightarrow \phi = \phi(0)$

$\frac{\delta \phi}{\delta \theta} = v_{\theta} z = \frac{\Gamma}{2\pi} \rightarrow \phi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta$



4

$$V_z = 0 \rightarrow \theta = -\frac{\pi}{2}$$

$$V_\theta = 0$$

$$-V_{\infty} \left( \frac{a^2}{z^2} + 1 \right) + \frac{\Gamma}{2i\pi z} = 0$$

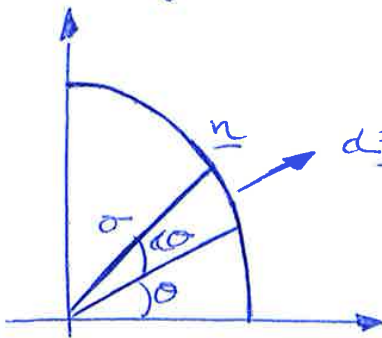
$$z^2 - \frac{\Gamma}{2i\pi V_{\infty}} z + a^2 = 0$$

$$z = \frac{1}{2} \left[ \frac{\Gamma}{2i\pi V_{\infty}} \pm \sqrt{\left( \frac{\Gamma}{2i\pi V_{\infty}} \right)^2 - 4a^2} \right]$$

$$\rightarrow z = a \left[ \frac{\Gamma}{4i\pi a V_{\infty}} \pm \sqrt{\left( \frac{\Gamma}{4i\pi a V_{\infty}} \right)^2 - 1} \right] \quad \text{ma prendo la soluzione positiva}$$

Resultato fondamentale dell'anestesia.

- Dimostrazione che porta al teorema di Joukowski



$$dF = -(p - p_{\infty}) a d\theta n$$

$$c_p = 1 - \left( \frac{v}{V_{\infty}} \right)^2 = \left( 1 - 4 \sin^2 \theta \right) - \left( \frac{\Gamma}{2i\pi a V_{\infty}} \right)^2$$

$$-\frac{2\Gamma}{i\pi a V_{\infty}} \sin \theta$$

$$p - p_{\infty} = \frac{1}{2} \rho V_{\infty}^2 c_p = -\frac{\rho V_{\infty} \Gamma}{i\pi a} \sin \theta$$

$$\rightarrow dF = \frac{\rho V_{\infty} \Gamma}{i\pi} \sin \theta d\theta$$

valore che varia e scompone.

$$dF_x = dF \cos \theta = \frac{\rho V_{\infty} \Gamma}{i\pi} \cos \theta \sin \theta d\theta$$

$$dF_y = dF \sin \theta = \frac{\rho V_{\infty} \Gamma}{i\pi} \sin^2 \theta d\theta$$

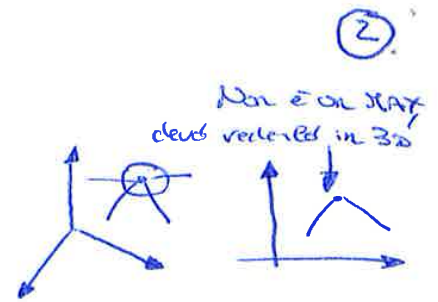
$$D = F_x = \frac{\rho V_{\infty} \Gamma}{i\pi} \int_0^{2\pi} \cos \theta \sin \theta d\theta = 0$$

componente nulla

$$L = F_y = \frac{\rho V_{\infty} \Gamma}{i\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = \underline{\underline{\rho V_{\infty} \Gamma}}$$

$$\frac{1}{2} \oint_{\partial\Omega} \frac{\delta\phi^2}{\delta n} d\sigma = \int_{\Omega} |\nabla\phi|^2 d\Omega$$

$$\frac{1}{2} \oint_{\partial\Omega} \frac{\delta v^2}{\delta n} d\sigma = \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 + |\nabla w|^2) d\Omega$$



→ La velocità max si ha sul bordo

$$\frac{\delta\phi}{\delta t} + \frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} = H_B$$

$$\frac{\delta}{\delta t} \nabla\phi + \frac{1}{2} \nabla v^2 + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0$$

$$\oint_{\partial\Omega} (\nabla p \cdot \underline{n}) d\sigma = -\rho \frac{\delta}{\delta t} \oint_{\partial\Omega} (\nabla\phi \cdot \underline{n}) d\sigma - \frac{\rho}{2} \oint_{\partial\Omega} (\nabla \cdot \underline{v} \cdot \underline{n}) d\sigma$$

$$\oint_{\partial\Omega} \frac{\delta p}{\delta n} d\sigma = -\rho \frac{\delta}{\delta t} \int_{\Omega} \nabla \cdot (\nabla\phi) d\Omega - \frac{\rho}{2} \oint_{\partial\Omega} \frac{\delta v^2}{\delta n} d\sigma$$

$\nabla^2\phi = 0$

$$M = \oint_{\partial\Omega} \underline{v} \cdot \underline{t} d\sigma = \int_{\Omega} (\underline{\omega} \cdot \underline{n}) d\Omega = 0$$

$$M = \int_{\partial\Omega} \underline{v} \cdot \underline{t} \cdot d\sigma - \int_{\partial\Omega} \underline{v} \cdot \underline{t} \cdot d\sigma = 0$$

$$\nabla\phi \cdot \underline{t} d\sigma = \frac{\delta\phi}{\delta s} ds = d\phi$$

$$\int_{\partial\Omega} \phi(P) \underline{e}_1 - \int_{\partial\Omega} \phi(P) \underline{e}_2 = 0$$

$$\phi(P) \underline{e}_1 = \phi(P) \underline{e}_2$$

$$\nabla^2(\phi_1 - \phi_2) = 0$$

$$\frac{\delta}{\delta n}(\phi_1 - \phi_2) = 0$$

Impongo Neumann per  
le condizioni di derivata

4

$\mu$  sempre costante

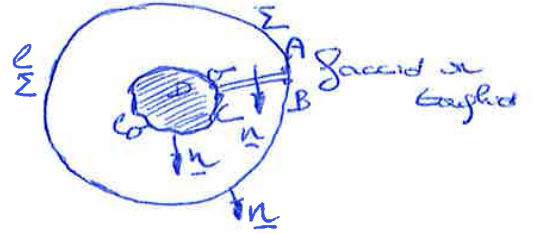
Campi di vettore continui.

Circuitalazione  $\neq 0$  e n.e.  $M$ .

- $$\nabla(\phi_1 - \phi_2) = 0$$

$$\frac{\delta}{\delta n}(\phi_1 - \phi_2) = 0 \quad \sigma$$

$$\phi_1 - \phi_2 \rightarrow 0$$



$$(\phi_1 - \phi_2)_{BC} = (\phi_1 - \phi_2)_{DA}$$

$$\left[ \frac{\delta}{\delta n}(\phi_1 - \phi_2) \right]_{BC} = \left[ \frac{\delta}{\delta n}(\phi_1 - \phi_2) \right]_{DA}$$

$$\int_{\Omega} |\nabla(\phi_1 - \phi_2)|^2 d\Omega = \int_{\text{barra}} \left\{ \left[ (\phi_1)_{DA} - (\phi_1)_{BC} \right] - \left[ (\phi_2)_{DA} - (\phi_2)_{BC} \right] \right\} \frac{\delta}{\delta n_1}(\phi_1 - \phi_2) dS$$

$$\int_{\text{barra}} (\mu_1 - \mu_2) \frac{\delta}{\delta n}(\phi_1 - \phi_2) dS$$

Era le  $\mu$  condizioni ne devv scegliere una particolare valore di  $M$ .

2

$$dF_{px} = dF_p \cos \theta = - (p - p_{\infty}) R \cos \theta d\theta$$

$$dF_{py} = dF_p \sin \theta = - (p - p_{\infty}) R \sin \theta d\theta$$

$$\int_0^{2\pi} e (V_{\infty} + V_M \sin \theta) V_{\infty} \cos \theta R d\theta = F_x - \int_0^{2\pi} p R \cos \theta d\theta \quad (*)$$

$$-\int_0^{2\pi} e V_M \cos^2 \theta R d\theta = F_y - \int_0^{2\pi} p R \sin \theta d\theta \quad (†)$$

ed applico tramite  
Bernoulli.

$$v^2 = |V_{\infty} + V_M|^2 = V_{\infty}^2 + V_M^2 + 2V_{\infty} V_M \sin \theta$$

teso con  
Potenza

$$V_{\infty}^2 - v^2 = -2V_{\infty} V_M \sin \theta$$

$$p = p_{\infty} + \frac{1}{2} \rho (V_{\infty}^2 - v^2) = p_{\infty} - \rho V_{\infty} V_M \sin \theta$$

$$\begin{aligned} (†) F_x &= \int_0^{2\pi} e (V_{\infty} + V_M \sin \theta) V_{\infty} R \cos \theta d\theta + \int_0^{2\pi} (p_{\infty} - \rho V_{\infty} V_M \sin \theta) R \cos \theta d\theta = \\ &= R (p_{\infty} - \rho V_{\infty}) \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta = \underline{0} \end{aligned}$$

come da paradosso di D'Alembert

$$(†) F_y = - \int_0^{2\pi} \rho V_{\infty} V_M R \sin^2 \theta d\theta + \int_0^{2\pi} (p_{\infty} - \rho V_{\infty} V_M \sin \theta) R \sin \theta d\theta$$

$$= -2\pi \rho V_{\infty} V_M R$$

$\downarrow \frac{V_M}{2\pi R}$

Σ algebrica dei vortici

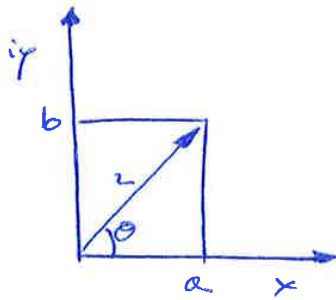
→ L = ρ V<sub>∞</sub> Γ V corp

con resistenza = 0 (D=0)

L = ρ V<sub>∞</sub> Γ come risultato K-I e d'Ale come condizione



Numeri Complessi.



$$i^2 = -1 \quad \bar{z} = a - ib$$

$$z_1 = a + ib \quad z_2 = c + id$$

$$z_1 + z_2 = (a + c) + i(b + d)$$

$$z \bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$$

$$z_1 z_2 = (a + ib)(c + id) = (ac - bd) - i(ad + bc)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2}$$

• uso le coordinate polari

$$z^2 = a^2 + b^2 \quad a = z \cos \theta$$

$$\tan \theta = \frac{b}{a} \quad b = z \sin \theta$$

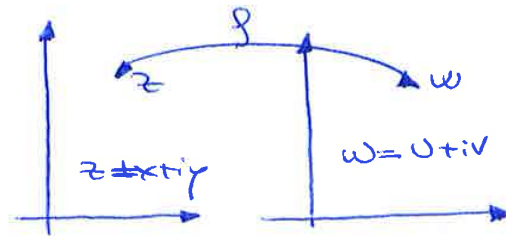
$$\bar{z} = z (\cos \theta + i \sin \theta) = z e^{i\theta}$$

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$$

$$z^n = z^n e^{in\theta} = z^n (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta))$$

funzione di variabile complessa

$$w = f(z)$$



$$u = u(x, y)$$

$$v = v(x, y)$$

$$f'(z_0) = \left( \frac{df}{dz} \right)_{z=z_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

n.B: Non posso fare questo discorso in  $\mathbb{R}^2$ .

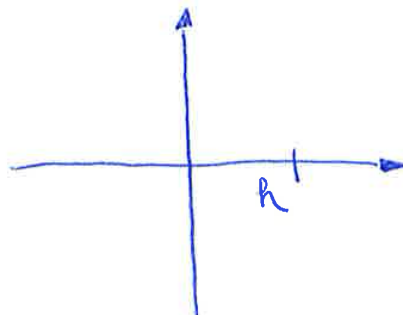
funz analitiche:  $\forall$  punto  $\exists$  la  $f'$

$$af(z) + bg(z) \quad \text{con } a \text{ e } b = \text{costanti}$$

$$f(z)g(z)$$

$$f'(z)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$



6

$$z_1 - z_0 = z e^{i\theta_1}$$

$$z_2 - z_0 = z e^{i\theta_2}$$

$$\frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0} = e^{i(\theta_2 - \theta_1)}$$

$$\alpha = \lim_{z \rightarrow 0} (\theta_2 - \theta_1) = \lim_{z \rightarrow 0} \arg\left(\frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0}\right)$$

$$\beta = \lim_{z \rightarrow 0} \arg\left(\frac{f(z_2) - f(z_0)}{f(z_1) - f(z_0)}\right) = \lim_{z \rightarrow 0} \arg\left(\frac{f(z_2) - f(z_0)}{f(z_1) - f(z_0)}\right)$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} \arg \left[ \frac{\frac{f(z_2) - f(z_0)}{z_2 - z_0} (z_2 - z_0)}{\frac{f(z_1) - f(z_0)}{z_1 - z_0} (z_1 - z_0)} \right] = \lim_{z \rightarrow 0} \arg \left( \frac{z_2 - z_1}{z_1 - z_0} \right) = \alpha$$

gli angoli si conservano  
così conservati di i campi di moto

(2)

$$\frac{\delta}{\delta x} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\delta}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\delta}{\partial \eta}$$

$$\frac{\delta^2}{\delta x^2} = \left( \xi_x \frac{\delta}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\delta}{\partial \eta} \right)^2 = \xi_x^2 \frac{\delta^2}{\partial \xi^2} + 2 \xi_x \eta_x \frac{\delta^2}{\partial \xi \partial \eta} + \eta_x^2 \frac{\delta^2}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\delta^2}{\delta y^2} = \left( \xi_y \frac{\delta}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\delta}{\partial \eta} \right)^2 = \xi_y^2 \frac{\delta^2}{\partial \xi^2} + 2 \xi_y \eta_y \frac{\delta^2}{\partial \xi \partial \eta} + \eta_y^2 \frac{\delta^2}{\partial \eta^2}$$

Esclusi i contributi misti:

$$\xi + i\eta = f(x + iy)$$

$$\begin{cases} \xi_x = \eta_y \\ \xi_y = -\eta_x \end{cases}$$

$$\left[ (\xi_x^2 + \xi_y^2) \frac{\delta^2}{\partial \xi^2} + (\eta_x^2 + \eta_y^2) \frac{\delta^2}{\partial \eta^2} \right] R^* = 0$$

$|f'(z)| \left[ \frac{\delta^2 R^*}{\partial \xi^2} + \frac{\delta^2 R^*}{\partial \eta^2} \right] = 0$  Le parti armoniche vengono sempre trasformate in funzioni armoniche

$$\begin{cases} R_\xi^* = \rho_n^* \\ R_\eta^* = -\rho_\xi^* \end{cases}$$

sono sempre coniugate

$$\begin{aligned} R(x,y) &\rightarrow R^*(\xi, \eta) & \nabla^2 R^* &= \nabla^2 \rho^* = 0 \\ f(x,y) &\rightarrow f^*(\xi, \eta) & R_\xi^* &= \rho_n^* \quad R_\eta^* = -\rho_\xi^* \end{aligned}$$

$w = h + ip \rightarrow w^* = R^* + \rho^*$  sono sempre funzioni analitiche

$$W(z) = \phi(x,y) + i\psi(x,y)$$

• Potenziale complesso delle velocità

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dz} &= \frac{\delta w}{\delta x} = \frac{\delta \phi}{\delta x} + i \frac{\delta \psi}{\delta x} \\ &= \frac{\delta w}{\delta y} = -i \frac{\delta w}{\delta y} = -i \left( \frac{\delta \phi}{\delta y} + i \frac{\delta \psi}{\delta x} \right) \end{aligned}$$

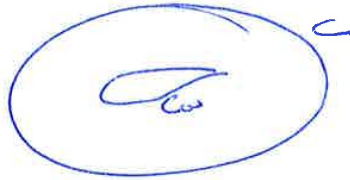
$u - iv$

(4)

$$x = \oint_C \frac{e}{2} v^2 dy - \oint_C e u (x dy - v dx)$$

$$y = -\oint_C \frac{e}{2} v^2 dx - \oint_C e v (x dy - v dx)$$

$$x - iy = \frac{e}{2} \oint_C v^2 (dy + i dx) - e \oint_C (u - iv)(x dy - v dx)$$



$v, u$   
integrale  
che va via.

$$d\bar{z} = dx - i dy$$

$$i d\bar{z} = dy + i dx$$

$$v^2 = \frac{dw}{dz} \left( \frac{d\bar{w}}{d\bar{z}} \right)$$

$$x - iy = i \frac{e}{2} \oint_C \frac{dw}{dz} \left( \frac{d\bar{w}}{d\bar{z}} \right) d\bar{z}$$

$$\left( \frac{d\bar{w}}{d\bar{z}} \right) d\bar{z} = d\bar{w} = d\phi - i d\psi = d\phi + i d\psi = \frac{dw}{dz} dz$$

Jonker  
Blasius

$$x - iy = i \frac{e}{2} \oint_C \left( \frac{dw}{dz} \right)^2 dz$$

2

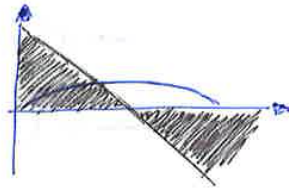
$$\frac{dy_m}{dx} = 4R \left(1 - 2\frac{x}{c}\right) = 4R \cos\theta$$

$$\frac{x}{c} = \frac{1}{2}(1 - \cos\theta) \rightarrow 1 - 2\frac{x}{c} = \cos\theta$$

$$\alpha_{id} = \frac{4R}{\pi} \int_0^{\pi} \cos\theta d\theta = 0$$

incidenza ideale

→ Nessi in tutte le linee medie



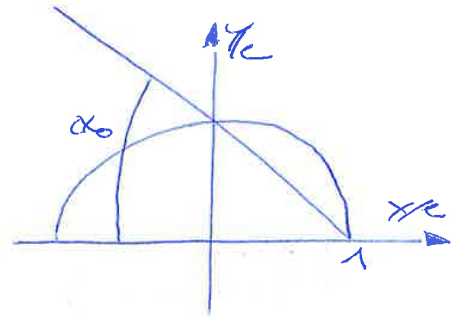
$$A_0 = \alpha$$



Corrente piegata verso e' alto da effetti di disturbo e segue la lamina.

$$A_1 = \frac{2}{\pi} 4R \int_0^{\pi} \cos^2\theta d\theta = \frac{2}{\pi} 4R \frac{\pi}{2} = 4R$$

$$\alpha_0 = \alpha_{id} - \frac{A_1}{2} = -2R$$



$$A_2 = \frac{2}{\pi} 4R \int_0^{\pi} \cos\theta \cos(2\theta) d\theta = 0$$

$$C_{m0} = -\frac{\pi}{4} 4R = -\pi R$$

$C_p^- = C_p^+$  perché lamina, profilo senza spessore.

$$A_n = \frac{2 \cdot 4R}{\pi} \int_0^{\pi} \cos\theta \cos(n\theta) d\theta = \begin{cases} 4R & n=1 \\ 0 & n > 1 \end{cases}$$

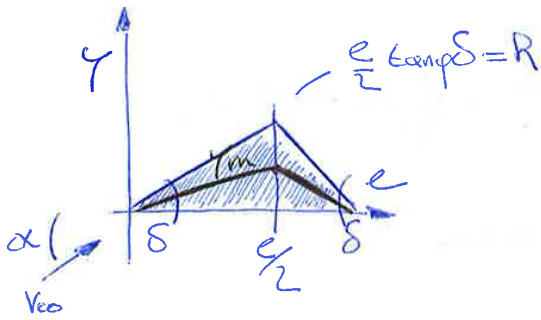
$$C_p^{\pm}(x) = \mp 2A_1 \sin\theta = \mp 8R \sin\theta$$

$$\Delta C_p = C_p^- - C_p^+ = 16R \sin\theta$$

$$C_e = \int_0^c \Delta C_p \frac{dx}{c} = \frac{16R}{2} \int_0^{\pi} \sin^2\theta d\theta = 4\pi R$$

4

• Esercizio 2.



$\alpha_{id}$

$\alpha_0$

$C_e$

$C_{m0}$

Studia la linea mediana (spezzata)

$$y_m \begin{cases} \frac{h}{e} x & 0 \leq x \leq \frac{e}{2} \\ -\frac{h}{e}(x-e) & \frac{e}{2} \leq x \leq e \end{cases}$$

$$dy_m \begin{cases} \frac{h}{e} & 0 \leq x < \frac{e}{2} \\ -\frac{h}{e} & \frac{e}{2} < x \leq e \end{cases}$$

$$\alpha_{id} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{dy_m(\theta)}{dx} d\theta = \frac{1}{\pi} \frac{h}{e} \left[ \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \right] = 0 \quad \text{incidenza ideale nulla}$$

$$A_1 = \frac{2R}{\pi e} \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos \theta d\theta \right) = \frac{4R}{\pi e}$$

$$C_e = 2\pi \left( \alpha + \frac{2R}{\pi e} \right) \quad \alpha_0 = -\frac{A_1}{2} = -\frac{2R}{\pi e}$$

$$A_2 = \frac{2R}{\pi e} \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2\theta) d\theta - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(2\theta) d\theta \right) = 0$$

$$C_{m0} = -\frac{\pi}{4} \frac{4R}{\pi e} = -\frac{R}{e} \quad \begin{matrix} C = 2\theta \\ dC = 2d\theta \end{matrix}$$

profilo operativo di applicazione pratica.



$$A_1 = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \cos \theta - \frac{3}{2} \cos^2 \theta - 3 \cos^3 \theta \right) d\theta$$

$$= -\frac{1}{8} \left( -\frac{3}{4} \right) = \frac{3}{32}$$

$$\alpha_{id} = \alpha_{id} - \frac{A_1}{2} = \frac{1}{32} - \frac{3}{2} \frac{1}{32} = -\frac{1}{64} \text{ rad}$$

$$(c_e)_{\alpha_{id}} = 2\pi \left( \frac{1}{32} + \frac{1}{64} \right) = \frac{6\pi}{2 \cdot 32} = 92.95$$

$$A_2 = -\frac{1}{8\pi} \int_0^{2\pi} \left( \cos(2\theta) - \frac{3}{2} \cos \theta \cos(2\theta) - 3 \cos^2 \theta \cos(2\theta) \right) d\theta$$

$$= \frac{3}{8\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta (2 \cos^2 \theta - 1) d\theta$$

$$\frac{3}{8\pi} \int_0^{2\pi} \left( \underbrace{2 \cos^4 \theta}_{\frac{3\pi}{8}} - \underbrace{\cos^2 \theta}_{\frac{\pi}{2}} \right) d\theta = \frac{3}{8} \left[ \frac{6}{8} - \frac{1}{2} \right] = \frac{3}{32}$$

$$C_{m0} = -\frac{1}{4} (A_1 - A_2) = 0$$

2

$$\bar{v} = \frac{v}{\sqrt{co}} = \sin \alpha$$

$$\bar{v} - i\bar{v} = e^{-i\alpha} + \frac{i}{2\pi} \left[ \frac{(x - \frac{1}{4}) - iy}{(x - \frac{1}{4})^2 + y^2} \bar{\pi}_1 + \frac{(x - \frac{1}{4}) - i(\gamma - R)}{(x - \frac{1}{4})^2 + (\gamma - R)^2} \bar{\pi}_2 \right]$$

$$\bar{v} = \sin \alpha = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{(x - \frac{1}{4}) - iy}{(x - \frac{1}{4})^2 + y^2} \bar{\pi}_1 + \frac{(x - \frac{1}{4})}{(x - \frac{1}{4})^2 + (\gamma - R)^2} \bar{\pi}_2 \right]$$

$$z_n^{(i)} = \frac{3}{4} \frac{1/2}{1/4} \bar{\pi}_1 + \frac{1/2}{1/4 + R^2} \bar{\pi}_2 = 2\pi \sin \alpha$$

$$\begin{cases} \bar{\pi}_1 + \frac{1}{1+4R^2} \bar{\pi}_2 = \pi \sin \alpha \\ \frac{1}{1+4R^2} \bar{\pi}_1 + \bar{\pi}_2 = \pi \sin \alpha \end{cases} \quad z_n^{(c)} = \frac{3}{4} + iR$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{1+4R^2} \\ \frac{1}{1+4R^2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\pi}_1 \\ \bar{\pi}_2 \end{pmatrix} = \pi \sin \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A\pi = \pi \sin \alpha I$$

$$\pi = \pi \sin \alpha A^{-1}$$

$$\begin{aligned} Ax &= B \\ x &= A^{-1}B \end{aligned}$$

$$\bar{\pi}_1 = \bar{\pi}_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{1+4R^2} \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{1+4R^2} \\ \frac{1}{1+4R^2} & 1 \end{vmatrix}} \pi \sin \alpha =$$

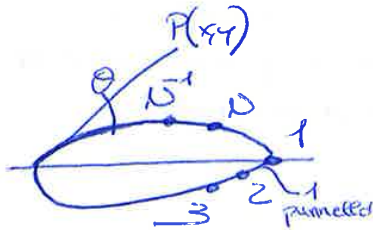
$$= \frac{1 - \frac{1}{1+4R^2}}{1 - \frac{1}{(1+4R^2)^2}} \pi \sin \alpha = \frac{\pi (1 + 4R^2)}{2 + 4R^2} \sin \alpha$$



$$\phi = \phi_{\infty} + e^{(s)} + e^{(v)}$$

$$\phi(x, y)$$

$$\phi(x, y) = V_{\infty} (x \cos \alpha + y \sin \alpha) + \int \left( \frac{q(s)}{2i\pi} e^{i\pi z} - \frac{V(s)}{2i\pi} e^{-i\pi z} \right) ds$$



$$\sum_{j=1}^N \left[ \frac{q_j}{z} \frac{y}{z_j} \right] ds$$

Definisci dei punti  $\rightarrow$  più n pannelli: zelle lineari

Diventa così la somma di tanti integrali più semplici

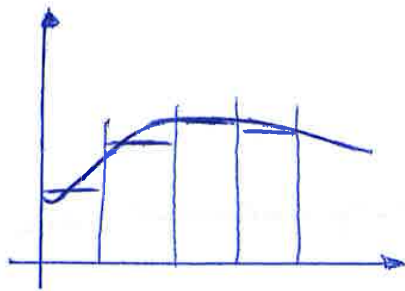


4 punti non sono sufficienti in questa conformazione

$\rightarrow$  Scompongo il profilo in tanti pannelli: ma ci deve essere un numero di punti sufficiente

• Addensamento dei nodi dove il raggio di curvatura è più piccolo (Metodo che si può estendere al 3D)

$\rightarrow$  Più la curva è stretta, più molti nodi.



possibile andare su di ordine e mettere la parabola

Valori costanti di  $q_1, q_2 \dots q_n$   
 $\rightarrow$  ogni singolo pannello

(2)

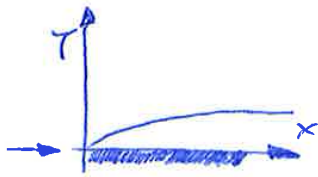
$$\frac{V_E(x)}{U_{\infty}} = \frac{1,2168 \frac{\sqrt{2}}{2}}{0,8604} \frac{1}{\sqrt{Re_x}} \quad (1,2168)$$

$$\begin{aligned} \tau_w(x) &= \mu \left( \frac{\delta u}{\delta y} \right)_w = \mu U_{\infty} \frac{S_n}{S_T} g'(0) = \frac{0,4656}{\sqrt{2}} \mu \sqrt{U_{\infty}} \sqrt{\frac{U_{\infty}}{r x}} \\ &\quad \downarrow \sqrt{\frac{U_{\infty}}{2 r x}} \\ &= 0,322 \cdot \mu \sqrt{U_{\infty}} \sqrt{\frac{U_{\infty}}{r x}} \end{aligned}$$

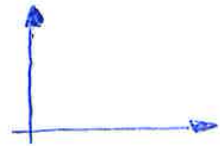
skin friction

$$\rightarrow c_f \equiv \frac{\tau_w(x)}{\frac{1}{2} \rho U_{\infty}^2} = (2 \cdot 0,322) \frac{\mu \sqrt{U_{\infty}}}{\rho U_{\infty}^2} \sqrt{\frac{U_{\infty}}{r x}}$$

$$c_f = 0,664 \sqrt{\frac{r}{U_{\infty} x}} = \frac{0,664}{\sqrt{Re_x}}$$



crece ed sbalza limite



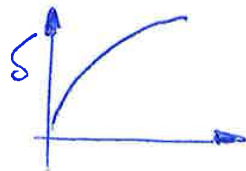
il  $c_f$  vicino a zero non funziona, nel punto di arresto non ha spessore nullo

La spessore dello strato limite in teoria non finisce mai.

$$\delta_v = 0,595 U_{\infty}$$

$$n = \gamma \sqrt{\frac{U_{\infty}}{2 r x}} = 3,54 = \delta \sqrt{\frac{U_{\infty}}{2 r x}} \rightarrow \delta(x) = (3,54 \sqrt{2}) \frac{x}{\sqrt{Re_x}}$$

$$\delta(x) = 5,0 \frac{x}{\sqrt{Re_x}}$$

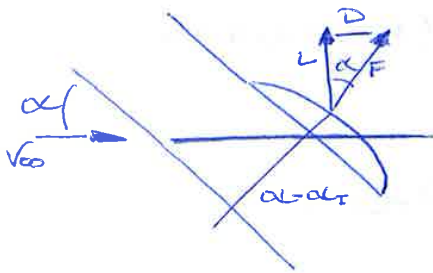


3 dicembre

prof ARINA

①

AERODINAMICA



portanza

$$L = \rho V_{\infty} \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(y) dy$$

$$D = \rho V_{\infty} \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(y) \alpha_i(y) dy = a_i L$$

Solo per la distribuzione Ellittica

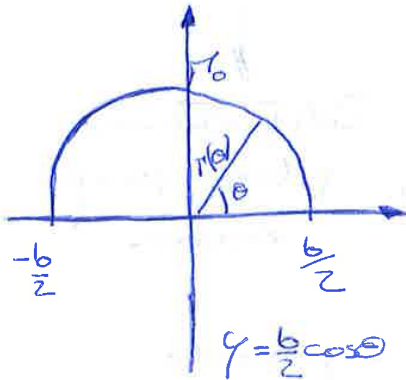
Incidenza Indotta

$$\alpha_i(y) = \frac{1}{4\pi V_{\infty}} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{d\Gamma(y')}{y-y'}$$

$$C_D = \frac{C_L^2}{\pi A}$$

$$\Gamma(y) = \pi c(y) V_{\infty} \left[ \alpha(y) - \alpha(y) - \frac{1}{4\pi V_{\infty}} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{c\Gamma(y')}{y-y'} dy' \right]$$

$$\Gamma(\pm b/2) = 0$$



$$\frac{\Gamma^2}{\Gamma_0^2} + \frac{y^2}{(b/2)^2} = 1$$

$$\Gamma(y) = \Gamma_0 \sqrt{1 - \frac{y^2}{(b/2)^2}}$$

$$\Gamma(\theta) = \Gamma_0 \sin \theta$$

$$d\Gamma(\theta) = \Gamma_0 \cos \theta d\theta$$

$$\alpha_i(\theta) = \frac{1}{4\pi V_{\infty}} \int_{\pi}^0 \frac{\Gamma_0 \cos \theta' d\theta'}{b/2(\cos \theta - \cos \theta')}$$

$$= \frac{\Gamma_0}{2\pi b V_{\infty}} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta'}{\cos \theta - \cos \theta'} d\theta' = \frac{\Gamma_0}{2b V_{\infty}}$$

Solo per questo caso  
incidenza indotta

costante

latta e l'apertura

alare, in

generale = funzione  
di  $\gamma$

Distribuzione ellittica di portanza  
→ nozione

3

$$M_0 = \pi \kappa \epsilon_0 V_{00} \left( \alpha_0 - \frac{M_0}{2bV_{00}} \right)$$

$$M_0 \left( \frac{1}{\pi \kappa \epsilon_0 V_{00}} + \frac{1}{2bV_{00}} \right) = \alpha_0$$

$$M_0 \frac{1}{2bV_{00}} \left( \frac{2bV_{00} + \pi \kappa \epsilon_0 V_{00}}{\pi \kappa \epsilon_0 V_{00}} \right) = \alpha_0$$

$$M_0 \frac{1}{2bV_{00}} \left( 1 + \frac{2bV_{00}}{\pi \kappa \epsilon_0 V_{00}} \right) = \alpha_0$$

$$M_0 \frac{1}{2bV_{00}} \left( 1 + \frac{2b^2}{4\kappa \epsilon_0} \right) = \alpha_0$$

$$M_0 \frac{1}{2bV_{00}} \left( 1 + \frac{\lambda}{2\kappa} \right) = \alpha_0 \quad \rightarrow \quad M_0 = \frac{2bV_{00}}{1 + \frac{\lambda}{2\kappa}} \alpha_0$$

$$C_e = 2\pi \kappa \alpha_0 = C_e \alpha_0$$

$$C_e' = 2\pi \kappa$$

$$M_0 = \frac{2bV_{00}}{1 + \frac{\lambda}{2\kappa}} (\alpha_0 - \alpha_i)$$

$$L = eV_{00} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \rho(y) dy = \pi \kappa eV_{00}^2 (\alpha_0 - \alpha_i) \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} e(y) dy$$

$$= \pi \kappa eV_{00}^2 (\alpha_0 - \alpha_i)$$

$$C_e = \frac{\pi \kappa eV_{00}^2}{\frac{1}{2} eV_{00}^2} \left( \alpha_0 - \frac{C_e}{\pi \lambda} \right) = 2\pi \kappa \left( \alpha_0 - \frac{C_e}{\pi \lambda} \right)$$



10 Dicembre 2018

prof ARINA

**AERODINAMICA**

**• VISCOSITA'**

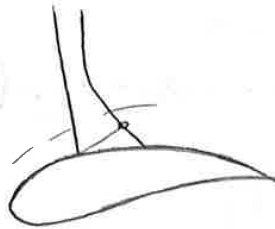
Scoperta di viscosità definita da aderenza viscosa. (Condizione di Aderenza)

→ diffusione / convezione

→ creazione del fenomeno

effetto Cometa { velocità dalla parete che viene spazzato via

Rappato capillare da  $Re$  / fenomeni vel ca diffusivi / basse



è più grande  $Re$  regione in cui avviene la transizione

**- Correnti Viscose (Navier-Stokes)**

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\delta \epsilon}{\delta t} + \nabla(\epsilon \cdot \underline{v}) &= 0 \\ \frac{\delta \underline{v}}{\delta t} + \underline{v} \cdot \nabla \underline{v} &= -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nabla \cdot \underline{\underline{\tau}} + \epsilon \underline{\underline{f}} \\ \frac{\delta \epsilon}{\delta t} + \underline{v} \cdot \nabla \epsilon & \end{aligned} \right. \quad \underline{\underline{\tau}} = \mu [\nabla \cdot \underline{v} + \nabla \nabla^T] - \frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot \underline{v}) \underline{\underline{I}}$$

$$\left\{ \begin{aligned} p &= p(\epsilon, T) \\ \epsilon &= \rho T \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \underline{v} &= 0 \\ \frac{\delta \epsilon}{\delta t} + \underline{v} \cdot \nabla \epsilon &= -\epsilon \underbrace{(\nabla \cdot \underline{v})}_{=0} = 0 \\ \frac{D\epsilon}{Dt} &= 0 \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \nabla \cdot \underline{v} &= 0 \\ \nabla \epsilon &= 0 \\ \downarrow \\ \frac{\delta \epsilon}{\delta t} &= 0 \end{aligned} \right.$$

Sempre valid per i liquidi e per i gas a basse vel con piccoli  $St$

La densità è costante nello spazio e nel tempo

$$-\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\delta \rho}{\delta p} \right)_T \frac{Dp}{Dt} - \frac{1}{\rho} \left( \frac{\delta \rho}{\delta T} \right)_p \frac{DT}{Dt}$$

(1) espansione meccanica
(2) espansione termica

3

• il campo di T è disaccoppiato da quello vel

vel e P non sono funzione della T.

[ T si comporta come un scalare PASSIVO ]

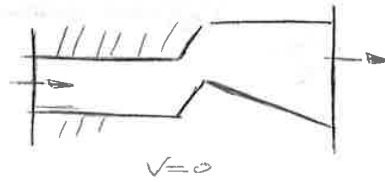
(Vale per St piccoli)

↓  
si fa trasportare

→ P solo Teorica e non term

→ Calcolo velocità con  $\nabla \cdot \underline{v} = 0$

$$\nabla \cdot \underline{v} = -e \nabla \cdot (\underline{v} \cdot \nabla \underline{v})$$



$$\nabla \cdot \underline{v} = 0$$

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot \underline{v}) d\Omega = 0 \rightarrow \oint_{\sigma} (\underline{v} \cdot \underline{n}) d\sigma = 0$$

$$\frac{\delta \omega}{\delta t} + \underline{v} \cdot \nabla \omega = \omega \cdot \nabla \underline{v} + \dots$$

$$\nabla \times (\nabla \cdot \underline{v}) = \nabla^2 \underline{v}$$

componente  $\perp$  al grad

in 2D:  $\frac{\partial \omega}{\partial t} = \underline{v} \cdot \nabla \omega$

$$\omega = \frac{\delta v}{\delta x} - \frac{\delta u}{\delta y}$$

La vorticità non si crea non si distrugge, che si diffonde solo (dalla viscosità)

↓  
si spalma nell'atmosfera e lì rimane.

$$e \cdot v \cdot L \cdot \pi \cdot v$$

più che in T caratteristici, si parla di velocità

$$\pi = \frac{L}{v}$$

tempo che una particella impiega per ~~raccogliere~~ percorrere una corda

$$|\underline{v}| = \frac{|\underline{x}|}{L}$$

$$\frac{v}{L} = \frac{v}{L}$$

$$\tilde{E} = \frac{v}{\pi} = \frac{v}{L} \cdot L$$

$$\pm U = -\frac{G}{\rho} \frac{R^2}{2} \pm C_1 R + C_2$$

$$0 = -\frac{G R^2}{\rho} + 2C_1 R$$

$$\left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} C_1 = \frac{G R}{2\rho}$$

$$C_1 = \frac{G}{2\rho}$$

$$u(r) = U \frac{r}{R} - \frac{R^2}{2\rho} \frac{dp}{dr} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

$$p = -Gx$$

$$-\frac{dp}{dr} = G$$

(2)

$$\sum_{n=1}^N B_{nm} A_n = \alpha(\theta_n) - \alpha_0(\theta_n) \quad m = 1 \dots N$$

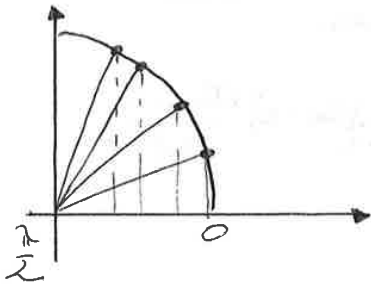
$$B_{mn} = \left[ \frac{4b}{c'e'e(\theta_n)} + \frac{n}{\sin(\theta_n)} \right] \sin(n\theta_n)$$

$$\downarrow \quad \begin{matrix} n \rightarrow \\ B_{mn} \end{matrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(\theta_n) - \alpha_0(\theta_n) \end{pmatrix}$$

$$B_{mn} A_n = B_m$$

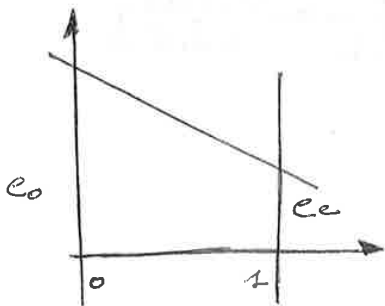
$$A_n = B_{mn}^{-1} B_m$$

$$\sum_{n=1}^N A_{2n-1} \sin[(2n-1)\theta] \left[ \frac{4b}{c'e'e(\theta)} + \frac{2n-1}{\sin\theta} \right] = \alpha(\theta) - \alpha_0(\theta)$$



$$\theta_m = \frac{m\pi}{2N} \quad m = 1 \dots N$$

Area trapezica



$$\epsilon = \frac{e_c}{e_0}$$

$$\alpha_a(\theta) = [(\alpha_0)_e - (\alpha_0)_o] \cos\theta + (\alpha_0)_o$$

$$\frac{e_0}{b/2} = \frac{4}{(\epsilon+1)\lambda} [1 + (\epsilon-1)\cos\theta]$$

$$\frac{4b}{c'e'e(\theta)} = \lambda \frac{\epsilon+1}{\pi K} \frac{1}{1+(\epsilon-1)\cos\theta}$$

$$\alpha_1(\theta_n) = \frac{1}{\sin\theta_n} \sum_{n=1}^N (2n-2) A_{2n-1} \sin(2n-2)\theta_n$$

$$\frac{r(\theta_n)}{b\sqrt{c_0}} = 2 \sum_{n=1}^N \sin[(2n-1)\theta_n]$$

② Espansione termica trascurabile

②

$$c = c(p) \text{ fluidi barotropici}$$

Pa: liquidi la condizione di incomprimibilità è sempre valida.

$$c \left( \frac{\delta v}{\delta t} + v \cdot \nabla v \right) = -\nabla p + \nabla \left[ \mu (\nabla v + \nabla v^T) - \frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot v) \underline{\underline{I}} \right] + e \underline{\underline{f}}$$

$$c \left( \frac{\delta \epsilon}{\delta t} + v \cdot \nabla \epsilon \right) = -p \nabla \cdot v + e \phi + \nabla (\kappa \nabla \pi) + q$$

$$c \phi = (\tau \cdot \nabla) \cdot v$$

$$\nabla \cdot v = 0$$

$$\left\{ \begin{aligned} c \frac{Dv}{Dt} &= -\nabla p + \nabla \left[ \mu (\nabla v + \nabla v^T) \right] + e \underline{\underline{f}} \\ c c \frac{D\pi}{Dt} &= e \phi + \nabla \cdot (\kappa \nabla \pi) + q_w \end{aligned} \right. \quad (c = \frac{\delta \epsilon}{\delta \pi})$$

$$e = \text{cost}$$

$$\nabla \cdot v = 0$$

$$\mu, \kappa = \text{cost}$$

$$(P = P - P_0)$$

$$\left\{ \begin{aligned} c \left( \frac{\delta v}{\delta t} + v \cdot \nabla \right) &= -\nabla p + \mu \nabla^2 v + e \underline{\underline{f}} \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} c c \left( \frac{\delta \pi}{\delta t} + v \cdot \nabla \pi \right) &= e \phi + \kappa \nabla^2 \pi + q_w \end{aligned} \right.$$

con  $e = \text{cost}$  la termodinamica è fuori dal gioco

$$c \frac{\delta}{\delta t} (\nabla \cdot v) + c \nabla [v \cdot \nabla v] = -\nabla \cdot \nabla p + \mu \nabla^2 (\nabla \cdot v)$$

$$\nabla^2 p = -c \nabla (v \cdot \nabla v)$$

Istantaneamente la P si mette in equilibrio

al varione di quel termine in tutto il campo, la Pressione si adeguerà.

$$c^2 \equiv \left( \frac{\Delta p}{\Delta c} \right)_{\epsilon} \quad \text{vel del suono} \quad \infty?$$

quantità meccanica che si sistema in modo che la velocità abbia divergenza nulla in ogni punto

$$\nabla^2 (P - P_0) = -c \nabla (v \cdot \nabla v)$$

(4)

$$\frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta v}{\delta y} = 0$$

$$\frac{v}{L} \left( \frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta v}{\delta y} \right) = 0$$

$$\nabla \cdot \underline{v} = 0$$

$$\frac{v^2}{L} \left( \frac{\delta v}{\delta t} + \underline{v} \cdot \nabla v^2 \right) = -\frac{v^2}{L} \nabla \left( \frac{P}{\rho v^2} \right) + \frac{v^2}{L^2} \nabla^2 \underline{v}$$

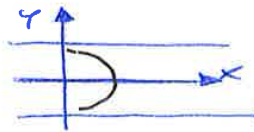
$$\frac{\delta v^2}{\delta t} + \underline{v} \cdot \nabla v^2 = -\nabla P + \underbrace{\left( \frac{v}{\nu L} \right)}_{1/Re} \nabla^2 \underline{v}$$

eq in termini NON Dimensionali.

$P_2 = \frac{\rho v L}{\mu}$  Definito dalla sola proprietà del fluido

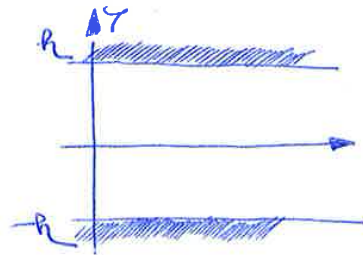
Casi Stazionari

$$\begin{cases} \nabla \cdot \underline{v} = 0 \\ -\nu \nabla^2 \underline{v} + (\underline{v} \cdot \nabla) \underline{v} + \nabla P = 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} \frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta v}{\delta y} = 0 \\ \frac{\delta u}{\delta t} + u \frac{\delta u}{\delta x} + v \frac{\delta u}{\delta y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\delta P}{\delta x} + \nu \left( \frac{\delta^2 u}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 u}{\delta y^2} \right) \\ \frac{\delta v}{\delta t} + u \frac{\delta v}{\delta x} + v \frac{\delta v}{\delta y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\delta P}{\delta y} + \nu \left( \frac{\delta^2 v}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 v}{\delta y^2} \right) \end{cases}$$

via i termini della convezione



$$P = P(x) \rightarrow \frac{\delta P}{\delta x}$$

$$\begin{cases} \mu \frac{d^3 u}{dy^2} = \frac{dP}{dx} \\ u(\pm R) = \pm U \end{cases}$$

$$\frac{dP}{dx} = -G$$

$$\mu \frac{d^3 u}{dy^2} = -G$$

$$\frac{du}{dy} = -\frac{G}{2\mu} y + C_1$$

$$u = -\frac{G}{\mu} \frac{y^2}{2} + C_1 y + C_2$$

$$\pm U = -\frac{G}{\mu} \frac{R^2}{2} \pm C_1 R + C_2$$

$$0 = -\frac{G}{\mu} \frac{R^2}{2} + 2C_2$$

$$\left. \begin{cases} 0 = -\frac{G}{\mu} \frac{R^2}{2} + 2C_2 \\ C_2 = \frac{G}{\mu} \frac{R^2}{2} \end{cases} \right\} \begin{cases} u(y) = \frac{U}{R} - \frac{R^2}{2\mu} \frac{dP}{dx} \left( 1 - \frac{y^2}{R^2} \right) \\ P = -Gx \end{cases}$$

$$-\frac{dP}{dx} = G$$