



Appunti universitari
Tesi di laurea
Cartoleria e cancelleria
Stampa file e fotocopie
Print on demand
Rilegature

NUMERO: 2394A

ANNO: 2019

A P P U N T I

STUDENTE: Faraci Alessio

MATERIA: Calcolo Automatico - Prof. Cimellaro Carbone

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

INDICE

1	SISTEMI DI EQUAZIONI LINEARI
	<ul style="list-style-type: none">• metodi diretti<ul style="list-style-type: none">- metodo di Gauss- metodo di Gauss/Jordan- metodo della fattorizzazione (L-S)• metodi indiretti<ul style="list-style-type: none">- metodo di Gauss-Seidel• soluzioni dei sistemi: diagrammi di flusso<ul style="list-style-type: none">- metodo di Gauss (1° modo)- metodo di Gauss (2° modo)- metodo della fattorizzazione- metodo di Gauss-Seidel• analisi strutturale: la tecnica della Skyline
2	METODO DEGLI SPOSTAMENTI E RIGIDEZZA (ELEMENTO MOLLA)
	<ul style="list-style-type: none">• matrice di rigidezza della molla• matrice di rigidezza di un gruppo di molle• il metodo degli spostamenti
3	CONDIZIONI E REAZIONI VINCOLARI
	<ul style="list-style-type: none">• condizioni vincolari (spostamenti imposti)<ul style="list-style-type: none">- metodo del termine dominante sulla diagonale- metodo del termine unitario sulla diagonale- metodo della soppressione delle equazioni• reazioni vincolari
4	STRUTTURE RETICOLARI (ELEMENTO ASTA/BIELLA)
	<ul style="list-style-type: none">• elemento asta• asta soggetta a variazione termica o a stato di coazione• matrice di rigidezza dell'asta nello spazio riferita al S.R. globale

5 **STRUTTURE INTELAIATE (ELEMENTO TRAVE)**

- elemento trave nel piano
- elemento trave nello spazio
- trave alla Timoshenko
- problemi di modellazione strutturale
 - eccentricità
 - asta con estremi rigidi
 - rilascio dei gradi di libertà all'estremità delle aste
 - asta a rigidezza variabile
 - il problema delle travi curve

6 **VINCOLI GENERALIZZATI**

- vincoli elastici
- vincolo generalizzato esterno
- vincolo generalizzato interno

7 **ELEMENTI IN COORDINATE GENERALIZZATE**

8 **ELEMENTI IN COORDINATE GENERALIZZATE : ELEMENTI MONODIMENSIONALI (1D)**

- elemento asta reticolare (simplex)
- elemento trave
 - elemento trave rettilinea
 - elemento trave su suolo elastico
 - elemento trave a inerzia variabile
 - elemento trave circolare (curva)

9 **ELEMENTI IN COORDINATE GENERALIZZATE : ELEMENTI BIDIMENSIONALI (2D)**

- stati piani di tensione/deformazione
 - elemento triangolare a 3 nodi di tipo simplex
 - elemento triangolare a 3 nodi CST (constant strain triangle) [Turner]
 - elemento triangolare a 6 nodi LST (linear strain triangle) [Argyris/Fraeijs de Veubeke]
 - elemento triangolare a 10 nodi QST (linear strain triangle) [Felippa]
 - elemento triangolare a 3 nodi con polinomio cubico HBF [Holland-Bergan-Felippa]
 - condensazione statica della matrice di rigidezza (applicata all'elemento HBF)
 - elemento rettangolare a 4 nodi [Argyris]

- elemento rettangolare di ordine elevato
- elemento quadrangolare ottenuto da elementi CST
- definizione del modello
- stati e problemi assialsimmetrici
 - solidi di rivoluzione soggetti a carichi assialssimmetrici
 - elemento triangolare a 3 nodi CST [Turner]
 - gusci assialsimmetrici sottili soggetti a carichi assialsimmetrici
- piastre inflesse
 - elemento rettangolare a 4 nodi ACM [Adini Cloush Melosh] (Kirchoff)
 - elemento rettangolare a 4 nodi bicubico BFS16 (-biquintico) [Bogner Fox Schmit] (Kirchoff)
 - elemento triangolare a 3 nodi di [Adini] (Kirchof)
 - elemento triangolare a 3 nodi di [Tocher] (1) (Kirchoff)
 - elemento triangolare a 4 nodi di [Tocher] (2) (Kirchoff)
 - elemento triangolare a 6 nodi di [Visser] (Kirchoff)
 - elemento triangolare a 6 nodi di [Agyss Bell] (Kirchoff)
 - elemento triangolare a 6 nodi HCT 12 e 9 (Kirchoff)
 - elemento rettangolare a 4 nodi di [Bell] (Mindlin)
 - influenza del modello (Kirchoff)
 - osservazioni sulla definizione delle funzioni di spostamento: criteri di convergenza
 - Patch Tests
 - criteri di valutazione di un elemento finito piastra
- gusci
 - elemento rettangolare a 3 nodi guscio piano
 - osservazioni sulle piastre nervate

10 ELEMENTI IN COORDINATE GENERALIZZATE : ELEMENTI TRIDIMENSIONALI (3D)

- elemento di volume tetraedro a 4 nodi Simplex
- elemento di volume esaedro a 8 nodi Simplex

11 TECNICHE DI INTERPOLAZIONE

- polinomi di Lagrange
- polinomi di Hermite
- funzioni di forma per elementi monodimensionali

- elemento monodimensionale a 2 nodi lineare
- elemento monodimensionale a 3 nodi quadratico
- elemento monodimensionale a 4 nodi cubico
- elemento monodimensionale a 2 nodi cubico
- funzioni di forma per elementi bidimensionali
 - elemento bidimensionale rettangolare bilineare a 4 nodi (Lagrange)
 - elemento bidimensionale rettangolare biquadratico a 9 nodi (Lagrange)
 - elemento bidimensionale rettangolare bicubico a 16 nodi (Lagrange)
 - elemento bidimensionale rettangolare a 4 nodi BFS16 (Hermite)
- tecniche di interpolazione di serendipità

12 SISTEMA DI RIFERIMENTO INTERNO

- coordinate interne
 - elementi monodimensionali
 - elemento monodimensionale - campo lineare
 - elemento monodimensionale - campo quadratico (Lagrange)
- coordinate naturali
 - elementi monodimensionali
 - elemento monodimensionale - campo quadratico (Lagrange)
 - elemento monodimensionale - campo cubico (Lagrange)
 - interpolazione di ordine zero e di primo ordine (Hermite)
 - elementi bidimensionali
 - elemento bidimensionale triangolare
 - elemento bidimensionale triangolare - campo lineare (Lagrange)
 - elemento bidimensionale triangolare - campo quadratico (Lagrange)
 - elemento quadratico (stato piano) - deformazione lineare

13 ELEMENTI ISOPARAMETRICI

14 ELEMENTI ISOPARAMETRICI: ELEMENTI MONODIMENSIONALI (1D)

- elemento lineare
- elemento quadratico
- elemento cubico
- elemento trave isoparametrica

15 ELEMENTI ISOPARAMETRICI: ELEMENTI BIDIMENSIONALI (2D)

- elemento quadrangolare lineare
- elemento quadrangolare quadratico
- elemento triangolare lineare
- elemento triangolare quadratico
- elementi triangolari formulati mediante il collasso di elementi quadrangolari
- elemento misto piastra a 4 nodi (generico)
- elemento misto piastra a Q4M
- elemento misto QM8h + Heterosis
- elemento misto AF
- elemento misto T6/3B3
- elemento piastra alla Kirchoff sotto forma discreta
- elemento piastra alla Kirchoff sotto forma discreta DKT o DKQ
- elemento piastra alla Kirchoff sotto forma discreta di tipo SEMI LOOF

16 ELEMENTI ISOPARAMETRICI: ELEMENTI DI VOLUME (TRIDIMENSIONALI) (3D)

- elemento esaedro ad 8 nodi (famiglia della serendipità)
- elemento esaedro a 20 nodi (quadratico famiglia della serendipità)

17 ELEMENTI ISOPARAMETRICI DI TRANSIZIONE

- elemento di transizione triangolare (3 --> 6 nodi)
- elemento di transizione quadrangolare (4 --> 8 nodi)
- elemento di transizione tetraedrico (4 --> 10 nodi)
- elemento di transizione esaedrico (8 --> 20 nodi)

18 ELEMENTI ISOPARAMETRICI: GUSCI

- elemento a 4 nodi di Kanok-Nukulchai (bilineare)
- elemento a 4i8 nodi di Pawsey

19 INTEGRAZIONE NUMERICA

- integrazione in una direzione
 - metodo di Gauss
 - metodo di Newton-Cotes
- integrazione in due direzioni
 - metodo bidirezionale

- metodo diretto
 - elementi quadrilateri
 - metodi bidirezionali
 - metodi diretti
 - elementi triangolari
 - metodo di Gauss-Radau
 - metodi diretti (formula di Hammer)
- integrazione in tre direzioni
 - elementi tridimensionali (cubi tetraedri)
 - metodo tridimensionali
 - metodi diretti
- definizione dell'ordine di integrazione
 - full integration e integrazione selettiva
 - integrazione ridotta
 - applicazioni di integrazione ridotta
 - trave con deformabilità a taglio (2 nodi)
 - elemento quadrilatero a 4 nodi (stati piani)
- integrazione selettiva
 - elementi lineari
 - elementi quadratici

20 METODO DELLE STRISCE FINITE

21 METODI DI RISOLUZIONE NON FEM

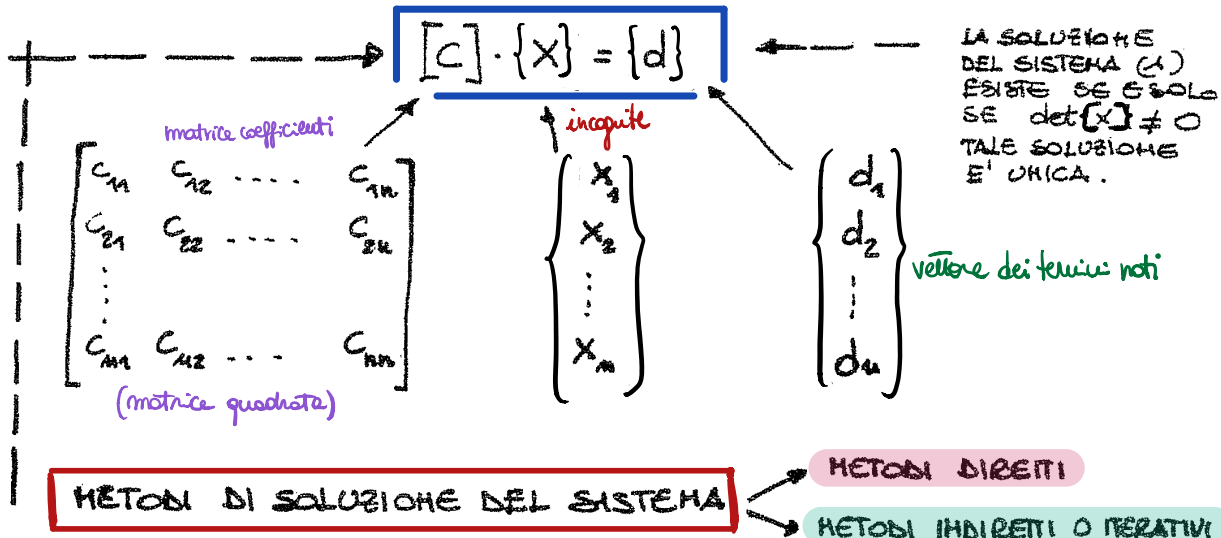
- framework methods (metodo delle strutture equivalenti) (stato piano)

1. SISTEMI DI EQUAZIONI LINEARI

DATO UN SISTEMA

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n = d_1 \\ c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \dots + c_{2n}x_n = d_2 \\ \vdots \\ c_{m1}x_1 + c_{m2}x_2 + \dots + c_{mn}x_n = d_m \end{cases} \quad (1)$$

QUESTO PUO' ESSERE ESPRESSO IN FORMA MATRICIALE COME:



A) METODI DIRETTI

valgono solo per i sistemi di equazioni lineari

PER OTTENERE LA SOLUZIONE SONO NECESSARIE UN NUMERO BEN DEFINITO DI OPERAZIONI DI CALCOLO ESPRIMIBILE MEDIANTE UNA RELAZIONE MATEMATICA LA CUI SOLA VARIABILE E' IL NUMERO DI EQUAZIONI DEL SISTEMA ("n")

→ il numero di calcoli da fare è noto a priori ("n")

B) METODI INDIRETTI

sono utili per sistemi di equazioni anche non lineari

IN TAL CASO, UN NUMERO PREDEFINITO DI OPERAZIONI, LEGATO AL NUMERO DI EQUAZIONI, SI RIPETE CICLICAMENTE PER UN NUMERO DI VOLTE A PRIORI IMPRECISATO DEFINITO SOLO QUANDO DUE CICLI SUCCESSIVI DI OPERAZIONI FORNISCONO RISULTATI CON UNA VARIANZA INFERIORE AD UN MINIMO PRESTABILITO.

→ a priori non so il numero di operazioni che mi servono per raggiungere il risultato desiderato (so il n° di operazioni di ogni ciclo che è funzione del numero di incognite ma non so il n° di cicli necessari per trovare la soluzione)

- IN UN GENERICO PASSO "i" ($1 \leq i \leq n$) SI DIVIDE LA I-ESIMA EQUAZIONE PER IL TERMINE POSTO SULLA DIAGONALE PRINCIPALE (L'ORDINE DEL PASSO I-ESIMO) E SI SOTTRADE DA OGNI EQUAZIONE "j" ($i+1 \leq j \leq n$) L'EQUAZIONE "i" MOLTIPLICATA PER c_{ji}
- AL TERMINE DEGLI m PASSI DI LAVORO SI OTTIENE IL SISTEMA TRIANGOLARIZZATO (2)

→ OTTENUTO IL SISTEMA NELLA FORMA (2) È POSSIBILE RICAVARE I VALORI DELLE INCOGNITE X_i ESEGUENDO UNA SUCCESSIONE DI SOSTITUZIONI ALL'INDIETRO:

↪ back substitution

$$\begin{cases} X_n = h_n \\ X_{n-1} = h_{n-1} - (g_{n-1,n} X_n) \\ X_{n-2} = h_{n-2} - (g_{n-2,n} X_n + g_{n-2,n-1} X_{n-1}) \\ X_{n-3} = h_{n-3} - (g_{n-3,n} X_n + g_{n-3,n-1} X_{n-1} + g_{n-3,n-2} X_{n-2}) \\ \vdots \end{cases}$$

la diagonale è un indicatore della deformazione in un punto: se applico la forza in quel punto ho un effetto in quel punto stesso (termini grandi) e effetti via via meno importanti (termini più piccoli) *man mano che mi allontano*

OSS:

- SE LA MATRICE $[c]$ È SIMMETRICA OGNI SOTTOMATRICE DI ORDINE $(n-i)$ AL PASSO I-ESIMO NELLA FASE DI TRIANGOLARIZZAZIONE È ANCORA SIMMETRICA
- IL PROCEDIMENTO NUMERICO PRESENTATO È "CONDIVOLMENTE STABILE" SE I TERMINI DELLA MATRICE $[c]$ POSTI SULLA DIAGONALE PRINCIPALE " c_{ii} " SONO PREPONDERANTI RISPETTO AGLI ALTRI " c_{ij} CON $j \neq i$ " (regola genericamente valida in ingegneria civile)
- L'ESECUZIONE DI TALE METODO È POSSIBILE SENZA PARTICOLARI ACCORGIMENTI SOLO SE $c_{ii} \neq 0$ (CON $1 \leq i \leq n$) - QUESTO È SEMPRE VERIFICATO NELLE APPLICAZIONI DI ANALISI STRUTTURALE.

non posso usare questo metodo se ho degli elementi zero nella diagonale perché poi quando devo dividere e dividere ottengo numero = ∞
 (oppure se ho un numero molto piccolo sulla diagonale e fuori invece grande)

(2) METODI DIRETTI: METODO DI GAUSS/JORDAN

PER ELIMINARE LA FASE DI SOSTITUZIONE A RITROSO DEL METODO PRECEDENTE IL SISTEMA (1) INIZIALE VIENE TRASFORMATO NEL SISTEMA EQUIVALENTE:

$$[I] \cdot [X] = [h] \quad (3)$$

matrice identità

DALLA RELAZIONE (4) E' POSSIBILE DETERMINARE SUBITO IL VETTORE $\{z\}$.

$$z_1 = d_1$$

$$z_2 = d_2 - l_{21} z_1$$

sostituzione in avanti

$$z_u = d_u - (l_{u1} z_1 + l_{u2} z_2 + \dots)$$

NOTO IL VETTORE $\{z\}$, DALLA

termini diversi da zero ma non unitari (col contornio di [L])

$$[S] \cdot \{x\} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & \dots & s_{1u} \\ \phi & s_{22} & s_{23} & \dots & s_{2u} \\ \phi & \phi & s_{33} & \dots & s_{3u} \\ \vdots & & & & \\ \phi & \phi & \phi & \dots & s_{uu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_u \end{bmatrix}$$

E' POSSIBILE RICAVARE IL VETTORE $\{x\}$ DELLE INCOGNITE DEL SISTEMA:

$$x_u = z_u / s_{uu}$$

back substitution

$$x_{u-1} = (z_{u-1} - s_{u-1,u} \cdot x_u) / s_{u-1, u-1}$$

OSS: - SE SI PENSASSE DI CONDENSARE IN UN'UNICA MATRICE [B] SIA LA MATRICE [L] CHE LA MATRICE [S]:

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1u} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2u} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \dots & b_{3u} \\ \vdots & & & & \\ b_{u1} & b_{u2} & b_{u3} & \dots & b_{uu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & \dots & s_{1u} \\ l_{21} & s_{22} & s_{23} & \dots & s_{2u} \\ l_{31} & l_{32} & s_{33} & \dots & s_{3u} \\ \vdots & & & & \\ l_{u1} & l_{u2} & l_{u3} & \dots & s_{uu} \end{bmatrix}$$

Solvo memoria

[L] e meno della diagonale di tutti 1

4 TAL PUNTO SI INIZIA IL SECONDO CICLO, ANALOGO AL PRECEDENTE CON L'UNICA DIFFERENZA CHE SI UTILIZZANO COME VALORI APPROSSIMATI DELLE INCOGNITE I VALORI $X_i^{(1)}$ DEL CICLO PRECEDENTE.

1° EQUAZ. $\rightarrow X_1^{(2)} = (d_1 - \sum_{i=2}^n c_{1i} X_i^{(1)}) / c_{11}$

2° EQUAZ. $\rightarrow X_2^{(2)} = (d_2 - c_{21} X_1^{(2)} - \sum_{i=3}^n c_{2i} X_i^{(1)}) / c_{22}$

⋮
i EQUAZ. $\rightarrow X_i^{(2)} = (d_i - \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij} X_j^{(2)} - \sum_{j=i+1}^n c_{ij} X_j^{(1)}) / c_{ii}$

SE LA DIFFERENZA TRA LA SOLUZIONE OTTENUTA E QUELLA DEL CICLO PRECEDENTE È MAGGIORE DI UN VALORE A PRIORI PREFISSATO, OCCORRE ATTIVARE UN NUOVO CICLO DI CALCOLO ASSUMENDO COME VALORI APPROSSIMATI QUELLI RELATIVI ALLA SOLUZIONE ATTUALE.

OSS: PER UNA RAPIDA VALUTAZIONE DI CONVERGENZA DEL METODO SI PUÒ APPLICARE IL SEGUENTE CRITERIO: SI HA CONVERGENZA SE:

$|c_{ii}| > S_i$

DOVE

$S_i = \sum_{k=1, k \neq i}^n |c_{ik}|$

$\forall i$ (ovvero \forall riga)

↳ saltando $k=i$

PRECISAMENTE PONEENDO:

$P_i = \frac{S_i}{|c_{ii}| - S_i} \quad \equiv \quad \rho = \max(P_i)$

IL METODO CONVERGE SE $\rho_i > \phi \quad \forall i$

E CONVERGE TANTO PIÙ RAPIDAMENTE QUANTO ρ È PIÙ PICCOLO.

↑ UN VALORE EMPIRICO CHE ASSICURA UNA RAPIDA CONVERGENZA È $\rho < 2$

cosa significa?
se il termine che sta sulla diagonale è maggiore e maggiore di tutti gli altri termini della riga, allora prima o poi si arriva a convergere

- TALE MODO DI OPERARE NON E' SENZ'ALTRO IL PIU' RAZIONALE MA E' FORSE IL PIU' SEMPLICE COME APPROCCIO INIZIALE AL PROBLEMA. IN GENERALE QUESTO NON E' L'IMPIEGO USUALE DEL METODO.

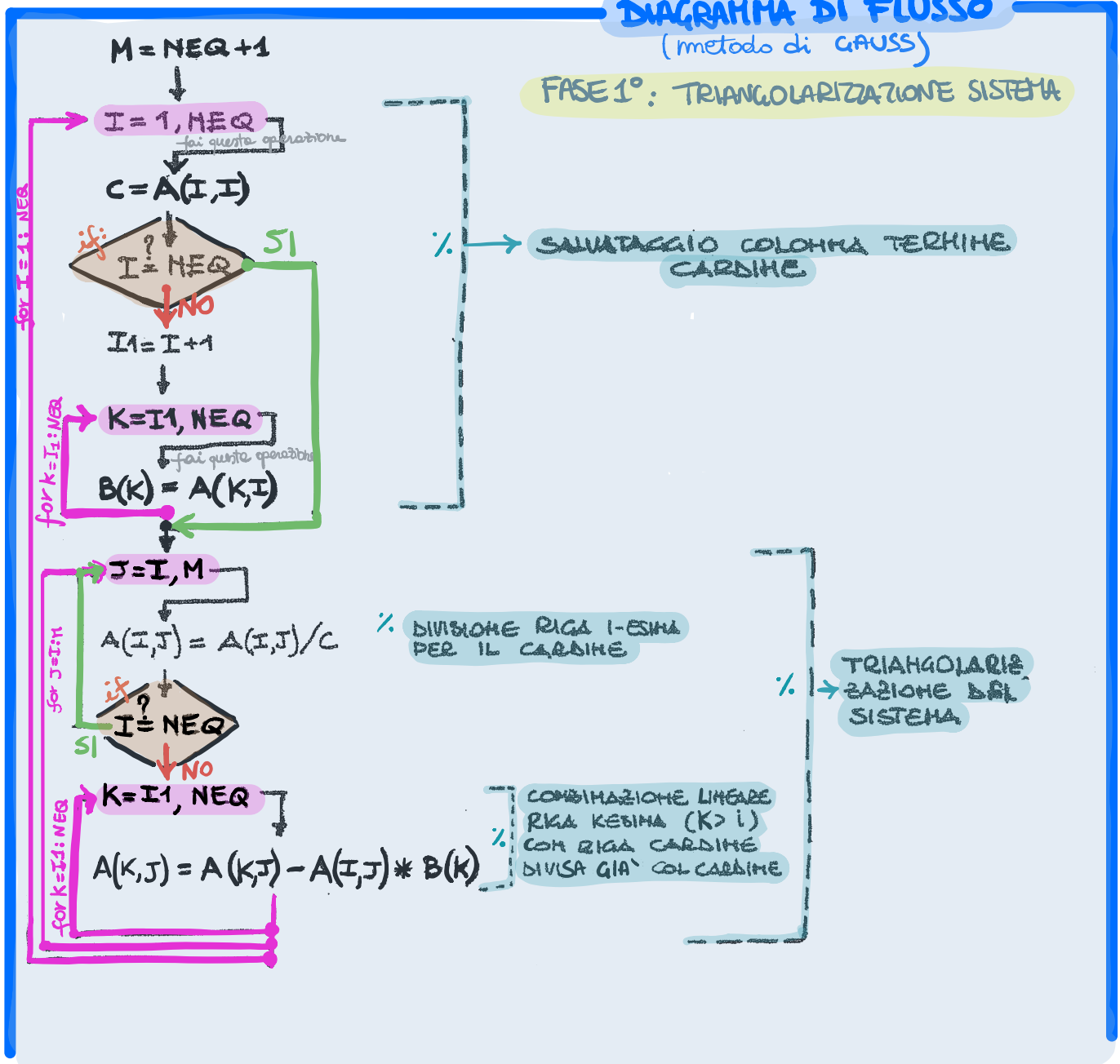
→ VARIABILI UTILIZZATE:

- **NEQ** = NUMERO EQUAZIONI
- **A(I,J)** = MATRICE COEFFICIENTI (COMPRESIVA COLONNA TERMINI NOTI POSTI IN COLONNA $M = NEQ + 1$)
- **B(I)** = VETTORE SALVATAGGIO TERMINI COLONNA DEL CARINNE
- **C** = CARINNE

DIAGRAMMA DI FLUSSO

(metodo di GAUSS)

FASE 1°: TRIANGOLARIZZAZIONE SISTEMA

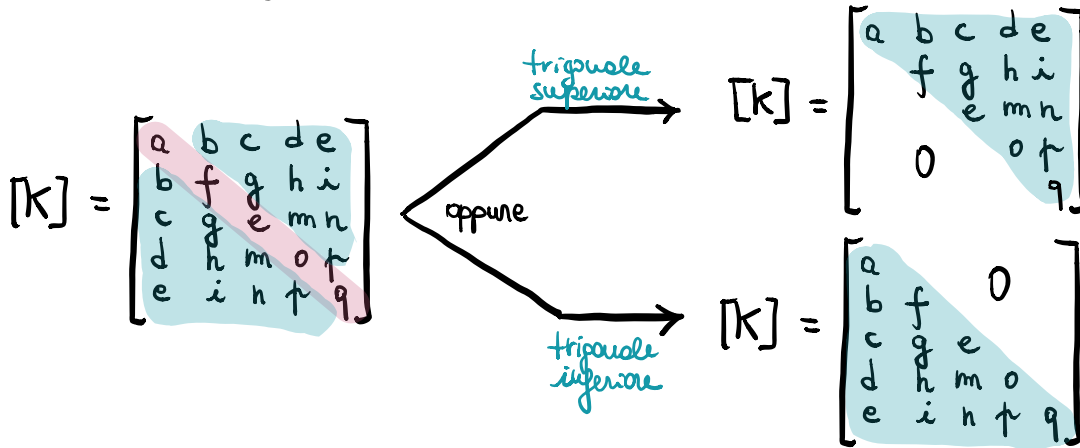


B) METODO DI GAUSS

(2° MODO) (più efficiente)

(o metodo della semi-banda)

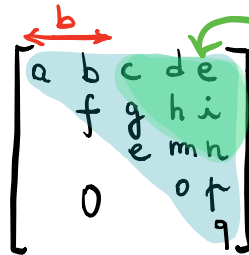
Utilizziamo adesso lo stesso identico metodo, cioè sempre il METODO DI GAUSS, ma cercando di non sprecare troppo spazio. Mi spiego: i problemi di ingegneria strutturale hanno a che fare tipicamente con la matrice di rigidità. Questa per il teorema di Betti sappiamo essere simmetrica. Quindi possiamo pensarla come una matrice triangolare superiore o inferiore (cioè dove tutti i termini che contano si trovano sulle diagonali e sopra (o rispettivamente sotto)).



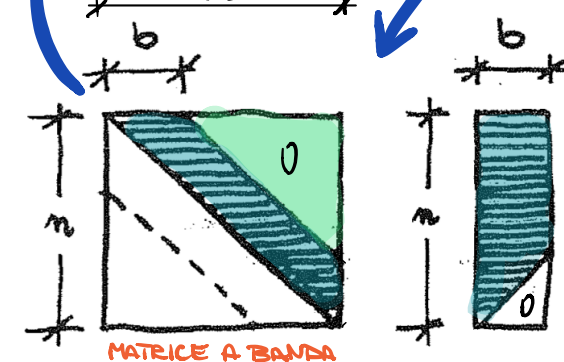
Quindi per risparmiare memoria dovrai salvare soltanto il triangolo di sopra (o il triangolo di sotto), ma non esistono le matrici triangolari: puoi salvare soltanto matrici o vettori. Quindi non ci serve a niente avere un triangolo come riduzione di spazio.

Però sappiamo che se il problema è scritto bene

in generale (se non stiamo trattando la matrice [K]) si ipotizza che la matrice dei coefficienti [C] del sistema sia simmetrica e a banda (queste ipotesi perché sono opposte rispetto da [K])



in questa zona qui questo triangolo è pieno di zeri mentre nella restante parte è pieno di termini diversi da zero (di lunghezza b → lunghezza della banda)

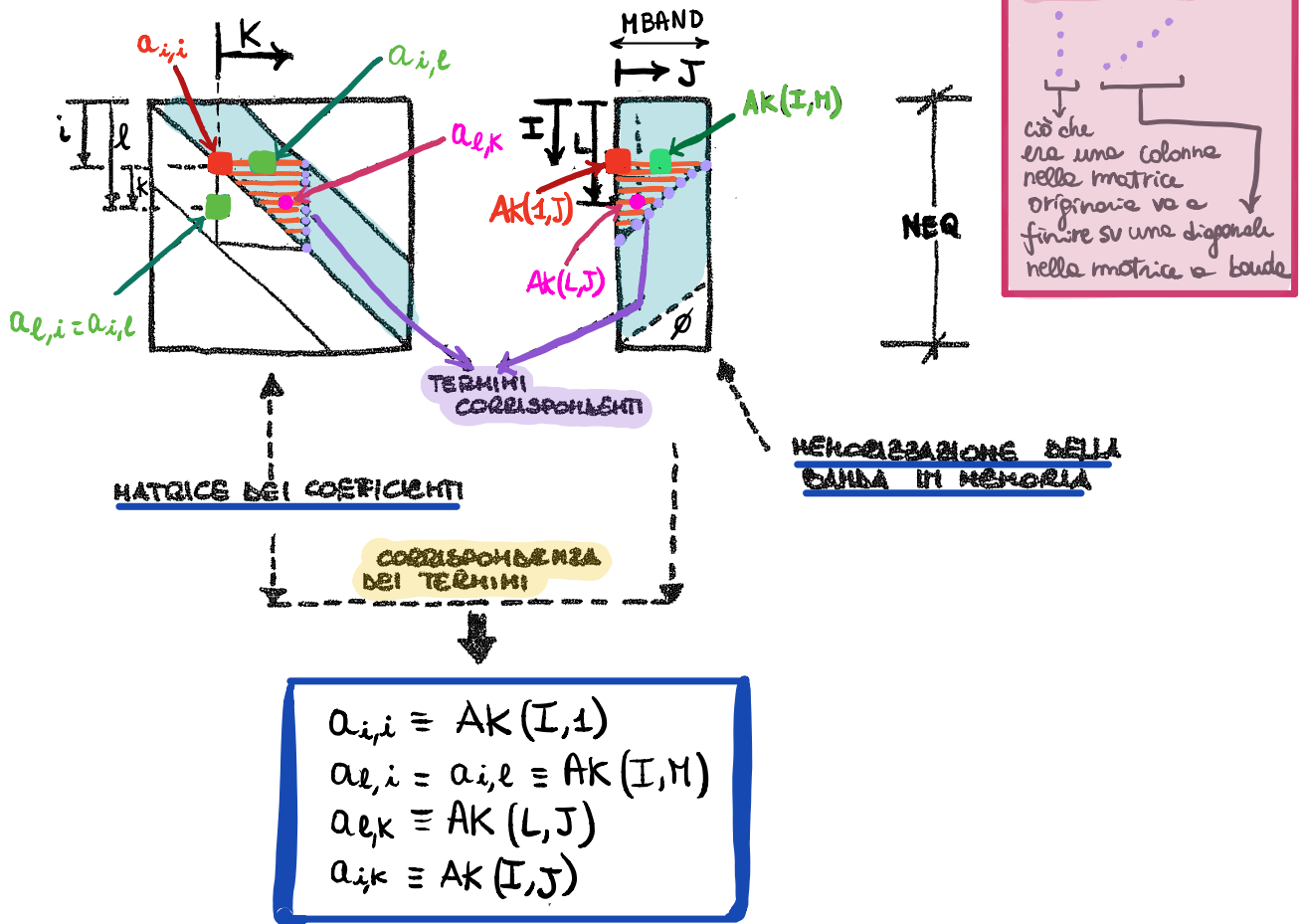


Quindi un modo di salvataggio furbo (cioè che occupa meno spazio in memoria) della matrice di rigidità [K] (o più in generale della matrice dei coefficienti [C]) è quello di salvare soltanto la banda della matrice. Ossia si opera su una MATRICE di ORDINE (n x b). Questo modo prende il nome di SALVATAGGIO A SEMIBANDA della matrice di rigidità in memoria.

Più il nostro problema è scritto bene, più la lunghezza della banda b è piccola. Quindi esistono degli algoritmi che, dopo aver fatto il nostro modello strutturale agli elementi finiti, cercano di stringere la banda.

IL PROCESSO VIENE SCOMPOSTO COME SEGUE:

PARTE 1a) : SI ESEGUE IL PROCESSO DI TRIANGOLIZZAZIONE CONSIDERANDO LA PARTICOLARE ORGANIZZAZIONE IN MEMORIA CENTRALE DELLA MATRICE DEL SISTEMA:

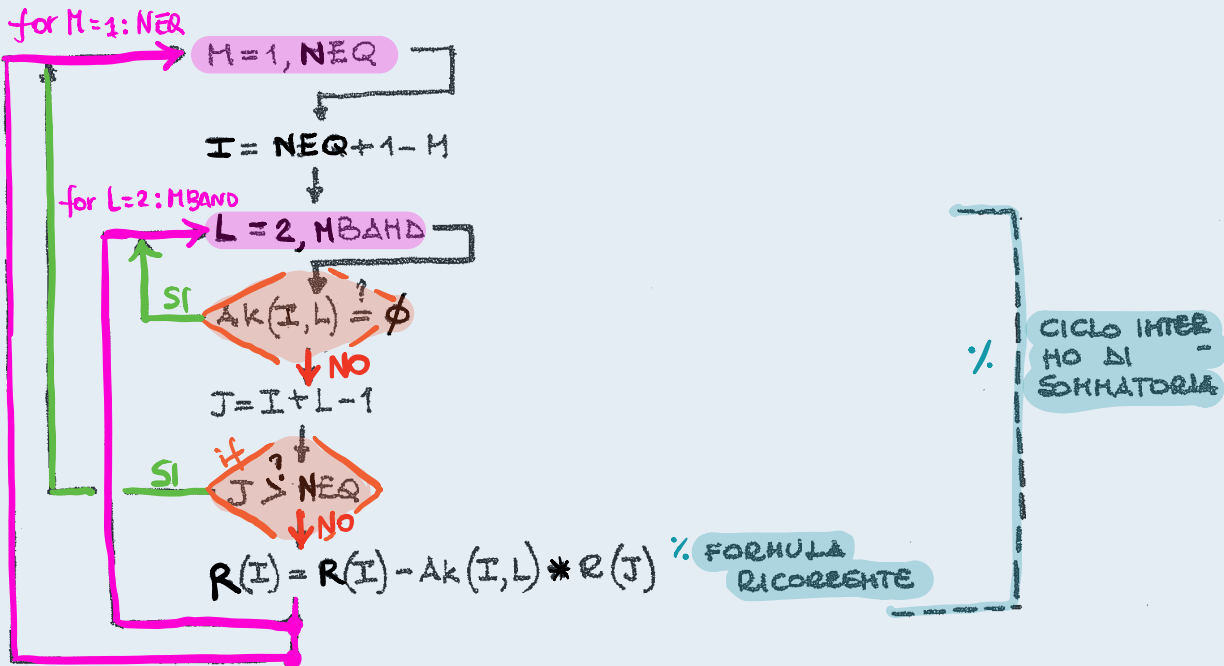


PARTE 1b) : CONSISTE NEGLI "NEQ" PASSI COINCIDENTI CON LE "NEQ" FASI DEL CICLO "IN AVANTI" DEL METODO DI GAUSS. VENGONO MODIFICATI ANCHE I TERMINI NOTI CHE RISULTANO MEMORIZZATI IN UN VETTORE SEPARATO **R**

PARTE 2) : RIGUARDA LA SOSTITUZIONE A RITORNO (BACK-SUBSTITUTION). ALLA FINE I RISULTATI RISULTANO MEMORIZZATI IN **R**

- VARIABILI UTILIZZATE :**
- **NEQ** = numero equazioni
 - **MBAND** = Ampiezza di bande
 - **AK(NEQ, MBAND)** = matrice dei coefficienti
 - **R(NEQ)** = VETTORI DEI TERMINI NOTI (alla fine in questo vettore risultano memorizzate le radici del sistema)
 ↑
 dimensioni

FASE 2)

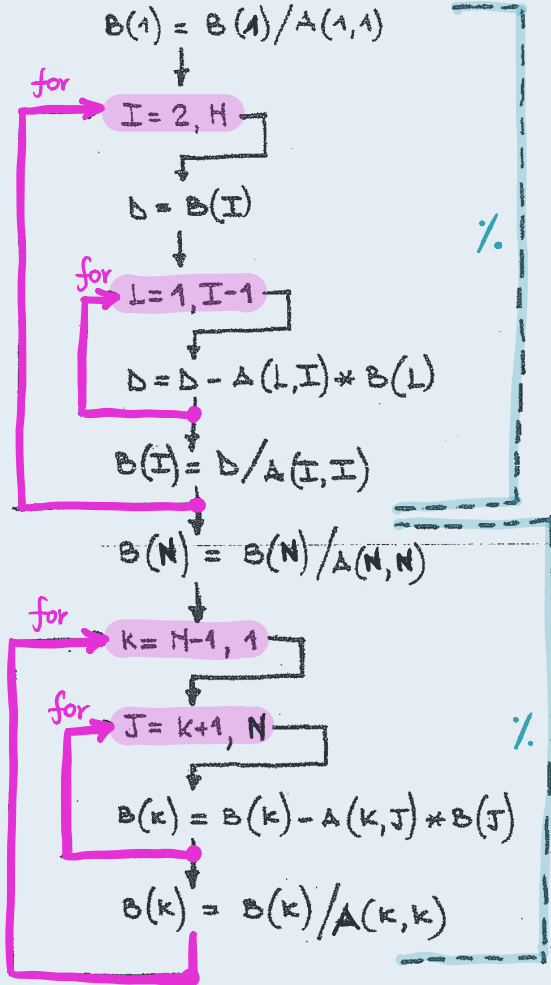


FASE 2)

MEL VETTORE TERMINI NOTI
VIENE PRIMA SCRITTO IL
VETTORE DI COMODO {Y} E POI IL
VETTORE SOLUZIONE {X}

DETERMINAZIONE E
SCRITTURA IN {B} DEL
VETTORE DI COMODO {Y}

DETERMINAZIONE E
SCRITTURA DEL VETTORE
SOLUZIONE {X} -
TALE VETTORE VIENE SCRITTO IN {B}



D) METODO ITERATIVO (GAUSS - SEIDEL)

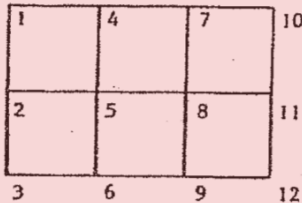
VARIABILI UTILIZZATE:

- $[A]$ = MATRICE DEI COEFFICIENTI DEL SISTEMA
- $\{B\}$ = VETTORE TERMINI NOTI
- $\{X\}$ = VETTORE CONTENENTE, DOPO LA SOLUZIONE, I VALORI DELLE INCOGNITE DEL SISTEMA
- N = NUMERO DI EQUAZIONI
- NIM = MASSIMO NUMERO DI ITERAZIONI AMMESSE
- T = TOLLERANZA DESIDERATA

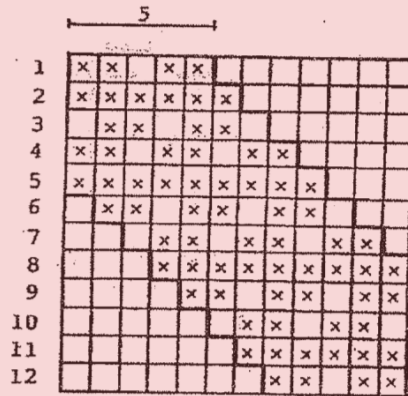
OSSERVAZIONE

L'INCONVENIENTE MAGGIORE DELLO SCHEMA DI MEMORIZZAZIONE A BANCA DELLA PARTE TRIANGOLARE SUPERIORE DELLA MATRICE [K] RISIENE NEL FATTO CHE LA LARGHEZZA DI BANCA DIPENDE DALL'ORDINE SECONDO IL QUALE LE EQUAZIONI SONO TRATTATE, E DOHQUE DALLA NUMERAZIONE DEI NODI DEL MODELLO AD ELEMENTI FINITI (VED. OLTRE) -

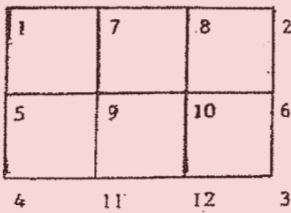
OSS. DI CARATTERE GENERALE SUI DUE METODI



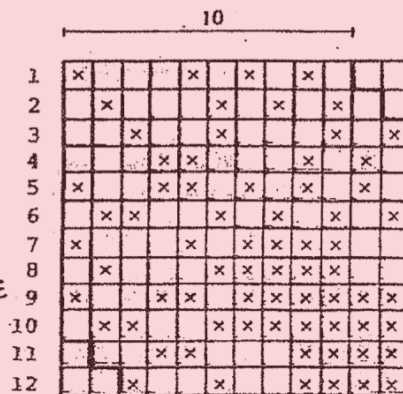
BUONA NUMERAZIONE



OLTRE ALLE DIMENSIONI DI LARGHEZZA DI BANCA (E QUINDI QUANTITA' DI MEMORIA CENTRALE OCCUPATA), IN QUESTI CASI SI POSSONO AVERE PERTURBAZIONI IN MERITO ALLA BONTA' DELLA SOLUZIONE (MOLTIPLICAZIONI E SOMME CON DEI TERMINI NULLI) -



CATTIVA NUMERAZIONE



PIU' AVANTI VERRANNO PRESENTATI DEGLI ALGORITMI DI RIFORMAZIONE DEI NODI AL FINE DI "OTTIMIZZARE" LA BANCA, OSSIA: TALI METODI PERDONO PARTE DEL INTERESSE DI FRONTE A MODELLI DI DOMINI MULTIPlicEMENTE CONNESSI O TRIDIMENSIONALI COMPLESSI. IN TALI CASI, ALLA MATRICE ASSIEME,

SONO DA PREFERIRSI METODI CHE "LIMITANO" GIA' IN ORIGINE IL "PROFILO" DELLA MATRICE AL FINE DI LIMITARE IL NUMERO DI OPERAZIONI ARITMETICHE (V. "SKYLINE" DESCRITTO A PAG. SEGUENTE)

(Attenzione: [K] diventa un vettore colonna \Rightarrow mi perdo tutte le posizioni fisiche i-j dei termini)



$$\{VKGS\}^T = \{K_{12}; K_{23}; K_{34}; K_{44}; K_{55}; K_{55} \emptyset\}$$

$$\{VKGD\}^T = \{K_{11}; K_{22}; K_{33}; K_{44}; K_{55}\}$$

CONTEMPORANEAMENTE LA LINEA "SKYLINE", INVILUPPO DELLE ESTREMITA' SUPERIORI DELLE COLONNE DI ALTEZZA VARIABILE, E' DEFINITA TRAMITE IL VETTORE DELLE ALTEZZE h_j = NUMERO DEI TERMINI DIVERSI DA ZERO AL DI SOPRA DELLA DIAGONALE - CON RIFERIMENTO ALLA MATRICE DI INIZIO PAGINA 51 HA:

$$\{H\}^T = \{0 \ 1 \ 1 \ 3 \ 2\}$$

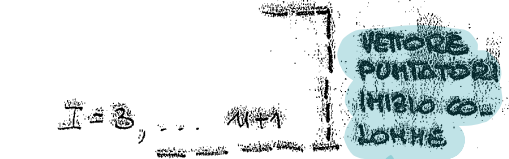
← VETTORE ALTEZZE COLONNE
 ci dice per ogni colonna quanti termini devo andare a leggere in questo vettore

PER POTER DEFINIRE LA POSIZIONE DI UN TERMINE K_{ij} NEL VETTORE "VKGS" SI UTILIZZA IL VETTORE "PUNTORI ALL'INIZIO COLONNE" NEL VETTORE "VKGS" DI DIMENSIONE $n+1$, DEFINITO DA

$$KLD(1) = 1 \quad KLD(2) = 1$$

$$KLD(I) = KLD(I-1) + H(I-1) \quad I=3, \dots, n+1$$

$$\{KLD\}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$



IN TAL CASO UN TERMINE K_{ij} RISULTA MEMORIZZATO:

- SE $i=j$ IN $VKGD(I)$
- SE $i < j$ IN $VKGS(L)$ DOVE $L = KLD(j+1) - j + i$

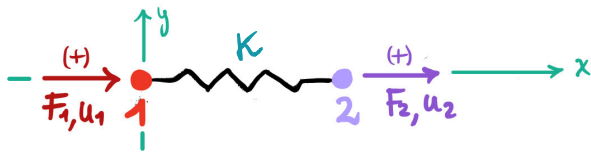
LO SPAZIO DI MEMORIZZAZIONE RICHIESTO RISULTA:

- PER "VKGD" n REALI
- PER "VKGS" $(KLD(n+1) - 1)$ REALI

Qual'è il vantaggio di questo metodo?

- 1) elimino tutte una serie di numeri uguali a zero e quindi riduco ancora le dimensioni della matrice.
- 2) i termini m_i sono degli interi. Gli interi vengono salvati dal calcolatore utilizzando 2 byte di memoria (interi corti 1 byte, lunghi 2 byte), al contrario dei numeri in floating point che necessiterebbero di almeno 4 byte di memoria (in doppia precisione ho bisogno di 8 byte) \Rightarrow riduco spazio da memorizzare nella RAM. \rightarrow SINGLE

A **MATRICE DI RIGIDITÀ DELLA MOLLA**



A partire dai concetti appena esposti, riformuliamo il problema:

→ indichiamo con **NODO 1** e **NODO 2** gli estremi della molla.

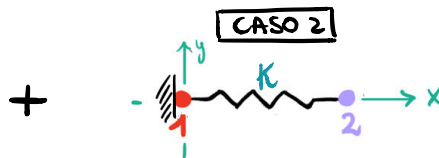
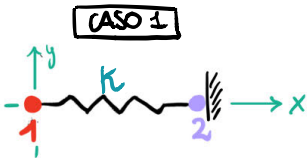
→ assegniamo un **S.R. (x, y) LOCALE** con **origine** nel **NODO 1** in cui l'asse **x** è orientato nella direzione dell'asse della molla, mentre quello **y** risulta ad esso ortogonale (**ATTENZIONE: operiamo secondo la terna destra**).

→ indichiamo con **F₁, u₁** e con **F₂, u₂** le forze e gli spostamenti nodali. Queste forze e spostamenti sono definiti **POSITIVI** se **EQUIVERSI** con l'asse **x** del S.R. prima definito.

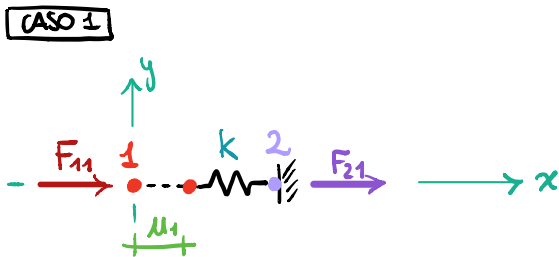
PROBLEMA: INDIVIDUARE LA RELAZIONE **f** TRA FORZE NODALI **{F}** E SPOSTAMENTI NODALI **{u}** (questa relazione sarebbe la matrice di rigidità della molla)

$$\{F\} = f(\{u\}) \xrightarrow[\text{espansa}]{\text{in forma}} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = f\left(\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}\right)$$

Poiché il problema è elastico lineare, vale il principio di sovrapposizione degli effetti. Per tanto la soluzione del problema è fornita dalla sovrapposizione di 2 casi separati:



OSSERVAZIONE PEDICI: **F**
 NODO in cui è applicata la forza
 NODO in cui leggo lo spostamento



Si considera per primo il **NODO 2** vincolato. Per l'azione della forza **F₁₁** il **NODO 1** si sposta di una certa quantità **u₁**. Per la legge di Hooke (equazione della molla) scriviamo:

$$F_{11} = K \cdot u_1$$

Nel **NODO 2** si sviluppa contemporaneamente la reazione **F₂₁**. Per l'equilibrio alla **traslazione orizzontale**:

$$\Rightarrow F_{11} + F_{21} = 0 \Rightarrow F_{21} = -F_{11} = -K \cdot u_1$$

$$F_{21} = -K \cdot u_1$$

PROPRIETÀ DELLA MATRICE [K]:

- la matrice è **SIMMETRICA** (per il **TEOREMA DI BETTI**)

RICHIAMO

Il **Teorema di Betti** ci permette di dimostrare come i lavori mutui generati da 2 o più sistemi di forze siano uguali tra loro indipendentemente dall'ordine di applicazione dei carichi.

Per lavoro mutuo si intende il lavoro compiuto da un sistema di forze già presente nella nostra struttura, per effetto degli spostamenti generati da un secondo sistema di forze applicato successivamente.

$L_{ab} = L_{ba}$
LAVORO MUTUO
O DI TRASCINAMENTO

$L_{ab} = L_a + L_b + L_{ab}$

- il **DETERMINANTE È NULLO**, e quindi la matrice **NON È INVERTIBILE**. **Fisicamente** significa che non posso, dato un sistema di forze nodali, ricavare gli spostamenti. Questo perché la molla è libera nello spazio poiché non è vincolata. Solo quando andrò a vincolare la struttura riuscirò a risolvere il problema. Vincolare la struttura vuol dire porre ad uno spazio di deformazioni che sono compatibili con i vincoli (passaggio dallo spazio quoziente (spazio matematico)).

L'energia elastica di deformazione U per il caso in esame non è altro che metà dello spostamento reale. Se il nodo 1 si sposta di u_1 e il 2 si sposta di u_2 , lo spostamento reale della molla è $\Delta u = u_2 - u_1$, quindi U può essere espressa:

in termini
matriciali
equivale a

$$U = \frac{1}{2} K (\Delta u)^2 = \frac{1}{2} K (u_2 - u_1)^2$$

→

$$U = \frac{1}{2} \{u\}^T [K] \{u\}$$

è uno scalare: $[K] \cdot \{u\}$ mi dà un vettore colonna. Poi il vettore riga $\{u\}^T$ moltiplica questo vettore colonna (prodotto riga per colonna) ed ottengo uno scalare.

(relazione valida per qualunque tipo di elemento)

OSSERVAZIONE

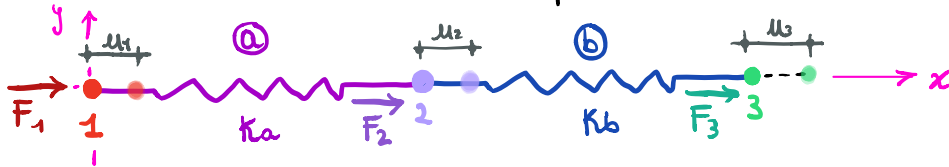
Questa relazione è un modo di rappresentare l'energia elastica di deformazione dell'elemento molla a partire dalla matrice di rigidità $[K]$ dell'elemento e degli spostamenti nodali $\{u\}$.

Possiamo dunque leggerla come: la matrice di rigidità $[K]$ dell'elemento molla, e quella matrice che mi consente di esprimere l'energia elastica di deformazione U dell'elemento in termini quadratici degli spostamenti nodali.

Questa relazione è una relazione che ha valenza generale, cioè questa relazione è **VALIDA** per **QUALUNQUE TIPO DI ELEMENTO**. Per tanto questa relazione può essere pensata come veicolo (o strada) per determinare la matrice di rigidità $[K]$ di elementi estremamente complessi ↴

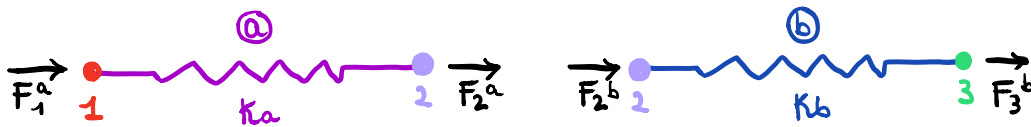
B MATRICE DI RIGIDEZZA DI UN GRUPPO DI MOLLE

Supponiamo adesso di avere una struttura composta da 2 elementi molle in serie (a) e (b)



Ovviamente i nodi ci possono riportare delle quantità u_1, u_2, u_3 . Sui nodi possono agire delle forze F_1, F_2, F_3 . Le due molle inoltre rigidezze diverse: K_a, K_b .

Riusciamo a trovare un legame tra forze e spostamenti? Il problema si può risolvere studiando separatamente l'energia elastica di deformazione delle singole molle e dopo come somma l'energia totale del sistema.



Applicando la relazione (*) trovata prima a questo caso:

$$\begin{Bmatrix} F_1^a \\ F_2^a \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_a & -K_a \\ -K_a & K_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}^{(a)} \quad \text{per cui} \quad U^a = \frac{1}{2} K (\Delta U)^2 = \frac{1}{2} K (u_2 - u_1)^2$$

Applicando la relazione (*) trovata prima a questo caso:

$$\begin{Bmatrix} F_2^b \\ F_3^b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_b & -K_b \\ -K_b & K_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}^{(b)} \quad \text{per cui} \quad U^b = \frac{1}{2} K (\Delta U)^2 = \frac{1}{2} K (u_3 - u_2)^2$$

Per tanto il sistema totale avrà un'energia elastica di deformazione U data dalla somma delle 2 energie dei 2 sistemi:

$$U = U^a + U^b = \frac{1}{2} K_a (u_2 - u_1)^2 + \frac{1}{2} K_b (u_3 - u_2)^2$$

Applicando il 1° Teorema di Castigliano si ricavano le forze F_1, F_2, F_3 :

$$U = \frac{1}{2} [K_a (u_2^2 + u_1^2 - 2u_1u_2) + K_b (u_3^2 + u_2^2 - 2u_2u_3)]$$

$$F_1 = \frac{\partial U}{\partial u_1} = K_a (u_1 - u_2)$$

$$F_2 = \frac{\partial U}{\partial u_2} = K_a (u_2 - u_1) + K_b (u_2 - u_3)$$

$$F_3 = \frac{\partial U}{\partial u_3} = K_b (u_3 - u_2)$$

Applicando il principio di sovrapposizione degli effetti ricavo:

$$\begin{Bmatrix} F_1^e \\ F_2^e \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_a & -k_a & 0 \\ -k_a & k_a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ F_2^b \\ F_3^b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_b & -k_b \\ 0 & -k_b & k_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

||

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_a & -k_a & 0 \\ -k_a & k_a+k_b & -k_b \\ 0 & -k_b & k_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

sistema risolvete la struttura

MATRICE DI RIGIDEZZA DELL'INTERA STRUTTURA

PROPRIETA' DELLA MATRICE [K]:

- la matrice è **SIMMETRICA** (per il **TEOREMA DI Betti**)
- la **MATRICE DI RIGIDEZZA DI TUTTA LA STRUTTURA** la posso ottenere in modo molto semplice: prendendo la matrice di rigidità dei singoli elementi, la spalmavo sulla dimensione della struttura e infine sommo tutte queste matrici di rigidità, cioè:

$$[K] = \begin{bmatrix} k_a & -k_a & 0 \\ -k_a & k_a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_b & -k_b \\ 0 & -k_b & k_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_a & -k_a & 0 \\ -k_a & k_a+k_b & -k_b \\ 0 & -k_b & k_b \end{bmatrix}$$

Matrice [k] del mistero (a) spalmata sulla dimensione della struttura

Matrice [k] del mistero (b) spalmata sulla dimensione della struttura

Si può dare le seguenti regole di composizione di [K]:

per un elemento e che collega il nodo i al nodo j, abbiamo:

- TERMINI DI RIGIDEZZA DIRETTI → K_{ii}^e, K_{jj}^e
- TERMINI DI RIGIDEZZA INDIRETTI → K_{ij}^e, K_{ji}^e

Quindi il termine K_{ii} in posizione "ii" della matrice [K] di tutta la struttura è uguale alla somma di tutte le rigidità dirette di tutti gli elementi appartenenti al nodo i:

$$K_{ii} = \sum K_{ii}^e$$

OSSERVAZIONE

All'inizio del capitolo abbiamo detto che la matrice di rigidità della struttura è la matrice che consente di scrivere l'energia elastica di deformazione in termini quadratici degli spostamenti. Dimostriamolo:

$$U = \frac{1}{2} \{u\}^T [K] \{u\} = \frac{1}{2} \{u_1, u_2, u_3\} \cdot \begin{bmatrix} k_a & -k_a & 0 \\ -k_a & k_a+k_b & -k_b \\ 0 & -k_b & k_b \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

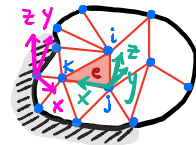
$$U = \frac{1}{2} \{u_1, u_2, u_3\} \cdot \begin{Bmatrix} k_a u_1 - k_a u_2 \\ -k_a u_1 + k_a u_2 + k_b u_2 - k_b u_3 \\ -k_b u_2 + k_b u_3 \end{Bmatrix} \quad \text{lo stesso vettore } \{Ku\}$$

$$U = \frac{1}{2} \left(u_1 \cdot \{Ku\} + u_2 \{Ku\} + u_3 \{Ku\} \right) = \frac{1}{2} \left[k_a (u_2 - u_1)^2 + k_b (u_3 - u_2)^2 \right]$$

IL METODO DEGLI SPOSTAMENTI

Quanto visto non è niente'altro che l'applicazione del metodo degli spostamenti all'elemento molla. Adesso generalizzeremo il **metodo degli spostamenti** ad un generico elemento.

[0] Data una struttura, la si **discretizza** in elementi:



Avremo a che fare con 2 S.R.

- ↳ S.R. globale G di tutta la struttura (x^G, y^G)
- ↳ S.R. locale L del singolo elemento e (x^L, y^L)

[1.a] Si caratterizza il comportamento di ciascun **elemento e** tramite i suoi spostamenti nodali $\{u^L\}_e$ (nodi considerati tutti liberi, cioè non vincolati).

[1.b] Si calcola per ciascun elemento la **matrice di rigidità elementare** $[K]_e$, ovvero quella matrice che permette di scrivere l'energia elastica di deformazione sotto forma quadratica degli spostamenti:

$$U_e = \frac{1}{2} \{u^L\}_e^T [K]_e \{u^L\}_e$$

N.B. queste matrici $[K]_e$ sono generalmente calcolate nel S.R. locale dell'elemento

$$\begin{Bmatrix} \{F\}_L \\ \{F\}_I \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [K]_{LL} & [K]_{LI} \\ [K]_{IL} & [K]_{II} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u\}_L \\ \{u\}_I \end{Bmatrix} \quad \xrightarrow{\text{risolvendo}} \begin{cases} \{F\}_L = [K]_{LL} \cdot \{u\}_L + [K]_{LI} \cdot \{u\}_I & (a) \\ \{F\}_I = [K]_{IL} \cdot \{u\}_L + [K]_{II} \cdot \{u\}_I & (b) \end{cases}$$

rigidezze per forze che agiscono sui nodi liberi per spostamenti liberi

rigidezze per forze che agiscono sui nodi vincolati per spostamenti vincolati
 rigidezze per forze che agiscono sui nodi liberi per spostamenti vincolati

$$(a) \{F\}_L = [K]_{LL} \cdot \{u\}_L + [K]_{LI} \cdot \{u\}_I \Rightarrow [K]_{LL} \cdot \{u\}_L = \{F\}_L - [K]_{LI} \cdot \{u\}_I = \{\bar{F}\}_L$$

mi da un vettore

$$\{\bar{F}\}_L = [K]_{LL} \cdot \{u\}_L$$

ricavo e' incognita $\{u\}_I$

Una volta noti $\{u\}_L$ ricavo $\{F\}_I$ dalla seconda relazione (b):

$$(b) \{F\}_I = [K]_{IL} \cdot \{u\}_L + [K]_{II} \cdot \{u\}_I$$

ricavo le reazioni vincolari

[5] Posso poi calcolare le forze nodali interne di ciascun elemento come:

$$\{F^i\}_e = [K]_e \cdot \{u^i\}_e$$

questo vettore, cioè il vettore spostamento nodali dell'elemento e nel s.r. locale, è legato al vettore spostamento nodali nel sistema globale mediante una matrice rotazionale d'orni.

RICHIAMO SCIENZA II - metodo degli spostamenti (o delle deformazioni)

Il metodo degli spostamenti è il duale del metodo delle forze. Con questo metodo si conoscono come incognite le rotazioni e gli spostamenti di alcuni punti (i nodi) della struttura, anziché le reazioni dei vincoli sovrabbondanti (metodo delle forze), conseguendo sovente il vantaggio di avere un minor numero di incognite (generalmente gli spostamenti incogniti sono in numero inferiore rispetto le forze). Il calcolo delle forze si persegue imponendo il rispetto delle condizioni di equilibrio in corrispondenza delle sezioni di cui si assegnano i parametri del movimento. Col metodo degli spostamenti si individua l'unica configurazione equilibrata tra le ∞^s soluzioni congruenti ($s = \text{grado di indeterminazione cinematica}$), ossia si individua la soluzione vera che deve essere congruente ed equilibrata. Ovviamente le condizioni di equilibrio da scrivere, in corrispondenza delle sezioni nelle quali si sono assegnati i parametri del movimento, sono tante quante sono le incognite \rightarrow sistema non omogeneo di s equazioni in s incognite.

	METODO DELLE FORZE	METODO DEGLI SPOSTAMENTI
INCOGNITE IPERSTATICHE	FORZE GENERALIZZATE	SPOSTAMENTI GENERALIZZATI
CONFIGURAZIONE DI PARTENZA	EQUILIBRATA	CONGRUENTE
CALCOLO INCOGNITE IPERST.	CONDIZIONE DI CONGRUENZA	CONDIZIONE DI EQUILIBRIO

Quando diciamo che α deve essere un termine molto grande, dobbiamo anche tener conto di come lavoriamo col PC in termini di floating point, in altre parole dobbiamo tener conto di come il nostro calcolatore sta facendo i conti:

- Reale rappresentato in SEMPLICE (SINGOLA) PRECISIONE (4 byte) \rightarrow max e^{-7}
32 bit
- Reale rappresentato in DOPPIA PRECISIONE (8 byte) \rightarrow max e^{-15}
64 bit

IN PRATICA NEI PROGRAMMI, SI PUO' SCEGLIERE $\alpha = 10^7 \cdot \max(|k_{ij}|)$ OPPURE $\alpha = 10^{15} \cdot \max(|k_{ij}|)$ IN FUNZIONE DELLA PRECISIONE DEL CALCOLATORE (7 O 15 CIFRE DECIMALI) - OPERANDO IN TAL MODO SI OTTIENE UN ERRORE SU u_i DELLO STESSO ORDINE DELLA PRECISIONE DEL CALCOLATORE -

ATTENZIONE: TALE METODO, SEMPLICE NEL SUO UTILIZZO, PUO' PROVOCARE DEI PROBLEMI QUANDO LA MATRICE DI RIGIDENZA $[K]$ E' MAL CONDIZIONATA E QUANDO CERTE COMPONENTI DEGLI SPOSTAMENTI $[u]$ SONO GRANDI.

Da un punto di vista ingegneristico, questa operazione fatta su $[K]$ cosa vuol dire? Fisicamente vuol dire addurre e mettere sul nodo i -esimo una molla di rigidezza α . Inoltre modificando F_i stiamo imponendo che la forza sia proprio quella che nasce in quella molla per effetto dello spostamento u_i : $\alpha \cdot u_i$. Cio' si traduce come: dove ho lo spostamento imposto metto una molla molto grande nella sua rigidezza.

B) METODO DEL TERMINI UNITARIO SULLA DIAGONALE

Questo metodo consiste nel modificare per ciascuna condizione di vincolo nel il vettore termini noti, nella matrice $[K]$ della struttura (entranti assemblati senza tenere conto delle condizioni di vincolo) in modo tale da ottenere un termine pari ad 1 in corrispondenza del mio g.d.l. (condizione di vincolo).

IN PARTICOLAR MODO, PER CIASCUNA CONDIZIONE OCCORRE APPORTARE LE SEGUENTI MODIFICHE:

$$u_i = \bar{u}_i$$

VEETTORE TERMINI NOTI:

$$F_j = F_j - k_{ij} \bar{u}_i$$

PER OGNI $j=1,2,\dots,n$ $j \neq i$

$$F_i = \bar{u}_i$$

MATRICE DI RIGIDENZA DELLA STRUTTURA:

$$k_{ij} = k_{ji} = 0$$

PER OGNI $j=1,2,\dots,n$ $j \neq i$

$$k_{ii} = 1$$

REAZIONI VINCOLARI

Come calcolo le reazioni vincolari? Con il metodo ©, risolto il sistema, il calcolo delle reazioni vincolari può essere effettuato utilizzando la relazione:

$$F_i = \sum_{j=1}^n K_{ij} U_j$$

coeff. matrice di rigidezza K_{ij} componente i spostamento di tutti i nodi U_j

E negli altri metodi? Un modo molto semplice è andare a vedere quali sono gli elementi che convergono nel nodo, vedere quali sono le sollecitazioni che ho nelle aste vincolate e andare a scrivere la somma di tutte queste componenti di sollecitazioni. In questo modo riesco a capire qual'è la reazione vincolare.

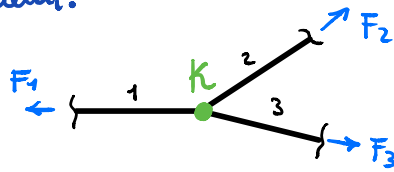
$$\begin{bmatrix}
 K_{11} & \dots & K_{1i} & \phi & K_{1i} & \dots & K_{1n} \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 K_{i-1,1} & & K_{i-1,i} & \phi & K_{i-1,i} & \dots & K_{i-1,n} \\
 K_{i,1} & & K_{i,i} & -1 & K_{i,i} & \dots & K_{i,n} \\
 K_{i+1,1} & & K_{i+1,i} & \phi & K_{i+1,i} & \dots & K_{i+1,n} \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 K_{n,1} & & K_{n,i} & \phi & K_{n,i} & \dots & K_{n,n}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 U_1 \\
 \vdots \\
 U_{i-1} \\
 F_i \\
 U_{i+1} \\
 \vdots \\
 U_n
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 F_1 - K_{1i} \bar{U}_i \\
 \vdots \\
 F_{i-1} - K_{i-1,i} \bar{U}_i \\
 -K_{i,i} \bar{U}_i \\
 F_{i+1} - K_{i+1,i} \bar{U}_i \\
 \vdots \\
 F_n - K_{n,i} \bar{U}_i
 \end{bmatrix}$$

UN SECONDO METODO È DATO DAL PORRE LA REAZIONE F_i NELLA LISTA DELLE INCOGNITE E RISOLVERE IL SISTEMA RIPORTATO A FIANCO. IN QUESTO CASO PERÒ LA MATRICE DEI COEFFICIENTI DEL SISTEMA NON È SIMMETRICA.

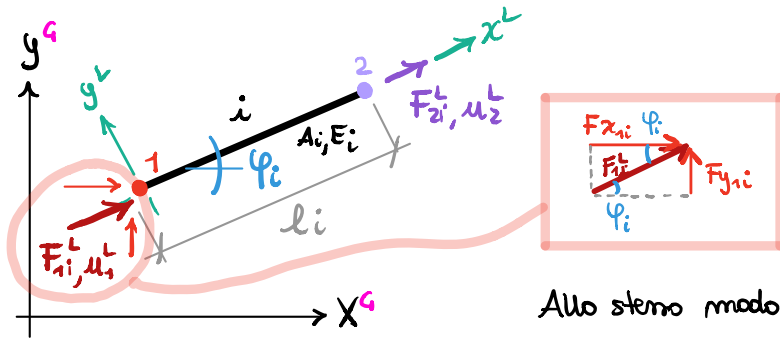
Ricorda: alla fine, per verificare che tutto quello che ho fatto sia corretto, calcolate le reazioni, verifico l'equilibrio globale della struttura.

Nel secondo capitolo si era notato come fosse semplice costruire la matrice di rigidità di tutta la struttura scomponendo prima le rigole matrici degli elementi costituenti la struttura alla dimensione strutturale, e poi sommando tra loro queste matrici scomposte. Questa operazione di sommatorie equivale allo scrivere equazioni di equilibrio al nodo.

Cerchiamo adesso di applicare questa stessa metodologia alla struttura reticolare, tenendo conto che stavolta gli elementi asta hanno ciascuno un loro orientamento nel piano. Generalmente nei nodi delle strutture reticolari convergono più aste ognuna con la sua orientazione. Quindi il voler scrivere le equazioni di equilibrio al nodo come semplice sovrapposizione di matrici di rigidità, in questo caso non è fattibile, poiché appunto le forze che convergono al nodo hanno tutte orientazioni diverse (la (*) è valida solo nel S.R. locale dell'asta i -esima). Allora per poter far salva questa metodologia di ottenere la matrice $[K]$ di tutta la struttura come sovrapposizione di quelle degli elementi costituenti, basta solo riscrivere il sistema (*) (scritto nel S.R. locale) nel S.R. globale comune a tutti gli elementi.



Prendiamo dunque le forze F_1 nel nodo iniziale della nostra asta. Queste avrà componenti nel S.R. globale:



$$\begin{cases} F_{x1i} = F_{1i}^L \cdot \cos \varphi_i \\ F_{y1i} = F_{1i}^L \cdot \sin \varphi_i \end{cases}$$

Allo stesso modo si scompone la forze nel nodo 2:

$$\begin{cases} F_{x2i} = F_{2i}^L \cdot \sin \varphi_i \\ F_{y2i} = F_{2i}^L \cdot \cos \varphi_i \end{cases}$$

Si ottiene dunque:

$$\begin{bmatrix} F_{x1i}^G \\ F_{y1i}^G \\ F_{x2i}^G \\ F_{y2i}^G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_i & 0 \\ \sin \varphi_i & 0 \\ 0 & \sin \varphi_i \\ 0 & \cos \varphi_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{1i}^L \\ F_{2i}^L \end{bmatrix}$$

FORZE S.R. NODALI GLOBALE
FORZE NODALI S.R. LOCALE

$[T]_i = \text{MATRICE DI TRASPOSIZIONE}$
 PASSAGGIO $\{F^L\} \rightarrow \{F^G\}$

Quindi:

$$\{F^q\}_i = [K]_i \{u^q\}_i$$

Quindi basta poi risolvere queste relazioni dell'elemento nella dimensione strutturale, per tutti gli elementi e sommare tutte queste matrici (che tradotto significa scrivere equazioni di equilibrio), ho come risultato finale la matrice di rigidità totale della struttura reticolare.

Ritornando alla **MATRICE DI RIGIDITÀ DELL'ELEMENTO ASTA i -esimo NEL S.R. GLOBALE**:

$$[K]_i = [T]_i^T [k]_i [T]_i$$

$$[K]_i = \begin{bmatrix} \cos \varphi_i & \sin \varphi_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin \varphi_i & \cos \varphi_i \end{bmatrix} \cdot \frac{E_i A_i}{l_i} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \varphi_i & 0 \\ \sin \varphi_i & 0 \\ 0 & \sin \varphi_i \\ 0 & \cos \varphi_i \end{bmatrix}$$

$$[K]_i = \frac{E_i A_i}{l_i} \begin{bmatrix} \cos^2 \varphi_i & \cos \varphi_i \sin \varphi_i & -\cos^2 \varphi_i & -\cos \varphi_i \sin \varphi_i \\ \cos \varphi_i \sin \varphi_i & \sin^2 \varphi_i & -\cos \varphi_i \sin \varphi_i & -\sin^2 \varphi_i \\ -\cos^2 \varphi_i & -\cos \varphi_i \sin \varphi_i & \cos^2 \varphi_i & \cos \varphi_i \sin \varphi_i \\ -\cos \varphi_i \sin \varphi_i & -\sin^2 \varphi_i & \cos \varphi_i \sin \varphi_i & \sin^2 \varphi_i \end{bmatrix}$$

4×4

La matrice $[K]_i$ è generalmente partizionata in 4 sottomatrici 2×2 :

$$[K]_i = \begin{bmatrix} [k_{11}]_i & [k_{12}]_i \\ [k_{21}]_i & [k_{22}]_i \end{bmatrix}$$

→ effetto del nodo 1 su se stesso
 → effetto del nodo 2 sul nodo 1

dove il generico elemento della matrice è definito a sua volta come:

$$[k_{mn}]_i = \frac{E_i A_i}{l_i} \begin{bmatrix} c_i^2 & c_i s_i \\ c_i s_i & s_i^2 \end{bmatrix} = [k_{22}]_i = -[k_{12}]_i = -[k_{21}]_i$$

↳ SOTTOMATRICI DIRETTE ↳ SOTTOMATRICI INDIRETTE

Ripetendo tutto \forall asta si ottiene:

	1	2	3	4	5
1	$[K_{11}]_1$ $[K_{12}]_3$	$[K_{12}]_3$	$[K_{12}]_1$		
2	$[K_{21}]_3$	$[K_{22}]_3, [K_{22}]_5$ $[K_{22}]_7$	$[K_{21}]_5$	$[K_{21}]_7$	
3	$[K_{31}]_1$	$[K_{32}]_5$	$[K_{32}]_1, [K_{32}]_2$ $[K_{32}]_3, [K_{32}]_6$	$[K_{32}]_6$	$[K_{32}]_2$
4		$[K_{42}]_7$	$[K_{42}]_6$	$[K_{42}]_4$ $[K_{42}]_6$ $[K_{42}]_7$	$[K_{42}]_4$
5			$[K_{52}]_2$	$[K_{52}]_4$	$[K_{52}]_2$ $[K_{52}]_4$

$[K]$

Se ho più termini dentro una rigola cosella significa che devo sommare tra loro le matrici che stanno dentro

MATRICE DI RIGIDEZZA DI TUTTA LA STRUTTURA

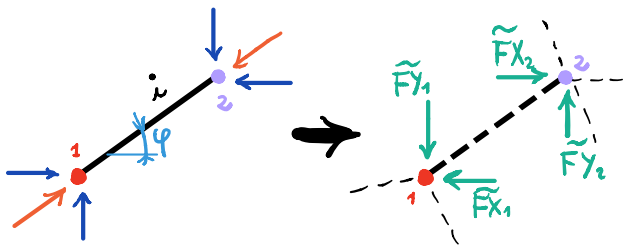
(al solito è simmetrica e singolare. \rightarrow non invertibile. Gli spostamenti possono essere ottenuti solo una volta vincolate la struttura.)

OSSERVAZIONE

Fin ora con l'importazione che abbiamo visto abbiamo a scrivere le matrici di rigidezza spostamenti e forze all'estremità per ogni asta, e quando andiamo sulla matrice globale andiamo a scrivere equazioni di equilibrio al nodo. Che vuol dire? Che sono vincolato ad avere forze applicate ai nodi. Nelle strutture reticolari la cosa ci va bene, perché comunque le forze vengono ricolotte e forze nodali. Ma se invece ho dei corichi terminali? Mi appendo al trave. Infatti per la trattazione fatte le forze sono solo sui nodi, ma sull'asta non c'è nessun altro carico. Vediamo come risolvere questo problema.

\downarrow
ci salviamo grazie al principio di sovrapposizione degli effetti (ricorda ricavo sempre in elasticità lineare).

A partire dalle reazioni vincolari $\{F\}$ rappresento le forze che l'asta scarica sulla struttura $\{\tilde{F}\}$ uguali e contrarie a $\{F\}$. Queste $\{\tilde{F}\}$ posso vederle come le forze che l'asta scarica sui nodi.



CARICHI EQUIVALENTI ALL'ASTA i

$$\{\tilde{F}\}_i = -\{F\}$$

Se i nostri vincoli sono fissi questi carichi equivalenti sui vincoli non succede nulla perché il vincolo è fisso e non si sposta. Ma se il vincolo non è un vincolo fisso (infatti è la mia struttura reticolare stessa il vincolo) vuol dire che i nodi di vincolo ① e ② subiscono, a seguito dell'applicazione dei carichi equivalenti sulla struttura, degli spostamenti (questo perché i nodi di una struttura reticolare non sono bloccati ma liberi).

In sintesi: queste $\{\tilde{F}\}_i$ inducono nella struttura spostamenti nodali. A seguito di questi spostamenti nodali nasce un'ulteriore forza all'interno del mio elemento:

$$[K] \{u^L\}$$

(effetto del processo deformativo)

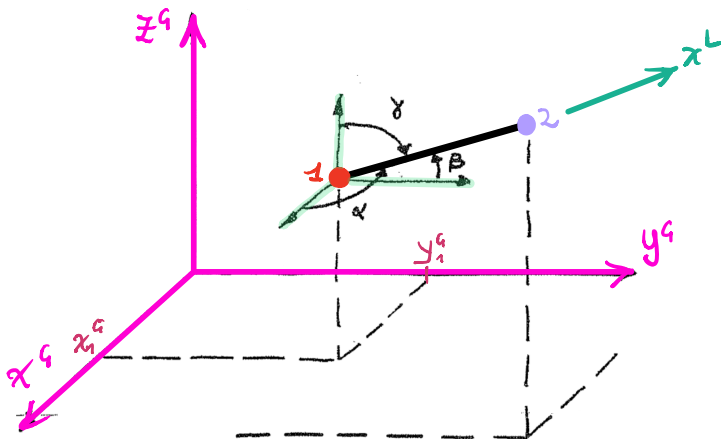
Pertanto dobbiamo tenere conto non solo della S , ma anche di questa ulteriore forza:

$$[K] \{u^L\} + \{\tilde{F}\}$$

VECTORE SOLLECITAZIONE FINALE NELL'ASTA
(effetto del processo deformativo + effetto dovuto alla variazione termica)

A questo punto posso risolvere la mia struttura e vado a determinare quali sono gli spostamenti. Noti gli spostamenti, riesco tranquillamente a passare dagli spostamenti locali a quelli globali e a calcolare quanto valgono le sollecitazioni.

MATRICE DI RIGIDEZZA DELL'ASTA NELLO SPAZIO RIFERITA AL SISTEMA GLOBALE



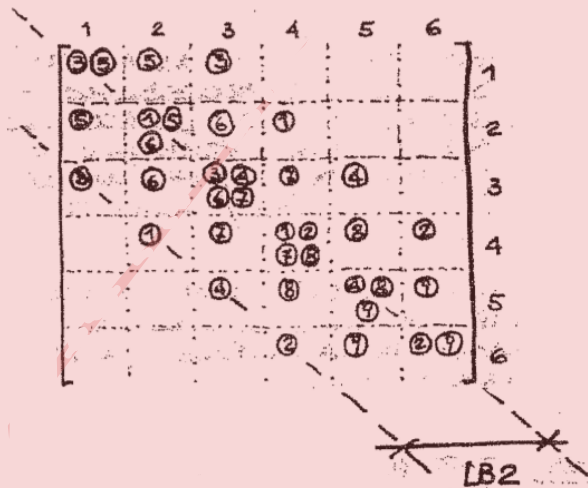
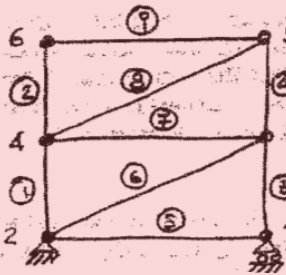
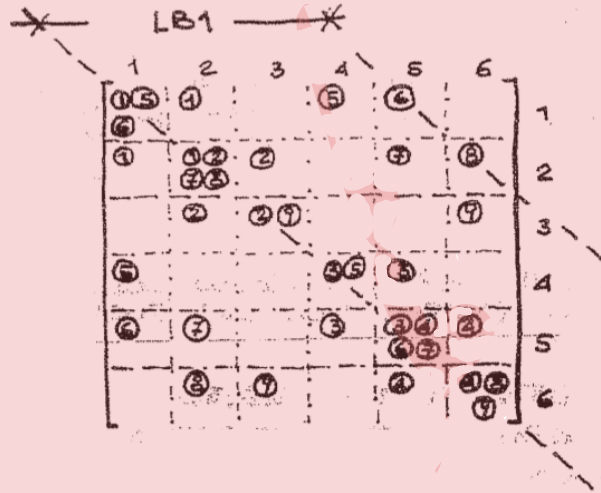
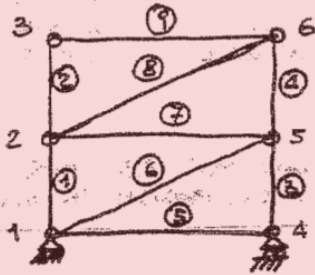
Consideriamo adesso il problema spaziale. L'asse locale x^L è una retta comunque orientata nello spazio (rispetto al S.R. GLOBALE). Questa può essere rappresentata dai 3 coseni direttori (l, m, n) che sono funzione degli angoli di orientazione (α, β, γ) della retta x^L rispetto gli assi globali.

COSENI DIRETTORI ASSE x^L

$$\begin{cases} l = \cos \alpha \\ m = \cos \beta \\ n = \cos \gamma \end{cases}$$

OSSERVAZIONE

LA MATRICE DEI COEFFICIENTI $[K]$ RISULTA ESSERE A BANDA LA CUI AMPIEZZA DI PENDE DAL TIPO DI NUMERAZIONE ADOTTATO



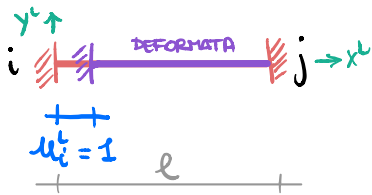
$LB2 < LB1$

IL CERCARE DUHQVE DI RIDURRE L'AMPIEZZA DELLA BANDA PORTA A DUE FATTORI ESSENZIALI:

- 1) CONSERVANDO IN MEMORIA SOLO UNA PARTE DI MATRICE, E' POSSIBILE TRATTARE SISTEMI DI EQUAZIONI DI ORDINE ELEVATO RIDUCENDO CONTEMPORANEAMENTE IL NUMERO DI OPERAZIONI DI INPUT/OUTPUT SU MEMORIE PERIFERICHE
- 2) SI RIDUCE IL NUMERO DI OPERAZIONI

▷ **COSTRUZIONE 1° COLONNA**

1) impongo $u_i^L = 1$ mentre $v_i^L = \psi_i^L = u_j^L = v_j^L = \psi_j^L = 0$



2) Si calcolano le 6 reazioni che costituiscono la 1° colonna (problema amiche)

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = -\frac{p}{EA} \quad p=0 \text{ (non c'è carico amiche)}$$

Se la derivata seconda è nulla prendo e ritroso e trovo $u(x)$:

$$\begin{aligned} u(x) &= c_1 x + c_2 \\ u'(x) &= c_1 \\ u''(x) &= 0 \end{aligned} \quad \begin{aligned} &\text{impongo poi le condizioni} \\ &\text{di contorno per trovare le} \\ &\text{costanti di integrazione} \end{aligned} \quad \rightarrow \begin{cases} u(x=0) = u_i^L = 1 \\ u(x=l) = u_j^L = 0 \end{cases}$$

dunque:

$$\begin{cases} 1 = c_2 \\ 0 = c_1 l + c_2 \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 = -1/l \\ c_2 = 1 \end{cases} \quad \rightarrow \begin{cases} u(x) = -\frac{x}{l} + 1 \\ u'(x) = -\frac{1}{l} \end{cases}$$

$$N(x) = EA \cdot u'(x) \rightarrow N(x) = -\frac{EA}{l} \Rightarrow N_{\text{cost}} \text{ su tutta la trave}$$

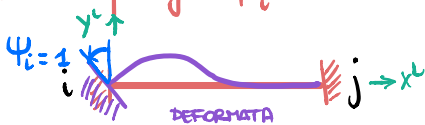
ovviamente essendo il problema soltato amiche $M(x) = T(x) = 0$

dunque ricordando la relazione che lega $\{F\}$ a $\{u\}$ posso scrivere la 1° colonna:

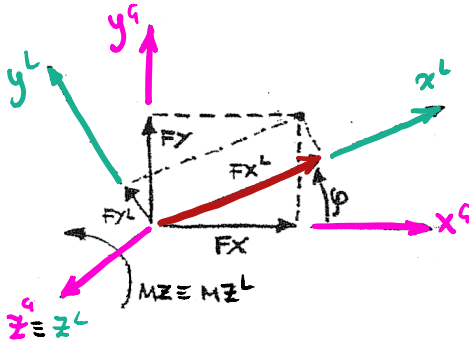
$$\begin{Bmatrix} F_{x1}^L \\ F_{y1}^L \\ M_{z1}^L \\ F_{x2}^L \\ F_{y2}^L \\ M_{z2}^L \end{Bmatrix} = [k] \begin{Bmatrix} u_1^L \\ v_1^L \\ \psi_1^L \\ u_2^L \\ v_2^L \\ \psi_2^L \end{Bmatrix} \rightarrow [k] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{EA}{l} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

▷ **COSTRUZIONE 3° COLONNA**

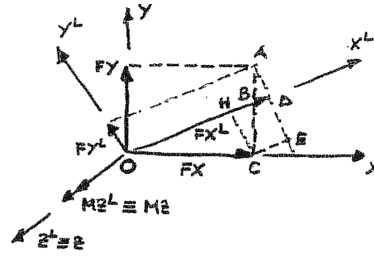
1) impongo $\psi_i^L = 1$ mentre $u_i = v_i = u_j = v_j = \psi_j = 0$



Tutto quello che abbiamo scritto è con riferimento al S.R. locale della trave. Possiamo adesso alla descrizione nel S.R. globale:



RELAZIONI DI CAMBIAMENTO DI SISTEMA PER ROTOTRASLAZIONE



$$\begin{aligned}
 FY^L &= \overline{AD} = \overline{AE} - \overline{DE} = \overline{AE} - \overline{HC} = \\
 &= \overline{AC} \cos \varphi - \overline{OC} \sin \varphi = \\
 &= FY \cos \varphi - FX \sin \varphi \\
 FX^L &= \overline{CD} = \overline{OH} + \overline{HD} = \overline{OH} + \overline{CE} = \\
 &= \overline{OC} \cos \varphi + \overline{AC} \sin \varphi = \\
 &= FX \cos \varphi + FY \sin \varphi
 \end{aligned}$$

$$\begin{Bmatrix} FX_{1i}^L \\ FY_{1i}^L \\ MZ_{1i}^L \\ FX_{2i}^L \\ FY_{2i}^L \\ MZ_{2i}^L \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_i & \sin \varphi_i & \phi & \phi & \phi & \phi \\ -\sin \varphi_i & \cos \varphi_i & \phi & \phi & \phi & \phi \\ \phi & \phi & 1 & \phi & \phi & \phi \\ \phi & \phi & \phi & \cos \varphi_i & \sin \varphi_i & \phi \\ \phi & \phi & \phi & -\sin \varphi_i & \cos \varphi_i & \phi \\ \phi & \phi & \phi & \phi & \phi & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} FX_{1i}^G \\ FY_{1i}^G \\ MZ_{1i}^G \\ FX_{2i}^G \\ FY_{2i}^G \\ MZ_{2i}^G \end{Bmatrix}$$

$$\{F^L\}_i = [T]_i \{F^G\}_i$$

al solito vale la proprietà $[T]_i^T [T]_i = [I]$

MATRICE DI TRASFORMAZIONE che correla S.R. Locale e S.R. Globale

E allo stesso modo:

$$\{u^L\}_i = [T]_i \{u^G\}_i$$

Ricordando poi che:

$$\{F^L\}_i = [K]_i \{u^L\}_i \quad \rightarrow \quad [K]_i [T]_i \{u^G\}_i = [T]_i \{F^G\}_i$$

$$\boxed{[T]_i^T [K]_i [T]_i} \{u^G\}_i = \underbrace{[T]_i^T [T]_i}_{[I]} \{F^G\}_i$$

premultiplicando entrambi i membri per $[T]^T$

MATRICE DI RIGIDEZZA ELEMENTO TRAVE E.-B. NEL S.R. GLOBALE (trascurando la deformabilità e topico)

Si ottiene infine:

$$\{F^G\}_i = [K]_i \{u^G\}_i$$

(4) Scartoprolo le forze e gli spostamenti in:

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} \{u\}_L \\ \{u\}_I \end{Bmatrix}$$

← SPOSTAMENTI NODI LIBERI (incogniti)
← SPOSTAMENTI NODI IMPOSTI (noti, ad esempio vincoli o cedimenti vincolari)

E allo stesso modo le forze nodali $\{F\}$:

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} \{F\}_L \\ \{F\}_I \end{Bmatrix}$$

← FORZE APPLICATE AI NODI LIBERI, cioè ai corrispondenti spostamenti incogniti (FORZE NOTE)
← FORZE CORRISPONDENTI AGLI SPOSTAMENTI IMPOSTI (cioè sono le REAZIONI VINCOLARI INCOGNITE)

⇒ $\{F\} = [K]\{u\}$ diventa:

$$\begin{Bmatrix} \{F\}_L \\ \{F\}_I \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [K]_{LL} & [K]_{LI} \\ [K]_{IL} & [K]_{II} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u\}_L \\ \{u\}_I \end{Bmatrix}$$

(5) Calcolo gli spostamenti $\{u\}_L$ dei nodi liberi e le reazioni vincolari $\{F\}_I$ nei nodi imposti:

$$\begin{cases} \{F\}_L = [K]_{LL} \cdot \{u\}_L + [K]_{LI} \cdot \{u\}_I \\ \{F\}_I = [K]_{IL} \cdot \{u\}_L + [K]_{II} \cdot \{u\}_I \end{cases}$$

← termine noto
← termine noto
← mi da un vettore
← termine noto

$$\{F\}_L = [K]_{LL} \cdot \{u\}_L + [K]_{LI} \cdot \{u\}_I \Rightarrow [K]_{LL} \cdot \{u\}_L = \{F\}_L - [K]_{LI} \cdot \{u\}_I = \{\bar{F}\}_L$$

← ricavo l'incognita $\{u\}_L$

$$\{\bar{F}\}_L = [K]_{LL} \cdot \{u\}_L$$

Una volta noti $\{u\}_L$ ricavo $\{F\}_I$ dalla seconda relazione (b):

$$\{F\}_I = [K]_{IL} \cdot \{u\}_L + [K]_{II} \cdot \{u\}_I$$

← ricavo le reazioni vincolari
← termine noto

(6) Posso poi calcolare le forze nodali interne di ciascun elemento come:

$$\{F\}_e = [k]_e \{u\}_e \quad (*)$$

Queste reazioni poi le posso riscrivere nel s.r. globale tramite la matrice di trasformazione:

$$\{R^g\}_i = [T]_i \{R^L\}_i$$

forze che i
vincoli applicano alla trave

Da queste ricavo le forze che la trave scarica sui nodi, ovvero i **carichi equivalenti** (cioè le reazioni vincolari cambiate di segno):

$$\{F^E\}_i = -\{R^g\}_i$$

li devo sommare alle forze nodali già presenti

$$\{F\} = \{F^c\} + \left[\sum_i \{F^E\}_i \right]$$

① CONCENTRATI DIRETTAMENTE APPLICATI AI NODI DELLA STRUTTURA
② CARICHI EQUIVALENTI AI NODI

VETTORI CARICHI NODALI TOTALI (SOMMA DEI SINGOLI CONTRIBUTI) **①+②**

Poi risolvendo il sistema determino gli spostamenti nodali.

Adesso ci poniamo un altro problema: **quanto valgono le sollecitazioni all'interno della una trave?**

Devo applicare il principio di sovrapposizione degli effetti perché uno è l'effetto iperstatico (trave approssimata incastrata) più il processo deformativo della trave. Quindi M, N, T saranno funz. del processo deformativo e delle reazioni di incastro perfetto (osserva che le sollecitazioni sono definite con s.r. locale).

$$[S]_i^T = [M_{1i}, T_{1i}, M_{2i}, N_{2i}, T_{2i}, M_{2i}]$$

sollecitazioni nei nodi

VETTORE CARATTERISTICHE DI SOLLECITAZIONE

$$[S]_i = [F^L]_i + [R^L]_i = [k]_i [u^L]_i + [R^L]_i$$

eventuali (presenti solo se travi concrete)

CONTRIBUTO SPOSTAMENTI NODALI

REAZIONI DI INCASTRO PERFETTO

$$[u^L]_i = [T]_i [u^g]_i$$

spostamenti nodali di struttura

$$[S]_i = [k]_i [T]_i [u^g]_i + [R^L]_i$$

Reazioni vincolari di incastro perfetto

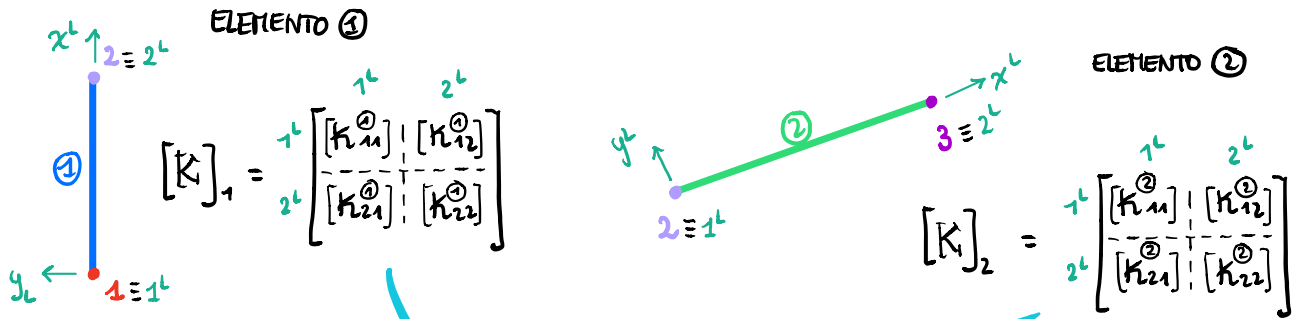
ANALOGAMENTE PER ELEMENTI VINCOLATI E DIRETTAMENTE CARICATI IL CALCOLO DELLE REAZIONI VINCOLARI AVVERrà ANCORA APPLICANDO IL PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI:

$$[RV] = [F] + \sum_e [RI^g]_e$$

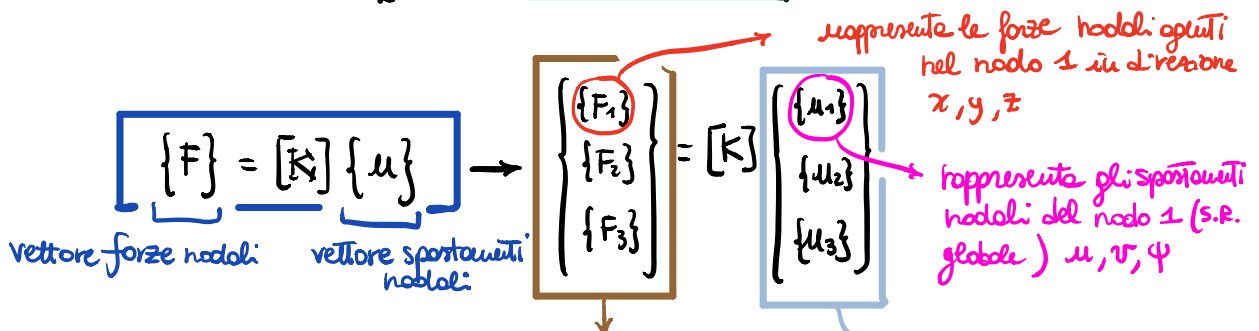
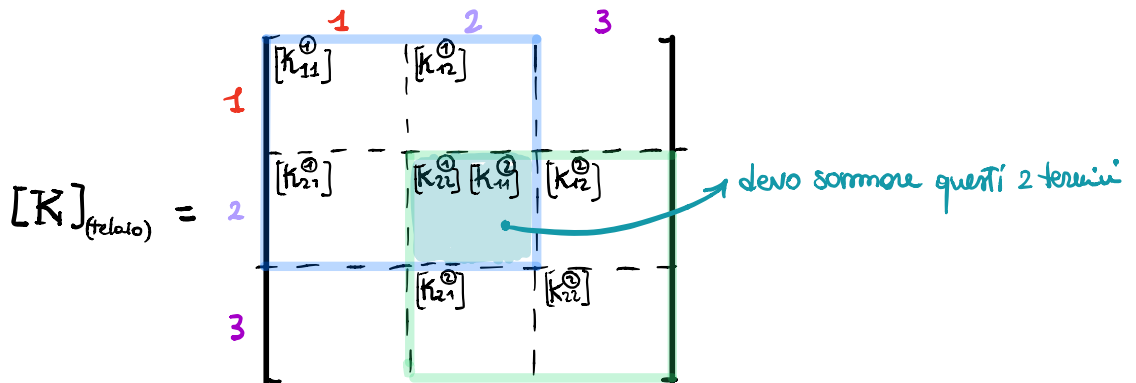
REAZIONI VINCOLARI INDOTTE DAL PROCESSO DEFORMATIVO

CONTRIBUTI REAZIONI DI INCASTRO PERFETTO TRAVI DIRETTAMENTE CARICATE E CONFLUENTI NEI NODI DI VINCOLO

$[K]_1$ e $[K]_2$ sono le matrici di rigidità del singolo elemento. Adesso devo spalmare sulle dimensioni strutturali (OPERAZIONE DI ASSEMBLAGGIO DELLA MATRICE DI RIGIDITÀ $[K]$ DELL'INTERO TELAI) che invece ha dimensioni $[3 \times 3]$ (perché dimensioni 3×3 ? perché il telaio risulta essere composto da 3 nodi: 1, 2, 3):



SPALMO SULLA dim strutturali



questo vettore come è fatto? Dobbiamo ricordarci che il telaio è caricato con un carico distribuito più una forze nodale

dobbiamo ricordarci di imporre le condizioni vincolari

Consideriamo le CONDIZIONI VINCOLARI:

$$\text{dati noti} \begin{cases} \text{NODO ①} \rightarrow \text{incastro} \Rightarrow \{u_1\} = 0 \text{ cioè } u_1 = v_1 = \varphi_1 = 0 \\ \text{NODO ③} \rightarrow \text{incastro} \Rightarrow \{u_3\} = 0 \text{ cioè } u_3 = v_3 = \varphi_3 = 0 \end{cases}$$

SISTEMA

$$\begin{bmatrix} P \\ 2P \\ 66.67P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32055.515 & 23988.48 & 5775 \\ 23988.48 & 80515.36 & 4800 \\ 5775 & 4800 & 4500000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \psi_2 \end{bmatrix}$$

SOLUZIONE
SPOST. MODI LIBERI
2

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \psi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.3647004 \cdot 10^{-5} P \\ 1.9893148 \cdot 10^{-5} P \\ 1.4776081 \cdot 10^{-5} P \end{bmatrix}$$

REAZIONI VINCOLARI

$$[RV] = [F]_I + \sum_{e=1}^n [RI^G]_e$$

FORZE NEI NODI VINCOLATI INDOTTE DAL PROCESSO DEFORMATIVO

$$[F]_I = [K]_{IL} [u]_L$$

$$\begin{bmatrix} [F]_1 \\ [F]_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{12}]_1 \\ [K_{21}]_2 \end{bmatrix} [u]_2$$

$$\begin{bmatrix} FX_1 \\ FY_1 \\ MZ_1 \\ FX_3 \\ FY_3 \\ MZ_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -46.875 & \emptyset & -9375 \\ \emptyset & -62500 & \emptyset \\ 9375 & \emptyset & 1250000 \\ -32008.64 & -23988.48 & 3600 \\ -23988.48 & -18015.36 & -4800 \\ -3600 & 4800 & 1000000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.3647004 \cdot 10^{-5} P \\ 1.9893148 \cdot 10^{-5} P \\ 1.4776081 \cdot 10^{-5} P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.13916546P \\ -1.2433218 P \\ 18.598042 P \\ -0.8608345 P \\ -0.75667829P \\ 14.822439 P \end{bmatrix}$$

CONTRIBUTI SUI VINCOLATI DA ELEMENTI DIRETTAMENTE CARICATI

$$[RI^G]_1 = \begin{bmatrix} H_1^G \\ V_1^G \\ M_1^G \\ \emptyset \\ \emptyset \\ \emptyset \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -P \\ \emptyset \\ 66.67P \\ \emptyset \\ \emptyset \\ \emptyset \end{bmatrix}$$

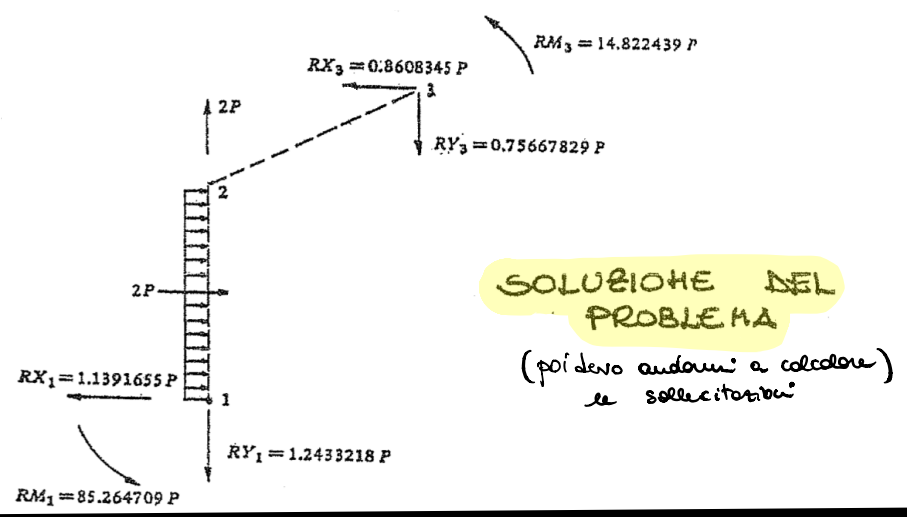
REAZIONI INCASTRO PERPETUO ASTA

Sommando i 2 contributi:

REAZIONI VINCOLARI

$$\begin{bmatrix} RX_1 \\ RY_1 \\ RM_1 \\ RX_3 \\ RY_3 \\ RM_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1391655 P \\ -1.2433218 P \\ 18.598042 P \\ -0.8608345 P \\ -0.7566783 P \\ 14.822439 P \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -P \\ \emptyset \\ 66.67P \\ \emptyset \\ \emptyset \\ \emptyset \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.1391655 P \\ -1.2433218 P \\ 85.264709 P \\ -0.8608345 P \\ -0.7566783 P \\ 14.822439 P \end{bmatrix}$$

MODI 1
MODI 3



Quello che più conosciamo dal corso primo lo prendiamo lo ribatteiamo lo ricollociamo in modo corretto su una matrice che non è più una 6×6 ma una 12×12 , con l'unica accortezza di scegliere gli opportuni momenti d'inerzia. Di seguito di riporta $[K^L]$ della trave nello spazio:

$[K^L] =$

nodo 1	$\frac{EA}{L}$									
	0	$\frac{12EI_z}{L^3(1+\phi_z)}$								
	0	0	$\frac{12EI_y}{L^3(1+\phi_y)}$							
	0	0	0	$\frac{4I_z}{L}$						
	0	0	$\frac{-6EI_y}{L^2(1+\phi_y)}$	0	$\frac{(4+\phi_z)EI_y}{L(1+\phi_z)}$					
	0	$\frac{6EI_z}{L^2(1+\phi_z)}$	0	0	0	$\frac{(4+\phi_y)EI_z}{L(1+\phi_y)}$				
nodo 2	$\frac{EA}{L}$	0	0	0	0	$\frac{EA}{L}$				
	0	$\frac{-12EI_z}{L^3(1+\phi_z)}$	0	0	0	0	$\frac{12EI_z}{L^3(1+\phi_z)}$			
	0	0	$\frac{-12EI_y}{L^3(1+\phi_y)}$	0	$\frac{6EI_y}{L^2(1+\phi_y)}$	0	0	$\frac{12EI_y}{L^3(1+\phi_y)}$		
	0	0	0	$-\frac{4I_z}{L}$	0	0	0	0	$\frac{4I_z}{L}$	
	0	0	$\frac{-6EI_y}{L^2(1+\phi_y)}$	0	$\frac{(2-\phi_z)EI_y}{L(1+\phi_z)}$	0	0	$\frac{6EI_y}{L^2(1+\phi_y)}$	0	$\frac{(4+\phi_z)EI_y}{L(1+\phi_z)}$
	0	$\frac{6EI_z}{L^2(1+\phi_z)}$	0	0	0	$\frac{(2-\phi_y)EI_z}{L(1+\phi_y)}$	0	$\frac{-6EI_z}{L^2(1+\phi_z)}$	0	$\frac{(4+\phi_y)EI_z}{L(1+\phi_y)}$

SIMM.

$$\left(\phi_\alpha = \frac{12EI_\alpha}{EA L^2}, \quad \alpha = z, y \right)$$

$$\left(\beta = 2, y \right)$$

Coefficiente di deformabilità a taglio

u_1

v_1

w_1

θ_1

ψ_1

u_2

v_2

w_2

θ_2

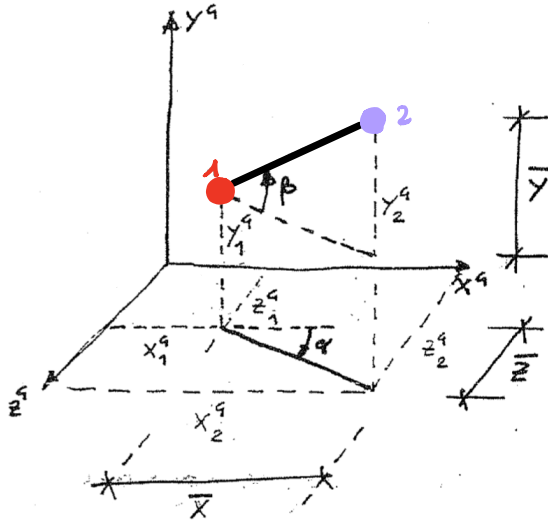
ψ_2

N.B. La matrice tiene in conto anche della deformabilità a taglio.

Adesso dobbiamo porre la matrice di rigidezza $[K]$ per un'orte nello spazio del S.R. locale al S.R. globale. Nasce un problema: nello spazio non riusciamo a definire univocamente gli assi locali della trave, in quanto, come abbiamo visto nell'esempio precedente, da soltanto la tabella delle incidere e quella delle coordinate nodali in input (mentre nel primo questi 2 input erano sufficienti). Vedremo più avanti come gestire la definizione del S.R. locale nello spazio, ma per si fa notare che il S.R. locale della trave è un sistema principale e centrale di inerzia (la matrice di rigidezza della trave è proprio legata a questo sistema) (il problema infatti è proprio che a partire dalle coordinate dei nodi, non è possibile definire il S.R. principale e centrale di inerzia. Le informazioni che diamo in input non sono sufficienti → vedremo come bypassare questo problema avanti).

ATTENZIONE: Il sistema L_1 non è ancora il sistema locale del mio elemento!

Nel sistema globale le coordinate del nodo 1 e 2 le conosciamo. Da questi possiamo determinare i termini che entrano in gioco nella matrice $[K_1]$, ovvero gli angoli α e β .



CON RIFERIMENTO ALLA FIGURA È POSSIBILE NOTARE LE COORDINATE DEI PUNTI 1 E 2 DELLA TRAVE

$$(x_1^g, y_1^g, z_1^g)$$

$$(x_2^g, y_2^g, z_2^g)$$

DETERMINARE I TERMINI DELLA MATRICE $[K_1]$ -

DEFINITI I SEGUENTI VALORI

$$\begin{cases} \bar{X} = x_2^g - x_1^g & S = (\bar{X}^2 + \bar{Z}^2)^{1/2} \\ \bar{Y} = y_2^g - y_1^g & L = (\bar{X}^2 + \bar{Y}^2 + \bar{Z}^2)^{1/2} \\ \bar{Z} = z_2^g - z_1^g \end{cases}$$

È POSSIBILE SCRIVERE:

$$\begin{cases} \sin \alpha = \bar{Z}/S & \cos \alpha = \bar{X}/S \\ \sin \beta = \bar{Y}/L & \cos \beta = S/L \end{cases}$$

DA CUI SEGUE:

$$[K_1] = \begin{bmatrix} \bar{X}/L & \bar{Y}/L & \bar{Z}/L \\ -\bar{X}\bar{Y}/LS & S/L & -\bar{Y}\bar{Z}/LS \\ -\bar{Z}/S & 0 & \bar{X}/S \end{bmatrix}$$

MATRICE DI TRASFORMAZIONE IN TERMINI DI COORDINATE NODALI

OSSERVAZIONE

Quando mancano i problemi? Quando $S = 0$ ovvero quando la proiezione della mia asta sul piano (x^g, y^g) è nulla. NEL CASO IN CUI \bar{X} E \bar{Z} SIANO EGUALI A ZERO (CASO DELL'ASTA VERTICALE) LA QUANTITÀ S È UGUALE A ZERO PER CUI LA MATRICE $[K_1]$ RISULTA NON ESSERE DEFINITA. IN QUESTI CASI LA MATRICE $[K_1]$ PUÒ ESSERE POSTA EGUALE A:

PER $\bar{Y} > 0$
asta che va verso l'alto

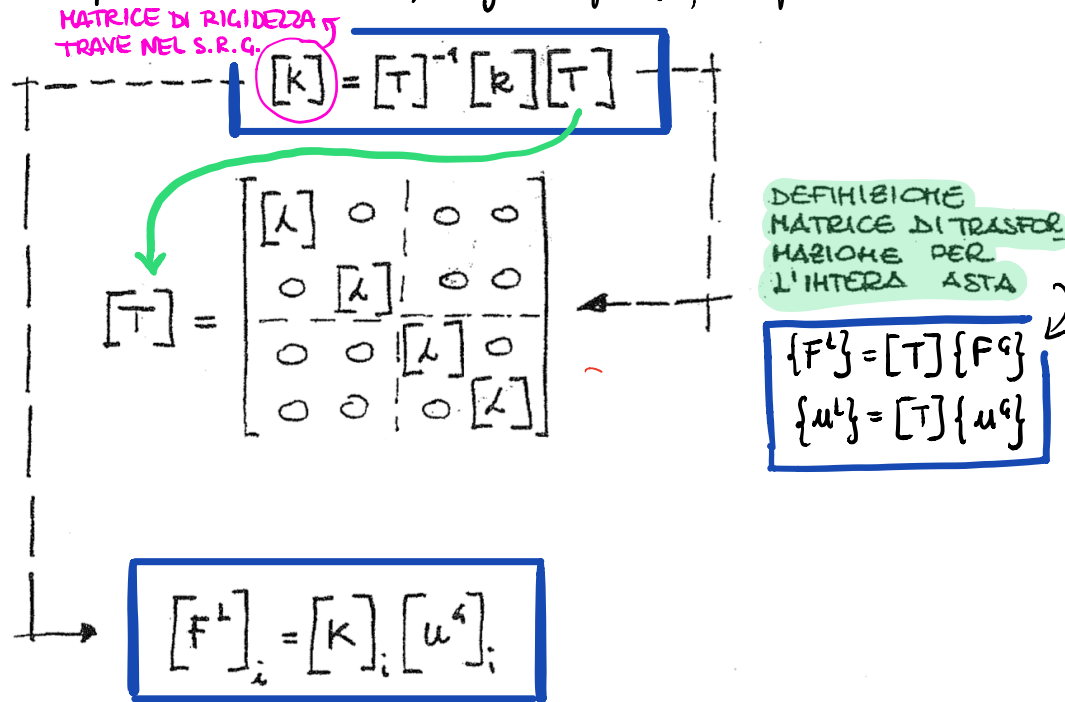
$$[K_1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

PER $\bar{Y} < 0$
asta che va verso il basso

$$[K_1] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

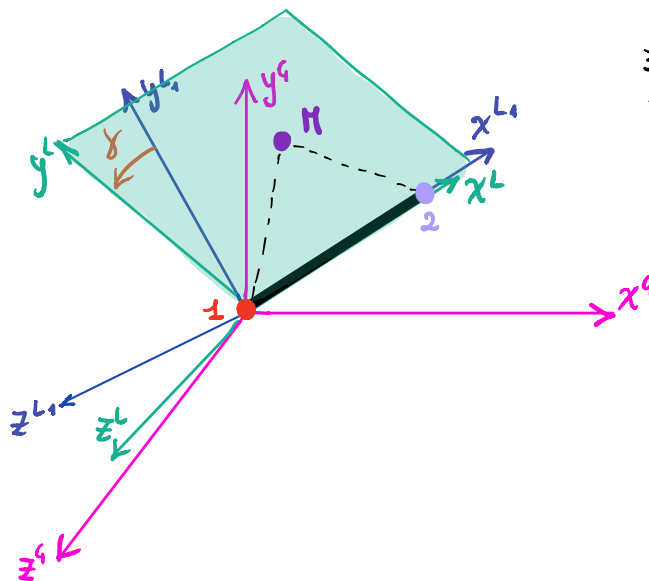
quando l'asta è verticale

Costruite in questa maniera $[k]$, il gioco è fatto, posso passare: $[K^L] \rightarrow [K^G]$.



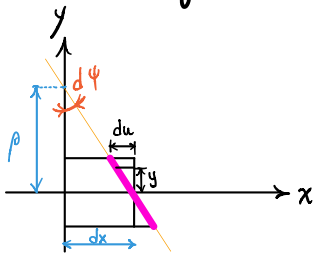
Morale della favola? Quando sono nello spazio, non è sufficiente fornire soltanto le coordinate nodali, ma devo fornire per ciascun elemento l'angolo δ . In genere posso:

- fornire al programma direttamente δ
- oppure posso dare le coordinate (nel S.R. globale) di un 3° punto (nodo MASTER), che sono contenute nel piano (x^L, y^L) .



3 nodi (1, 2, M) individuano 1 e 1 solo piano

Si fa notare che fino ad adesso non abbiamo detto nulla in merito a come la sezione deformata si pone con riferimento all'indeformata.



$$\epsilon_x = \frac{du}{dx} = -y d\psi$$

$$\hookrightarrow du = \epsilon_x \cdot dx = -y d\psi \rightarrow \epsilon_x \cdot \rho d\psi = -y d\psi$$

$$\boxed{\epsilon_x = -\frac{y}{\rho}}$$

$$dx = \rho \cdot d\psi$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\psi}{dx}$$

Utilizzando la relazione costitutiva: $\sigma_x = E \cdot \epsilon_x \rightarrow$
$$\boxed{\sigma_x = -\frac{E y}{\rho}}$$

Ricevo infine il momento:

$$M_z = \int_A \sigma_x \cdot y \cdot dA = \int_A -\frac{E}{\rho} y^2 dA = -\frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA = -\frac{E J_x}{\rho} = -E J_x \cdot \frac{d\psi}{dx}$$

$$\boxed{\frac{d\psi}{dx} = -\frac{M_z}{E J_x}}$$

RELAZIONE CHE MI LEGA LA ROTAZIONE ψ ALLA CARATTERISTICA DI SOLLECITAZIONE M

OSSERVAZIONE

Questa relazione è analoga a quanto visto a Scienze delle Costruzioni I, con una importante differenza:

TRAVE EULERO - BERNOLLI (Scienze I)

- $w \rightarrow$ spostamento
- $\frac{dw}{dx} = \varphi \rightarrow$ rotazione
- $\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{d\varphi}{dx} = \chi \rightarrow$ curvatura
- $\chi = -\frac{M}{EJ} \rightarrow \frac{d\varphi}{dx} = \frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{M}{EJ}$

TRAVE TIMOSHENKO

$$\frac{d\psi}{dx} = -\frac{M}{EJ} \neq \frac{d^2w}{dx^2}$$

perché: $\gamma_{xy} = -\psi + \frac{dw}{dx}$

allora: $\psi = \frac{dw}{dx} - \gamma_{xy}$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{dw}{dx} - \gamma_{xy} \right) = -\frac{M}{EJ}$$

Quindi:
$$(*) \quad \boxed{\frac{d\psi}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dw}{dx} - \gamma_{xy} \right) = -\frac{M}{EJ}}$$
 \rightarrow relazione che governa il problema nella trave alla Timoshenko

facendo l'ipotesi che γ_{xy} sia costante lungo la sezione e pari al valor medio questo può essere calcolato come:

$$\boxed{\gamma_{xy} = \frac{T}{k \cdot A \cdot G}}$$

(distorsione angolare)
(nella realtà non è costante lungo la sezione)

con $\begin{cases} T = \text{torque sollecitante nella sezione} \\ k = \text{coefficiente di deformabilità a taglio} \\ G = \frac{E}{2(1+\nu)} \text{ (modulo elastico a taglio)} \end{cases}$

Come prima (avevamo fatto le ipotesi semplificative di $\gamma_{xy} = \text{cost}$ lungo tutta la sezione), facciamo fare un'ulteriore ipotesi semplificativa considerando che γ_{xy} è costante lungo tutto l'elemento (quindi stavolta spostandoci lungo x) e vale $\gamma_{xy} = \gamma_0$.
 Alla luce di questa ipotesi la (***) si modifica in:

$$W(x^t) = \{N\} \{\bar{u}_8^t\}$$

$$\{N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4\} \rightarrow \begin{cases} w_1 \\ \psi_1 + \gamma_{xy1} \\ w_2 \\ \psi_2 + \gamma_{xy2} \end{cases}$$

diventano γ_0

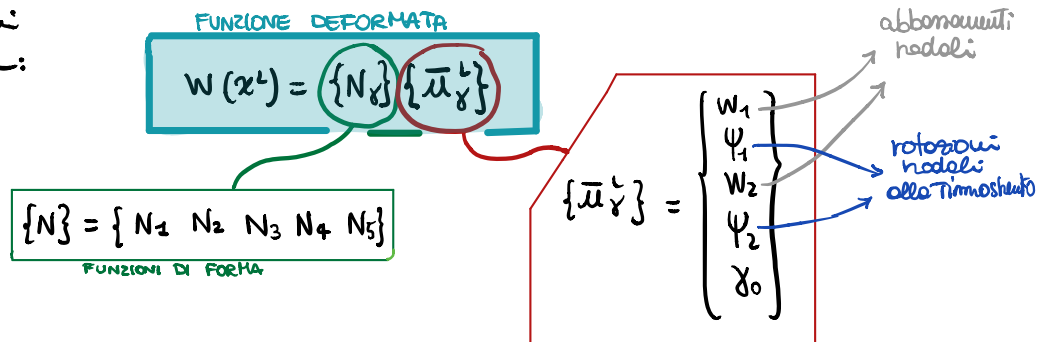
Quindi sviluppando il prodotto tra vettori (riga \cdot colonna) otteniamo:

$$W(x^t) = N_1 \cdot w_1 + N_2 (\psi_1 + \gamma_0) + N_3 w_2 + N_4 (\psi_2 + \gamma_0)$$

$$W(x^t) = N_1 \cdot w_1 + N_2 \psi_1 + N_3 w_2 + N_4 \psi_2 + \boxed{(N_2 + N_4)} \gamma_0$$

\downarrow
 N_5

lo riscriviamo in termini di prodotto vettoriale:



Inserendo la funzione $W(x^t)$ appena trovata nell'espressione del potenziale U , e ricordandoci dell'ipotesi di $\gamma_{xy} = \gamma_0$ (costante per tutto l'elemento), riusciamo ad esprimere U in termini quadratici degli spostamenti $\{\bar{u}_8^t\}$ attraverso la matrice di rigidità $[k_8]$:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L [EJ \left(\frac{d^2 W}{dx^2} - \frac{d\gamma_{xy}}{dx} \right)^2 + KAG \gamma_{xy}^2] dx$$

$$U = \frac{1}{2} \{\bar{u}_8^t\}^T [k_8] \{\bar{u}_8^t\}$$

MATRICE DI RIGIDITÀ

Ricavato δ_0 posso riscrivere i parametri nodali (ovvero il vettore $\{\bar{u}_8^L\}$):

$$\{\bar{u}_8^L\} = \begin{Bmatrix} W_1 \\ \psi_1 \\ W_2 \\ \psi_2 \\ \delta_0 \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2c & -cl & 2c & -cl \end{bmatrix}}_{[T]} \begin{Bmatrix} W_1 \\ \psi_1 \\ W_2 \\ \psi_2 \end{Bmatrix}$$

$\{\bar{u}^L\}$ = SPOSTAMENTI NODALI EFFETTIVI

matrice di trasformazione
con $c = 6al / (-12al^2 + b)$

Quindi tramite $[T]$ posso riscrivere:

$$\rightarrow \{\bar{u}_8^L\} = [T] \{\bar{u}^L\}$$

$$\rightarrow \{\bar{u}_8^L\}^T = \{\bar{u}^L\}^T [T]^T$$

Inserendolo nell'espressione dell'energia elastica di deformazione, posso esprimere U in termini quadratici degli spostamenti $\{\bar{u}^L\}$ attraverso la matrice di rigidità $[k]$:

$$U = \frac{1}{2} \{\bar{u}_8^L\}^T [k_8] \{\bar{u}_8^L\}$$

$$U = \frac{1}{2} \{\bar{u}^L\}^T [T]^T [k_8] [T] \{\bar{u}^L\}$$

$$U = \frac{1}{2} \{\bar{u}^L\}^T [k] \{\bar{u}^L\}$$

MATRICE DI RIGIDEZZA DELLA TRAVE DI TIMOSHENKO

$$[k] = \left(\frac{a}{1+\epsilon} \right) \begin{bmatrix} 12a & 6al & -12a & 6al \\ 6al & 4al^2 & -6al & 2al^2 \\ -12a & -6al & 12a & -6al \\ 6al & 2al^2 & -6al & 4al^2 \end{bmatrix}$$

4×4

$\epsilon = \frac{12fJ}{KAGe^2}$

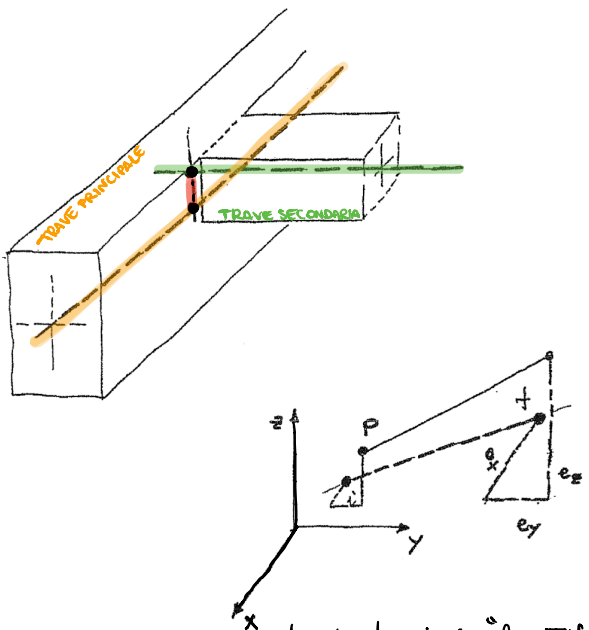
dove: $a = \frac{EJ}{e^3}$ $b = K \cdot A \cdot G \cdot L$

↳ rapporto che tiene conto dell'ovvero interpretato alla Timoshenko la nostra trave. Per l grande (trave snella) $\Rightarrow \epsilon \rightarrow 0 \Rightarrow a \cdot [\text{matrice}] \Rightarrow [k] = [k]_d \cdot \epsilon \cdot b$.

$$\{\bar{u}^L\} = \begin{Bmatrix} W_1 \\ \psi_1 \\ W_2 \\ \psi_2 \end{Bmatrix}$$

PROBLEMI DI MODELLAZIONE DI STRUTTURE INTELAIATE

ECCENTRICITÀ (problema di elementi non in asse tra di loro)



Per tener in conto dell'eccentricità che può nascere nel nodo strutturale tra trave principale e secondaria posso: tracciare gli cm rispettivi delle travi e poi collegare i 2 nodi con una **trave fittizia = "rigid link"** con dei parametri inerziali infinitamente grandi tali da creare un **link rigido**. Da un punto di vista concettuale non fa una piega questo ragionamento, ma devo fare attenzione perché inventando un nuovo elemento trave infinitamente rigida, **rischio di mal definire questo infinitamente rigido** nel contesto della rigidità della trave → perché rischio di mettere in conto delle rigidità estremamente elevate rispetto la rigidità in gioco che mi vanno a **malcondizionare**

al posto di costruire "elementi fittizi" il sistema. Allora posso seguire un'altra strada: considerare il nodo e quello che succede all'estremità della trave:

FORZE AL NODO

$$\{F\}_I = [e] \{F\}_P$$

MATRICE DELLE ECCENTRICITÀ

$$\begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{Bmatrix}$$

FORZE ESTREMITÀ DELLA TRAVE

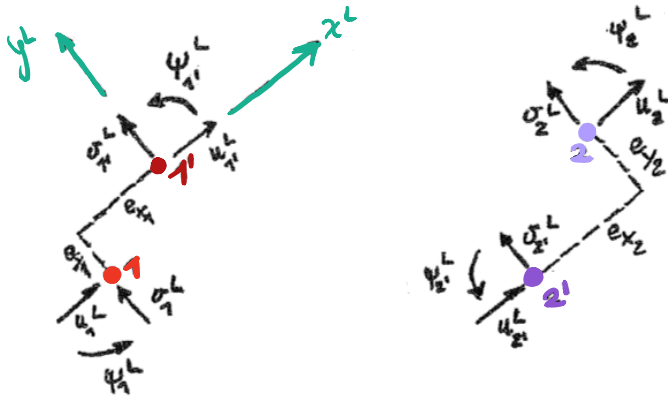
$$[e] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e_z & e_y & 1 & 0 & 0 \\ e_z & 0 & -e_x & 0 & 1 & 0 \\ -e_y & e_x & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se è un link devo studiare sul nodo I un sistema di forze equivalenti a quelle presenti nel nodo P.

PASSAGGIO ATTRAVERSO [e]

N.B. {F} ed [e] sono riferite allo stesso S.R.

Quanto detto si può ripetere anche per gli spostamenti:



Si fa notare che nei nodi di estremità rigide, gli spostamenti hanno gli stessi versi del S.R. locale.

$$\begin{bmatrix} u_{1'}^L \\ \sigma_{1'}^L \\ \psi_{1'}^L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \phi & -e_x \\ \phi & 1 & e_x \\ \phi & \phi & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^L \\ \sigma_1^L \\ \psi_1^L \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_2^L \\ \sigma_2^L \\ \psi_2^L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \phi & e_x/2 \\ \phi & 1 & -e_x/2 \\ \phi & \phi & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2^L \\ \sigma_2^L \\ \psi_2^L \end{bmatrix}$$

$$[u_{1'}^L] = [e_1]^T [u_1^L]$$

$$[u_{2'}^L] = [e_2]^T [u_2^L]$$

$$\begin{bmatrix} [u_{1'}^L] \\ [u_{2'}^L] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [e_1]^T & [\phi] \\ [\phi] & [e_2]^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [u_1^L] \\ [u_2^L] \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{\{u^L\} = [e]^T \{u\}}$$

PARTE FLESSIBILE

$$[F^L] = [k] [u^L]$$

SOLLECITAZIONI ESTREMITÀ FLESSIBILI

SPOSTAMENTI ESTREMITÀ FLESS.

MATRICE DI RIGIDEZZA PARTE FLESSIBILE

$$[k] =$$

$\frac{EA}{l}$		$-\frac{EA}{l}$	
	$\frac{12EI}{l^3}$	$\frac{6EI}{l^2}$	$\frac{12EI}{l^3}$
		$\frac{4EI}{l}$	$\frac{6EI}{l^2}$
			l
		$\frac{EA}{l}$	
			$\frac{12EI}{l^3}$
			$\frac{6EI}{l^2}$
			$\frac{4EI}{l}$

se lo moltiplico per [e] ottengo:

$$[e] [F^L] = [e] [k] [u^L] = [e] [k] [e]^T [u] = [k] [u]$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{\{F^L\}}$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{[e]^T [u]}$$

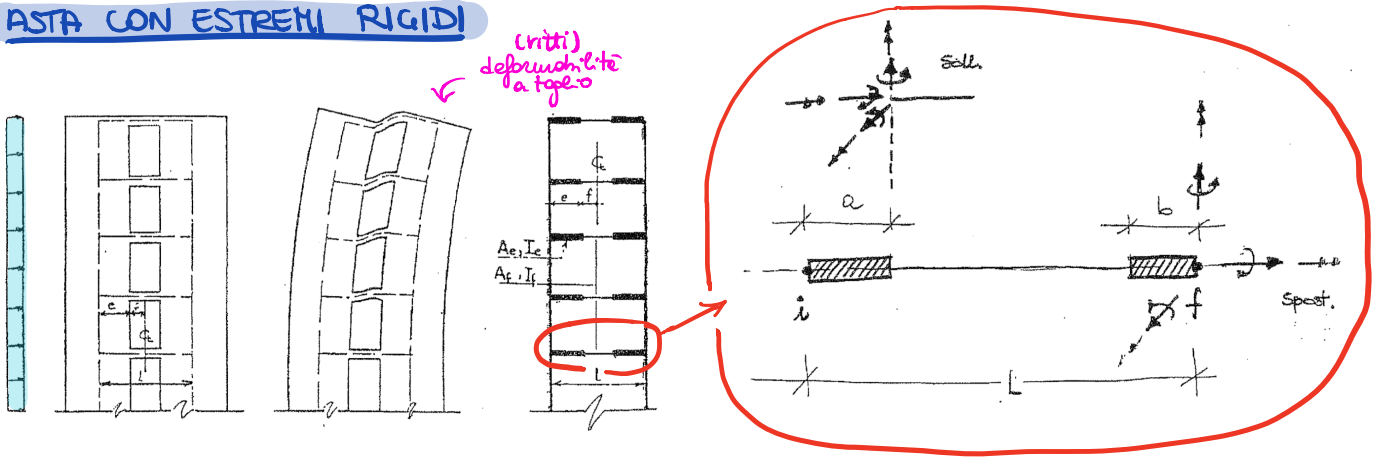
$$\underbrace{\hspace{10em}}_{[e] [k] [e]^T}$$

SOLLECITAZIONI ESTREMITÀ RIGIDE

LEGAME SPOSTAMENTI ESTREMITÀ FLESSIBILI IN FUNZIONE ESTREMITÀ RIGIDE

MATRICE DI RIGIDEZZA INTERA ASTA nel sistema locale con riferimento ai nodi strutturali

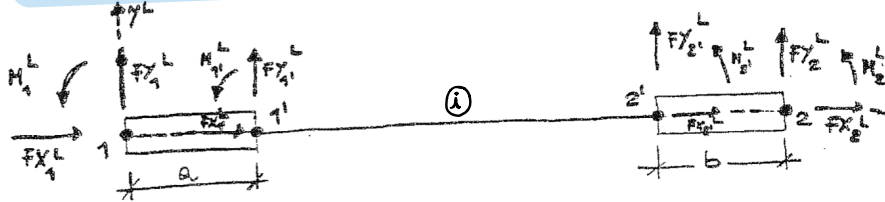
ASTA CON ESTREMI RIGIDI



Se consideriamo un edificio di questo tipo, le zone con le aperture hanno una rigidità inferiore rispetto a quelle di estremità. Quindi nella mia modellazione, per tener conto di questo processo deformativo, devo introdurre delle **aste con estremi rigidi**. Questo è un caso particolare di quello che abbiamo appena visto, col la differenza che le estremità hanno la stessa linea d'azione. Quindi basta definire i nodi iniziali e finali dell'asta e 2 distanze a, b che individuano 2 zone infinitamente rigide.

PROBLEMA → DETERMINARE LA MATRICE CHE LEGA GLI SPOSTAMENTI MODALI ALLE FORZE IN CORRISPONDENZA DELLE ESTREMITA' FLESSIBILI DELL'ASTA

SOLLECITAZIONI ALL'ESTREMITA' FLESSIBILE DELLA TRAVE

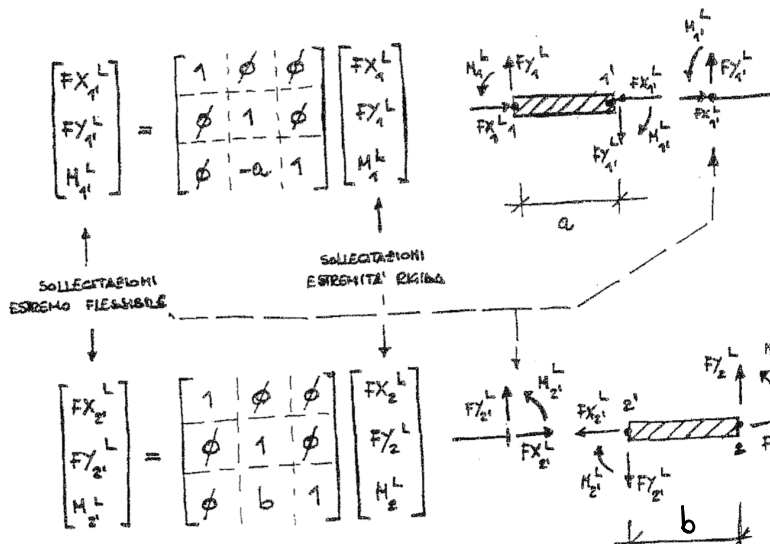


$$[F_1] = \begin{bmatrix} FX_1^L \\ FY_1^L \\ M_1^L \end{bmatrix}$$

SOLLECITAZIONI ESTREMITA' RIGIDA

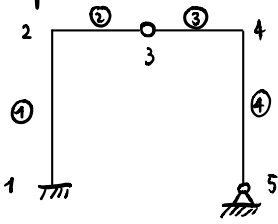
$$[F_2] = \begin{bmatrix} FX_2^L \\ FY_2^L \\ M_2^L \end{bmatrix}$$

SOLLECITAZIONI ESTREMITA' FLESSIBILE



RILASCIO DEI GRADI DI LIBERTÀ ALL'ESTREMITÀ DELLE ASTE

Se io avessi una struttura rigida, alla luce di quanto abbiamo visto finora, qual'è il problema che incontro? Il **vincolo interno**, perché? Perché fin ad adesso abbiamo visto soltanto il caso di $\begin{matrix} \leftarrow \\ \rightarrow \end{matrix}$. Devo quindi in qualche modo ridurre i gradi di vincolo dell'asta incastro- incastro \rightarrow gioco sulla matrice di rigidezza per rilasciare i g.d.l. all'estremità dell'asta.



Come si procede per effettuare questa operazione?

Partiamo dalla definizione classica che lega forze e spostamenti nel s.r. (locale) di una trave doppiamente incastata, tramite la matrice di rigidezza $[K]$:

$$\{F^L\} = [K] \{u^L\}$$

Scegliamo quali g.d.l. rilasciare \rightarrow allora il sistema può essere riorganizzato (con opportuni scambi di righe con righe e colonne con colonne) in modo da portare tutti i g.d.l. che voglio rilasciare in basso:

$$\begin{matrix} \text{FORZE AGENTI SUI} \\ \text{g.d.l. vincolati} \end{matrix} \rightarrow \left\{ \begin{matrix} \{F^V\} \\ \{F^R\} \end{matrix} \right\}^L = \begin{bmatrix} [K_{VV}] & [K_{VR}] \\ [K_{RV}] & [K_{RR}] \end{bmatrix} \begin{matrix} \left\{ \begin{matrix} \{u^V\} \\ \{u^R\} \end{matrix} \right\}^L \\ \left\{ \begin{matrix} \{u^R\} \\ \{u^R\} \end{matrix} \right\}^L \end{matrix} \leftarrow \begin{matrix} \text{SPOSTAMENTI g.d.l.} \\ \text{vincolati} \\ \text{SPOSTAMENTI g.d.l.} \\ \text{Rilasciati} \end{matrix}$$

è ovvio che queste forze sono nulle $\{F^R\}^L = \{0\} \Rightarrow$ vettore noto (perché se ad esempio ho una cerniera interna, su di essa non c'è un M)
 allora $\rightarrow \{0\}$

$$\{F^R\}^L = [K_{RV}] \{u^V\}^L + [K_{RR}] \{u^R\}^L$$

$$\{u^R\}^L = - [K_{RR}]^{-1} [K_{RV}] \{u^V\}^L = \underbrace{- [K_{RR}]^{-1} [K_{VR}]^T}_{\substack{\text{matrice di trasformazione} \\ \text{interna } [G_0]}} \{u^V\}^L$$

$[K_{VR}]^T$ per simmetria

Quindi:

$$(**) \quad \boxed{\{u^R\}^L = [G_0] \{u^V\}^L}$$

RELAZIONE CHE LEGA
 SPPOSTAMENTI g.d.l. Rilasciati a SPPOSTAMENTI g.d.l. vincolati

La prima equazione del sistema (*) è:

$$\{F^V\}^L = [K_{VV}] \{u^V\}^L + [K_{VR}] \{u^R\}^L$$

metto dentro (**):

$$\{F^V\}^L = [K_{VV}] \{u^V\}^L + [K_{VR}] [G_0] \{u^V\}^L = \underbrace{([K_{VV}] + [K_{VR}] [G_0])}_{[K_{VV}]} \{u^V\}^L$$

$$[\bar{K}_{vv}] = ([K_{vv}] + [K_{vr}] [G_0])$$

$$\Rightarrow -[K_{re}]^{-1} [K_{vr}]^T = -\frac{L(1+\phi)}{(4+\phi)EJ} \begin{Bmatrix} 0 & \frac{6EJ}{L^2(4+\phi)} & \frac{(2-\phi)EJ}{L(4+\phi)} & 0 & -\frac{6EJ}{L^2(4+\phi)} \end{Bmatrix}$$

$$[G_0] = \begin{Bmatrix} 0 & -\frac{6}{L(4+\phi)} & -\frac{(2-\phi)}{(4+\phi)} & 0 & \frac{6}{L(4+\phi)} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{6EJ}{L^2(4+\phi)} \\ \frac{(2-\phi)EJ}{L(4+\phi)} \\ 0 \\ -\frac{6EJ}{L^2(4+\phi)} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} 0 & -\frac{6}{L(4+\phi)} & -\frac{(2-\phi)}{(4+\phi)} & 0 & \frac{6}{L(4+\phi)} \end{Bmatrix} =$$

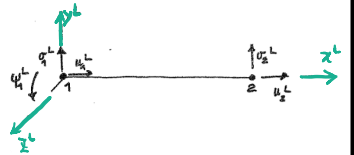
0	0	0	0	0
0	$-\frac{36EJ}{L^3(4+\phi)(1+\phi)}$	$-\frac{6EJ(2-\phi)}{L^2(4+\phi)(1+\phi)}$	0	$\frac{36EJ}{L^3(4+\phi)(1+\phi)}$
0	$-\frac{6EJ(2-\phi)}{L^2(4+\phi)(1+\phi)}$	$-\frac{EJ(2-\phi)^2}{L(4+\phi)(1+\phi)}$	0	$\frac{6EJ(2-\phi)}{L^2(4+\phi)(1+\phi)}$
0	0	0	0	0
0	$\frac{36EJ}{L^3(4+\phi)(1+\phi)}$	$\frac{6EJ(2-\phi)}{L^2(4+\phi)(1+\phi)}$	0	$-\frac{36EJ}{L^3(4+\phi)(1+\phi)}$

$$[\bar{K}_{vv}] = [K_{vv}] + [K_{vr}] \cdot [G_0]$$

$$[\bar{K}_{vv}] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & & & & -\frac{EA}{L} & & & & \\ & \frac{12EJ}{L^3(1+\phi)} & \frac{6EJ}{L^2(1+\phi)} & & & \frac{12EJ}{L^3(1+\phi)} & & & \\ & \frac{6EJ}{L^2(1+\phi)} & \frac{(4+\phi)EJ}{L(1+\phi)} & & & \frac{6EJ}{L^2(1+\phi)} & & & \\ -\frac{EA}{L} & & & & \frac{EA}{L} & & & & \\ & \frac{12EJ}{L^3(1+\phi)} & \frac{6EJ}{L^2(1+\phi)} & & & \frac{12EJ}{L^3(1+\phi)} & & & \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{36EJ}{L^3(4+\phi)(1+\phi)} & -\frac{6EJ(2-\phi)}{L^2(4+\phi)(1+\phi)} & 0 & \frac{36EJ}{L^3(4+\phi)(1+\phi)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6EJ(2-\phi)}{L^2(4+\phi)(1+\phi)} & -\frac{EJ(2-\phi)^2}{L(4+\phi)(1+\phi)} & 0 & \frac{6EJ(2-\phi)}{L^2(4+\phi)(1+\phi)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{36EJ}{L^3(4+\phi)(1+\phi)} & \frac{6EJ(2-\phi)}{L^2(4+\phi)(1+\phi)} & 0 & -\frac{36EJ}{L^3(4+\phi)(1+\phi)} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

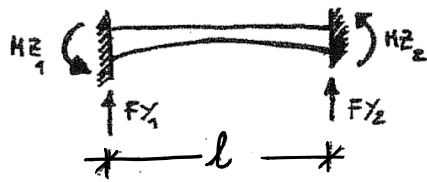
MATRICE DI RIGIDEZZA TRAVE INCASTRO / CERNIERA (con rotazione rilocata)

$$\begin{Bmatrix} FX_1^L \\ F_1^L \\ M_1^L \\ FX_2^L \\ F_2^L \\ M_2^L \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EJ}{L^3(4+\phi)} & \frac{12EJ}{L^2(4+\phi)} & 0 & \frac{12EJ}{L^3(4+\phi)} & 0 \\ 0 & \frac{12EJ}{L^2(4+\phi)} & \frac{12EJ}{L(4+\phi)} & 0 & \frac{12EJ}{L^2(4+\phi)} & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EJ}{L^3(4+\phi)} & -\frac{12EJ}{L^2(4+\phi)} & 0 & -\frac{12EJ}{L^3(4+\phi)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^L \\ \psi_1^L \\ \psi_2^L \\ u_2^L \\ \psi_2^L \end{Bmatrix}$$



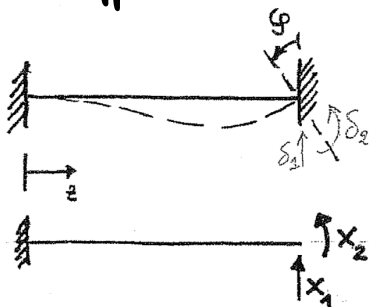
ASTA A RIGIDEZZA VARIABILE

fin qui abbiamo considerato sempre travi con $EJ = \text{costante}$. Se EJ cambia (per esempio per una variazione di sezione lungo l'asse) cosa succede?



La determinazione delle reazioni vincolari all'estremità dell'asta per cedimenti / rotazioni delle stesse consente di valutare la matrice di rigidità dell'asta stessa.

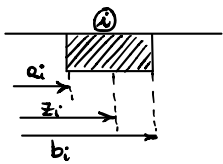
Se applico il PLV:



2 volte iperstatica

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \delta_1 &= \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 = 0 && \int_0^l \frac{(l-z)^2}{EJ(z)} dz \\ \textcircled{2} \quad \delta_2 &= \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 = \varphi && \int_0^l \frac{dz}{EJ(z)} \\ &= \int_0^l \frac{(l-z)}{EJ(z)} dz && \end{aligned}$$

[per Betti $\delta_{12} = \delta_{21}$]



l'integrale esteso a tutta la trave può essere visto come la Σ di n integrali su tratti di spessore costante. Si assume per ogni tratto il momento J del punto centrale $z_i = \frac{a_i + b_i}{2}$

$$\delta_{11} = \sum_{i=1}^n \int_{a_i}^{b_i} \frac{(l-z)^2}{EJ(z_i)} dz = \sum_{i=1}^n \frac{1}{EJ(z_i)} \left[\frac{(l-z)^3}{3} \right]_{a_i}^{b_i} = \frac{1}{3E} \sum_{i=1}^n \frac{(l-a_i)^3 - (l-b_i)^3}{J(z_i)}$$

$$\delta_{12} = \sum_{i=1}^n \int_{a_i}^{b_i} \frac{(l-z)}{EJ(z_i)} dz = \sum_{i=1}^n \frac{1}{EJ(z_i)} \left[\frac{(l-z)^2}{2} \right]_{a_i}^{b_i} = \frac{1}{2E} \sum_{i=1}^n \frac{(l-a_i)^2 - (l-b_i)^2}{J(z_i)}$$

$$\delta_{22} = \sum_{i=1}^n \int_{a_i}^{b_i} \frac{dz}{EJ(z_i)} = \frac{1}{E} \sum_{i=1}^n \frac{b_i - a_i}{J(z_i)}$$

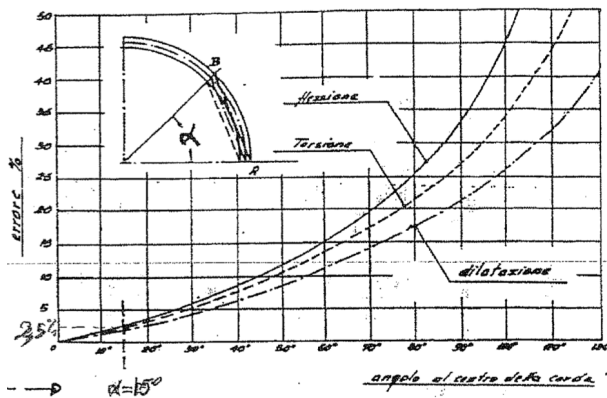
Dalle $\textcircled{1}$ ricavo: $X_1 = - \frac{\delta_{12} X_2}{\delta_{11}} \rightarrow$ sostituisco in $\textcircled{2}$ trovo X_2 noto φ :

$$X_2 = \varphi \left[\frac{\delta_{11}}{\delta_{11} \delta_{22} - \delta_{12}^2} \right] \rightarrow k_{12} \rightarrow \text{coefficiente di rigidità della flemme: momento } (X_2) \text{ nel nodo per una rotazione unitaria } (\varphi = 1) \text{ dello stesso nodo}$$

IL PROBLEMA DELLE TRAM CURVE (accusato)

In presenza di travi curve, con ciò che abbiamo visto fino a qui, l'unica soluzione che siamo in grado di adottare è quella di pensare di costruire una spessore lungo il nostro arco (con risultati molto buoni).

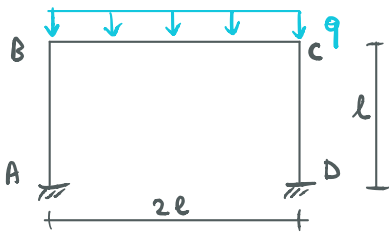
Se consideriamo il caso di un arco la cui generatrice è $1/4$ di cerchio modellato con



una spessore, possiamo plotare (a lato) la curva degli errori in funzione dell'angolo α sotteso dall'elemento (errori su problemi di dilatazione, flessione e torsione).

Per α piccoli poco trattare separatamente flessione e sforzo normale ($\alpha < 15^\circ$) \Rightarrow su 90° vale dire avere almeno 6 elementi.

ESEMPIO → telaio



In A ed in D ho degli incastri ⇒ spostamenti nulli:

$$\begin{cases} u_A = v_A = \varphi_A = 0 \\ u_D = v_D = \varphi_D = 0 \end{cases}$$

Mentre i nodi liberi sono B e C. \forall nodo ho 3 spostamenti incogniti: $u_B, v_B, \varphi_B, u_C, v_C, \varphi_C$. → la mia struttura è $s=6$ volte cinematicamente indeterminata.

Si fa l'ipotesi semplificativa di deformazione omnia trascurabile rispetto la flessione. Ciò comporta che le aste non possono né allungarsi né accorciarsi apprezzabilmente, dunque con tali assunzioni possiamo scrivere che:

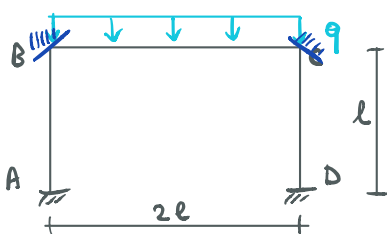
$$\begin{cases} v_B = v_C = 0 \\ u_B = u_C = u \end{cases}$$

Allora il mio problema diventa da $s=6$ volte cinematicamente indeterminato a $s=3$ volte cinematicamente indeterminato → incognite: $(u, \varphi_B, \varphi_C)$.

Inoltre poiché la struttura è simmetrica, caricata simmetricamente ho che i nodi B e C non si spostano ($u=0$) ed inoltre che:

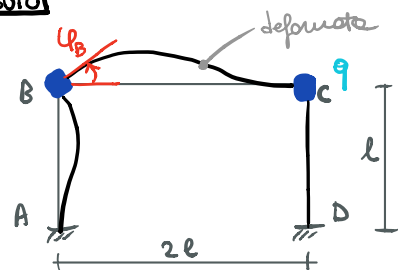
$$\varphi_B = -\varphi_C \Rightarrow \text{ho solo 1 incognita cinematica } (s=1)$$

STRUTTURA A NODI BLOCCATI



1° CONTRIBUTO

impulso che il nodo B subisce una rotazione φ_B



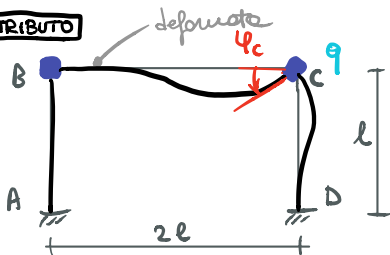
φ_B fa nascere delle sollecitazioni all'estremità di AB e BC. Queste sono esattamente i valori di N, T, M che ho calcolato nella matrice di rigidità della trave. Nasce un momento nel nodo j dove è applicata la rotazione pari a:

$$M_j = \frac{4 EJ}{l} \cdot \varphi_j$$

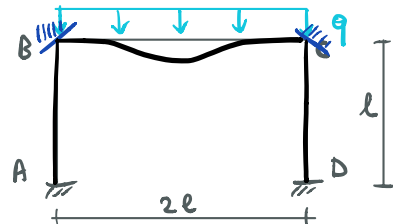
Allo stesso modo impulso

↳ letto sulla [K] della trave

2° CONTRIBUTO

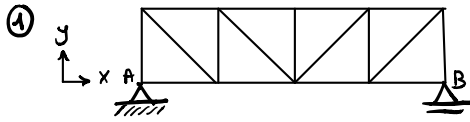


3° CONTRIBUTO



6. VINCOLI GENERALIZZATI

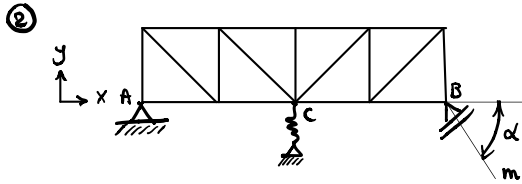
Quando definiamo una struttura la definiamo rispetto ad un S.R. globale in cui ogni nodo ha una sua posizione definita dalle coordinate. Quindi i g.d.l. della struttura sono definiti nel S.R. globale.



u = spostamenti lungo x
 v = spostamenti lungo y

condizioni vincolari

$$\begin{cases} u_A = 0 \\ v_A = 0 \\ v_B = 0 \end{cases}$$

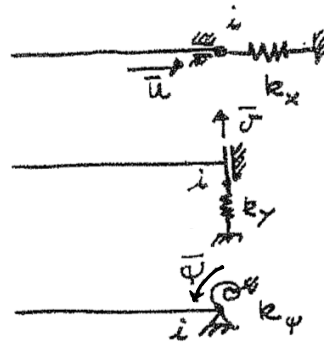


→ Ma se ho una struttura con fatto mi attacco al trave per le conoscenze che ho. In questo caso vuol dire che lo spostamento lungo n del nodo B è nullo, ma io mi riferisco al S.R. globale. Oppure in C ho un vincolo non rigido ma cedevole.

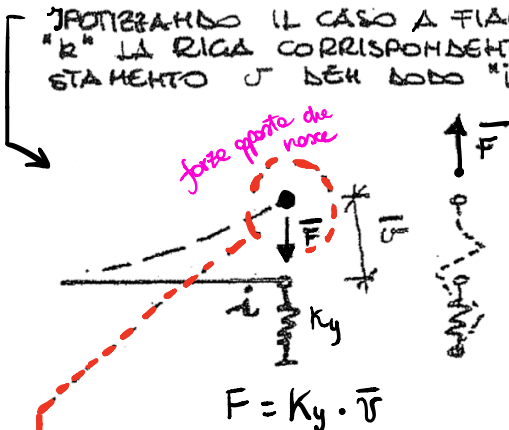
A VINCOLI ELASTICI

SI SUPPONGA IL NODO i VINCOLATO MEDIANTE UN VINCOLO ELASTICO CEDevole (MOLLA) COME RAPPRESENTATO IN FIGURA.

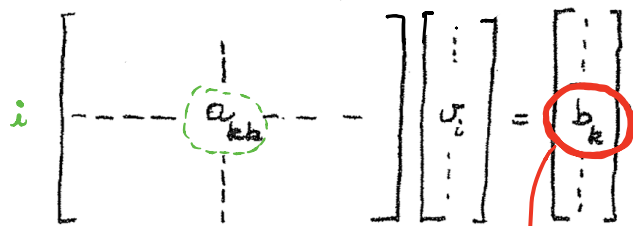
CON RIFERIMENTO ALLA EQUAZIONE DI EQUILIBRIO NELLA DIREZIONE DEL VINCOLO RELATIVA AL NODO i BASTA CONSIDERARE CHE IL TERMINE FORZANTE (CARICHI ESTERNI AGENTI SUL NODO) DEVE ESSERE INCREMENTATO DEL CONTRIBUTO INDOTTO DAL CEDIMENTO DEL VINCOLO



PROTEZZANDO IL CASO A FIANCO, SOPPOSTA "k" LA RIGA CORRISPONDENTE ALLO SPOTAMENTO v DEL NODO "i"



$$[K]\{u\} = \{F\}$$



$$b_k - \bar{F} = b_k - K_y v$$

occorre modificare questo termine

Ne consegue che il tutto è equivalente ad incrementare il termine di riga a_{kk} di una quantità K_y :

$$a_{kk} = a_{kk} + K_y$$

e ovviamente considero v_i noto = v_i

perché sappiamo che la forza nel grado di libertà i -esimo per effetto di uno spostamento dello stesso g.d.l. i -esimo è dato dal termine diagonale della matrice $[K]$

SUPPOSTO ALLORA "j" E "k" LE DUE RIGHE DEL SISTEMA CORRISPONDENTI ALL'EQUILIBRIO IN DIREZIONE X E Y DEL NODO i, queste possono essere sostituite da una sola equazione combinazione di entrambe secondo quanto richiesto dalla (***) parallelamente occorre tener conto della relazione (*)

In altri termini le 2 equazioni del problema:

$$(j/\bar{F}_{x_i}) \quad \dots \quad a_{jj} u_i + \dots + a_{jk} \sigma_i + \dots = b_j$$

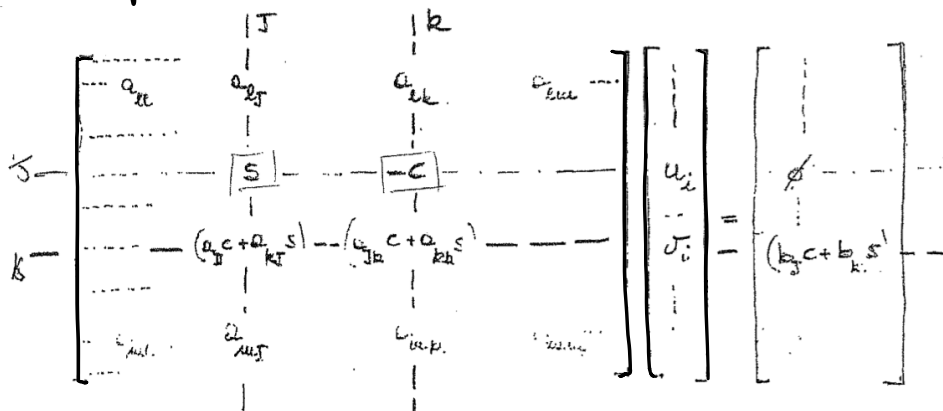
$$(k/\bar{F}_{y_i}) \quad \dots \quad a_{kj} u_i + \dots + a_{kk} \sigma_i + \dots = b_k$$

si trasformano nelle seguenti:

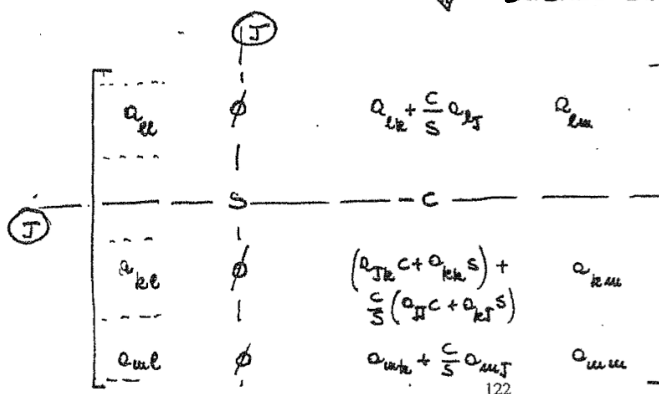
$$(j/\bar{F}_{x_i}) \quad \phi + \sin \varphi u_i + \phi - \cos \varphi \sigma_i + \phi = 0 \quad \begin{matrix} \phi = \cos \varphi \\ \phi = \sin \varphi \end{matrix}$$

$$(k/\bar{F}_{y_i}) \quad \dots \quad (a_{jj} c + a_{kj} s) u_i + \dots + (a_{jk} c + a_{kk} s) \sigma_i + \dots = (b_j c + b_k s)$$

Quindi nella riga j introduciamo la relazione cinematica (*) che lega gli spostamenti tra loro, mentre nella riga k la combinazione lineare imposta dalla relazione (*) che lega tra loro le forze! In forma matriciale il sistema diventa:



SAFENDO CHE $u_i = \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \sigma_i$



IL SISTEMA PRESENTANTE SI RIDUCE A QUELLO DI FIANCO RIPORTATO OVE OCCORRERA' ELIMINARE LA RIGA E LA COLONNA "j" POICHE' L'INGO QUITA RELATIVA E' STATA ESPRESSA IN TERMINI DI σ_i

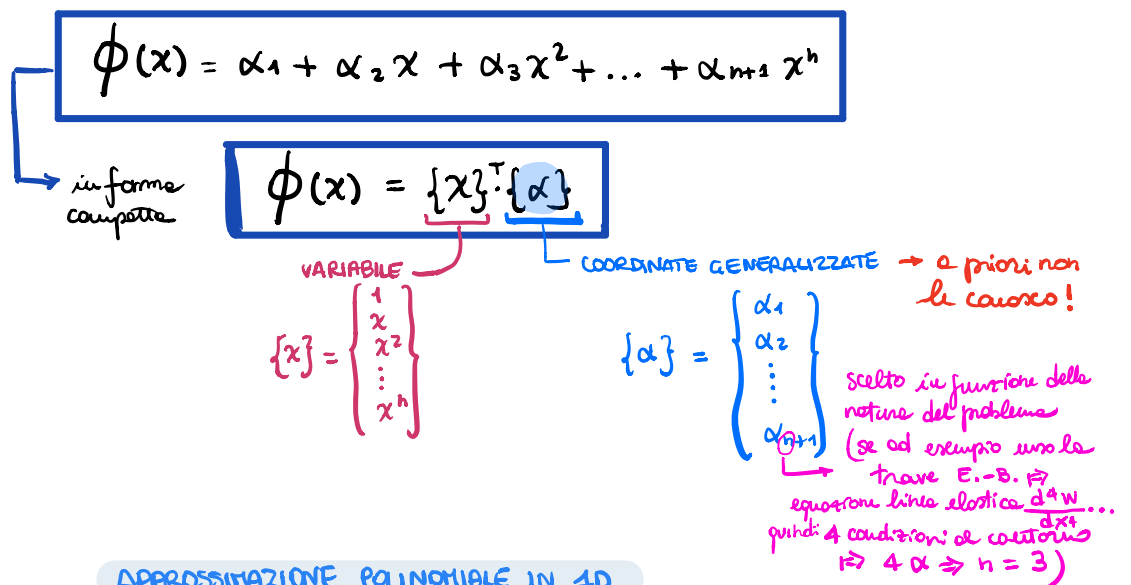
7. ELEMENTI IN COORDINATE GENERALIZZATE

Fin a questo punto abbiamo trattato il problema secondo la "metodologia della scienza delle costruzioni" (cioè con il metodo degli spostamenti). Adesso ci occupiamo e capire come risolvere il problema da un punto di vista generale attraverso il **metodo delle coordinate generalizzate**. Questo si basa sul concetto di approssimare in qualche modo la "funzione" che è soluzione del mio problema fisico. Nel nostro mondo cosa sarebbe? Gli spostamenti / deformazioni. Quindi l'obiettivo è quello di trovare una strategia per individuare la funzione spostamento del mio problema. Questa noi la chiamiamo **funzione di campo**. Quindi il problema è quello di individuare la funzione di campo tramite concetti legati alla teoria dell'**interpolazione**.

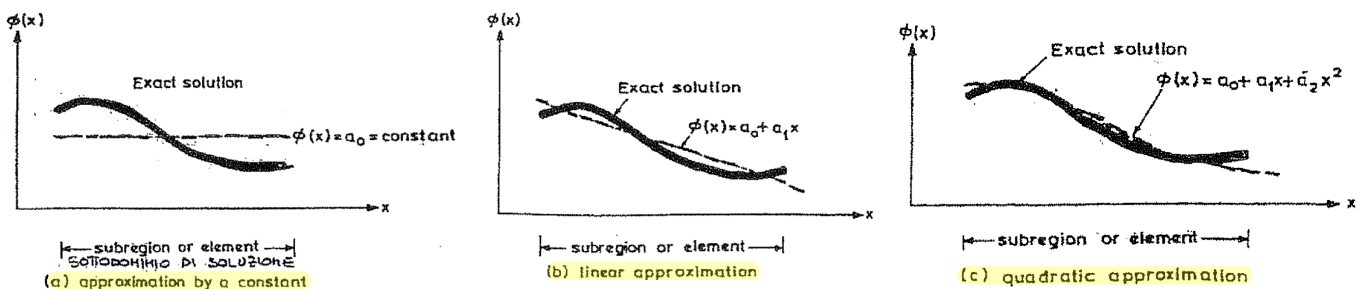
ϕ = FUNZIONE DI CAMPO = FUNZIONE SPORSTAMENTO (deformata)

In altre parole, per quell'elemento, possiamo pensare di approssimare ϕ con un polinomio algebrico di grado n . Per individuare poi una particolare funzione approssimante si adotta il **criterio dell'interpolazione** che consiste nell'imporre che la funzione approssimante ϕ passi per determinati punti assegnati (CONDIZIONI NODALI).

- se l' **ELEMENTO** è **MONODIMENSIONALE (1D)** (aste/travi):



APPROSSIMAZIONE POLINOMIALE IN 1D



Quindi se per esempio in un'approssimazione cubica decidessi di non avere tutti i termini del mio polinomio, e decidessi dunque di eliminarne alcuni, dovrei procedere sempre con una eliminazione di tipo simmetrica (elimino un termine a sx? Elimino pure il suo simmetrico a dx).

Perché richiedo la condizione di simmetria? Perché la rappresentazione della mia funzione di campo non deve dipendere dal sistema di riferimento scelto (ho quindi la condizione di indipendenza del S.R. scelto). Per rispettare questa condizione devo imporre la simmetria.

Quando ad approssimare una funzione di campo che rappresenta gli spostamenti, dobbiamo assicurarci che la condizione di indipendenza del S.R. e quindi di simmetria sia sempre rispettata (per garantire le condizioni di isotropia viste nella meccanica del continuo).

OSSERVAZIONE

Nella maggior parte dei casi l'ordine del polinomio è inferiore o al massimo uguale a 3!

For $n = 1$ (linear model)

One-dimensional case:

$$\phi(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x$$

Two-dimensional case:

$$\phi(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y$$

Three-dimensional case:

$$\phi(x, y, z) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z$$

For $n = 2$ (quadratic model)

One-dimensional case:

$$\phi(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2$$

Two-dimensional case:

$$\phi(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 y^2 + \alpha_6 xy$$

Three-dimensional case:

$$\begin{aligned} \phi(x, y, z) = & \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z + \alpha_5 x^2 + \alpha_6 y^2 \\ & + \alpha_7 z^2 + \alpha_8 xy + \alpha_9 yz + \alpha_{10} xz \end{aligned}$$

For $n = 3$ (cubic model)

One-dimensional case:

$$\phi(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3$$

Two-dimensional case:

$$\begin{aligned} \phi(x, y) = & \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 y^2 + \alpha_6 xy \\ & + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 y^3 + \alpha_9 x^2 y + \alpha_{10} xy^2 \end{aligned}$$

Three-dimensional case:

$$\begin{aligned} \phi(x, y, z) = & \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z + \alpha_5 x^2 + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 z^2 \\ & + \alpha_8 xy + \alpha_9 yz + \alpha_{10} xz + \alpha_{11} x^3 + \alpha_{12} y^3 \\ & + \alpha_{13} z^3 + \alpha_{14} x^2 y + \alpha_{15} x^2 z + \alpha_{16} y^2 z \\ & + \alpha_{17} xy^2 + \alpha_{18} xz^2 + \alpha_{19} yz^2 + \alpha_{20} xyz \end{aligned}$$

8. ELEMENTI IN COORDINATE GENERALIZZATE: ELEMENTI MONODIMENSIONALI

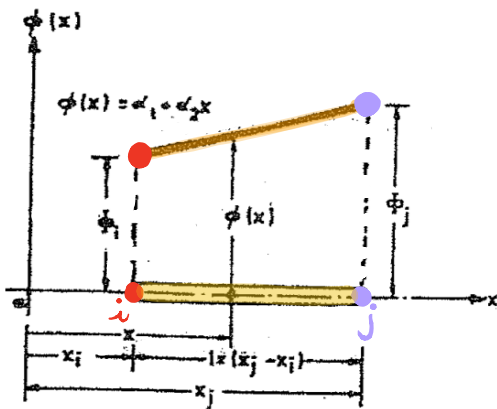
ELEMENTI MONODIMENSIONALI

ASTA RETICOLARE

TRAVE

- TRAVE RETTILINEA
- TRAVE SU SUOLO ELASTICO
- TRAVE A INERZIA VARIABILE
- TRAVE CIRCOLARE (CURVA)

ELEMENTO ASTA RETICOLARE (SIMPLEX)



Sia dato un elemento monodimensionale di lunghezza l compreso tra i nodi i e j .

Sibulo:

$$\begin{cases} \phi(x_i) = \phi_i \\ \phi(x_j) = \phi_j \end{cases}$$

condizioni ai nodi

valori noti detti parametri nodali

$$\{\bar{\Phi}\} = \begin{Bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \end{Bmatrix}$$

x_i, x_j } COORDINATE GLOBALI

un polinomio di 1° grado ($n=1 \rightarrow$ esatto \rightarrow modello lineare):

L'asta è soggetta ad uno spostamento. Questo è descritto dalla funzione di campo $\phi(x)$. Avendo soltanto 2 nodi ho solo 2 condizioni da imporre e quindi ho di bisogno di 2 coordinate generalizzate, per tanto la funzione di campo può essere scritta come approssimazione lineare della soluzione spostamento

$$\phi(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x$$

in forma vettoriale

$$\phi(x) = \{x\}^T \{\alpha\}$$

con $\begin{cases} \{x\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ x \end{Bmatrix} \\ \{\alpha\} = \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} \end{cases}$

Imponendo in queste le condizioni ai nodi otteniamo:

$$\begin{cases} \phi_i = \alpha_1 + \alpha_2 x_i \\ \phi_j = \alpha_1 + \alpha_2 x_j \end{cases} \rightarrow \text{in forma matriciale}$$

incognite

$$\begin{Bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i \\ 1 & x_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix}$$

$$\{\bar{\Phi}\} = [\bar{x}] \{\alpha\}$$

MATRICE DELLE COORDINATE

$$\{\alpha\} = [\bar{x}]^{-1} \{\bar{\Phi}\}$$

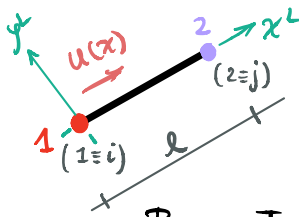
PARAMETRI NODALI

COORDINATE GENERALIZZATE

funzione dei parametri nodali

$$\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} x_j & -x_i \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \end{Bmatrix}$$

Partiamo ipotizzando che $\phi(x)$ rappresenti la funzione spostamento $u(x')$ lungo l'asse locale dell'elemento e che le coordinate di x_1 e x_2 valgano:



COORDINATE NODALI

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = l \end{cases}$$

CONDIZIONI AI NODI

$$\begin{cases} \phi(x_1) = u_1^L \\ \phi(x_2) = u_2^L \end{cases} \rightarrow \{\bar{\Phi}\} = \begin{Bmatrix} u_1^L \\ u_2^L \end{Bmatrix} = \{u^L\}$$

↳ spostamenti ai nodi nel S.R. locale

Per quanto visto prima le funzioni di forme (funzioni approssimate) $N_1(x)$ e $N_2(x)$ si modificano in:

$$N_1(x') = \frac{1}{l} (x_2 - x') = \frac{1}{l} (l - x') = 1 - \frac{x'}{l}$$

$$N_2(x') = \frac{1}{l} (x_1 - x') = \frac{x'}{l}$$

Dunque:

$$\{N\} = \left\{ \left(1 - \frac{x'}{l}\right), \frac{x'}{l} \right\}$$

Quindi:

$$\phi(x) = \{N\} \{\bar{\Phi}\} \rightarrow \left\{ \left(1 - \frac{x'}{l}\right), \frac{x'}{l} \right\} \cdot \begin{Bmatrix} u_1^L \\ u_2^L \end{Bmatrix}$$

$$\phi(x) \equiv u(x') = \underbrace{\left(1 - \frac{x'}{l}\right)}_{N_1(x')} u_1^L + \underbrace{\frac{x'}{l}}_{N_2(x')} u_2^L \quad (*)$$

funzione di campo spostamenti longitudinali

Poiché il nostro elemento è un'asta reticolare, questo sarà soggetto soltanto a sforzo normale. L'energia elastica di deformazione vale:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{N^2}{EA} dx'$$

Da S.d.C. I sappiamo che: $N = \underbrace{\sigma}_{L = E \cdot \epsilon} \cdot A \rightarrow N = \underbrace{\epsilon}_{\frac{\partial u}{\partial x}} \cdot EA$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \equiv \frac{du(x')}{dx'}$$

Allora derivo (*) e sostituisco:

$$u(x') = N_1(x') u_1^L + N_2(x') u_2^L \rightarrow \frac{du(x')}{dx'} = \frac{dN_1(x')}{dx'} u_1^L + \frac{dN_2(x')}{dx'} u_2^L$$

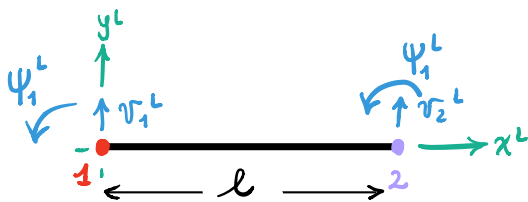
$$\frac{du(x')}{dx'} = \underbrace{\left\{ \frac{dN_1(x')}{dx'}, \frac{dN_2(x')}{dx'} \right\}}_{\{B\}} \underbrace{\begin{Bmatrix} u_1^L \\ u_2^L \end{Bmatrix}}_{\{u^L\}}$$

OSSERVAZIONE

Come visto abbiamo percorso una strada che percorreremo anche con altri tipi di elementi. In particolare l'itinerario è:

- a) individuare il problema fisico.
- b) individuare la funzione di campo $\phi(x)$.
- c) individuare le condizioni al contorno dalle quali posso ricavare il grado del polinomio.
- d) dal grado del polinomio individuare le coordinate generalizzate, che saranno quelle degli spostamenti nodali e delle funzioni di forma. $\Rightarrow \phi(x)$ può essere legata a $\{N\}$ e a $\{\Phi\}$.
- e) da $\phi(x) \equiv u \rightarrow$ impostare il calcolo dell'energia elastica di deformazione U
- f) ricavare dalla relazione $U = \{u\}^T [K] \{u\}$ ricavare $[K]$.

ELEMENTO TRAVE RETTILINEA



Ripercorriamo adesso gli stessi passi per l'elemento trave rettilinea di Eulero-Bernoulli. Spostiamo che $\phi(x)$ rappresenti la funzione spostamento $v(x)$ (abbondamento) della trave. La legge che governa gli abbondamenti in una trave

rettilinea E.-B. è quella della linea elastica: equazione differenziale del 4° ordine. Per tanto necessitano 4 condizioni al contorno. Ciò implica che possiamo approssimare l'abbondamento $v(x)$ con un polinomio di 3° grado:

$$\phi(x) \equiv v(x^L) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3 \quad \rightarrow \quad v(x) = [x]^T [\alpha]$$

$$[x] = \begin{Bmatrix} 1 \\ x^L \\ x^{2L} \\ x^{3L} \end{Bmatrix} \quad [\alpha] = \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix}$$

Le CONDIZIONI AI NODI risultano essere:

$$\begin{cases} v(x_1) = v(0) = v_1^L \\ \frac{dv}{dx^L}(x_1) = \frac{dv}{dx^L}(0) = \psi_1^L \\ v(x_2) = v(l) = v_2^L \\ \frac{dv}{dx^L}(x_2) = \frac{dv}{dx^L}(l) = \psi_2^L \end{cases}$$

Scriviamo adesso le condizioni ai nodi in forma matriciale, ma prima bisogna derivare $v(x^L)$:

$$\frac{dv(x^L)}{dx^L} = \alpha_2 + 2\alpha_3 x + 3\alpha_4 x^2$$

$$v(x^L) = \frac{1}{l^3} \left\{ 1 \quad x^L \quad x^{L2} \quad x^{L3} \right\} \begin{bmatrix} l^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l^3 & 0 & 0 \\ -3l & -2l^2 & 3l & -l^2 \\ 2 & l & -2 & l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1^L \\ \psi_1^L \\ v_2^L \\ \psi_2^L \end{Bmatrix}$$

$$v(x^L) = \frac{1}{l^3} \left\{ l^3 - 3lx^{L2} + 2x^{L3}, \quad l^3x^L - 2l^2x^{L2} + lx^{L3}, \quad 3lx^{L2} - 2x^{L3}, \quad -l^2x^{L2} + lx^{L3} \right\}$$

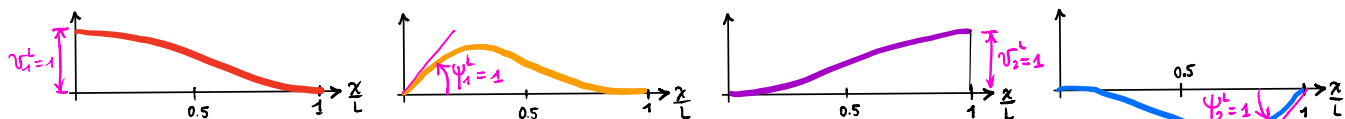
$$\left\{ 1 - 3\left(\frac{x^L}{l}\right)^2 + 2\left(\frac{x^L}{l}\right)^3, \quad x^L - 2\left(\frac{x^{L2}}{l}\right) + \left(\frac{x^{L3}}{l^2}\right), \quad 3\left(\frac{x^L}{l}\right)^2 - 2\left(\frac{x^L}{l}\right)^3, \quad -\left(\frac{x^{L2}}{l}\right) + \left(\frac{x^{L3}}{l^2}\right) \right\}$$

$N_1(x^L)$

$N_2(x^L)$

$N_3(x^L)$

$N_4(x^L)$



VEETTORE FUNZIONI DI FORMA

$$\{N\} = \{N_1(x^L) \quad N_2(x^L) \quad N_3(x^L) \quad N_4(x^L)\}$$

FUNZIONI DI FORMA: fisicamente rappresentano la deformata della trave ottenuta ponendo il corrispondente g.d.l. pari a 1 e gli altri a zero.

Alla fine otteniamo:

$$(*) \quad v(x^L) = \{N\} \{u\} \rightarrow v(x^L) = N_1(x^L) \cdot v_1^L + N_2(x^L) \cdot \psi_1^L + N_3(x^L) \cdot v_2^L + N_4(x^L) \cdot \psi_2^L$$

FUNZIONE CAMPO DI SPOSTAMENTI VEETTORE PARAMETRI NODALI

Adesso, come abbiamo sempre fatto, tramite la proprietà che la matrice di rigidità dell'elemento è quella matrice che ci permette di scrivere l'ENERGIA ELASTICA DI DEFORMAZIONE in termini quadratici dello SPOSTAMENTO, possiamo ricavare [K]:

$$U = \frac{1}{2} \{u\}^T [K] \{u\}$$

Calcolando le derivate seconde delle funzioni si trova:

$$H_1''(x^L) = -\frac{6}{l^2} + 12\frac{x^L}{l^3} \quad H_2'(x^L) = -\frac{4}{l} + 6\frac{x^L}{l^2}$$

$$H_3''(x^L) = \frac{6}{l^2} - 12\frac{x^L}{l^3} \quad H_4''(x^L) = -\frac{2}{l} + 6\frac{x^L}{l^2}$$

Si ricavano i coefficienti della matrice $[K]$ dell'elemento trave:

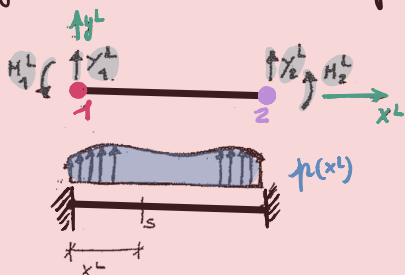
$$k_{11} = EJ \int_0^l (H_1''')^2 dx^L = EJ \int_0^l \left(-\frac{6}{l^2} + 12\frac{x^L}{l^3}\right)^2 dx^L = \frac{EJ}{l^4} \left(36x^L - \frac{72x^{L^2}}{l} + \frac{48x^{L^3}}{l^2}\right)_0^l = \frac{12EJ}{l^3}$$

$$k_{12} = EJ \int_0^l H_1'' H_2'' dx^L = EJ \int_0^l \left(-\frac{6}{l^2} + 12\frac{x^L}{l^3}\right) \left(-\frac{4}{l} + 6\frac{x^L}{l^2}\right) dx^L = \frac{6EJ}{l^3} \left(4x^L - \frac{7x^{L^2}}{l} + \frac{4x^{L^3}}{l^2}\right)_0^l = \frac{6EJ}{l^2}$$

e così via gli altri. Otteniamo ovviamente la stessa matrice che avevamo calcolato nei capitoli precedenti.

OSSERVAZIONE

Attraverso questa strada si fa notare come il concetto dei **carichi equivalenti** si semplifica notevolmente. Si definisce **SISTEMA DI FORZE EQUIVALENTI** quando, dato un certo sistema di spostamenti, il lavoro compiuto dal carico direttamente applicato è lo stesso di quello compiuto dalle forze equivalenti nodali.



Consideriamo il sistema in figura soggetto a $p(x^L)$, e di avere forze nodali equivalenti H_1^L, Y_1^L e H_2^L, Y_2^L .

Il lavoro compiuto dal sistema di forze dei carichi equivalenti per i parametri di spostamento nodale vale:

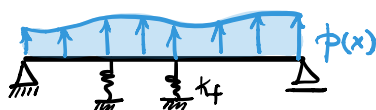
$$W^{eq} = \{F^{eq}\} \cdot \{u^L\} = \begin{Bmatrix} Y_1^L & H_1^L & Y_2^L & H_2^L \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1^L \\ \psi_1^L \\ v_2^L \\ \psi_2^L \end{Bmatrix}$$

Deve essere uguale a quello compiuto dal carico $p(x^L)$ per l'abbassamento $v(x^L)$:

$$W^p = \int_0^l p(x^L) \cdot v(x^L) dx^L = \int_0^l p(x^L) \cdot \{N\} \{u^L\} dx^L$$

$$= \left[\int_0^l p(x^L) N_1(x^L) dx^L + \int_0^l p(x^L) N_2(x^L) dx^L + \int_0^l p(x^L) N_3(x^L) dx^L + \int_0^l p(x^L) N_4(x^L) dx^L \right] \begin{Bmatrix} v_1^L \\ \psi_1^L \\ v_2^L \\ \psi_2^L \end{Bmatrix}$$

ELEMENTO TRAVE SU SUOLO ELASTICO



Consideriamo una trave soggetta ad un carico $p(x)$ e poggiate su un letto di molle di rigidità K_f (fondazioni)

Stavolta nell'espressione dell'energia potenziale già viste per la trave semplice, devo andare a considerare pure l'energia potenziale relative al sistema di molle (lavoro delle molle):

$$\Pi_p = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EJ} dx^L - \int_0^l p(x) \cdot v(x^L) \cdot dx^L$$

contributo carico esterno

poiché $M = -EJ \chi$
 $M = -EJ v''(x^L)$

energia potenziale elemento trave

$$\Pi_p = \frac{1}{2} EJ \int_0^l [v''(x^L)]^2 dx^L - \frac{1}{2} \int_0^l p(x) \cdot v(x^L) \cdot dx^L$$

come abbiamo visto può essere espresso come: $v(x^L) = \{N\} \{u^L\}$

$$\Pi_p = \frac{1}{2} EJ \int_0^l \{u^L\}^T \{B\}^T \{B\} \{u^L\} dx^L - \frac{1}{2} \int_0^l p(x) \cdot \{N\} \{u^L\} dx^L$$

$$\Pi_p = \frac{1}{2} EJ \int_0^l \{u^L\}^T \{B\}^T \{B\} \{u^L\} dx^L - \frac{1}{2} \int_0^l p(x) \{N\} \{u^L\} dx^L$$

Mezzine:

$$\Pi_{pf} = \frac{1}{2} \int_0^l [K_f \cdot v(x^L)] \cdot v(x^L) dx^L$$

energia potenziale dovuto alla rigidità delle molle

come abbiamo visto può essere espresso come: $v(x^L) = \{N\} \{u^L\}$

$[F = K \cdot x \Rightarrow F_{molle} = K_f \cdot v(x^L)]$

$$\Pi_{pf} = \frac{1}{2} \int_0^l (\{u^L\}^T \{N\}^T K_f \{N\} \{u^L\}) dx^L$$

Quindi l'energia Totale sarà:

$$\Pi_{TOT} = \Pi_{pf} + \Pi_p$$

• ELEMENTO TRAVE CURVA (CIRCOLARE)

LA DIFFERENZA FONDAMENTALE TRA TRAVE CURVA E TRAVE RETTILINEA È CHE, NELLA TEORIA DEI PICCOLI SPOSTAMENTI, IL COMPORTAMENTO ASSIALE E FLESSIONALE RISULTANO ACCOPPIATI NELLA TRAVE CURVA E NON. NELLA TRAVE RETTA (→ OPPORTUNA DEFINIZIONE FUNZ. SPOSTAMENTI. LE FUNZIONI SPOSTAMENTO PER GLI ELEMENTI TRAVI CURVE DEVONO POTER RAPPRESENTARE TRE SPOSTAMENTI RIGIDI: DUE TRASLAZIONI ORTOGONALI E UNA ROTAZIONE, TUTTE NEL PIANO DI CURVATURA DELL'ELEMENTO - DALLA LORO DEFINIZIONE DERIVA LA COMPLETA CARATTERIZZAZIONE DELL'ELEMENTO) INDICATA CON $u(s)$ LA FUNZIONE SPOSTAMENTO TANGENZIALE, $v(s)$ LA FUNZIONE SPOSTAMENTO RADIALE, "S" COORDINATA CURVILINEA, MISURATA A PARTIRE DAL MONO 1, VENGONO DI SEGUITO RIPORTATE ALCUNE TRA LE APPROSSIMAZIONI CORRETTAMENTE USATE:

1) ELEMENTO LINEARE IN u E CUBICO IN v

$$u(s) = \alpha_1 + \alpha_2 s$$

$$v(s) = \alpha_3 + \alpha_4 s + \alpha_5 s^2 + \alpha_6 s^3$$

GRADI DI LIBERTÀ PER MONO $u_i, v_i, \left(\frac{dv(s)}{ds}\right)_i$

2) ELEMENTO LINEARE IN u , CUBICO IN v E CONTENIMI DI SPOSTAMENTO RIGIDO

$$u(s) = \alpha_1 \cos \varphi - \alpha_2 \sin \varphi + \alpha_3 R (\cos \beta \cos \varphi - 1) + \alpha_4 s$$

$$v(s) = \alpha_1 \sin \varphi + \alpha_2 \cos \varphi + \alpha_3 R \cos \beta \sin \varphi + \alpha_5 s^2 + \alpha_6 s^3$$

GRADI DI LIBERTÀ PER MONO $u_i, v_i, \left(\frac{dv(s)}{ds} - \frac{u(s)}{R}\right)_i$

DOVE: R = RAGGIO DI CURVATURA DELL'ELEMENTO

β = SEMIANGOLO SOTTESO

φ = VARIABILE ANGOLARE MISURATA A PARTIRE DALLA BISEZIONE DELL'ANGOLO SOTTESO

$$\left(\frac{dv(s)}{ds} - \frac{u(s)}{R}\right) = \text{ROTAZIONE DELLA TANGENTE}$$

3) ELEMENTO CON $u(s)$ E $v(s)$ CUBICHE

$$u(s) = \alpha_1 + \alpha_2 s + \alpha_3 s^2 + \alpha_4 s^3$$

$$v(s) = \alpha_5 + \alpha_6 s + \alpha_7 s^2 + \alpha_8 s^3$$

GRADI DI LIBERTÀ PER MONO $u_i, \left(\frac{du(s)}{ds}\right)_i, v_i, \left(\frac{dv(s)}{ds}\right)_i$

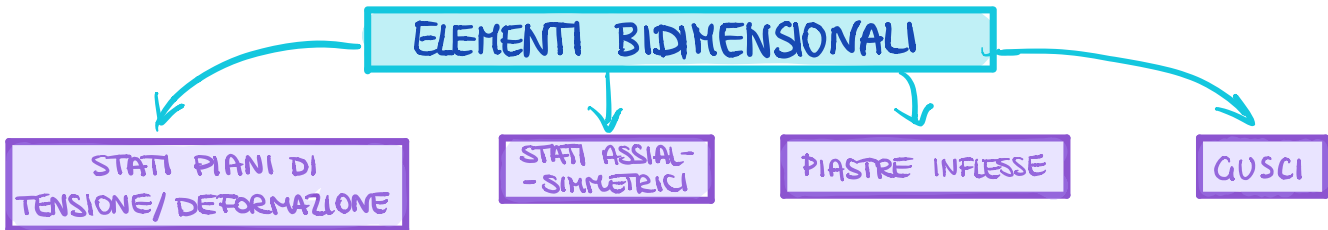
4) ELEMENTO CUBICO IN $u(s)$ E DI QUINTO GRADO IN $v(s)$

$$u(s) = \alpha_1 + \alpha_2 s + \alpha_3 s^2 + \alpha_4 s^3$$

$$v(s) = \alpha_5 + \alpha_6 s + \alpha_7 s^2 + \alpha_8 s^3 + \alpha_9 s^4 + \alpha_{10} s^5$$

GRADI DI LIBERTÀ PER MONO $u_i, \left(\frac{du(s)}{ds}\right)_i, v_i, \left(\frac{dv(s)}{ds}\right)_i, \left(\frac{d^2v(s)}{ds^2}\right)_i$

9. ELEMENTI IN COORDINATE GENERALIZZATE: ELEMENTI BIDIMENSIONALI



RICHIAMO SCIENZA II

In Scienza delle costruzioni II, abbiamo affrontato il problema bidimensionale studiano le **PIASTRE**: strutture piane 2 dimensionali prevalentemente rispetto lo spessore S . Lo studio degli elementi bidimensionali si complica in quanto, nelle varie sezioni esiste (in più rispetto la trave) un momento torcente che ha una influenza sostanziale nel comportamento della struttura.

PIASTRA

ALLA KIRCHOFF

$$L/S > 20$$

Piastre in cui trascurare le deformazioni a taglio ($\gamma_x = \gamma_y = 0$). Questa concezione di piastra si applica a piastre il cui spessore è piccolo ma non troppo in quanto se S fosse troppo grande non potrei trascurare le deformazioni a taglio, se S fosse troppo piccolo invece non avremmo rigidità flessionale (PIASTRE SOTTILI).

IPOTESI CINEMATICA di KIRCHOFF:

- conservazione della sezione piana
- assume che i segmenti ortogonali al piano medio, a deformazione avvenuta, restino ortogonali al piano medio deformato.

ALLA HINDLIN

$$4 \leq L/S \leq 20$$

Piastre dotate di deformazione a taglio (γ_x e γ_y sono importanti). Questa concezione di piastra gioca un ruolo importante quando lo spessore della piastra è importante (PIASTRE TOZZE). Dunque si ha **RIGIDEZZA TAGLIANTE**, e risulta **NON** più trascurabile la deformazione per scorrimento verticale.

IPOTESI CINEMATICA di HINDLIN-REISSNER:

i segmenti ortogonali al piano medio, a deformazione avvenuta non sono più ortogonali al piano medio deformato (opposta all'ipotesi di KIRCHOFF).

Quindi in analogia con le travi possiamo affermare che: la piastra alla KIRCHOFF sta alla trave di EULERO-BERNOULLI così come la piastra alla HINDLIN sta alla trave di TIMOSHENKO.

Se nella piastra di KIRCHOFF caricata nel mio piano, considero pure δ_x e δ_y :

$$\begin{cases} \delta_x = \frac{\partial w}{\partial x} + \varphi_x \\ \delta_y = \frac{\partial w}{\partial y} + \varphi_y \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} \text{alle 3 caratteristiche di} \\ \text{sollecitazione che vengono} \\ \text{fuori dalle teorie di KIRCHOFF:} \\ M_x, M_y, M_{xy} \text{ devo aggiungere} \\ \text{i tagli: } T_x, T_y \end{array} \quad \begin{cases} T_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = \frac{5}{6} G \cdot s \cdot l \cdot \delta_x \\ T_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = \frac{5}{6} G \cdot s \cdot l \cdot \delta_y \end{cases}$$

In pratica ho considerato δ_x e $\delta_y \neq 0 \rightarrow$ quindi tengo conto della deformabilità a taglio delle piastre:

$$\begin{array}{l} \text{CARATTERISTICHE DI SOLLECITAZIONE} \\ \left\{ \begin{array}{l} M_x = \int \sigma_x \cdot z \, dz = D (\chi_x + \nu \chi_y) \\ M_y = \int \sigma_y \cdot z \, dz = D (\chi_y + \nu \chi_x) \\ M_{xy} = \int \tau_{xy} \cdot z \, dz = \frac{1-\nu}{2} D \chi_{xy} \\ T_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = \frac{5}{6} G \cdot s \cdot l \cdot \delta_x \\ T_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = \frac{5}{6} G \cdot s \cdot l \cdot \delta_y \end{array} \right. \end{array}$$

OSSERVAZIONE

Per le PIASTRE PIANE, la soluzione membrana e quella flemmele sono disaccoppiate! (non c'è interazione, come se fossero 2 modelli separati). Quindi quando studio un problema flemmele trascuro N (N_x, N_y e N_{xy}), mentre quando studio un problema membrana me ne frego di M (M_x, M_y ed M_{xy}) e se sto considerando anche la deformabilità a taglio (rimbando) me ne frego anche di T_x e T_y .

Ciò non accade quando la STRUTTURA non è più piana ma vi è una CURVATURA: i 2 problemi flemmele e membrana sono accoppiati:

$$\begin{array}{l} \textcircled{5} \text{ incognite flemmele} \rightarrow \boxed{M_x, M_y, M_{xy}, T_x, T_y} \\ + \\ \textcircled{3} \text{ incognite membrana} \rightarrow \boxed{N_x, N_y, N_{xy}} \end{array}$$

Iniziamo ad affrontare il **problema di stato piano**. Per quanto visto in teoria dell'elasticità (S.d.C.II), valgono le seguenti relazioni tra deformazioni e spostamenti:

EQUAZIONI CINEMATICHE

$$\begin{cases} \epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{cases} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{cases} u(x,y) \\ v(x,y) \end{cases} \rightarrow \boxed{\{\epsilon\} = [D]\{u\}}$$

(si nota: $\delta_x = \delta_y = 0$ trascuriamo le def. a tagli)

operatore cinematico (matrice differenziale)

Attraverso le **equazioni costitutive** si associa al vettore deformazioni $\{\epsilon\}$, il vettore delle tensioni tramite la **MATRICE [D]** (è una matrice che varia in funzione del problema, se di stato di deformazione piano o di tensione piano):

EQUAZIONI COSTITUTIVE

$$\begin{cases} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{cases} = [D] \begin{cases} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{cases} \rightarrow \boxed{\{\sigma\} = [D]\{\epsilon\}}$$

stato piano di tensione

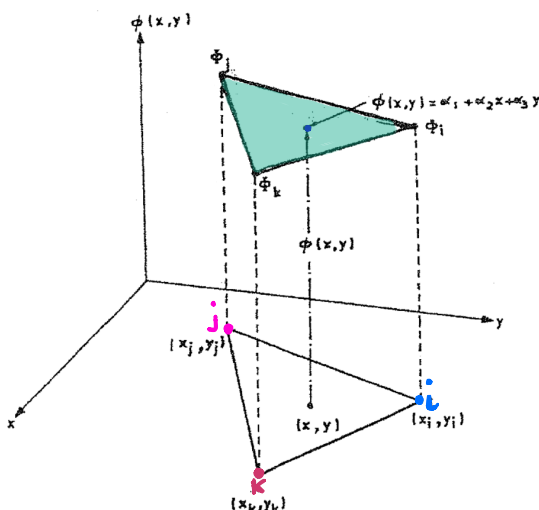
stato piano di deformazione

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}$$

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & 0 \\ \nu & (1-\nu) & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix}$$

Bene, a questo punto vediamo di approssimare queste problematiche da un punto di vista numerico, applicando un elemento bidimensionale semplice: **ELEMENTO TRIANGOLARE "CST"** (Constant Strain Triangle) [TOURNER] (figlio dell'elemento triangolare "simplex") (elemento triangolare interpolato con polinomio di 1° grado) per approssimare il campo di spostamenti $u(x,y)$ ed $v(x,y)$.

ELEMENTO TRIANGOLARE A 3 NODI DI TIPO "SIMPLEX" (2D)



Come possiamo utilizzare le coordinate generalizzate per approssimare una funzione bidimensionale? L'elemento più semplice che ci viene in aiuto è l'elemento triangolare tipo "simplex".

Supponiamo di prendere come riferimento i vertici di un triangolo di vertici: i, j, k appartenenti al piano (x, y) . Le coordinate dei nodi (x_i, y_i) , (x_j, y_j) e (x_k, y_k) sono note. Prendiamo come riferimento una funzione di campo $\phi(x, y)$ che può avere significati fisici diversi, ad esempio lo spostamento.

In forma matriciale:

$$\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} a_i & a_j & a_k \\ b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \\ \phi_k \end{Bmatrix}$$

Se le mie coordinate generalizzate sono delle costanti, allora $\phi(x,y)$ non è altro che un piano costante per i 3 punti ϕ_i, ϕ_j, ϕ_k .

Se sostituiamo adesso le coordinate generalizzate $\{\alpha\}$ alla (*) otteniamo:

$$\phi(x,y) = \{x\}^T [\bar{\alpha}]^{-1} \{\bar{\Phi}\}$$

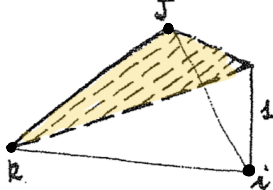
$\{N\}$ = VETTORE FUNZIONI DI FORMA

$$\phi(x,y) = \frac{1}{2A} \{1 \ x \ y\} \begin{bmatrix} a_i & a_j & a_k \\ b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \\ \phi_k \end{Bmatrix}$$

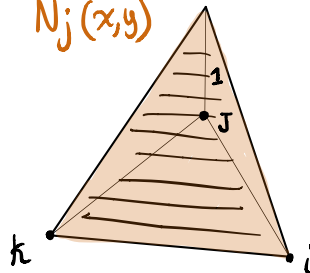
$$\{N\} = \left\{ \frac{1}{2A} (a_i + b_i x + c_i y), \frac{1}{2A} (a_j + b_j x + c_j y), \frac{1}{2A} (a_k + b_k x + c_k y) \right\}$$

Le funzioni di forma non sono altro che dei piani

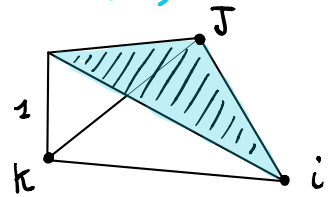
$N_i(x,y)$



$N_j(x,y)$



$N_k(x,y)$



$N_i(x,y), N_j(x,y), N_k(x,y)$ non sono altro che funzioni di forma associate ai g.d.l. dei nodi. Assumono valore unitario nel nodo relativo e zero in tutti gli altri nodi.

Dunque:

$$\phi(x,y) = \begin{Bmatrix} N_i(x,y) & N_j(x,y) & N_k(x,y) \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \\ \phi_k \end{Bmatrix}$$

$$\phi(x,y) = \{N\} \{\bar{\Phi}\} \rightarrow \text{è un piano}$$

Riscrivendo in termini matriciali:

$$\begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{Bmatrix} \rightarrow \boxed{\{u\} = [x] \{ \alpha \}} \quad (*)$$

↓
VETTORE COORDINATE GENERALIZZATE

Impongo le condizioni nodali:

$$\begin{cases} u(x_1, y_1) = u_1 \\ v(x_1, y_1) = v_1 \\ u(x_2, y_2) = u_2 \\ v(x_2, y_2) = v_2 \\ u(x_3, y_3) = u_3 \\ v(x_3, y_3) = v_3 \end{cases} \rightarrow \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{Bmatrix} \rightarrow \{\bar{u}\} = [\bar{x}] \{\alpha\}$$

Al solito trovo:

$$\{\alpha\} = \boxed{[\bar{x}]^{-1}} \{\bar{u}\}$$

$$\frac{1}{2A} \begin{bmatrix} a_1 & 0 & a_2 & 0 & a_3 & 0 \\ b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 & 0 \\ 0 & e_1 & 0 & e_2 & 0 & e_3 \\ 0 & b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \end{bmatrix}$$

dove $[\bar{x}]^{-1}$ è la matrice che avevamo trovata per l'elemento triangolo simplex adottato a questo corso (dove i coefficienti a, b, c sono gli stessi di prima)

Allora sostituendo in (*) ottengo:

$$\boxed{\{u\} = [x]^T [\bar{x}]^{-1} \{\bar{u}\}} \rightarrow \boxed{\{u\} = [N] \{\bar{u}\}}$$

↓
[N] = matrice funzioni di forma

$$\begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

funzioni di forma
 $N_i(x,y), N_j(x,y), N_k(x,y)$
viste per l'elemento triangolo simplex

$$\pi_e = \frac{1}{2} \int_V \sigma \cdot \epsilon \, dV = \frac{1}{2} t \int_V \{\epsilon\}^T \{\sigma\} \, dV = \frac{1}{2} t \int_A \{\epsilon\}^T [D] \{\epsilon\} \, dA$$

per l'eq. costitutive $\{\sigma\} = [D] \{\epsilon\}$

visto che siamo in uno STATO PIANO: $dV = t \cdot dA = t \cdot (dx dy)$
 spessore costante

Ma ora viene espresso $\{\epsilon\}$ in funzione degli spostamenti nodali: $\{\epsilon\} = [B] \{\bar{u}\}$, quindi:

$$\pi_e = \frac{1}{2} t \int_A \{\epsilon\}^T [D] \{\epsilon\} \, dA = \frac{1}{2} t \int_A ([B] \{\bar{u}\})^T [D] ([B] \{\bar{u}\}) \, dA$$

$$\pi_e = \frac{1}{2} t \int_A [B]^T \{\bar{u}\}^T [D] [B] \{\bar{u}\} \, dA \rightarrow \frac{1}{2} \{\bar{u}\}^T \left(t \int_A [B]^T [D] [B] \, dA \right) \{\bar{u}\}$$

Siamo riusciti a scrivere quindi:

$$\pi_e = \frac{1}{2} \{\bar{u}\}^T [K] \{\bar{u}\}$$

$$[K] = t \int_A [B]^T [D] [B] \, dA$$

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial u_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial u_3}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial u_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial u_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial u_3}{\partial y} \\ \frac{\partial u_1}{\partial y} & \frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{\partial u_2}{\partial y} & \frac{\partial u_2}{\partial x} & \frac{\partial u_3}{\partial y} & \frac{\partial u_3}{\partial x} \end{bmatrix}$$

le funzioni di forma ricorda che sono dei polinomi

$\frac{\partial N}{\partial x} = \text{valore costante}$

infatti:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{b_1}{2A} \quad \frac{\partial u_2}{\partial x} = \frac{b_2}{2A} \quad \frac{\partial u_3}{\partial x} = \frac{b_3}{2A}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial y} = \frac{c_1}{2A} \quad \frac{\partial u_2}{\partial y} = \frac{c_2}{2A} \quad \frac{\partial u_3}{\partial y} = \frac{c_3}{2A}$$

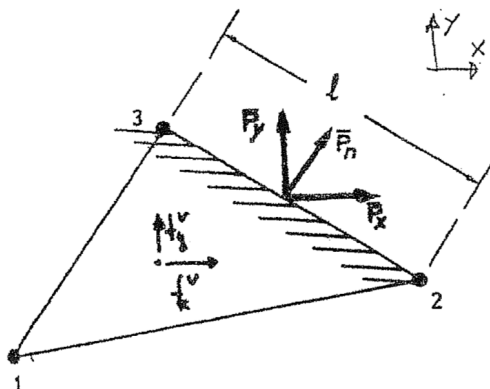
quindi $[B]$ è una matrice fatta di costanti

costanti figlio delle coordinate nodali dell'elemento

$$[B] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{bmatrix}$$

OSSERVAZIONE

CARICHI EQUIVALENTI



CONSIDERATE POI LE FORZE DI VOLUME E LE FORZE DI SUPERFICIE

$$\begin{bmatrix} f_x^v \\ f_y^v \end{bmatrix}$$

COMPONENTI FORZE DI VOLUME PER UNITA' DI VOLUME

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix}$$

COMPONENTI FORZE DI SUPERFICIE PER UNITA' DI SUPERF.

E RICORDANDO LE RELAZIONI PRECEDENTEMENTE OTTEHUTE, E' POSSIBILE CALCOLARE I CORRISPONDENTI CARICHI EQUIVALENTI

2) FORZE DI VOLUME

$$[F^v] = \int_v [H]^T [f^v] dv = t \int_A [H]^T [f^v] dA$$

$$[F^v]^T = [F_{x_1}^v \ F_{y_1}^v \ F_{x_2}^v \ F_{y_2}^v \ F_{x_3}^v \ F_{y_3}^v]$$

NELL'IPOTESI DI COMPONENTI COSTANTI, SI OTTIEHE

$$[F^v] = t \left(\int_A [H]^T dA \right) [f^v] =$$

$$= t \begin{bmatrix} \int H_1 dA & 0 \\ 0 & \int H_1 dA \\ \int H_2 dA & 0 \\ 0 & \int H_2 dA \\ \int H_3 dA & 0 \\ 0 & \int H_3 dA \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_x^v \\ f_y^v \end{bmatrix} = \frac{tA}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_x^v \\ f_y^v \end{bmatrix}$$

$$\int_A H_i dA = \frac{A}{3}$$

IN ALTRI TERMINI LE FORZE DI VOLUME COSTANTI SI RIPARTISCONO IN PARTI EGUALI SUL TRE NODI DELL'ELEMENTO (t.A = VOLUME ELEMENTO)

Non è niente altro che una ripartizione isostatica dei carichi!

C) STATO DI TENSIONE ALL'INTERNO DELL'ELEMENTO

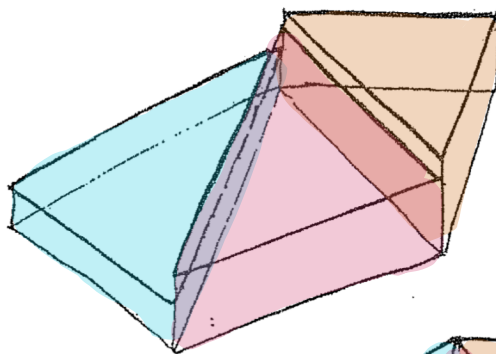
NOTI GLI SPOSTAMENTI MODALI $[\bar{u}]$ E' POSSIBILE CALCOLARE LO STATO DI TENSIONE ALL'INTERNO DELL'ELEMENTO :

$$[\sigma] = [D][\epsilon] = [D][\delta][u] = [D][\delta][H][\bar{u}] = [D][\underbrace{\delta H}_{[B]}][\bar{u}] = [D][B][\bar{u}]$$

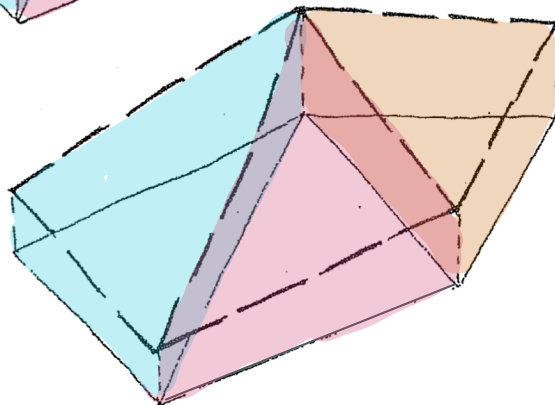
DOVE IL PRODOTTO MATRICIALE $[B][B]$ RISULTA :

$$\frac{1}{2A} \begin{bmatrix} d_{11} b_1 & d_{12} c_1 & d_{11} b_2 & d_{12} c_2 & d_{11} b_3 & d_{12} c_3 \\ d_{21} b_1 & d_{22} c_1 & d_{21} b_2 & d_{22} c_2 & d_{21} b_3 & d_{22} c_3 \\ d_{33} c_1 & d_{33} b_1 & d_{33} c_2 & d_{33} b_2 & d_{33} c_3 & d_{33} b_3 \end{bmatrix}$$

DALL'ANALISI DELLA RELAZIONE OTTENUTA CONSEGUE CHE LO STATO DI TENSIONE $[\sigma]$ NON E' FUNZIONE DI X E Y, E DUHQVE RISULTA COSTANTE PER TUTTO L'ELEMENTO.



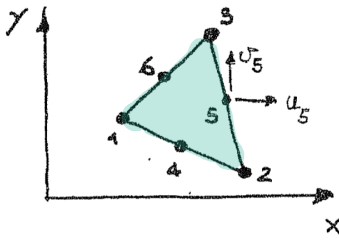
STATO DI TENSIONE
NEI VARI ELEMENTI
(costante per ognuno)
↳ gradienti



CAMPO DI
SPOSTAMENTI
(continuo)

OSS: NEL CASO DI STATO DI DEFORMAZIONE PIANO, DALLA CONDIZIONE $\epsilon_2 = 0$ E' POI POSSIBILE RICAVARE IL VALORE DELLA TENSIONE σ_2

ELEMENTO TRIANGOLARE A 6 NODI "LST" (Linear Strain triangular) [ARGYRIS/FRAEIJNS DE VEUBEKE]



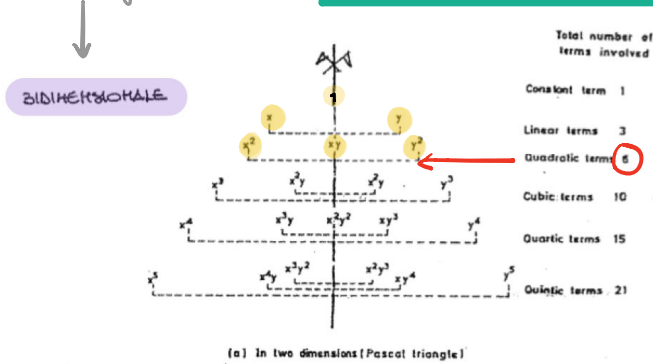
Si aggiungono 3 nodi (1 nella maniera di ogni lato) all'elemento CST. Si osserva che i lati rimangono sempre rettilinei (sempre elemento prisma).

Quindi si hanno 6 condizioni ai nodi, per tanto la funzione interpolante sarà quadratica, ovvero è un polinomio completo del 2° ordine:

$$\Phi_u(x,y) \equiv u(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2$$

$$\Phi_v(x,y) \equiv v(x,y) = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y + \beta_4 x^2 + \beta_5 xy + \beta_6 y^2$$

La struttura del polinomio garantisce la simmetria prisma del triangolo di Pascal

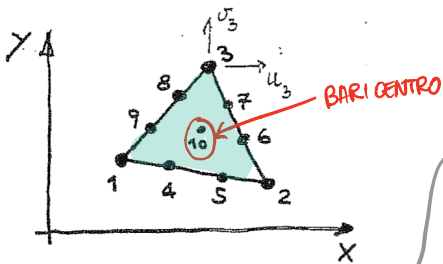


Anche in questo caso le coordinate generalizzate $\{\alpha\}$ le ricavo imponendo le condizioni nodali.

Anche in questo caso l'elemento presenta continuità nello spostamento nei lati di 2 elementi adiacenti.

Il miglioramento rispetto al CST dove sta? nel nome! L'aumento dello stato di deformazione all'interno dell'elemento è LINEARE e non più costante (elemento CST).

ELEMENTO TRIANGOLARE A 10 NODI "QST" (Quadratic Strain Triangular) [FEUPPA]

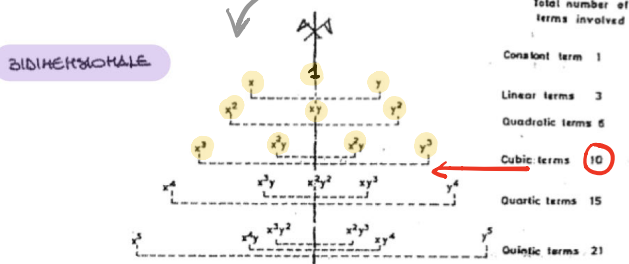


Aggiungiamo 7 nodi rispetto al CST. 2 nodi in più per lato più uno interno baricentrico. Perché devo metterne uno interno? Per rispettare il triangolo di Pascal (per soddisfare la condizione di simmetria).

Quindi si hanno 10 condizioni ai nodi, per tanto la funzione interpolante sarà cubica, ovvero è un polinomio del 3° ordine:

$$\Phi_u(x,y) \equiv u(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 x y^2 + \alpha_{10} y^3$$

$$\Phi_v(x,y) \equiv v(x,y) = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y + \beta_4 x^2 + \beta_5 xy + \beta_6 y^2 + \beta_7 x^3 + \beta_8 x^2 y + \beta_9 x y^2 + \beta_{10} y^3$$

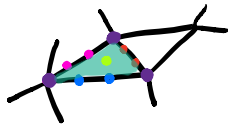


Lo stato di deformazione dell'elemento è di tipo quadratico ("QST"). (Quarta osservazione avanti)

OSSERVAZIONE

Sia l'ELEMENTO "QST" che quello "HBF" presentano in comune un nodo all'interno dell'elemento in posizione baricentrica, rispettivamente nodo 10 e nodo C. Questi sono nodi non connessi con nessun altro elemento strutturale, sono nodi fini a se stessi.

Perché il nodo 10/C mi dà fastidio? Pensa ad una mesh e considera l'elemento in verde. I nodi sui lati si interconnettono con quelli di altri elementi. Mentre il nodo centrale no. Questo si traduce nella



matrice di rigidità della struttura che i nodi centrali sono nodi ripetuti, in altre parole sparsi. Questo è un problema perché la presenza di questi nodi sparsi, oltre ad influire sulla dimensione di [K], mi può far allargare la

BANDA della mia matrice [K]. Ma io voglio il contrario, voglio che sia addensata lungo la diagonale principale!

Che faccio allora? Conviene prima di eseguire l'assemblaggio, cercare di togliere questi nodi interni (o meglio mascherarli) così da rendere visibile la struttura soltanto dai nodi presenti sui vertici (e sui lati se ho un elemento "QST"). Quindi penso da 10 nodi a 3 per ogni elemento "QST" e da 4 a 3 nodi per ogni elemento "HBF". Questo passaggio è detto **CONDENSAZIONE STATICA**, ovvero condensa il 10° nodo sugli altri (o il nodo C sugli altri) ed evita di allargare la banda di [K].

CONDENSAZIONE STATICA DELLA MATRICE DI RIGIDEZZA (la vediamo qui applicata all'elemento HBF)

Prendi la matrice di rigidità dell'elemento, mi raccontiamo righe con righe colonne con colonne in modo da portare i g.d.l. del nodo centrale (baricentrico) nella parte bassa della mia matrice):

$$\begin{aligned}
 (a) \quad & \begin{bmatrix} [k_v] & [k_{vc}] \\ [k_{cv}] & [k_c] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\bar{u}_v] \\ [\bar{u}_c] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\bar{F}_v] \\ [\bar{F}_c] \end{bmatrix} \\
 (b) \quad & \begin{bmatrix} [k_v] & [k_{vc}] \\ [k_{cv}] & [k_c] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\bar{u}_v] \\ [\bar{u}_c] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\bar{F}_v] \\ [\bar{F}_c] \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Labels:
 - $[\bar{F}_v]$: FORZE AGENTI NEI NODI VERTICI DELL'ELEMENTO
 - $[\bar{F}_c]$: FORZE AGENTI NEI BARICENTRO DELLA LEHENTO. (è un dato noto, es. forze di volume)
 - $[\bar{u}_v]$: VETTORE SPOSTAMENTI MODALI
 - $[\bar{u}_c]$: VETTORE SPOSTAMENTI MODALI

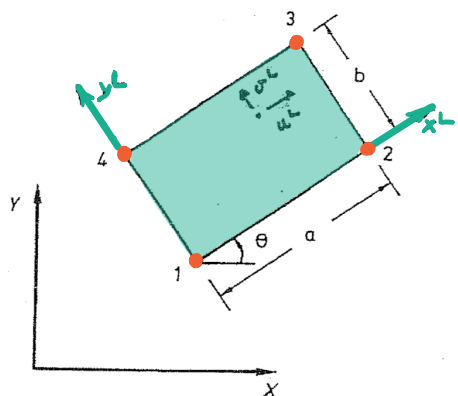
$$[\bar{u}_v]^T = [\bar{u}_1]^T [\bar{u}_2]^T [\bar{u}_3]^T \quad \downarrow \quad [\bar{u}_c] = \begin{bmatrix} u_c \\ \sigma_c \end{bmatrix}$$

Dalla seconda riga della matrice posso ricavare $\{\bar{u}_c\}$

$$\begin{aligned}
 (b) \quad & [k_{cv}][\bar{u}_v] + [k_c][\bar{u}_c] = [\bar{F}_c] \\
 & [\bar{u}_c] = [k_c]^{-1}([\bar{F}_c] - [k_{cv}][\bar{u}_v])
 \end{aligned}$$

poi → SOSTITUENDO $[\bar{u}_c]$ NELLA (a) SI RICAVA:

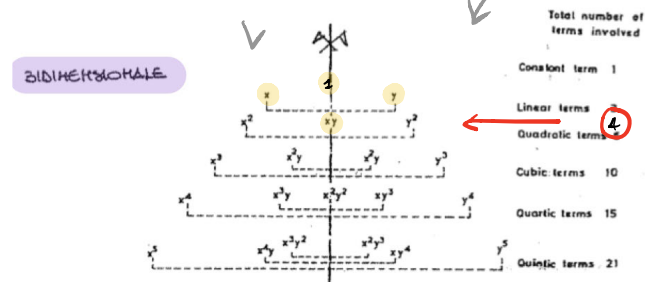
ELEMENTO RETTANGOLARE A 4 NODI [ARGYRIS] (2D)



Notiamo che la 1^a differenza questo elemento si porta dietro un S.R. locale. La definizione del campo di spostamenti è effettuata con riferimento al sistema locale dell'elemento stesso. Il campo d' spostamenti è rappresentato dai seguenti polinomi (visto che ho 4 nodi → 4 parametri nodali → 4 coordinate generalizzate $\Phi_i^L(x,y)$):

$$\Phi_u^L(x^L, y^L) \equiv u^L(x^L, y^L) = \alpha_1 + \alpha_2 x^L + \alpha_3 y^L + \alpha_4 x^L y^L$$

$$\Phi_v^L(x^L, y^L) \equiv v^L(x^L, y^L) = \beta_1 + \beta_2 x^L + \beta_3 y^L + \beta_4 x^L y^L$$



in forma compatta

$$\{u^L\} = [x^L] \{\alpha\} (*)$$

Imponendo le condizioni nodali ottengo:

$$\{\bar{u}^L\} = [\bar{x}^L] \{\alpha\}$$

$$\{\bar{u}^L\} = \{u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ u_3 \ v_3 \ u_4 \ v_4\}$$

$$[\bar{x}^L] =$$

1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0
1	a	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	a	0	0
1	a	b	ab	0	0	0	0
0	0	0	0	1	a	b	ab
1	0	b	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	b	0

Invertendo il sistema ricaviamo i parametri incogniti $\{\alpha\}$ (COORDINATE GENERALIZZATE):

$$\{\alpha\} = [\bar{x}^L]^{-1} \{\bar{u}^L\}$$

Inserendo i valori trovati in (*) trovo:

$$\{u^L\} = [x^L] [\bar{x}^L]^{-1} \{\bar{u}^L\} = [N] \{\bar{u}^L\}$$

MATRICE FUNZIONI DI FORMA

$$N = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix}$$

$N_i(x^L, y^L)$ = generica funzione di forma

Quanto vale l'ENERGIA DI DEFORMAZIONE ELASTICA?

$$\Pi_e = \frac{1}{2} \int_V \sigma \cdot \epsilon \, dV$$

FORMULA GENERALE
ENERGIA ELASTICA
DI DEFORMAZIONE

$$\Pi_e = \frac{1}{2} \int_V \sigma \cdot \epsilon \, dV = \frac{1}{2} \int_V \{\epsilon\}^T \{\sigma\} \, dV = \frac{1}{2} \int_V \{\epsilon\}^T [D] \{\epsilon\} \, dV$$

per l'eq. costitutive
 $\{\sigma\} = [D] \{\epsilon\}$

Ma ora viene espresso $\{\epsilon\}$ in funzione degli spostamenti nodali: $\{\epsilon\} = [B] \{\bar{u}\}$, quindi:

$$\Pi_e = \frac{1}{2} \int_V \{\epsilon\}^T [D] \{\epsilon\} \, dV = \frac{1}{2} \int_V ([B] \{\bar{u}\})^T [D] ([B] \{\bar{u}\}) \, dV$$

$$\Pi_e = \frac{1}{2} \int_V [B]^T \{\bar{u}\}^T [D] [B] \{\bar{u}\} \, dV \rightarrow \frac{1}{2} \{\bar{u}\}^T \left(\int_V [B]^T [D] [B] \, dV \right) \{\bar{u}\}$$

$[K]$

Siamo riusciti a scrivere quindi:

$$\Pi_e = \frac{1}{2} \{\bar{u}\}^T [K] \{\bar{u}\}$$

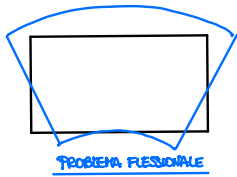
$$[K] = \int_V [B]^T [D] [B] \, dV$$

MATRICE DI RIGIDEZZA
DELL'ELEMENTO RETTANGOLARE
NEL S.R. locale

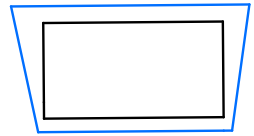
matrice delle derivate
delle funzioni di forma

$$[B] = \begin{bmatrix} H_{1,x^L} & 0 & H_{2,x^L} & 0 & H_{3,x^L} & 0 & N_{4,x^L} & 0 \\ 0 & H_{1,y^L} & 0 & H_{2,y^L} & 0 & H_{3,y^L} & 0 & H_{4,y^L} \\ N_{1,x^L} & N_{1,y^L} & N_{2,x^L} & N_{2,y^L} & N_{3,x^L} & N_{3,y^L} & N_{4,x^L} & N_{4,y^L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & b_{12} & 0 & b_{13} & 0 & b_{17} & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 & b_{24} & 0 & b_{26} & 0 & b_{28} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & b_{35} & b_{36} & b_{37} & b_{38} \end{bmatrix}$$

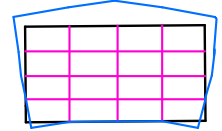
L'elemento rettangolare ora visto fornisce risultati insufficienti nei casi con comportamento flessionale predominante (ad esempio nello studio delle membrane snelle).



il problema è che la deformata è sempre rettilinea.
 → L'elemento rettangolare non è in grado di coprire il problema flessionale.



Per sopperire a questa carenza aumento la mesh, introducendola a raffinatezza.



Ma un altro problema dell'elemento rettangolare è che soffre di CONVERGENZA LENTA!

LA CONVERGENZA ALLA SOLUZIONE ESATTA LA SI OTTIENE CON DEI COSTI DEBOLMENTE INFINTIMENTI DELLA DISCRETIZZAZIONE. LA CONVERGENZA RISULTA NOTEVOLMENTE ACCELERATA SE LA DEFORMAZIONE TANGENZIALE CAUSA DELLA "LENTA" O "DEBOLE" CONVERGENZA, È ASSOLUTAMENTE COSTANTE ALL'INTERNO DELL'ELEMENTO ED UGUALE AL VALORE A LIVELLO BARICENTRICO (WILSON, TAYLOR, ALTRI) - QUESTA IPOTESI RISULTA ESPRESSA DALLA:

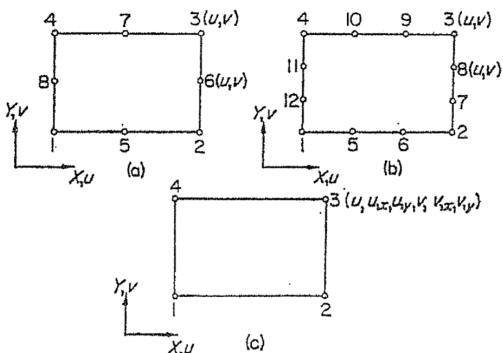
$$[B] = \begin{bmatrix} H_{1,x^L} & 0 & H_{2,x^L} & 0 & H_{3,x^L} & 0 & H_{4,x^L} & 0 \\ 0 & H_{1,y^L} & 0 & H_{2,y^L} & 0 & H_{3,y^L} & 0 & H_{4,y^L} \\ H_{1,x^L}^* & H_{1,y^L}^* & H_{2,x^L}^* & H_{2,y^L}^* & H_{3,x^L}^* & H_{3,y^L}^* & H_{4,x^L}^* & H_{4,y^L}^* \end{bmatrix}$$

DOVE $H_{\alpha,\beta}^* = H_{\alpha,\beta}^L(x_G^L, y_G^L) = \text{cost.}$ → Calcolati nel baricentro

Per bypassare questi problemi, come abbiamo fatto per gli elementi trisupolari, possiamo pensare di percorrere le stesse strade, ossia:

- **STRADA 1:** mantenendo gli stessi g.d.l. per nodo, ma aumentando il numero di nodi. Oltre ai nodi ai vertici, aggiungo nodi intermedi lungo i lati. Ottengo così più condizioni al contorno (condizioni nodali).
- **STRADA 2:** mantenendo lo stesso numero di nodi, ma aumentando il numero di parametri nodali. Incrementare il numero di parametri nodali vuol dire che tratto questi non solo in termini di spostamento, ma anche in termini di derivate dello spostamento.

ELEMENTI RETTANGOLARI DI ORDINE ELEVATO (2D)



- (a) SECONDO GRADO
- (b) TERZO GRADO: INCONGNITE SPOSTAMENTI
- (c) TERZO GRADO: INCONGNITE SPOSTAMENTI E DERIVATE PRIME

quando procedo con la condensazione statica già mi ritrovo la matrice partizionata (e non devo fare scambio righe con righe colonne con colonne).

Quindi: partendo dalla $[K]_i$ dell' i -esimo elemento triangolare è possibile scrivere l'equazione di equilibrio dell'intero elemento (m) :

$$\begin{Bmatrix} [F_1] \\ [F_2] \\ [F_3] \\ [F_4] \\ [F_5] \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [k_{11}]^1 [k_{22}]^1 & [k_{12}]^1 & & & [k_{21}]^1 & [k_{13}]^1 [k_{23}]^1 \\ & [k_{21}]^1 & [k_{22}]^1 [k_{11}]^2 & & [k_{22}]^2 & [k_{23}]^1 [k_{13}]^2 \\ & & [k_{21}]^2 & [k_{22}]^2 [k_{11}]^3 & [k_{12}]^3 & [k_{23}]^2 [k_{13}]^3 \\ & [k_{12}]^4 & & [k_{21}]^3 & [k_{22}]^3 [k_{11}]^4 & [k_{23}]^3 [k_{13}]^4 \\ \hline [k_{31}]^1 [k_{32}]^1 & [k_{32}]^1 [k_{21}]^2 & [k_{32}]^2 [k_{21}]^3 & [k_{32}]^3 [k_{21}]^4 & [k_{33}]^1 [k_{23}]^2 & [k_{33}]^2 [k_{23}]^3 & [k_{33}]^3 [k_{23}]^4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} [u_1] \\ [u_2] \\ [u_3] \\ [u_4] \\ [u_5] \end{Bmatrix}$$

N.B. i termini vicini si sommano ↗

Per questo elemento solo i nodi 1-2-3-4 si collegano con il resto della struttura mentre il 5° no. Allora procedo con la **CONDENSAZIONE STATICA** e lo faccio spirare da $[F]$:

$$\begin{bmatrix} [F_e] \\ [F_i] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [k_{ee}] & [k_{ei}] \\ [k_{ie}] & [k_{ii}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [u_e] \\ [u_i] \end{bmatrix}$$

FORZE E SPOSTAMENTI NODI ESTERNI (1, 2, 3, 4)

FORZE E SPOSTAMENTI NODO INTERNO (5)

$$[F_i] = [k_{ie}][u_e] + [k_{ii}][u_i]$$

$$[u_i] = [k_{ii}]^{-1} ([F_i] - [k_{ie}][u_e])$$

$$[F_e] = [k_{ee}][u_e] + [k_{ei}][u_i] = [k_{ee}][u_e] + [k_{ei}][k_{ii}]^{-1} ([F_i] - [k_{ie}][u_e])$$

$$[F]_m = [F_e] - [k_{ei}][k_{ii}]^{-1}[F_i]$$

$$[K]_m = [k_{ee}] - [k_{ei}][k_{ii}]^{-1}[k_{ie}]$$

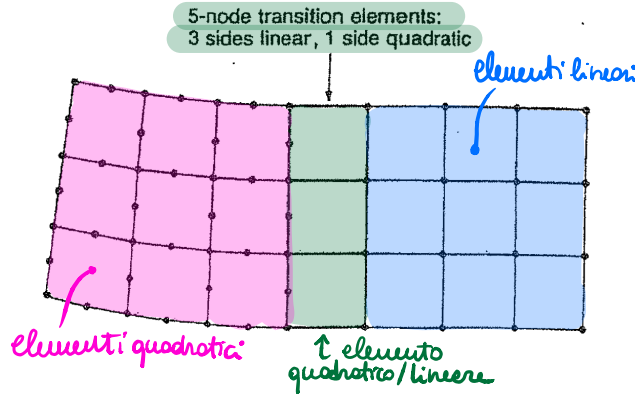
$$[F]_m = [K]_m [u_e]_m$$

RELAZIONE DI EQUILIBRIO ELEMENTO QUADRANGOLARE DOVE RISULTANO "CONDENSATI" I GRADI DI LIBERTÀ RELATIVI AL NODO INTERNO 5.

un problema degli elementi (l'errore è mio e di come ho meshato: ho fatto un cattivo utilizzo dell'elemento).

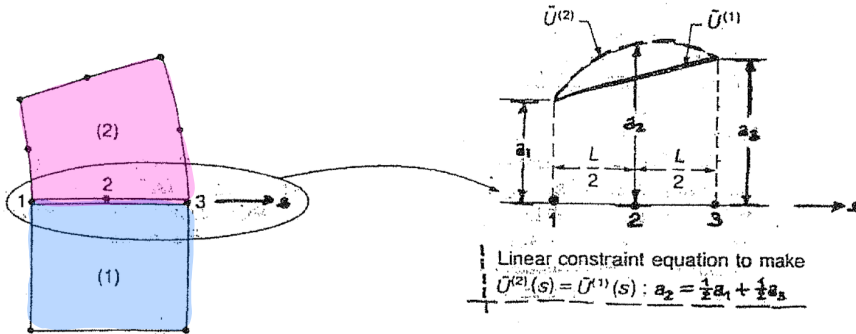
In queste situazioni come faccio la mesh, cioè come risolvo la combinazione di elementi di ordine diverso?

→ **STRADA 1: UTILIZZO ELEMENTI DI TRANSIZIONE**



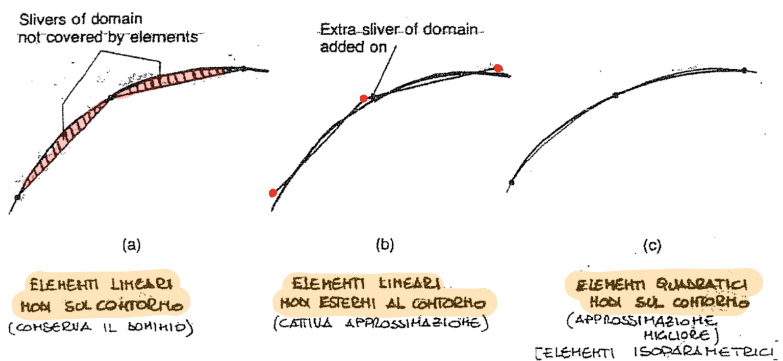
Sono elementi che permettono di passare da una situazione all'altra senza incorrere in errori. (vedremo più avanti come costruirli)

→ **STRADA 2: IMPONENDO DEI "VINCOLI GENERALIZZATI" (combinazioni lineari) TRA GLI SPOSTAMENTI DEI NODI**



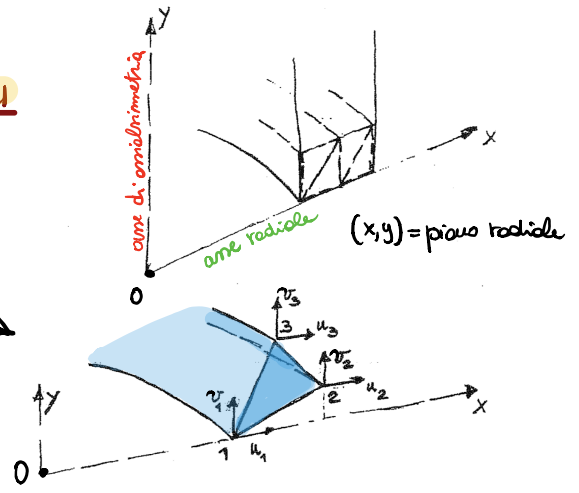
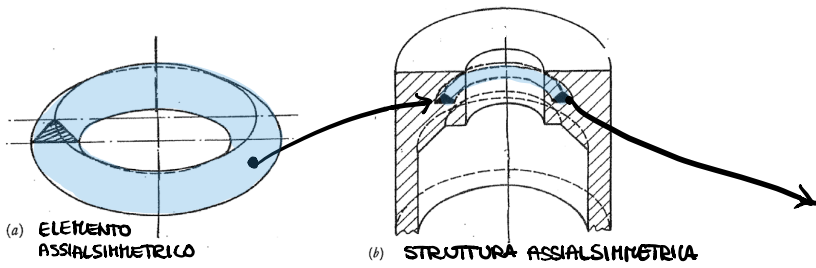
Abbiamo visto che un g.d.l. può essere visto come combinazione lineare di altri n g.d.l.. Dico che il lato 1-2-3 dell'elemento (2) ha comportamento lineare come il lato 1-3 dell'elemento (1). Ciò ci traduce nel fatto che lo spostamento del nodo 2 è media tra lo spostamento in 1 e in 3. Così fatto il comportamento dell'elemento (2) sul lato comune ad essere uguale a quello dell'elemento (1).

Nella costruzione della mesh possono fare altri tipi di errore. Se utilizzo elementi con lati rettilinei e devo rappresentare un elemento curvo, ci sarà un'area che non sarà coperta dal dominio. Devo ridurre il numero di nodi della mesh (ATTENZIONE: i nodi devono essere interni al dominio!).



2 STATI E PROBLEMI ASSIALSIMMETRICI

A) SOLIDI DI RIVOLUZIONE SOGGETTI A CARICHI ASSIALSIMMETRICI



Vengono ora analizzati i solidi di rivoluzione soggetti a carichi assialsimmetrici. In questo caso esistono solo 2 componenti di spostamento indipendenti: u e v , entrambe contenute nella sezione meridiana della struttura. Ne segue che gli elementi toroidali assialsimmetrici possono essere generati (con le opportune modifiche) partendo dai vari elementi relativi agli stati piani.

Lo STATO DI DEFORMAZIONE PIANO $\{\epsilon\}$ abbiamo visto essere esprimibile come:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix} \rightarrow \{\epsilon\} = [D]\{u\}$$

Ma nel CASO ASSIALSIMMETRICO (caso di lastre cilindriche: $R_1 \rightarrow \infty$ (raggio lungo il meridiano) $R_2 = R$) occorre prendere in considerazione anche $\epsilon_\theta = \text{deformazione al cerchio di centro } O \text{ e raggio } r$ (da Scienze II: $\epsilon_\theta = u/R$ con $R \equiv r$)!

↳ STIRACCHIAMENTO LUNGO LA LINEA MEDIA

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \epsilon_\theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{1}{r} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix} \rightarrow \{\epsilon\} = [D]\{u\}$$

sarebbe $1/R$

Attraverso le equazioni costitutive si associa al vettore deformazioni $\{\epsilon\}$, il vettore delle tensioni tramite la MATRICE $[D]$. Contemporaneamente nel legame $\{\sigma\}, \{\epsilon\}$ nasce una tensione σ_θ legata a ϵ_θ . Dunque rispetto al caso di stato piano anche la matrice $[D]$ cambia:

EQUAZIONI COSTITUTIVE

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \sigma_\theta \end{Bmatrix} = [D] \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \epsilon_\theta \end{Bmatrix}$$

$$\{\sigma\} = [D]\{\epsilon\}$$

$$[D] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & \nu \\ 1-\nu & 1-\nu & 0 & 1-\nu \\ \nu & \nu & 1 & \nu \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ \nu & \nu & 0 & 1 \\ 1-\nu & 1-\nu & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si nota come abbiamo trascurato la deformabilità a taglio delle strutture

A questo punto, come faccio (per un elemento così fatto) a trovare il legame tra $\{F\}$ e $\{u\}$ (forze e spostamenti), cioè come faccio e calcolo la matrice di rigidità? Al solito tramite la proprietà che la matrice di rigidità dell'elemento è quella matrice che ci permette di scrivere l'ENERGIA ELASTICA DI DEFORMAZIONE in termini quadratici degli SPOSTAMENTI.

Quanto vale l'ENERGIA DI DEFORMAZIONE ELASTICA?

$$\Pi_e = \frac{1}{2} \int_V \sigma \cdot \epsilon \, dV$$

FORMULA GENERALE
ENERGIA ELASTICA
DI DEFORMAZIONE

$$\Pi_e = \frac{1}{2} \int_V \sigma \cdot \epsilon \, dV = \frac{1}{2} \int_V \{\epsilon\}^T \{\sigma\} \, dV = \frac{1}{2} \int_V \{\epsilon\}^T [D] \{\epsilon\} \, dV$$

per l'eq. costitutive
 $\{\sigma\} = [D] \{\epsilon\}$

Ma ora lo esprime $\{\epsilon\}$ in funzione degli spostamenti nodali: $\{\epsilon\} = [B] \{\bar{u}\}$, quindi:

$$\Pi_e = \frac{1}{2} \int_V \{\epsilon\}^T [D] \{\epsilon\} \, dV = \frac{1}{2} \int_V ([B] \{\bar{u}\})^T [D] ([B] \{\bar{u}\}) \, dV$$

$$\Pi_e = \frac{1}{2} \int_V [B]^T \{\bar{u}\}^T [D] [B] \{\bar{u}\} \, dV \rightarrow \frac{1}{2} \{\bar{u}\}^T \left(\int_V [B]^T [D] [B] \, dV \right) \{\bar{u}\}$$

\downarrow
 $[K]$

Siamo riusciti a scrivere quindi:

$$\Pi_e = \frac{1}{2} \{\bar{u}\}^T [K] \{\bar{u}\}$$

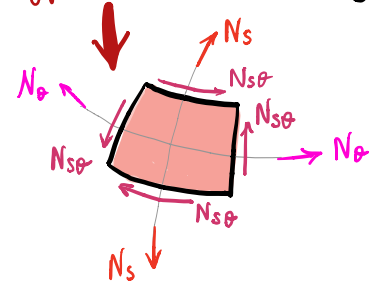
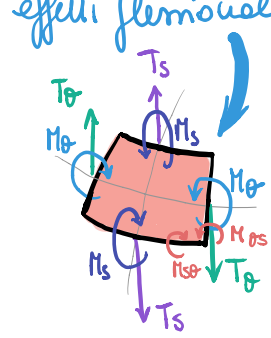
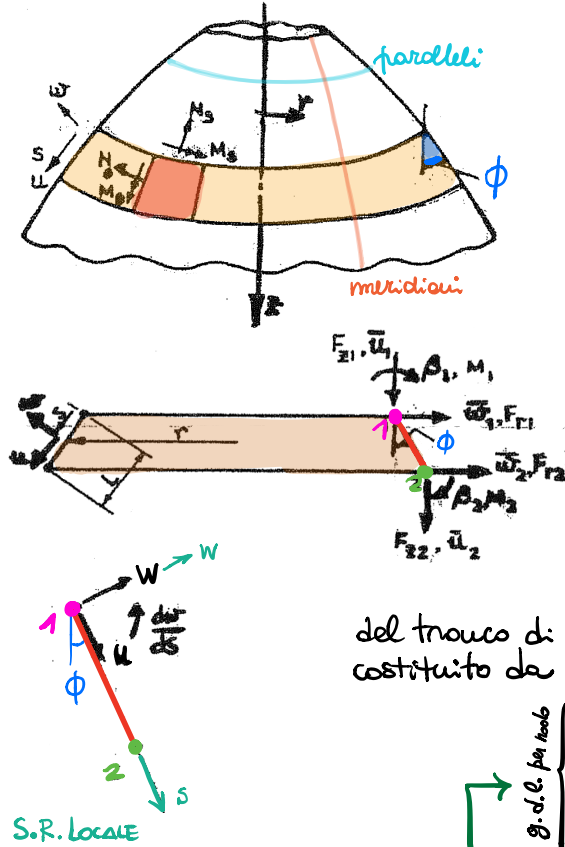
$$[K] = \int_V [B]^T [D] [B] \, dV \Rightarrow [K] = 2\pi \int_A [B]^T [D] [B] \, r \cdot dA$$

$dV = 2\pi r \cdot dA$

È possibile procedere al calcolo dei singoli termini di $[K]$ o sviluppando il prodotto matriciale ed integrando termine a termine, o ricorrendo ad una integrazione numerica. In ogni caso l'integrazione deve essere estesa a tutto l'elemento toroidale.

B) GUSCI ASSIALSIMMETRICI SOTTILI SOGGETTI A CARICHI ASSIALSIMMETRICI

Oltre ai solidi di rivoluzione caricati *anisimmetricamente*, un altro problema di stato assialsimmetrico riguarda i **GUSCI ASSIALSIMMETRICI SOTTILI** (li definiamo sottili perché sono strutture flessibili). Per queste strutture le caratteristiche di sollecitazione che andremo a considerare sono gli **effetti membranali** e gli **effetti flettionali**:



Come studiamo la nostra struttura? Identifichiamo una striscia, e approssimo questa striscia di guscio sottile assialsimmetrico con un tronco di cono. Con riferimento alla verticale, la faccia del tronco di cono è inclinata di un angolo ϕ . L'elemento è costituito da 2 nodi con 3 g.d.l. per nodo:

- \bar{u}_i → SPOSTAMENTO VERTICALE
 - \bar{w}_i → SPOSTAMENTO RADIALE
 - β_i → ROTAZIONE
- N.B. Solo spostamenti contenuti nel piano radiale

Gli spostamenti nodali mi interessano riferiti al S.R. globale (\bar{z}, r) .

$$\{\bar{u}\}^T = \{\bar{u}_1 \quad \bar{w}_1 \quad \beta_1 \quad \bar{u}_2 \quad \bar{w}_2 \quad \beta_2\}$$

Ma le forze nodali risultano essere: $\{F^G\}^T = \{F_{z1} \quad F_{r1} \quad M_1 \quad F_{z2} \quad F_{r2} \quad M_2\}$

Al solito il nostro scopo è quello di trovare $[K]$ per l'elemento.

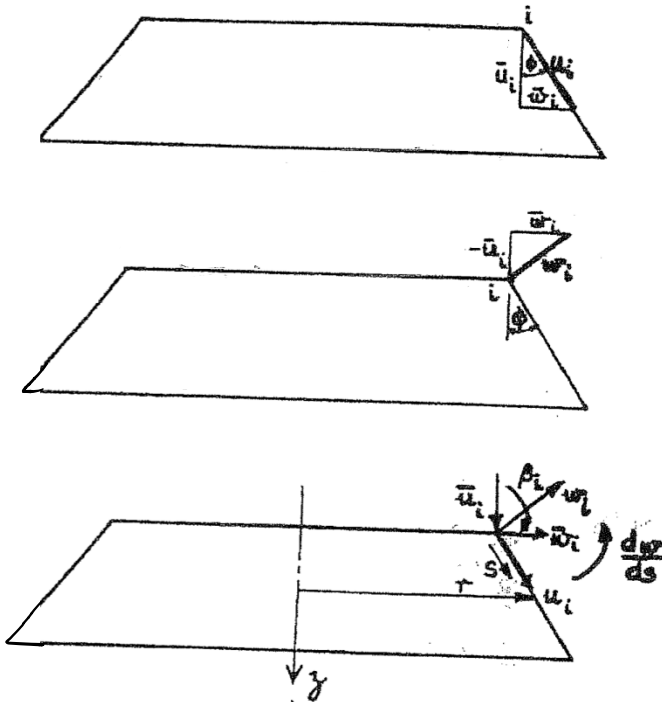
Parallelamente possiamo considerare un sistema locale (s, w) ed individuare per questo le COMPONENTI DI SPOSTAMENTO LOCALE:

- 3 componenti locali di spostamento x 2 nodi = esistono 6 g.d.l.
- u → SPOSTAMENTO LUNGO L'ASSE S
 - w → SPOSTAMENTO NORMALE AD S
 - $\frac{dw}{ds}$ → ROTAZIONE

Perché \exists 6 g.d.l., se vogliamo scrivere l'approssimazione del campo spostamento, occorre assumere 6 coordinate generalizzate incognite nei polinomi rappresentanti il modello degli spostamenti. Di solito si assume una variazione lineare per u in s , e una variazione cubica per w in s (analogo con elemento trave → cubica):

$$\phi_u(s) \equiv u(s) = \alpha_1 + \alpha_2 s$$

$$\phi_w(s) \equiv w(s) = \alpha_3 + \alpha_4 s + \alpha_5 s^2 + \alpha_6 s^3$$



SAPENDO CHE TRA SPOSTAMENTI NEL SISTEMA LOCALE E SPORCA NEHTI NEL SISTEMA GLOBALE VALGONO LE LEGGI DI TRASFORMAZIONE SEGUENTI

$$\begin{cases} u_i = \bar{u}_i \cos \phi + \bar{w}_i \sin \phi \\ w_i = -\bar{u}_i \sin \phi + \bar{w}_i \cos \phi \\ \left(\frac{dw}{ds}\right)_i = -\beta_i \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} u_i \\ w_i \\ \left(\frac{dw}{dx}\right)_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{w}_i \\ \beta_i \end{bmatrix}$$

$\{\bar{u}^L\}_1 = [T] \{\bar{u}\}_1$ spostamento nodo 1 nel S.R. locale
 matrice di trasformazione degli spostamenti sul singolo nodo
 su tutto l'elemento
 $\{\bar{u}^L\} = [T] \{\bar{u}\}$ (***)
 RELAZIONE VALIDA PER TUTTO L'ELEMENTO

$$\begin{Bmatrix} \{\bar{u}_1^L\} \\ \{\bar{u}_2^L\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [T] & [0] \\ [0] & [T] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\bar{u}_1\} \\ \{\bar{u}_2\} \end{Bmatrix}$$

Quindi la (**) alla luce di (***) diventa:

$$\{u^L\} = [K^L] [\bar{x}^L]^{-1} \{\bar{u}^L\} = [K^L] [\bar{x}^L]^{-1} [T] \{\bar{u}\}$$

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & s & s^2 & s^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{L} & 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{L^2} & -\frac{2}{L} & 0 & \frac{3}{L^2} & -\frac{1}{L} \\ 0 & \frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} & 0 & -\frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{w}_1 \\ \beta_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{w}_2 \\ \beta_2 \end{Bmatrix}$$

$\rightarrow [N] =$ matrice delle funzioni di forma \rightarrow scritta così: tiene più conto della trasformazione S.R. locale \leftrightarrow globale

$$= \begin{bmatrix} (1-p) \cos \phi & (1-p) \sin \phi & 0 & p \cos \phi & p \sin \phi & 0 \\ -(1-3p^2+2p^3) \times \sin \phi & (1-3p^2+2p^3) \times \cos \phi & -L(p-2p^2+p^3) & -(3p^2-2p^3) \times \sin \phi & (3p^2-2p^3) \times \cos \phi & -L(-p^2+p^3) \end{bmatrix} \{\bar{u}\}$$

$$\Pi_e = \frac{1}{2} \int_V \sigma \cdot \epsilon \, dV = \frac{1}{2} t \int_V \{\epsilon\}^T \{F\} \, dV = \frac{1}{2} \int_V \{\epsilon\}^T [D] \{\epsilon\} \, dV$$

per l'eq. costitutiva
 $\{F\} = [D] \{\epsilon\}$

Ma ora lo esprime $\{\epsilon\}$ in funzione degli spostamenti nodali: $\{\epsilon\} = [B] \{\bar{u}\}$, quindi:

$$\Pi_e = \frac{1}{2} \int_V \{\epsilon\}^T [D] \{\epsilon\} \, dV = \frac{1}{2} \int_V ([B] \{\bar{u}\})^T [D] ([B] \{\bar{u}\}) \, dV$$

$$\Pi_e = \frac{1}{2} \int_V [B]^T \{\bar{u}\}^T [D] [B] \{\bar{u}\} \, dV \rightarrow \frac{1}{2} \{\bar{u}\}^T \left(\int_V [B]^T [D] [B] \, dV \right) \{\bar{u}\}$$

Siamo riusciti a scrivere quindi:

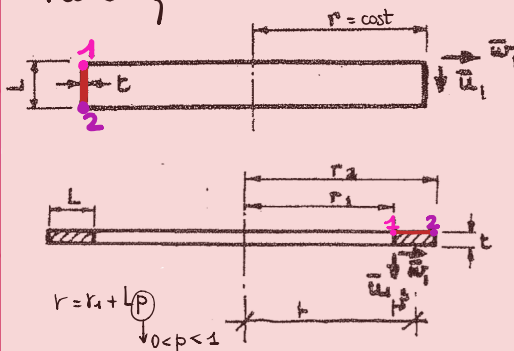
$$\Pi_e = \frac{1}{2} \{\bar{u}\}^T [K] \{\bar{u}\}$$

$$[K] = \int_V [B]^T [D] [B] \, dV \Rightarrow [K] = 2\pi L \int_0^1 [B]^T [D] [B] \, r \cdot dp$$

$dV = t \cdot dA$
 $\parallel 2\pi r \cdot ds = 2\pi r \cdot (L \cdot dp)$
 varia tra 0 e 1
 matrice i cui termini sono funzioni di r e di p

OSSERVAZIONE

Per come abbiamo impostato il problema abbiamo studiato un tronco di cono. Questo tronco di cono ora viene detto essere inclinato di un certo angolo ϕ . Tutto quello che abbiamo ricavato è funzione di ϕ . Casi particolari:



• $\phi = 0^\circ \rightarrow$ il guscio conico in un cilindro circolare

• $\phi = 90^\circ \rightarrow$ il guscio conico in un cono (pietra) circolare

N.B. L'elemento verticale mi dà buone risposte in termini di parametri derivati (= tensioni) e fatto di avere una mesh abbastanza fitta. Con buona sostanza noi stiamo approssimando il problema e quello della trave, mentre in realtà è più complesso. Quindi per avere una certa semplicità di formulazione le pago con una mesh più fitta.

CARATTERISTICHE DI SOLLECITAZIONE

$$M_x = \int \sigma_x \cdot z \, dz = \frac{-Et^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

$$M_y = \int \sigma_y \cdot z \, dz = \frac{-Et^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

$$M_{xy} = \int \tau_{xy} \cdot z \, dz = \frac{-Et^3}{12(1-\nu^2)} (1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$\begin{cases} M_x = D(\chi_x + \nu \chi_y) \\ M_y = D(\chi_y + \nu \chi_x) \\ M_{xy} = \frac{1-\nu}{2} D \chi_{xy} \end{cases}$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{t^3}{12} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}$$

dunque:

$$\{Q\} = \frac{t^3}{12} [D] \{\partial w\}$$

dunque:

variano
linealmente
in z
costanti sullo
spessore

$$\{E\} = \{e\} + z \cdot \{\chi\}$$

STATO TENSIONALE

$$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz} \neq 0 \quad \sigma_z = 0$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} - \frac{E\alpha\Delta T}{1-\nu} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

[D]

MATRICE TENSIONI INIZIALI DI ORIGINE TERMICA (al coeff. term...)

$$\begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{E}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}$$

[D_t] = MATRICE DEL MODULO DI ELASTICITÀ TANGENZIALE G

dunque:

$$\begin{cases} \{\sigma\} = [D] \{E\} + \{\sigma_0\} \\ \{\tau\} = [D_t] \{\gamma\} \end{cases}$$

CARATTERISTICHE DI SOLLECITAZIONE

$$\begin{cases} \{N\} = t [D] \{e\} + \{N_0\} \\ \{M\} = \frac{t^3}{12} [D] \{\chi\} + \{M_0\} \\ \{T\} = ktG \{\gamma\} \end{cases}$$

non \exists accopp. Couperato membrane e flessionale

$$\frac{E}{2(1+\nu)}$$

Verifichiamo adesso elementi che modellano la piastra alla Kirchhoff e quella alla Mindlin.

Adesso, dalla teoria di Kirchhoff so che lo stato deformativo è:

$$\{\epsilon\} = z \cdot \{\partial w\} \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{pmatrix}$$

Calcolo i termini di $\{\partial w\}$:

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^3 y + \alpha_{12} xy^3$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 2\alpha_4 + 6\alpha_7 x + 2\alpha_8 y + 6\alpha_{11} xy$$

⋮

otengo \rightarrow $\{\epsilon\} = -z \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 6x & 2y & 0 & 0 & 6xy & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2x & 6y & 0 & 6y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 6x & 2y & 0 & 6x^2 & 6y^2 \end{bmatrix} \{\alpha\}$

$[C]$

$$\{\epsilon\} = -z[C]\{\alpha\} \quad \{\alpha\} = [\bar{x}]^{-1}\{\bar{u}\}$$

$$\{\epsilon\} = -z[C][\bar{x}]^{-1}\{\bar{u}\} \longrightarrow \{\epsilon\} = [B]\{\bar{u}\}$$

$[B]$

ponendo per l'espressione costitutive \rightarrow $\{\sigma\} = [D]\{\epsilon\} = [D][B]\{\bar{u}\}$

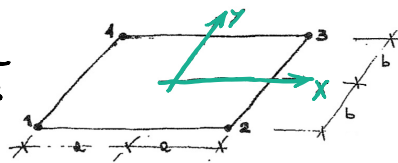
A questo punto, come faccio (per un elemento così fatto) a trovare il legame tra $\{F\}$ e $\{u\}$ (forze e spostamenti), cioè come faccio e calcolo la matrice di rigidità? Al solito tramite la proprietà che la matrice di rigidità dell'elemento è quella matrice che ci permette di scrivere l'ENERGIA ELASTICA DI DEFORMAZIONE in termini quadratici degli SPOSTAMENTI.

Quanto vale l'ENERGIA DI DEFORMAZIONE ELASTICA?

$$U_e = \frac{1}{2} \int_V \sigma \cdot \epsilon \, dV$$

FORMULA GENERALE
ENERGIA ELASTICA
DI DEFORMAZIONE

Nell'ipotesi di un sistema locale per l'elemento rettangolare del tipo riportato nelle figure, la **matrice kernel** risulta $[K]$:



$$\begin{bmatrix}
 0 & & & & & & & & & \\
 0 & 0 & & & & & & & & \\
 0 & 0 & 0 & & & & & & & \\
 0 & 0 & 0 & 4 & & & & & & \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 4q & & & & & \\
 0 & 0 & 0 & 4v & 0 & 4 & & & & \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12a^2 & & & \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{5}(5-4q^2) & & \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4va^2 & 0 & \frac{4}{5}(4a^2+4vb^2) & \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4vb^2 & 0 & 12b^2 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 4qa^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & (4a^4 + \frac{16}{5}qa^2) \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 4qb^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & (va^2)4a^2b^2 + (4a^2b^2 + \frac{16}{5}qb^4)
 \end{bmatrix}$$

La **matrice kernel** è la **matrice nucleo** che ci consente di costruire la matrice di rigidezza dell'elemento nota la matrice delle coordinate nodali:

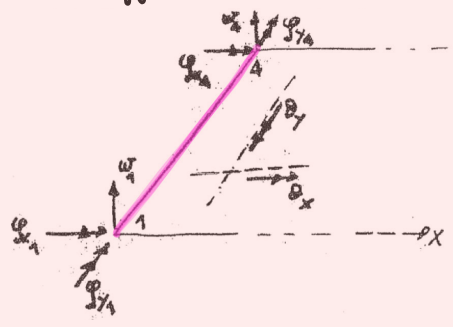
$$[k] = \frac{Et^3 ab}{3(1-\nu^2)}$$

DOVE $q = \frac{(1-\nu)}{2}$

$$\hookrightarrow [K] = ([x]-1)^T [k] [x]-1$$

OSSERVAZIONE

- Quando x (o y) è costante, la funzione approssimante si riduce al polinomio cubico utilizzato come funzione approssimante nello studio dell'elemento trave.
- Se ci mettiamo sul bordo tra 2 elementi adiacenti cosa succede? Dobbiamo capire se, con riferimento ai lati comuni ci ritroviamo continuità di spostamenti. In pratica loro affermano che la continuità non è garantita nel bidimensionale (tra 2 elementi adiacenti), occorre verificare che gli spostamenti e le rotazioni lungo il lato comune non siano uguali: occorre verificare che la funzione scelta w assicuri la continuità dello spostamento verticale, e delle tangenti lungo i bordi dell'elemento.



Come si fa? Per esempio esaminiamo il lato 1-4 (questo lato ha come peculiarità $x=0$). La nostra funzione approssimante è:

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 x^3 + \alpha_7 x^2y + \alpha_8 xy^2 + \alpha_9 y^3 + \alpha_{10} x^3y + \alpha_{11} xy^3$$

Maestra le sue derivate sono:

Derivata lungo il lato (pendenza) $\sigma_x = \frac{\partial w}{\partial y} = \varphi_x$

Derivate normali al lato $\sigma_y = \frac{\partial w}{\partial x} = -\varphi_y$

Supera dei test sotto delle certe condizioni imposte dal test stesso. Quindi, quando supero questo elemento devo impiegarlo in situazioni che presentano le stesse condizioni di test. (il test è il PATCH TEST).

• CARICHI EQUIVALENTI

DOVENDO DEFINIRE I CARICHI EQUIVALENTI PRODOTTI DA UN CARICO DISTRIBUITO AGENTE SULLA PIASTRA, SI ANALIZZA L'ENERGIA POTENZIALE TOTALE DELL'ELEMENTO

$$\pi = U - \int_A p w \, dA$$

CARICO DISTRIBUITO

$$w = [X][\alpha] = [X][\bar{X}]^{-1}[\bar{u}]$$

$$\frac{1}{2} [\bar{u}]^T [k] [\bar{u}]$$

$$\pi = \frac{1}{2} [\bar{u}]^T [k] [\bar{u}] - \left(\int_A p \cdot [X][\bar{X}]^{-1} dA \right) [\bar{u}] =$$

$[F]^T$ VETTORE TRASPOSTO DELLE FORZE LOCALI

$$= \frac{1}{2} [\bar{u}]^T [k] [\bar{u}] - [\bar{u}]^T [F]$$

DA CUI SI RICAVA:

$$[F] = ([\bar{X}]^{-1})^T \int p \cdot [X]^T dA$$

IPOTIZZANDO $p = \text{cost}$ CON RIFERIMENTO ALL'ELEMENTO PER IL QUALE È STATA CALCOLATA LA MATRICE DI RIGIDEZZA SI OTTIENE

Fz_1	$= 4pb$	$\frac{1}{4}$
Hx_1		$-\frac{b}{12}$
Hx_1		$\frac{b}{12}$
Fz_2		$\frac{1}{4}$
Hx_2		$-\frac{b}{12}$
Hx_2		$\frac{b}{12}$
Fz_3		$\frac{1}{4}$
Hx_3		$\frac{b}{12}$
Hx_3		$-\frac{b}{12}$
Fz_4		$\frac{1}{4}$
Hx_4		$\frac{b}{12}$
Hx_4		$-\frac{b}{12}$

RICAVATI GLI SPOSTAMENTI DALLA SOLUZIONE DEL SISTEMA RELATIVO ALL'INTERA STRUTTURA, È POSSIBILE CALCOLARE I MOMENTI IN UN PUNTO GENERICO DELL'ELEMENTO. RICORDANDO CHE

$$[M] = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \frac{t^3}{12} [D] [d w] = \frac{t^3}{12} [D] [C] [\alpha] =$$

$$[d w] = [C] [\alpha] \quad [\alpha] = [X]^{-1} [\bar{u}]$$

$$= \frac{t^3}{12} [D] [C] [X]^{-1} [\bar{u}]$$

ANALIZZANDO LA RELAZIONE OTTEHUTA (IN PARTICOLARE $[C]$) SI OSSERVA CHE I MOMENTI FLETTENTI M_x E M_y VARIANO LINEARMENTE NENTRE IL MOMENTO TORCENTE M_{xy} VARIA IN MODO QUADRATICO IN X QUANDO Y È COSTANTE E VICEVERSA - CONTEMPORANEAMENTE SI OSSERVA LA NASCITA DI DISCONTINUITÀ LUNGO IL BORDO - È POSSIBILE OTTENERE UNA BUONA APPROSSIMAZIONE DEI VALORI DI MOMENTO SOTTITUENDO PER VARI MODI, UNA MEDIA DEI VALORI DI MOMENTO CALCOLATI PER CIASCUN ELEMENTO CONVERGENTE NEL MODO.

In questo modo ho ridotto i g.d.l. da 16 → a 12: 4 nodi ho 3 e non più 4 g.d.l. ($w, \partial w/\partial x, \partial w/\partial y, \partial w/\partial x \partial y$), e dunque può essere usata la funzione approssimante dell'elemento ACI.

buona come idea, ma risultato non così buono, perché il risultato purtroppo non è il risultato del mio BFS16. La derivata normale ∂_y FERDE il nuovo la CONTINUITÀ, mentre w è continua. In ogni caso tale elemento è estremamente più accurato dell'ACI (specie nell'analisi dinamica).

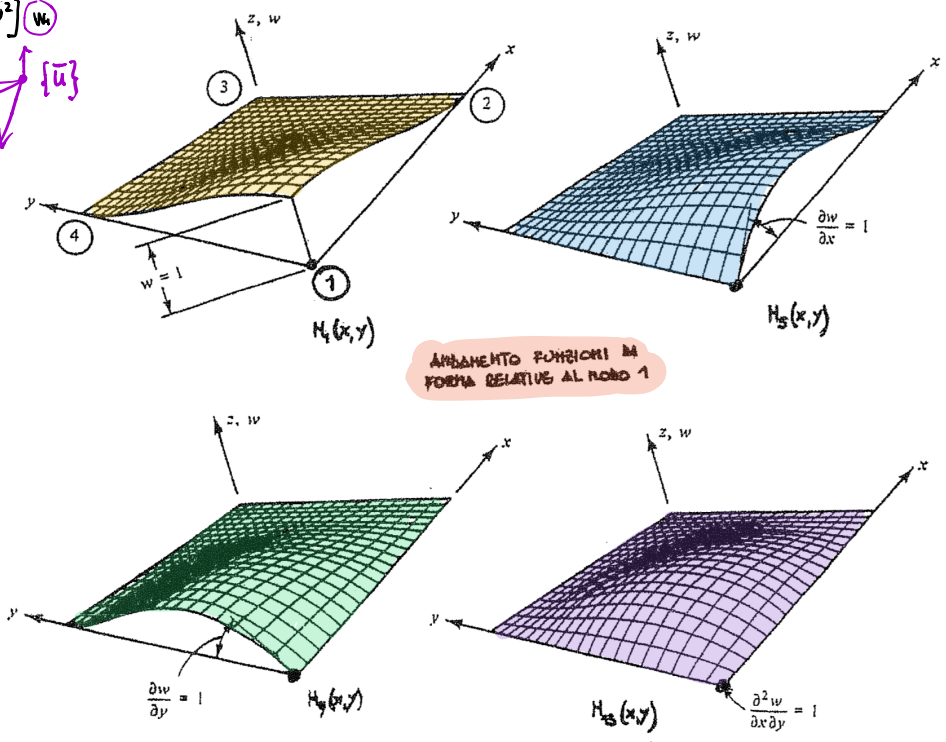
Imponendo le condizioni nodali riesco a trovare le coordinate generalizzate α_i :

$$w = [x] \{ \alpha \} \quad \rightarrow \quad \{ \alpha \} = [x]^{-1} \{ \bar{u} \} \quad \rightarrow \quad w = [x] [x]^{-1} \{ \bar{u} \}$$

dove w è esprimibile alle fine come:

$$w(x,y) = \sum_{i=1}^{16} N_i(x,y) \cdot \bar{u}_i = [N] \cdot \{ \bar{u} \}$$

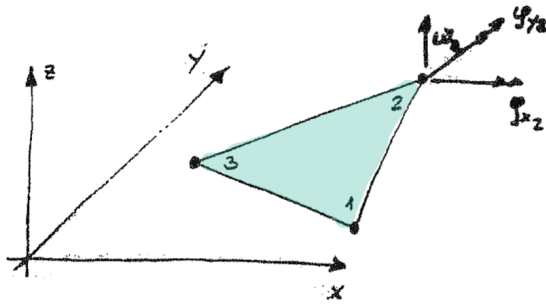
$$\begin{aligned} & \frac{1}{a^3 b^3} \left[(a^3 + 2x^3 - 3ax^2)(b^3 + 2y^3 - 3by^2) w_1 \right. \\ & + (3ax^2 - 2x^3)(b^3 + 2y^3 - 3by^2) w_2 \\ & + (3ax^2 - 2x^3)(3by^2 - 2y^3) w_3 \\ & + (a^3 + 2x^3 - 3ax^2)(3by^2 - 2y^3) w_4 \\ & + ax(x-a)^2(b^3 + 2y^3 - 3by^2) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_1 \\ & + a(x^3 - ax^2)(b^3 + 2y^3 - 3by^2) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_2 \\ & + a(x^3 - ax^2)(3by^2 - 2y^3) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_3 \\ & + ax(x-a)^2(3by^2 - 2y^3) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_4 \\ & + b(a^3 + 2x^3 - 3ax^2)y(y-b)^2 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_1 \\ & + b(3ax^2 - 2x^3)y(y-b)^2 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_2 \\ & + b(3ax^2 - 2x^3)(y^3 - by^2) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_3 \\ & + b(a^3 + 2x^3 - 3ax^2)(y^3 - by^2) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_4 \\ & + abxy(x-a)^2(y-b)^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_1 \\ & + abxy(x^2 - ax)(y-b)^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_2 \\ & + abxy(x^2 - ax)(y^2 - by) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_3 \\ & \left. + abxy(x-a)^2(y^2 - by) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_4 \right] \end{aligned}$$



Dall'analisi della funzione spostamento adottata, si può far vedere che:

- 1) $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ → contengono i 3 moti rigidi
- 2) $(\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6)$ → contengono i termini relativi ai 3 stati di deformazione cost.
- 3) lungo i bordi dell'elemento sono soddisfatte le condizioni di compatibilità di $w, \partial w/\partial x$ e $\partial w/\partial y$. Quindi l'ELEMENTO è CONFORME e CONTINUO di classe C^1

ELEMENTO TRIANGOLARE A 3 NODI DI [TOCHER 1] (KIRCHOFF) (2D)



Elemento a 3 nodi, con 3 g.d.l. per nodo (3 coordinate generalizzate incognite). Si enumerano come incognite nodali lo spostamento verticale del nodo e le 2 rotazioni attorno agli assi:

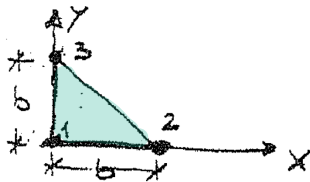
$$\{\bar{u}\}^T = \{w_1, \varphi_{x1}, \varphi_{y1}, w_2, \varphi_{x2}, \varphi_{y2}, w_3, \varphi_{x3}, \varphi_{y3}\}$$

Tocher ha formulato un polinomio approssimante dove raccoglie insieme i termini misti di tipo cubico, e rimette xy :

$$w(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 (x^2y + xy^2) + \alpha_9 y^3$$

Questo elemento ha 2 problemi:

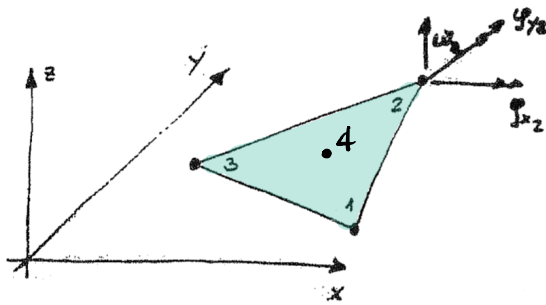
- 1) rappresenta come può il problema flessionale
- 2) Quando mi ritrovo con il mio elemento che è metà quadrato, NON riesco a determinare le coordinate generalizzate perché per determinare $\{\alpha\}$ devo invertire la matrice delle coordinate nodali: $[\bar{x}]$ (ricorda: $\{\alpha\} = [\bar{x}]^{-1} \{\bar{u}\}$), ma in questo caso $[\bar{x}]$ è SINGOLARE dunque NON INVERTIBILE



OSSERVAZIONE

Per poter descrivere il comportamento corretto della piastra, per un elemento triangolare vengono richiesti 18 g.d.l. per avere un elemento di tipo CONFORME. Ma per come abbiamo definito le incognite nodali queste risultano insufficienti: ne abbiamo solo 9 (anziché le 18 richieste per la CONFORMITÀ). (quindi di qui la necessità di utilizzare un polinomio almeno del 5° ordine).

ELEMENTO TRIANGOLARE A 4 NODI DI [TOCHER 2] (KIRCHOFF) (2D)



Per poter descrivere il comportamento corretto della piastra, per un elemento triangolare vengono richiesti 18 g.d.l. per avere un elemento di tipo CONFORME. Con 3 nodi otteniamo visto che abbiamo solo 9 incognite nodali. Dato che questi elementi sono troppo poveri, dobbiamo dare un po' più di corpo a questi polinomi. Per far ciò possiamo seguire 2 strade:

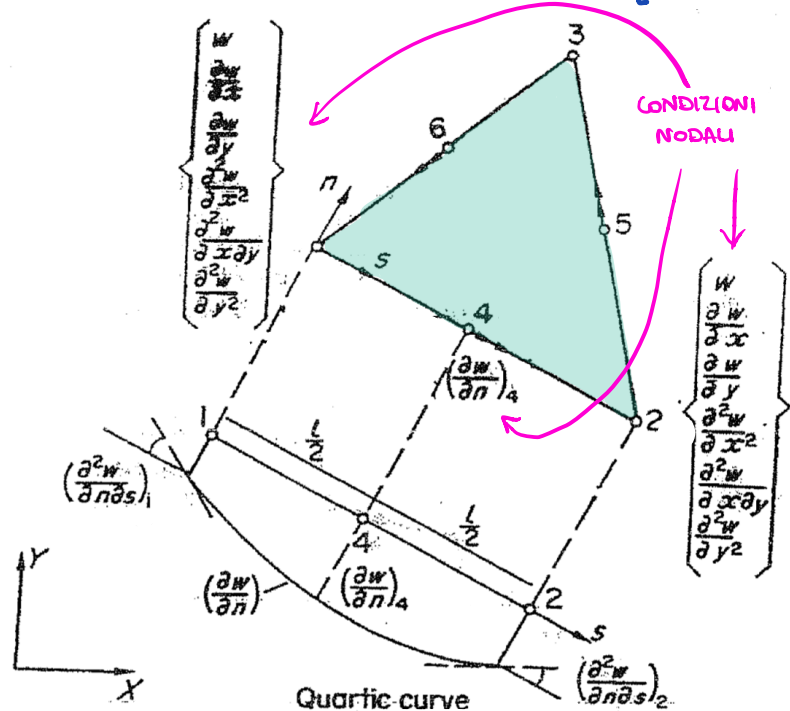
↑ n° nodi oppure ↑ n° dei parametri nodali. Tocher sceglie la 1° strada.

Nonostante abbiamo migliorato l'elemento, la CONFORMITÀ dell'elemento non è garantita → ELEMENTO NON CONFORME. Risultato garantito la continuità dello spostamento ma non la continuità delle derivate normali (DISCONTINUITÀ DERIVATA NORMALE tra 2 elementi triangolare).

OSSERVAZIONE

Per poter descrivere il comportamento corretto della piastra, per un elemento triangolare vengono richiesti 18 g.d.l. per avere un elemento di tipo CONFORME. Ma per come abbiamo definito le incognite nodali queste risultano insufficienti: ne abbiamo solo 15 (anziché le 18 richieste per la CONFORMITÀ). (quindi di qui la necessità di utilizzare un polinomio almeno del 5° ordine).

• ELEMENTO TRIANGOLARE A 6 NODI DI [ARGYRIS - BELL] (KIRCHHOFF) (2D)



È un elemento a 6 nodi, ma stavolta ciascun nodo al vertice ha 6 g.d.l. → entrano in gioco anche le derivate seconde. Mentre per i nodi in mezzo ai lati vengono dati come condizione di parametro nodale la derivata normale allo spostamento (1 g.d.l. a nodo in mezz'aria). Dunque in totale abbiamo $3 \times 6 + 3 \times 1 = 21$ g.d.l.

Questo elemento risponde abbastanza bene: sono garantite la continuità della funzione w lungo i lati e delle derivate prime $\partial w / \partial x$ e $\partial w / \partial y$. Infatti la definizione di w lungo un lato richiede

6 condizioni al contorno (polinomio del 5° ordine). Avendo definito come parametri nodali ai vertici quelli riportati in figura, le 6 condizioni sono COMPLETAMENTE definite (es. lato 1-2: $w = \partial w / \partial s$ e $\partial^2 w / \partial s^2$ in entrambi i nodi). Parallelamente la funzione pendente (derivate normale) risulta essere un polinomio del 4° ordine (dunque 5 condizioni per la completa definizione). Essendo definite alle estremità del lato w, u e $w_{,s}$, risulta necessaria la definizione del parametro w, u in un punto interno al lato in esame.

A partire da questa formulazione BELL ha proposto una modifica: le derivate normale la considero in termini di differenze finite (elimino la pendenza nei nodi intermedi ai lati aumentando la variazione della pendenza normale cubica piuttosto che di 4° grado), con riferimento al lato 1-2 si ha:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)_4 = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)_1 + \left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)_2 \right] + \frac{1}{8} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial s \partial n}\right)_1 - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial s \partial n}\right)_2 \right]$$

Anche se pago ciò con una perdita di precisione rispetto all'elemento tradizione.

Come utilizzo allora questi nodi interni? Vado ad imporre che su quei nodi le $\partial W / \partial n$ degli elementi adiacenti sia tra loro uguale (gli elementi adiacenti scambiano i sottotriangoli: $\rightarrow (\partial W / \partial n)_7^a = (\partial W / \partial n)_7^b$). Questo si traduce nell'imporre dei **VINCOLI GENERALIZZATI**. Per tanto vado a scegliere il nodo C in modo che gli spostamenti del nodo C devono essere tali per cui soddisfi le **condizioni di vincolo generalizzato**:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_7^a = \left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_7^b \\ \left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_8^b = \left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_8^c \\ \left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_9^a = \left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_9^c \end{cases}$$

Tale impostazione conduce ad una restrizione su $\{\bar{u}\}_c$:

$$\{\bar{u}\}_c = [E] \{\bar{u}\}_B \quad (*)$$

matrice
spostamenti nodo esterno (bordo)

spostamenti nodo centrale

Dunque partendo dalla relazione dell'energia elastica di deformazione dell'elemento, partiziono in funzione dei nodi di bordo (B) e dei nodi centrali (C):

$$\{\bar{u}\} [k] \{\bar{u}\} \rightarrow \left\{ \begin{matrix} \{\bar{u}\}_B^T & \{\bar{u}\}_C^T \end{matrix} \right\} \begin{bmatrix} [k_{BB}] & [k_{BC}] \\ [k_{CB}] & [k_{CC}] \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} \{\bar{u}\}_B \\ \{\bar{u}\}_C \end{matrix} \right\}$$

inverso (*) \rightarrow

$$\{\bar{u}\}_B^T \left(\begin{bmatrix} [I] & [E] \\ [E]^T & [E] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [k_{BB}] & [k_{BC}] \\ [k_{CB}] & [k_{CC}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [I] \\ [E] \end{bmatrix} \right) \{\bar{u}\}_B =$$

$$[k^*] = [k_{BB}] + [k_{BC}][E] + ([k_{BC}][E])^T + [E]^T[k_{CC}][E]$$

$$\{\bar{u}\} [k] \{\bar{u}\} = \{\bar{u}\}_B^T [k^*] \{\bar{u}\}_B$$

MATRICE DI RIGIDITÀ DELL'ELEMENTO HCT 12

Come risultato finale, questo elemento presenta 12 g.d.l. \rightarrow HCT 12.

OSSERVAZIONE PIASTRE ALLA MINDLIN

Nel mondo alla Mindlin vado a considerare separate l'abbassamento delle rotazioni (analogia con Timoshenko). Mindlin, come detto, rispetto a Kirchhoff prende in considerazione anche la deformabilità: il problema delle piastre diventa un problema di flessione/taglio. Non si considera l'effetto membrana.

L'energia elastica di deformazione dell'elemento risulta essere:

$$U = \frac{1}{2} \int_A \left\{ \frac{t^3}{12} ([\chi]^T [D] [\chi]) + kt ([\gamma]^T [D_\tau] [\gamma]) \right\} dA$$

↑ flessione
↑ taglio

$$\{\chi\}^T = \{\varphi_{y,x} \quad -\varphi_{x,y} \quad \varphi_{y,y} \quad \varphi_{x,x}\}$$

$$\{\gamma\}^T = \{w_{,x} + \varphi_y \quad w_{,y} - \varphi_x\}$$

L'approccio più semplice è quello di utilizzare w, φ_x, φ_y come **PARAMETRI NODALI INCOGNITI**, approssimati mediante polinomi interpolatori uguali (in altre parole tali da condurre alle stesse funzioni di forme N_i).
 In tal caso il polinomio dovrà soddisfare la continuità di w, φ_x, φ_y tra elementi adiacenti lungo i bordi comuni.

Indicando con $\{\bar{u}\}$ il vettore delle INCOGNITE NODALI:

$$\{\bar{u}\}^T = \underbrace{\{w_1 \quad w_{,x1} \quad w_{,y1} \quad \dots \quad w_{,yn}\}}_{\{\bar{w}\}^T} \mid \underbrace{\{\varphi_{x1} \quad \varphi_{y1} \quad \dots \quad \varphi_{xn} \quad \varphi_{yn}\}}_{\{\bar{\varphi}\}^T}$$

$$\{\bar{u}\}^T = \{\{\bar{w}\}^T \quad \{\bar{\varphi}\}^T\}$$

Sapendo al solito che U si può esprimere come:

$$U = \frac{1}{2} \{\bar{u}\}^T [K] \{\bar{u}\}$$

è figlio di 2 contributi $[K_f]$ e $[K_\tau]$

ne consegue che il legame forze nodali spostamenti nodali può essere espresso da relazioni del tipo $\{F\} = [K] \{u\}$

$$Et^3 \left([K_f] + \frac{1}{\phi} [K_\tau] \right) \{u\} = \{F\}$$

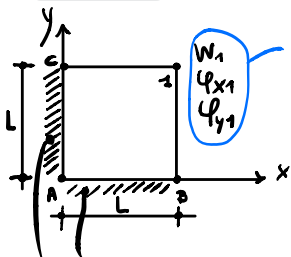
contributo flessionale
contributo della deformabilità e taglio questo è offerto da un coefficiente $1/\phi$

$$\phi = \frac{E}{kG} \left(\frac{t}{L} \right)^2$$

spessore → lunghezza predominante

- se $C_b = \frac{3}{2}$ → non c'è prova (fina ad adesso) che l'elemento soffre di shear locking.
- se $C_b = 1$ → l'elemento soffre di shear locking.
- se $1 < C_b < \frac{3}{2}$ → bisogna studiare il problema volta per volta.

ESEMPIO → elemento rettangolare a 4 nodi



3 g.d.l. per nodo

$$\begin{cases} w(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy \\ \varphi_x(x,y) = \alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 xy \\ \varphi_y(x,y) = \alpha_9 + \alpha_{10} x + \alpha_{11} y + \alpha_{12} xy \end{cases}$$

Si utilizza la stessa struttura del polinomio interpolatore per le 3 grandezze

incostretto ai 2 lati dunque 1 unico modo libero:

$$\begin{cases} w_1, \varphi_{x1}, \varphi_{y1} \neq 0 \\ w_{A/B/C}, \varphi_{x A/B/C}, \varphi_{y A/B/C} = 0 \end{cases}$$

→ elemento a 3 g.d.l. dunque $N_{eq} = 3$

impiego le condizioni nodali calcolo $\{d\}$ e trovo $\{u\}$. Quindi le funzioni di campo approssimate per l'elemento risultano:

$$\begin{cases} w = \frac{xy}{L^2} w_1 \\ \varphi_x = \frac{xy}{L^2} \varphi_{x1} \\ \varphi_y = \frac{xy}{L^2} \varphi_{y1} \end{cases}$$

Adesso dobbiamo studiare il campo $[k_\tau]$. Partiamo con lo studiare le deformazioni $\{\delta\}$:

$$\{\delta\} = \begin{bmatrix} \delta_{xz} \\ \delta_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{,x} + \varphi_y \\ w_{,y} - \varphi_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{y}{L^2} w_1 + \frac{xy}{L^2} \varphi_{x1} \\ \frac{x}{L^2} w_1 - \frac{xy}{L^2} \varphi_{x1} \end{bmatrix} = \frac{1}{L^2} \begin{bmatrix} y & 0 & xy \\ x & -xy & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ \varphi_{x1} \\ \varphi_{y1} \end{bmatrix} = [B_z] [\bar{u}]_1$$

Sapendo che l'energia elastica di deformazione legata al taglio vale:

$$U_\tau = \frac{1}{2} k t \int_A \{\delta\}^T [D_\tau] \{\delta\} dA = \frac{1}{2} \{\bar{u}\}_1^T \left(k t G \int_A [B_z]^T [B_z] dA \right) \{\bar{u}\}_1$$

$k t G L^2 \cdot [K_\tau]$ è una $[3 \times 3]$

è una matrice di rango 3

Dunque: $N_{eq} = 3$ rango $[K_\tau] = 3$ → $C_b = \frac{N_{eq}}{\text{rango } [K_\tau]} = 1$ → ho shear locking

INFLUENZA DEL MODELLO

(per piastre alla KIRCHHOFF)

PROBLEMA: Come defuisco la mesh? (LA MESH influenza il risultato!)

→ se faccio errori nell'input, infittendo autocorregge i miei errori. ATTENZIONE però che questa autorregolazione in alcuni casi \neq .

Consideriamo una piastra quadrata avente le seguenti condizioni:

• **CONDIZIONI DI SIMMETRIA**

$$\begin{aligned} \varphi_y &= 0 \text{ su AC} \\ \varphi_x &= 0 \text{ su CD} \end{aligned}$$

• **CONDIZIONI AL BORDO**

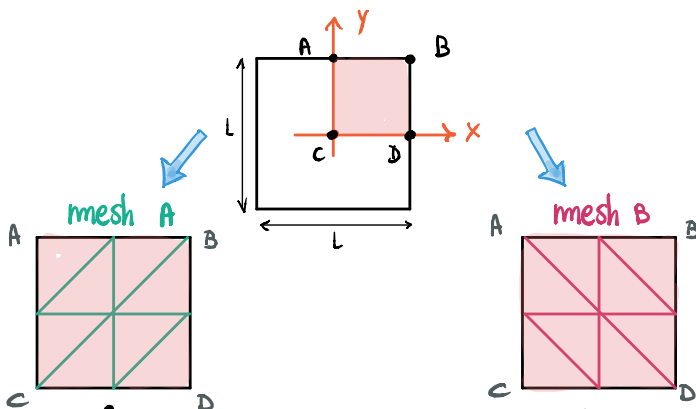
- INCASTRO

$$w = \varphi_x = \varphi_y = 0 \text{ su ABD}$$

- APPOGGIO

$$w = \varphi_y = 0 \text{ su AB}$$

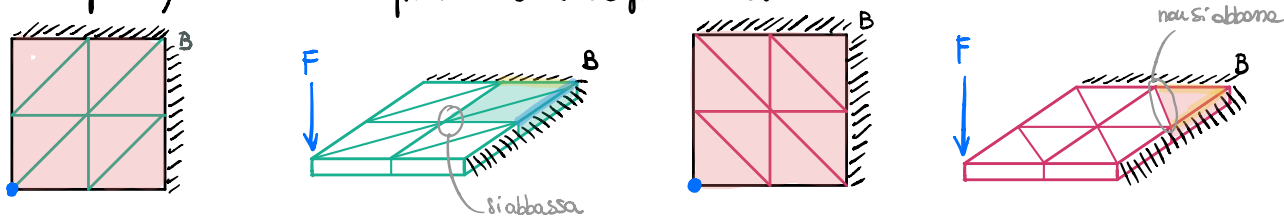
$$w = \varphi_x = 0 \text{ su BA}$$



(converge meglio rispetto la (B) all'↑ n° elementi mesh)

è una mesh che non dovrebbe essere mai fatta

A converge meglio di B → qual'è il significato fisico? Nella mesh B, nel punto B perde l'energia elastica di deformazione (non entra in gioco), le altre parole non prendo la sua deformabilità quindi è come se fosse l'elemento o rigido. Mentre nella mesh A in qualunque caso danno contributi di energia di deformazione. Per capirlo, considera la piastra come se fosse incastrata su 2 lati



Consideriamo ora l'elemento ④ e prendo come funzione approssimante la seguente (≠ dall'elemento ③):

$$w(x^L) = \beta_1 + \beta_2 x^L + \beta_3 x^{L^3} + \beta_4 x^{L^4}$$

Qual'è la deformazione media?

$$\rightarrow E_x = \frac{h}{2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^{L^2}} = \frac{h}{2} \cdot (6\beta_3 x^L + 12\beta_4 x^{L^2})$$

funzione quadratica in x^L (ovvero è funzione della lunghezza dell'elemento).

Quando l'elemento si accorcia (cioè $x^L \rightarrow 0$) otteniamo $E_x = 0$.
 Quindi ho una deformazione nulla nel mio elemento. Con una formulazione di questo tipo, il mio elemento non è in grado di rappresentare lo stato di deformazione.

Dunque per gli spostamenti di moto rigido w e dw/dx sono necessari i termini α_1 e $\alpha_2 x$, mentre per la deformazione costante è necessario $\alpha_3 x^2$.

I criteri 2 e 3 suggeriscono di considerare nei polinomi approssimanti i termini di ordine inferiore (questo fa parte delle richieste di COMPLETEZZA)

Criterio 4: le funzioni spostamento devono essere assunte "geometricamente invarianti" - isotrope - senza direzioni preferenziali (triangolo di Pascal).

Questo criterio richiede la simmetria dei termini del polinomio interpolante. Essendo la matrice di rigidezza dell'elemento formulata nel S.R. Locale, occorre mantenere l'invarianza geometrica anche nel S.R. Globale.

Criterio 5: le funzioni spostamento devono essere scelte in modo che lungo le frontiere tra elementi adiacenti gli spostamenti e le loro derivate fino all'ordine meno uno dell'ordine più elevato contenuto nell'espressione dell'energia siano continue.

L'elemento deve essere **CONFORME** cioè deve garantire la continuità della funzione w e delle sue derivate fino all'ordine richiesto.

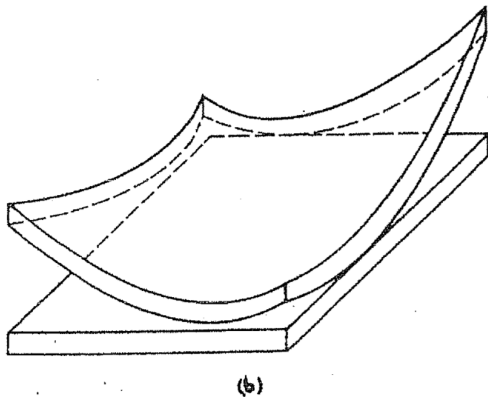
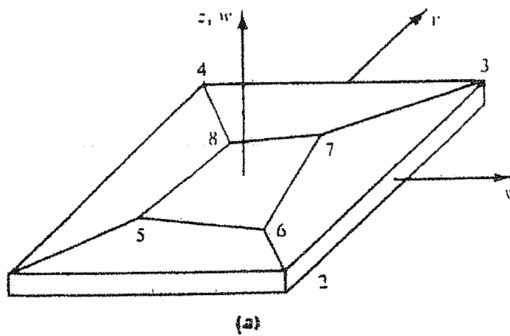
In genere alcuni elementi non risultano essere conformi. Ma come già abbiamo accennato non dobbiamo disperarci in quanto ci viene in aiuto il **CRITERIO DEL PATCH TEST**. Se il nostro elemento non risulta conforme ma supera questo test lo si può utilizzare.

Si riporta, a titolo di esempio (~), come si può affrontare il problema del patch test per un elemento piastra.

Per elementi piastra deformabili: costanti significano curvature costanti:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}$$

il patch dovrà essere soggetto ad una serie di spostamenti (freccie e rotazioni) cui corrisponde uno stato di curvature costanti.



CON RIFERIMENTO ALLA FIGURA DI FIANCO SI HA:

a) PATCH REALIZZATO CON 5 ELEMENTI

b) FORMA DEGLI SPOSTAMENTI IMPOSTI OTTENUTA TRAMITE LE RELAZIONI:

$$W = \frac{C(x^2 + xy + y^2)}{2}$$

$$\frac{\partial W}{\partial x} = C\left(x + \frac{y}{2}\right)$$

$$\frac{\partial W}{\partial y} = C\left(\frac{x}{2} + y\right)$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} = \frac{C}{2}$$

DOVE C È UNA COSTANTE TALE PER CUI $W \ll$ SPESORE - LE STRADE PER PRESCRIVERE GLI SPOSTAMENTI POSSONO ESSERE:

1) - SI PRESCRIVONO $W, \frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial W}{\partial y}$

AI NODI 1, 2, 3, 4 - SI RICAVALO GLI SPOSTAMENTI DEI NODI 5, 6, 7, 8 E SI VERIFICA LO STATO DI CURVATURA COSTANTE IN CIASCUN ELEMENTO -

2) - SI PRESCRIVONO $W, \frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial W}{\partial y}$ IN TUTTI E OTTO I NODI DEL PATCH.

TALE CONDIZIONI ASSICURANO UNO STATO DI CURVATURA COSTANTE NEGLI ELEMENTI - SI CALCOLANO FORZE E MOMENTI FLETTENTI IN CIASCUNO DEI QUATTRO NODI INTERNI USANDO LE MATRICI DI RIGIDEZZA "ASSEMBLATE" - IL TEST È SUPERATO SE LE FORZE E MOMENTI NEI NODI INTERNI RISULTANO NULLE (FORZE OTTENUTE SOMMANDO I CONTRIBUTI DI TUTTI GLI ELEMENTI CHE CONVERGONO NEL NODO) -

c) È POSSIBILE CONDURRE IL PATCH TEST, ATTRAVERSO ALTRA VIA, APPLICANDO AL CONTOURNO DELLE CONDIZIONI DI CARICO (FIR PAG. SEGUENTE) TALI DA INDURRE NELL'ELEMENTO CURVATURE COSTANTI (A) E TORSIONE COSTANTE (B) -

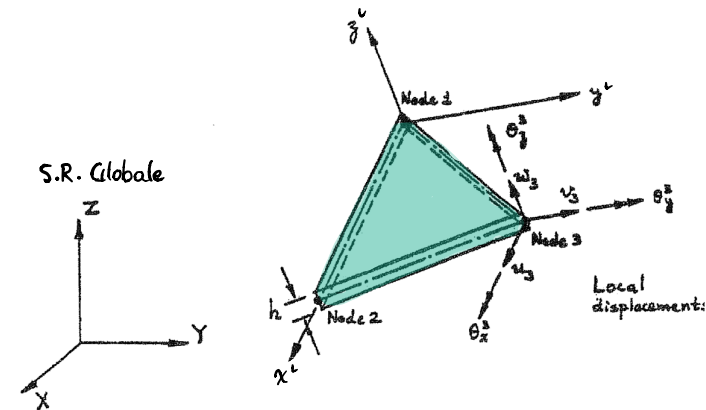
A SEGUITO DELLA DOPPIA SIMMETRIA/ANTISIMMETRIA CHE ILLUSTRATO PER I CASI (A) E (B), NEHE SOTTOPOSTO A TEST SOLO UN QUADRANTE DELLA PIASTRA DISCRETIZZATO CON CINQUE QUADRANTE ARBITRARI - LE CONDIZIONI DI VINCOLO DI CIASCUN QUADRANTE SONO INDICATE IN FIGURA -

a) PER IL TEST DI CURVATURA COSTANTE, OCCORRE AVERE CUNQUE

$$(*) \quad M_x = M_0 \quad M_y = M_{xy} = 0$$

4 GUSCI

ELEMENTO TRIANGOLARE A 3 NODI GUSCIO PIANO

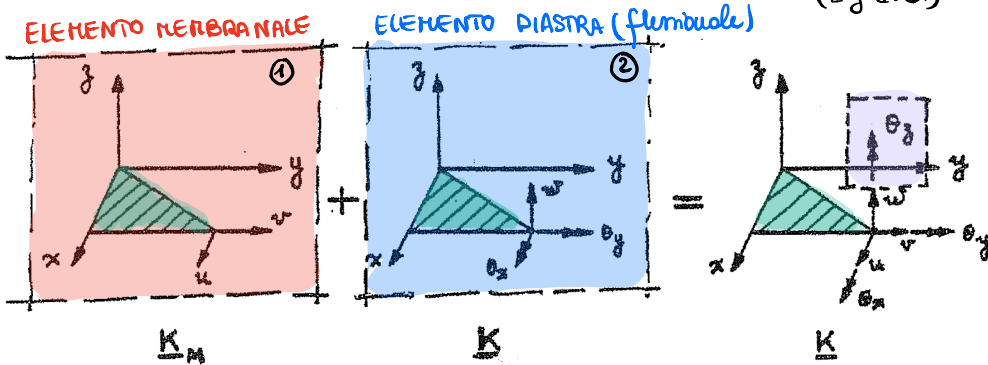


Essendo un elemento nello spazio in teoria i p.d.l. sono 6:

- 3 rotazioni al nodo
- 3 spostamenti al nodo

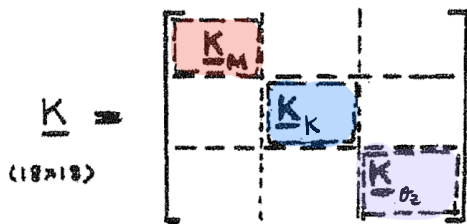
Adesso però pensiamo il guscio come giustapposizione di 2 elementi:

ELEMENTO MEMBRANALE (2 g.d.l.) + ELEMENTO DIASTRA (flessibile) (3 g.d.l.)



Otengo così un elemento con 2+3=5 g.d.l. a cui ne devo sommare un 6° → $\theta_z = \text{rotazione attorno all'asse } z$ (dove z è la normale al piano medio del mio elemento) che

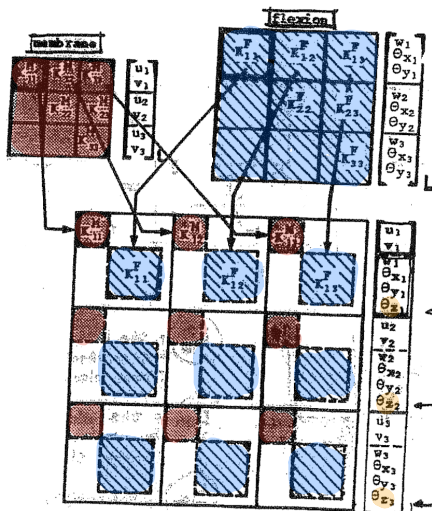
in qualche modo non risulta essere definito (perché non è contemplato né in ① né in ②). Quindi se io vado a costruire la matrice di rigidità dell'elemento dovrebbe essere una $[18 \times 18]$ (3 nodi \times 6 g.d.l.):



K_M is the local stiffness matrix of the constant strain plane stress element (6x6)

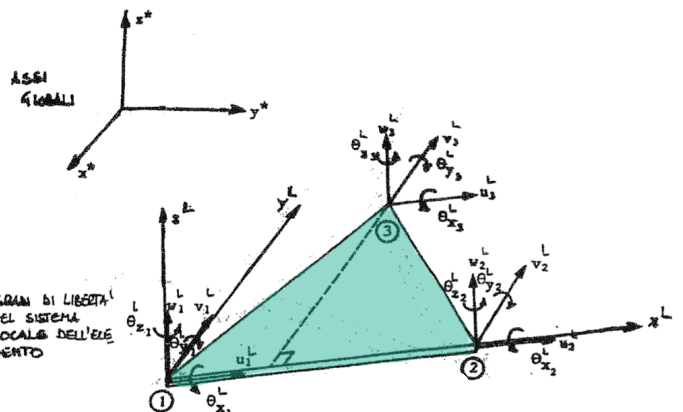
K_K is the local stiffness matrix of the discrete Kirchhoff plate bending element (9x9)

K_{θ_z} is the artificial stiffness matrix for rotation θ_z (3x3) *in teoria nullo perché non riusciamo a dare rigidità intorno all'asse z*



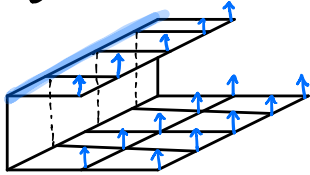
COEFFICIENTI MATRICI ... SAREBBERO NULLI (ROTAZIONE ATTORNO ALL'ASSE z) NON DEFINITA

GRADI DI LIBERTÀ NEL SISTEMA LOCALE DELL'ELEMENTO

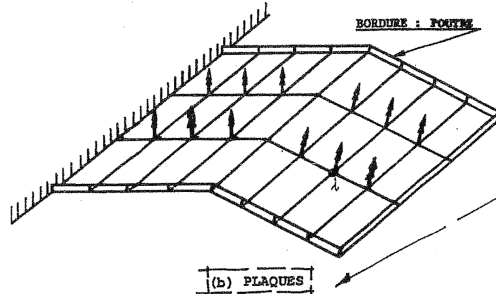


ELEMENTO RETTANGOLARE GUSCIO PIANO

Nege: **elementi rettangolari** questo problema è più marcato.



(a) MEMBRANES
↑ w
(GRADI DI LIBERTÀ SENZA RIGIDITÀ CONNESSIONI DI SINGOLARITÀ)



↑ θ_z^L
(GRADI DI LIBERTÀ SENZA QUALSIASI CONNESSIONI DI SINGOLARITÀ)

lungo gli spigoli punto problema non si fare perché questo g.d.l. non è altro che la rigidità flemmone della piastra verticale

ANALIZZANDO PER ESEMPIO IL CASO b) L'EQUAZIONE DI EQUILIBRIO SCRITTA PER IL MODO "i" CON RIFERIMENTO AL SISTEMA LOCALE INTORNO ALL'ASSE z^L È IDENTICAMENTE NULLA - QUESTO FA SÌ CHE RIMANGA LA SINGOLARITÀ ANCHE DOPO LA TRASFORMAZIONE LOCALE → GLOBALE - PER OVVIARE A TALE INCONVENIENTE SI PUÒ OPERARE IN UNO DEI SEGUENTI MODI:

- LAVORANDO NEGLI ASSI LOCALI, SOPPRIMERE I GRADI DI LIBERTÀ CONNESSI CON LE ROTAZIONI θ_z^L E RISOLVERE LA STRUTTURA MANTENENDO PER QUESTI MODI IL RIFERIMENTO LOCALE
- INTRODUCENDO DELLE RIGIDITÀ FITTIZIE ALLA ROTAZIONE θ_z^L : SI GENERANO DELLE EQUAZIONI DEL TIPO

$$k_i \theta_{z_i}^L = 0$$

TERMINI DI RIGIDITÀ POSTI SULLA DIAGONALE PRINCIPALE

CHE PORTANO A ZERO $\theta_{z_i}^L$, SENZA INGENERE INFLUENZARE I VALORI DELLE ALTRE INCOGNITE

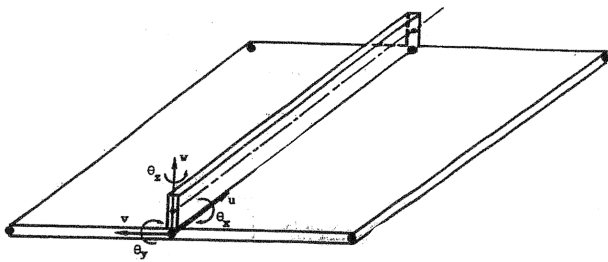
Quindi per by-passare il problema sono usate 2 strade:

con riferimento a certi nodi nel S.R. globale ho 5 g.d.l. → tolgo la rotazione (sopprimo un g.d.l.) (che è computazionale maggiore)

invece una rigidità → fittizia la impiego e è come se mettessi una molla rotazionale che blocca la rotazione di certi nodi
 $k_i \theta_{z_i}^L = 0$

DEFINENDO DEI VINCOLI GENERALIZZATI (RELAZIONI TRA SPOSTAMENTI IN TIPO LINEARE) TRA θ_z^L E u^L, v^L [ELEMENTO MEMBRANA A 3 GRADI DI LIBERTÀ]

$$\theta_z^L = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^L}{\partial y} - \frac{\partial v^L}{\partial x} \right)$$



ULTERIORI PROBLEMI POSSONO NASCERE DALL'UTILIZZO CONTEMPORANEO NELLO STESSO MODELLO DI ELEMENTI DIVERSI: ESEMPLO INTERAZIONE PIASTRA/TRAVE NELLE PIASTRE HEAVY. IN QUESTO CASO NON È SEMPRE FACILE ASSICURARE LA COMPATIBILITÀ DEGLI SPOSTAMENTI TRA LA DEFORMAZIONE DEL TORSO ORDINE IN v DELLA TRAVE ED IL CORRESPONDENTE SPOSTAMENTO DI MEMBRANA DELLA PIASTRA. CONTEMPORANEAMENTE OCCORRE OSSERVARE CHE NEL CASO DI ELIMINAZIONE DEL GRADO DI LIBERTÀ IN D_z DELLA PIASTRA NON ESISTE NESSUNA TRASMISSIONE DEL MOMENTO M_z DALLA TRAVE ALLA PIASTRA. È NECESSARIO \Rightarrow IN QUESTO CASO CONSIDERARE L'ECCENTRICITÀ TRA IL BARICENTRO DELLA TRAVE E LA SUPERFICIE MEDIA DELLA PIASTRA.